Préparation à l'agrégation externe
Option calcul scientifique

Université de Grenoble
2009/2010

Etude qualitative des EDO

Quelques rappels

Commandes Scilab de base pour débuter :

`deff('y=f(t,x)','y=x^2+t')`	appelle f la fonction $(t,x) \mapsto x^2+t$
`ode(y0,t0,T,f)`	donne la solution de l'équa. diff. $y'(t) = f(t,y(t))$, $y(t_0) = y_0$
`fchamp(f,t0,x,y)`	trace le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto f(t_0,(x,y))$
`plot2d(x,y)`	relie la liste de points de coordonnées (x_i,y_i)

Rappel sur les schémas numériques : on souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y(t))$.

Euler : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n)$.

Point milieu : $\begin{cases} y_{mil} = y_n + h/2 * f(t_n,y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_{mil}) \end{cases}$

Runge-Kutta 4 : $\begin{cases} p_1 = f(t_n,y_n) & & \\ t_2 = t_n + h/2 & y_2 = y_n + h/2 * p_1 & p_2 = f(t_2,y_2) \\ t_3 = t_n + h/2 & y_3 = y_n + h/2 * p_2 & p_3 = f(t_3,y_3) \\ t_4 = t_n + h = t_{n+1} & y_4 = y_n + h * p_3 & p_4 = f(t_4,y_4) \\ y_{n+1} = y_n + h * \left(\frac{1}{6}p_1 \right. & \left. + \frac{2}{6}p_2 + \frac{2}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4\right) & \end{cases}$

Comportement qualitatif : exercices de base

Exercice 1 : Portraits de phase.
Représenter à l'aide d'un logiciel les portraits de phase correspondants aux équations différentielles suivantes ainsi que quelques trajectoires dans ce plan de phase. Repérer les différents points d'équilibre et les trajectoires périodiques. Discuter de leur stabilité. Quel est le comportement des autres trajectoires ?
1) Le pendule $x''(t) + \sin x(t) = 0$.
2) Le pendule amorti $x''(t) + \alpha x'(t) + \sin x(t) = 0$.
3) L'oscillateur de Van der Pol $x''(t) + \alpha(x^2 - 1)x' + x = 0$.

Exercice 2 : A propos de la non-unicité d'une solution.
On considère l'équation différentielle $x'(t) = 3x^{2/3}(t)$. Rappeler quelles sont les solutions de cette équation pour une donnée initiale $x(0) = x_0 \neq 0$ et pour $x(0) = x_0 = 0$. On simule ce problème à l'aide d'une méthode d'Euler. Quelle est la solution simulée pour $x(0) = x_0 = 0$? Simuler la suite de solutions correspondant à $x_n(0) = 1/n$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 3 : Un modèle biologique.
On considère le modèle biologique suivant. Soient $h(t)$ et $p(t)$ des populations respectivement d'herbivores et de prédateurs. L'évolution des populations répond aux équations suivantes, où a est un paramètre positif.

$$\left\{\begin{array}{l} h'(t) = h(t)(1-h(t)) - ah(t)p(t) \\ p'(t) = ah(t)p(t) - p(t) \\ p(0) = p_0 \in [0,1],\ h(0) = h_0 \in [0,1] \end{array}\right.$$

1) On suppose dans cette question que $a = 0$. Quelle est l'évolution qualitative de h et p au cours du temps ? Donner une interprétation des différents termes de l'équation par rapport au modèle biologique.
2) Représenter à l'aide d'un logiciel le champ de vecteurs correspondant à cette équation différentielle ainsi que quelques trajectoires. Faire varier le paramètre a. Quels sont les comportements que l'on observe ?
3) Prouver que $h(t)$ et $p(t)$ sont positifs pour tout $t \geq 0$.
4) Quels sont les points d'équilibres du système ? Etudier la linéarisation de l'équation différentielle autour de ces points et expliquer le comportement qualitatif observé.
5) Programmer la méthode d'Euler pour le modèle. Afficher les trajectoires en fonction du temps.

Exercices théoriques sur les schémas numériques

Rappel : Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Un schéma numérique $y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n)$ est d'ordre p pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ si et seulement si Φ est de classe $\mathcal{C}^p$ et

$$\forall k = 0, \ldots, p-1, \quad \frac{\partial^k}{\partial h^k}\Phi(t, y, 0) = \frac{1}{k+1}\frac{d^k}{dt^k}f(t, y(t)) \ .$$

Un schéma est consistant s'il est d'ordre au moins 1.

Exercice 4 : Soit $f(t, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $k-$Lipschitzienne en y. On veut intégrer numériquement l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ à l'aide des méthodes de Runge-Kutta, c'est-à-dire les schémas donnés par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{q} b_i p_{n,i} \quad \text{avec} \quad \forall\ 1 \leq i \leq q \ \left\{\begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p_{n,k} \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{array}\right.$$

On suppose que les méthodes d'intégrations utilisées sont au moins d'ordre 0, c'est-à-dire que $\sum_i b_i = 1$ et $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} = c_i$.
1) A quelle condition les méthodes de Runge-Kutta sont stables ?
2) Sont-elles consistantes ? Convergentes ?
3) Trouver toutes les méthodes de Runge-Kutta à un point ($q = 1$).
4) Trouver toutes les méthodes de Runge-Kutta à deux points qui soient d'ordre au moins 2. Reconnaître entre autres la méthode du point milieu ainsi que celle de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h_n\left(\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + h_n f(t_n, y_n))\right) \ .$$

Exercice 5 : On souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ grâce au schéma

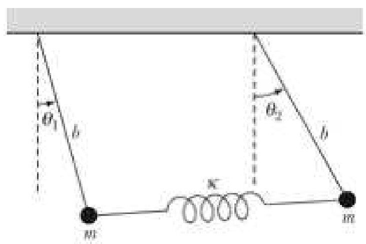
$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \ ,$$
$$\Phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + \gamma f\left(t + h, y + hf(t, y)\right) \ ,$$

avec α, β et γ dans $[0, 1]$.
1) Pour quelles valeurs de α, β et γ retrouvez-vous des méthodes classiques ?
On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ et $k-$Lipschitzienne en y.
2) Pour quelles valeurs de α, β et γ le schéma est-il stable ?
3) Pour quelles valeurs de α, β et γ le schéma est-il consistant ? Convergent ? D'ordre au moins 1 ? D'ordre au moins 2 ?

Des pendules

Exercice 6 : Deux pendules couplés

On souhaite simuler le comportement de deux pendules identiques couplés par un ressort de rigidité α (ou par les vibrations du support). Soient θ_1 et θ_2 les angles que font les pendules avec la verticale. Les équations du mouvement sont données par



$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) + \sin\theta_1(t) - \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) + \sin\theta_2(t) + \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \end{cases}$$

Mettre les équations sous forme d'une équation différentielle d'ordre 1. On prend comme paramètres :

$$\alpha = 0.2 \quad , \quad \theta_1(0) = 1 \quad , \quad \theta_2(0) = \frac{d}{dt}\theta_1(0) = \frac{d}{dt}\theta_2(0) = 0 \ .$$

Simuler le comportement des pendules avec la méthode d'Euler et avec la méthode RK4. Observer pour chacune des méthodes la conservation de l'énergie

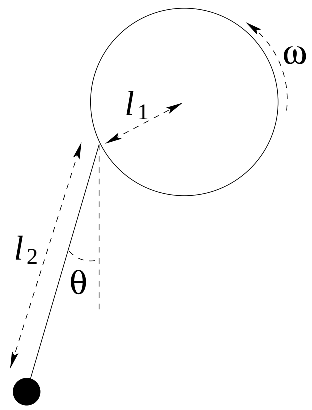
$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right|^2 + \left|\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right|^2\right) + (1 - \cos\theta_1(t)) + (1 - \cos\theta_2(t)) + \frac{\alpha}{2}\left|\theta_2(t) - \theta_1(t)\right|^2 \ .$$

Dans l'approximation de faible amplitude des oscillations, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) + \theta_1(t) - \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) + \theta_2(t) + \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \end{cases}$$

On prend comme données initiales $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = \frac{d}{dt}\theta_1(0) = \frac{d}{dt}\theta_2(0) = 0$. Intégrer les équations de façon exacte (indication : considérer $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_2 - \theta_1$).

Exercice 7 : Un pendule forcé :



On accroche un pendule de longueur l_2 à une roue de rayon l_1. La roue tourne à une vitesse angulaire ω. On note θ l'angle formé par le pendule et la verticale. L'accélération de θ suit l'équation différentielle

$$\theta''(t) = -\frac{l_1}{l_2}\omega^2 \sin(\theta(t) - \omega t) - \frac{g}{l_2}\sin(\theta(t)) \ .$$

Observer l'apparition de mouvements chaotiques pour, par exemple, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$ et $\omega = 3\sqrt{2}$.

Vérification des lois de Kepler

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'au point $(0,0)$ se trouve un soleil de masse M qui sera supposé fixe par la suite. Une planète de masse m et de position $x \in \mathbb{R}^2$ subit de la part du soleil une force

$$F = -\mathcal{G}\frac{mMx}{\|x\|^3} \ ,$$

où $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation. Le mouvement de la planète est donc donné par

$$\begin{cases} \partial_t x(t) = v(t) \\ \partial_t v(t) = -\mathcal{G}\frac{Mx}{\|x\|^3} \\ (x,v)(0) = (x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1) Observer la trajectoire d'une planète en utilisant un schéma d'Euler. Qu'en penser ? Peut-on expliquer le phénomène ? Que se passe-t-il si on utilise une méthode d'Euler implicite ?
2) Observer la trajectoire avec la commande scilab `ode` ou une méthode RK4.
3) Vérifier numériquement les trois lois de Kepler :
- les trajectoires fermées sont des ellipses dont le soleil est un foyer,
- si T est la période de l'orbite et a le demi grand axe de l'ellipse, alors le rapport T^2/a^3 est une constante indépendante de la trajectoire de la planète,
- l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{Ox}$ entre les temps t et $t+\tau$ ne dépend que de τ.