Préparation à l'agrégation externe | Université de Grenoble
Option calcul scientifique | 2010/2011

Autour de l'existence de solutions pour les équations différentielles

Etude théorique

Soit X un espace de Banach. Soit F une fonction localement lipschitzienne de X dans X. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in X$. On souhaite étudier l'existence et l'unicité dans $\mathcal{C}^1(I, X)$ de solutions à l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t x(t) = F(x(t)) & \qquad t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0.

Exercice 1 : Démontrer qu'il y a équivalence entre une solution dans $\mathcal{C}^1(I, X)$ de (1) (solution dite forte ou classique) et une solution dans $\mathcal{C}^0(I, X)$ de

$$\forall t \in I \ , \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s)) \ ds$$

(solution intégrale).

Exercice 2 : Enoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz. En refaire la démonstration. De quoi dépend la taille de l'intervalle d'existence I donné par ce théorème ? Que se passe-t-il si F est globalement lipschitzienne ?

Exercice 3 : Dans cet exercice, on considère l'intervalle I maximal pour lequel une solution de (1) existe.
1) Montrer qu'un tel interval maximal existe.
2) Montrer que I est forcément un interval ouvert.
On note $I =]t_{min}, t_{max}[$ avec t_{min} et t_{max} éventuellement infinis. Supposons dans

un premier temps qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que $x(t) \in K$ pour tout $t \in [t_0, t_{max}[$ et que t_{max} est fini.
3) Montrer que $x(t)$ est uniformément continue sur $t \in [t_0, t_{max}[$. En déduire que $x(t)$ admet une limite dans K quand t tend vers t_{max}.
4) Obtenir une contradiction en appliquant Cauchy-Lipschitz.
En conclusion, si t_{max} (resp. t_{min}) est fini, alors $x(t)$ sort de tout compact quand t tend vers t_{max} (resp. t_{min}). On dit que la solution explose en temps fini.

Exercice 4 :
1) Soit Ω un fermé de X. On suppose que le bord $\partial\Omega$ de Ω est invariant par le flot de F, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, une solution de (1) est entièrement contenue dans $\partial\Omega$. Montrer que si $x(t)$ est une solution de (1) avec $x_0 \in \Omega$, alors pour tout $t \in I$, $x(t) \in \Omega$.
2) Soit Ω un fermé de X, on suppose que le champ de vecteur F est entrant sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que pour tout $x_1 \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_1$ de x_1, un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme h de $\mathcal{O}_1$ dans un voisinage $\mathcal{O}_2$ de 0 dans X et une forme linéaire $\phi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ tels que $h(\mathcal{O}_1 \cap \Omega) = \{z \in \mathcal{O}_2 \ , \ \phi(z) \geq 0\}$ et $\phi(Dh \circ F(y)) \geq 0$ pour tout $y \in \mathcal{O}_1$. Soit $x(t)$ une solution de (1) avec $x_0 \in \Omega$. Montrer que $x(t)$ reste dans Ω pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$.

Applications

Exercice 5 : On considère le modèle de population du texte *Convergence vers un équilibre pour des modèles d'interaction unilingues-bilingues*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = B_1(x_1) - D_1(x_1) - x_1 x_2 f(x_1, x_2) + P_1 B_2(x_2) \\ \dot{x}_2(t) = P_2 B_2(x_2) - D_2(x_2) + x_1 x_2 f(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2}$$

avec B_i, D_i et f positifs de classe $\mathcal{C}^1$, $P_1 \in [0,1]$, $P_2 = 1 - P_1$, $B_i(0) = D_i(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} B_i(x) - D_i(x) = -\infty$.
1) Montrer l'existence locale de solutions.
2) Montrer que si x_1 et x_2 sont positifs au temps $t = 0$, ils restent positifs pour tout le temps d'existence de la solution.
3) Montrer que $x_1 + x_2$ décroit en temps si cette quantité est trop grande.
4) En déduire que si x_1 et x_2 sont positifs au temps $t = 0$, alors la solution de (2) existe pour tout temps et reste bornée et positive.

Exercice 6 : On considère le modèle de population du texte *Mutations et lutte contre le VIH*

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{T}(t) = \beta(1-T) - VT \\ \dot{U}(t) = VT - U \\ \dot{V}(t) = a(1-\theta)U - V \\ \dot{W}(t) = a\theta U - W\end{array}\right. \tag{3}$$

avec $a > 1$, $\beta > 0$ et $\theta \in [0,1]$.
Montrer que si en $t = 0$ la donnée initiale est positive, alors la solution associée existe, est globale, positive et bornée pour tout temps (indication : on pourra commencer par montrer que T reste borné, puis considérer la quantité $2a(T+U) + V + W$).

Sytèmes gradients

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ une équation différentielle sur E avec f localement lipschitzienne. Cette EDO engendre un système dynamique local $S(t)$ sur E défini par

$$S(t)x_0 = x(t) \quad \text{où } x(t) \text{ est solution de } \left\{\begin{array}{ll}\dot{x}(t) = f(x(t)) & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 & \end{array}\right.$$

On appelle ensemble $\omega-$limite de U_0 l'ensemble

$$\omega(x_0) = \cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{s\geq t} S(s)x_0} = \{x_* \in E, \exists (t_n) \to +\infty, S(t_n)x_0 \to x_*\} \ .$$

1) Montrer que si la trajectoire $x(t) = S(t)x_0$ est bornée, alors $\omega(x_0)$ est un compact non vide connexe et invariant i.e. $S(t)\omega(x_0) = \omega(x_0)$.
On dit que $\Phi \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ est une fonctionnelle de Lyapounov stricte pour le système dynamique $S(t)$ si pour tout $x_0 \in E$, $t \mapsto \Phi(S(t)x_0)$ est décroissante et est même strictement décroissante sauf si x_0 est un équilibre. Si $S(t)$ admet une fonctionnelle de Lyapounov stricte, on dit que $S(t)$ est gradient.
2) Montrer que si $S(t)$ est gradient, alors $S(t)$ n'a pas d'orbites périodiques.
3) Montrer que si $\Phi(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, alors toute trajectoire de $S(t)$ reste bornée et en particulier que toute solution $x(t)$ est définie globalement.
4) Montrer que Φ est constante sur l'ensemble $\omega-$limite de tout point et donc que celui-ci est inclus dans l'ensemble des points d'équilibre.
5) Montrer que si $\Phi(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini et que les points d'équilibre de $S(t)$ sont isolés, alors toute trajectoire converge vers l'un de ces points d'équilibre.

Exercice 8 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ un potentiel. On considère l'équation différentielle $\dot{x}(t) = -\nabla V(x(t))$. Que peut-on dire sur l'existence des solutions à cette équation ? Que peut-on dire de l'énergie $V(x(t))$? On suppose maintenant que $\lim_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$. Que peut-on ajouter sur l'existence des solutions ?

Exercice 9 : On considère une population animale séparée en J juvéniles et A adultes. La dynamique de ces populations est donnée par

$$\begin{cases} \dot{J}(t) = \alpha A(t) - J(t) \\ \dot{A}(t) = J(t) - \beta A^2(t) \\ (J, A)(0) = (J_0, A_0) \in E \end{cases} \tag{4}$$

sur $E = \mathbb{R}_+^2$ avec $\alpha > \beta > 0$.
Cette équation différentielle engendre un système dynamique $S(t)$ sur E défini par $S(t)(J_0, A_0) = (J(t), A(t))$.
1) Montrer que A et J restent toujours positifs.
2) Montrer que

$$\Phi(J, A) = \frac{1}{2}(J - \beta A^2)^2 + \frac{\beta}{3}A^3 - \frac{\alpha}{2}A^2$$

est une fonction de Lyapounov stricte pour $S(t)$. En déduire que toutes les trajectoires sont bornées, existent globalement et convergent vers un des deux points d'équilibres du système dynamique $S(t)$.