Séries de Fourier, espaces de Sobolev et EDP

La transformation de Fourier consiste à passer d'une fonction $t \mapsto f(t)$, vue comme une fonction du temps ou de l'espace, à une fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$, vue comme une fonction des fréquences. La vision "fréquences" a de nombreux avantages :
- analyse spectrale d'une onde sonore ou électro-magnétique, analyse des résonnances, analyse du spectre lumineux ou des harmoniques,
- base mieux adaptée pour la compression ou le débruitage (format MP3),
- base mieux adaptée pour certaines EDP.

1 Bases hilbertiennes de $\mathbb{L}^2(]0,1[)$

Proposition 1.1. *Les familles suivantes sont des bases hilbertiennes de* $\mathbb{L}^2(]0,1[)$ *:*

$$(\sqrt{2}\cos(2k\pi x))_{k\geq 0} \cup (\sqrt{2}\sin(2k\pi x))_{k\geq 1} \qquad (\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\geq 1}$$

$$(\sqrt{2}\cos(k\pi x))_{k\geq 0} \qquad et \quad (\sqrt{2}\cos((k+\frac{1}{2})\pi x))_{k\geq 0} \; .$$

Démonstration : La première base est la base classique des séries de Fourier. Les autres familles sont bien orthonormales. Il suffit de montrer que toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$ se décompose sur ces familles.

Soit $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$. On prolonge f en une fonction impaire sur $[-1,1]$. En utilisant les séries de Fourier sur $[-1,1]$ on a que

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos(k\pi x) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin(k\pi x) \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(]-1,1[) \; .$$

Mais comme f est impaire, tous les coefficients a_k sont nuls, et donc

$$f = \sum_{k\geq 1} b_k \sin(k\pi x)$$

dans $\mathbb{L}^2(]-1,1[)$ et donc a fortiori dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$.

On montre que les deux autres familles sont aussi des bases hilbertiennes de la même façon, l'une avec un prolongement par parité, l'autre en combinant un prolongement pair sur $[-1,1]$ puis par imparité sur $[-2,2]$. $\square$

Il est important de remarquer que les familles de la proposition 1.1 forment des bases hilbertiennes de vecteurs propres pour les opérateurs laplaciens Δ sur $]0,1[$ avec les conditions aux bords respectives :
- périodiques $u(0) = u(1)$ et $\partial_x u(0) = \partial_x u(1)$,
- Dirichlet homogène $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$,
- Neumann homogène $\partial_x u(0) = 0$ et $\partial_x u(1) = 0$,
- mixte $\partial_x u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

Dans la suite, pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$, on note $b_k(f)$ et $c_k(f)$ les coefficients tels que

$$f = \sum_{k\geq 0} b_k(f)\cos(k\pi.) = \sum_{k\geq 1} c_k(f)\sin(k\pi.)$$

(on omet les facteurs $\sqrt{2}$ pour alléger, cela ne changera pas notre propos que la base soit normalisée ou pas).

2 Espaces de Sobolev

Pour tout $s \geq 0$, on pose

$$\mathbb{H}^s_D(]0,1[) = \{\ f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)\ ,\ \sum_{k\geq 1} k^{2s}|c_k(f)|^2 < \infty\ \}$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{H^s_D} = \sum_{k\geq 1} k^{2s} c_k(f)\bar{c}_k(g)\ .$$

Et de même on pose

$$\mathbb{H}^s_N(]0,1[) = \{\ f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)\ ,\ \sum_{k\geq 0} k^{2s}|b_k(f)|^2 < \infty\ \}$$

que l'on munit du produit scalaire similaire. On note que $\mathbb{H}^0_D = \mathbb{H}^0_N = \mathbb{L}^2$ (y compris pour la structure du produit scalaire) et que pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{H}^s_D$ et $\mathbb{H}^s_N$ sont des espaces de Hilbert.

Dans la suite, nous allons surtout nous concentrer sur l'espace $\mathbb{H}^s_D$ qui correspond aux conditions aux bords de Dirichlet, mais on adaptera facilement les résultats au cas de $\mathbb{H}^s_N$.

Proposition 2.1. *Si $s > s'$, alors $\mathbb{H}^s_D$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbb{H}^{s'}_D$.*

Démonstration : Par définition, il est clair que $\mathbb{H}^s_D \subset \mathbb{H}^{s'}_D$ et que $\|.\|_{H^s_D} \geq \|.\|_{H^{s'}_D}$. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{H}^s_D$, qui est donc bornée dans $\mathbb{H}^{s'}_D$. En utilisant l'extraction diagonale, on peut en extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout k, $c_k(f_{\varphi(n)}) = c^n_k$ converge vers un nombre a_k. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^K n^{2s'}|a_k|^2} &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^K k^{2s'}|a_k - c^n_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^K k^{2s'}|c^n_k|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^K k^{2s'}|a_k - c^n_k|^2} + \|f_{\varphi(n)}\|_{H^{s'}_D} .\end{aligned}$$

Pour n assez grand, le premier terme est plus petit que 1. Comme la suite (f_n) est bornée dans $\mathbb{H}^{s'}_D$, on obtient que $\sum_{k=1}^K n^{2s'}|a_k|^2$ est uniformément borné par rapport à K et donc que la série est convergente. La fonction $f = \sum_{k\geq 1} a_k \sin(k\pi.)$ existe donc dans $\mathbb{H}^{s'}_D$. En outre,

$$\begin{aligned}\|f - f_{\varphi(n)}\|^2_{H^{s'}_D} &\leq \sum_{k\leq K} k^{2s'}|a_k - c^n_k|^2 + \frac{1}{K^{2(s-s')}} \sum_{k\geq K} n^{2s}|c^n_k|^2 + \sum_{k\geq K} k^{2s'}|a_k|^2 \\ &\leq \sum_{k\leq K} n^{2s'}|a_k - c^n_k|^2 + \frac{1}{K^{2(s-s')}} \|f_{\varphi(n)}\|^2_{H^s_D} + \sum_{k\geq K} k^{2s'}|a_k|^2\end{aligned}$$

Pour K assez grand, les deux derniers termes sont aussi petits que voulu. Puis on prend n assez grand pour que le premier terme soit petit. On a donc montré que $f_{\varphi(n)}$ converge vers f dans $H^{s'}_D$. □

Proposition 2.2. *Pour tout $s > 1/2$, $\mathbb{H}^s_D$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. En outre, pour tout $f \in \mathbb{H}^s_D$, $f(0) = f(1) = 0$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que toute fonction $f \in \mathbb{H}^s_D$ est continue. L'injection compacte se démontre ensuite en prenant $s' \in]1/2, s[$ et en utilisant la proposition 2.1. Soit $f \in \mathbb{H}^s_D$, il suffit de montrer que la série $\sum_{k\geq 1} c_k(f)\sin(k\pi.)$ est absolument convergente dans $\mathcal{C}^0$, c'est-à-dire que $\sum_{k\geq 1} |c_k(f)|$ converge. Or

$$\sum_{k=1}^K |c_k(f)| = \sum_{k=1}^K \frac{k^s}{k^s}|c_k(f)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^K k^{2s}|c_k(f)|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k^{2s}}} \leq \|f\|_{H^s_D}\sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k^{2s}}} .$$

Comme $s > 1/2$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2s}}$ est convergente. La série $\sum_{k\geq 1} |c_k(f)|$ est donc bornée et convergente. En outre, on a l'existence d'une constante C indépendante de f telle que $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{H^s_D}$ et l'évaluation de la série en $x = 0$ et $x = 1$ montre que $f(0) = f(1) = 0$. □

Proposition 2.3. *Soit $s \geq 1$ et soit $f \in \mathbb{H}^s_D$. La dérivée f' de f au sens des distributions appartient à $\mathbb{H}^{s-1}_N \subset \mathbb{L}^2$ et est donnée par*

$$f'(x) = \sum_{k \geq 1} k\pi c_k(f) \cos(k\pi x) \ .$$

Soit $s \geq 2$ et soit $f \in \mathbb{H}^s_D$. La dérivée seconde f'' de f au sens des distributions appartient à $\mathbb{H}^{s-2}_D$ et est donnée par

$$f'(x) = \sum_{k \geq 1} -k^2\pi^2 c_k(f) \sin(k\pi x) \ .$$

En particulier, si $f \in \mathbb{H}^s_D$ avec $s > k + 1/2$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k([0,1])$.

Démonstration : Démontrons la première partie de la proposition, les arguments pour la deuxième partie sont identiques et la dernière assertion découle de la proposition 2.2.

Soit $f \in \mathbb{H}^s_D$ et soit g la fonction

$$g(x) = \sum_{k \geq 1} k\pi c_k(f) \cos(k\pi x) \ .$$

Par hypothèse sur les coefficients $c_k(f)$, on a bien que g est dans $\mathbb{H}^{s-1}_N$. Il suffit de montrer que $f' = g$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$ une fonction test, on a

$$\int \left(\sum_{k=1}^{K} c_k(f) \sin(k\pi .) \right) \varphi' = - \int \left(\sum_{k=1}^{K} c_k(f) k\pi \cos(k\pi .) \right) \varphi$$

et en passant à la limite $\int f\varphi' = -\int g\varphi$ ce qui conclut. □

Proposition 2.4. *Soit f une fonction de $\mathbb{L}^2(]0,1[)$ dont la dérivée au sens des distributions est aussi dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$, alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Si en outre, $f(0) = f(1) = 0$, alors $f \in \mathbb{H}^1_D(]0,1[)$.*

En conséquence, les espaces $\mathbb{H}^1_D(]0,1[)$ et

$$\mathbb{H}^1_0(]0,1[) = \{ f \in \mathbb{L}^2(]0,1[) \ , \ f' \in \mathbb{L}^2(]0,1[) \ f(0) = f(1) = 0 \ \}$$

sont égaux.

Démonstration : Soit $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on a

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in [0,1]^2, \ \ |u(x) - u(y)| = | \int_x^y u'(s) \ ds| \leq \int_x^y |u'(s)| \ ds \\ \leq |x-y|^{1/2} \sqrt{\int_x^y |u'(s)|^2 ds} \leq \|u'\|_{L^2} |x-y|^{1/2} \ . \quad (1) \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$ telle que $f' \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$. Il existe une fonction v continue proche de f' dans $\mathbb{L}^2$ et la fonction $u(x) = f(x) + \int_0^x (v(s) - f'(s))ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et proche de f dans $\mathbb{L}^2$. Ceci montre que f et sa dérivée peuvent être approchées dans $\mathbb{L}^2$ par des fonctions $\mathcal{C}^1$ et donc que (1) est vérifiée aussi par f. On en déduit que f est continue.

Cela nous permet de donner un sens à la condition supplémentaire $f(0) = f(1) = 0$. Montrons qu'alors, f est dans $\mathbb{H}^1_D(]0,1[)$. On décompose f' sous la forme

$$f'(x) = \sum_{k\geq 0} k\pi c_k \cos(k\pi x) \ ,$$

avec $\sum k^2 c_k^2 < \infty$. On note que $c_0 = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 0$. On veut montrer que $f = \sum_{k\geq 1} c_k \sin(k\pi .)$. On calcule donc

$$\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx = [-\frac{1}{k\pi} f(x)\cos(k\pi x)]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 f'(x)\cos(k\pi x)dx = c_k \ ,$$

ce qui montre bien que $f \in \mathbb{H}^1_D(]0,1[)$. □

3 Applications aux EDP sur $]0,1[$

3.1 Equation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times\mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,1[\end{array} \right. \tag{2}$$

On appelle solution forte de (2) sur $\mathbb{R}_+$ une fonction

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}^2(]0,1[)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{H}^2_D(]0,1[)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{L}^2(]0,1[)) \ .$$

Théorème 3.1. *Pour tout $u_0 \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$, il existe une unique solution forte u de* (2) *qui est donnée par*

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k(u_0) e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x) \ . \tag{3}$$

En outre, u est dans $\mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbb{R}_+^*)$ et tend exponentiellement vite vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Démonstration : On notera que l'expression (3) définie bien une fonction qui est de plus dans tous les $\mathbb{H}^s_D$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dès que $t > 0$ puisque dans ce cas $e^{-(k\pi)^2 t} = o(1/k^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En outre, on peut inverser la dérivation et la série pour montrer que $\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t)$ pour $t > 0$, pas seulement au sens des distributions mais même au sens classique. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|u_0 - u(t)\|^2_{L^2} &= \sum_{k\geq 1} |c_k(u_0)|^2 |1 - e^{-(k\pi)^2 t}|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} |c_k(u_0)|^2 |1 - e^{-(k\pi)^2 t}|^2 + \sum_{k\geq K+1} |c_k(u_0)|^2 \end{aligned}$$

Le deuxième terme est aussi petit que voulu en prenant K grand, puis le premier est petit si t est petit. On a donc bien que $u(t)$ tend vers $u(0)$ dans $\mathbb{L}^2$ quand t tend vers 0.

La convergence vers 0 est claire puisque $\|u(t)\|_{L^2} \leq e^{-t}\|u_0\|_{L^2}$.

Il nous reste à montrer l'unicité de la solution. Soient u et v deux solutions fortes de (2). Leur différence $w = u - v$ vérifie (2) avec $u_0 = 0$. Or

$$\partial_t \|w(t)\|^2_{L^2} = 2\int w \partial_t w = 2\int w \partial^2_{xx} w = -2 \int |\partial_x w|^2 \ .$$

La norme de w est donc décroissante en temps et vaut 0 pour $t = 0$, donc w est nulle pour tout temps et $u = v$. $\square$

On peut mettre d'autres conditions aux bords à (2). Si on regarde $u(0) = a$ et $u(1) = b$, il suffit de revenir aux conditions homogènes en soustrayant la fonction $a + (b-a)x$ à u. La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = a + (b-a)x + \sum_{k\geq 1} c_k(u_0 - a - (b-a)x) e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x) \ ,$$

qui tend vers $a + (b-a)x$ quand t tend vers $+\infty$.

Si on met des conditions aux bords de Neumann $\partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0$, on utilise la base hilbertienne en cosinus et la solution est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} c_k(u_0) e^{-(k\pi)^2 t} \cos(k\pi x) \ .$$

Elle tend vers $c_0 = \int_0^1 u_0$ quand t tend vers $+\infty$.

3.2 Equation des ondes

On regarde une corde vibrante fixée aux bouts. Les petits déplacements de la corde sont régis par l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial^2_{tt} u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}^*_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & x \in]0,1[\end{array} \right. \tag{4}$$

On note par la suite $U(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ et $U_0 = (u_0, u_1)$. On introduit les coefficients $c_k(u_0)$ et $c_k(u_1)$ donnés par les décompositions dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$.

$$u_0 = \sum_{k\geq 1} c_k(u_0) \sin(k\pi .) \qquad u_1 = \sum_{k\geq 1} c_k(u_1) \sin(k\pi .) \ . \tag{5}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soit $U_0 \in \mathbb{H}_0^1(]0,1[) \times \mathbb{L}^2(]0,1[)$. Il existe une unique solution $U(t)$ de (4) au sens des distributions dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{H}_0^1(]0,1[) \times \mathbb{L}^2(]0,1[))$ et celle-ci est donnée par*

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left(c_k(u_0)\cos(k\pi t) + \frac{c_k(u_1)}{k\pi}\sin(k\pi t) \right) \sin(k\pi x) \ . \tag{6}$$

En particulier, $U(t)$ est 2-périodique et sa norme est constante au cours temps.

Démonstration : On rappelle que d'après la proposition 2.4, l'espace $\mathbb{H}_0^1(]0,1[)$ est égal à l'espace $\mathbb{H}_D^1(]0,1[)$. On note que puisque $U_0 \in \mathbb{H}_D^1 \times \mathbb{L}^2$, les séries $\sum_k k^2 c_k(u_0)^2$ et $\sum_k k^2 \frac{c_k(u_1)^2}{(k\pi)^2}$ convergent et l'expression (6) définie bien une fonction dans $\mathbb{H}_0^1 = \mathbb{H}_D^1$ dont la dérivée en temps est dans $\mathbb{L}^2$.

Pour montrer que $U(t)$ est continue en temps dans $\mathbb{H}_D^1 \times \mathbb{L}^2$ et vérifie (4) au sens des distributions, il suffit de voir que c'est le cas des sommes partielles et que ces sommes partielles convergent vers $U(t)$ dans $\mathbb{H}_D^1 \times \mathbb{L}^2$.

Pour montrer l'unicité de la solution, on pourrait considèrer la différence $w = u - v$ de deux solutions de (4) au sens des distributions. On trouverait que w vérifie (4) avec $w(x,0) = \partial_t w(x,0) = 0$. Comme dans la preuve du théorème 3.1, on utilise alors une quantité monotone au cours du temps, qui est ici l'énergie

$$E(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\partial_t w(x,t)|^2 + |\partial_x w(x,t)|^2 dx \ .$$

Il suffirait de montrer que w conserve cette énergie i.e. que $E(w) = 0$ pour tout t ce qui montre que $w \equiv 0$. En fait, il faut signaler que montrer que $\partial_t E(w(t)) = 0$ ne peut être fait que formellement puisque les dérivées secondes de w ne sont pas forcément dans $\mathbb{L}^2$. Pour montrer l'unicité de la solution de façon rigoureuse, il faut utiliser des techniques de type semi-groupe, ce que nous ne ferons pas ici. $\square$

Modélisation des instruments de musique :
Les fréquences des vibrations de la corde s'organisent en :
- la fréquence fondamentale $1/2$, qui donne la hauteur de la note entendue,
- les harmoniques $k/2$, qui sont d'amplitude décroissante.

On notera que :
- en changeant x en x/L et t en t/L, on voit qu'une corde de longueur L a des

fréquences en $k/(2L)$. Si on raccourcit une corde, on augmente la fréquence de la note entendue. Diviser par deux une corde revient à jouer une octave au-dessus.
- les guitares et clavecins ont des cordes pincées, ce qui correspond à prendre $u_1 = 0$, les pianos et cymbalums sont des instruments à cordes frappées, ce qui correspond à prendre $u_0 = 0$.
- si une corde est excitée symétriquement, alors seules les harmoniques impaires sont audibles, ce qui rend le son plus pur que si la corde est excitée près du bord.

L'équation (4) peut aussi modéliser la pression de l'air dans un tube. Les conditions au bord de type Dirichlet homogène correspondent à une pression extérieure imposée. On modélise ainsi ce qui se passe dans un instrument à vent où les deux bouts du tube sont ouverts : flûte, flûte à bec, tuyau d'orgue ouvert... Si un des bouts du tube est fermé, comme c'est le cas typiquement dans les instruments à hanche (clarinette, hautbois, saxophone...), on doit utiliser à un bout une condition au bord de Neumann et faire appel aux développements en $\cos((k + 1/2)\pi x)$. Dans ce dernier cas, on note que seules les harmoniques impaires sont présentes, ce qui rend le timbre de ces instruments très particulier.