Feuille d'exercices n°4 : Séries de Fourier

Exercice 1 : Soit f la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = \pi^2 - x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Étudier la série de Fourier de f.
4. Que déduire du théorème de Parseval ?

Exercice 2 : Soit f la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Étudier la série de Fourier de f.
4. Que déduire du théorème de Parseval ?

Exercice 3 : Soit f la fonction paire et 2π-périodique, telle que $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ sur $[0, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Étudier la série de Fourier de f.
4. Que déduire du théorème de Parseval ?

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. On désigne par a_n et b_n les coefficients de Fourier de f.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, il existe alors un réel $\lambda \geq 0$ tel que $|a_n| \leq \dfrac{\lambda}{n}$ et $|b_n| \leq \dfrac{\lambda}{n}$ pour tout n.
2. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$, il existe alors un réel $\lambda \geq 0$ tel que $|a_n| \leq \dfrac{\lambda}{n^2}$ et $|b_n| \leq \dfrac{\lambda}{n^2}$ pour tout n.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. On désigne par a_n et b_n les coefficients de Fourier de f. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^p$ et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux avec $p \geq 0$, alors pour tout $k \in \{0, \cdots, p\}$ les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^k a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^k b_n$ sont absolument convergentes.

Exercice 6 : Étudier la série de Fourier de la fonction f, 2π–périodique et impaire, telle que $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Étudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.
3. Développer f sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \sin^2(nx)$.

Exercice 8 : Soit $f(x) = \max(0, \sin(x))$.

1. Étudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.

Exercice 9 : Soit f la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = x\sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Étudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

Exercice 10 : Déterminer une suite réelle telle que l'on ait :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2nx) \quad .$$

Exercice 11 : Soit f la fonction impaire et 2π-périodique, telle que $f(x) = \sin^2(x)$ sur $[0, \pi]$.

1. Étudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^3}$.

Exercice 12 : Soit f une fonction 2π–périodique et impaire, telle que $f(x) = x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x) = \pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

1. Etudier sa série de Fourier.
2. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g, 2π–périodique paire définie par que $g(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{(\pi - x)^2}{2}$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Exercice 13 : Soit f la fonction $2T$–périodique et paire, telle que $f(x) = 1$ sur $[0, a]$ et $f(x) = 0$ sur $]a, T]$ où $0 < a < T$.

1. Etudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\alpha)}{n}$ pour tout $\alpha \in]0, 2\pi[$.

Exercice 14 : Soit φ définie sur $[0, \pi]^2$ par :

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x(\pi - y) & \text{si } x \leq y \\ y(\pi - x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

On se fixe y dans $]0, \pi[$ et on définit la fonction f, 2π–périodique et impaire, telle que $f(x) = \varphi(x, y)$ sur $[0, \pi]$.

1. Étudier la série de Fourier de f.
2. En déduire, pour x, y dans $[0, \pi]$, les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}.$$

Exercice 15 : Soit $\alpha \in]-1, 1[$ et la série $\sum \alpha^n \cos(nx)$.

1. Montrer que cette série converge pour tout réel x et calculer sa somme $S(x)$.
2. On pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cos(kx)$$

   Déterminer un majorant de $|S(x) - S_n(x)|$ indépendant de x.
3. Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^\pi \cos(kx) S(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \cos(kx) S_n(x)\, dx$$

4. En déduire la série de Fourier de S.

Exercice 16 : Soit f la fonction 2π-périodique, telle que $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ et $f(x) = x^3 + \alpha x$ sur $]-\pi, \pi[$ où α est un réel donné.

1. Étudier la série de Fourier de f.
2. Préciser le cas particulier où f est continue sur R.
3. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 17 : Soient $a \in]-1, 1[$, f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}$$

et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx$$

1. Établir une relation de récurrence entre u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. Calculer u_1 et u_2.
2. Expliciter u_n et en déduire le développement de f en série de Fourier.

Exercice 18 : Soient $a > 0$, f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(a) - \cos(x)}$$

et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

1. Établir une relation de récurrence entre u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. Calculer u_1 et u_2.
2. Expliciter u_n et en déduire le développement de f en série de Fourier.

Exercice 19 : Soit f la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = e^{tx}$ sur $]0, 2\pi[$ où t est un réel donné non nul.

1. Étudier la série de Fourier de f.
2. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + t^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 20 : Soit f la fonction 2π-périodique et paire telle que $f(x) = \operatorname{sh}(tx)$ sur $[0, \pi]$ où t est un réel donné non nul.

1. Étudier la série de Fourier de f.
2. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 + t^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 21 : Soit f définie :

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}}$$

1. Calculer $f'(x)$ aux points où f est dérivable.
2. Déterminer le développement de f en série de Fourier.
3. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 22 : En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$, donner une solution particulière π-périodique de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = |\sin(x)|$ et en déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.