Feuille d'exercices n°3 : Séries

Exercice 1 : Nature de séries
Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}$;
2. $u_n = \dfrac{2^n + n^2}{3^n n^2 + 1}$;
3. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}$;
4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n+1}}$;
5. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$;
6. $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4 + \sin n}$;
7. $u_n = \dfrac{1 - n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$;
8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$;
9. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 1)$;
10. $u_n = ne^{-n}$;
11. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 2)$;
12. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 1)$;
13. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$;
14. $u_n = n^2 \left(\sin\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{1}{n} + \left(\ln(1 - \dfrac{1}{n})\right)^2 - e^{\frac{1}{n}}\right)$.

Exercice 2 : Séries de Bertrand
En utilisant le théorème de comparaison entre série et intégrale, donner la nature des séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Calcul de $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$
Soit x un nombre réel, avec $|x| < 1$.

1. Montrer que $\sum_n x^n$ et $\sum_n nx^{n-1}$ convergent.
2. Donner des expressions fermées (c'est-à-dire sans signe $\sum$) de
$$\sum_{n=0}^{N} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}.$$
3. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$.
4. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left((n-2)3^{-n} + (n-3)2^{-n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 2n)3^{-n}$

Exercice 4 : Développement en série entière

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \ .$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ .$$

3. Pour tout $x \in]-1,1]$, montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et montrer que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x) \ .$$

En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 5 : Séries à terme général positif décroissant

Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $(n-N)u_n \leqslant \varepsilon$. En déduire que nu_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Donner un exemple de suite positive $(v_n)_n$ telle que $\sum v_n$ converge et nv_n ne tend pas vers 0.

Exercice 6 : Où on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs, et notons $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.

1. Montrer par des exemples que la divergence de $\sum u_n$ ne permet pas de déterminer la nature de $\sum v_n$.
   On suppose dans la suite que $\sum u_n$ converge et on va montrer que $\sum v_n$ diverge.
2. Traiter le cas où n^2u_n ne tend pas vers $+\infty$.
3. Traiter le cas où $n^2u_n \to +\infty$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2}v_n^{1/2}$.

Exercice 7 : Un critère de rationnalité

Montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Donner un exemple de nombre irrationnel en utilisant ce critère.