MAT244 Université de Grenoble
2015–2016 Centre Drôme-Ardèche

Feuille d'exercices n°2
Espaces préhilbertiens

Produits scalaires

Exercice 1 : Soit $\omega \in \mathbb{R}^n$. A quelle condition sur ω l'application :

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i y_i$$

définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2 : Soit $x_0, \cdots, x_n$ des réels deux à deux distincts. A quelle condition sur $\omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ l'application :

$$(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \omega_i P(x_i) Q(x_i)$$

définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 3 : Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto P(1) Q'(0) + P'(0) Q(1)$ définit une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Est-ce un produit scalaire ? Donner la matrice dans la base canonique.

Exercice 4 : On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme :

$$P : x \mapsto P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que si $P \in \mathcal{P}_n$ s'annule en $2n+1$ points deux à deux distincts alors $P = 0$ (utiliser les expressions complexes des fonctions cos et sin).
3. Montrer que si $x_0, \cdots, x_{2n}$ sont des réels deux à deux distincts, alors l'application :

$$(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \omega_i P(x_i) Q(x_i)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

Exercice 5 : Montrer que, pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$, l'application :

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\, g(t)\, \alpha(t)\, dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b])$.

Exercice 6 : Montrer que l'application :

$$(f,g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, continues et périodiques de période 2π.

Cauchy-Schwarz

Exercice 7 : Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} \geq n^2$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 8 : Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 9 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ satisfaisant $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt\ .$$

Bases orthonormées

Exercice 10 : On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Orthonormaliser les bases

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 11 : Montrer que la famille $\{\cos(nt),\ \sin(mt) \mid (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt$ défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$.

Exercice 12 : Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\ dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$. Donner la matrice dans la base canonique et déterminer une base orthonormée. Calculer l'orthogonal de $P = 1 + X + X^2 + X^3$.

Exercice 13 : Soient E un espace euclidien et u un automorphisme de E.

1. Montrer que l'application :
$$\varphi : (x,y) \mapsto (x,y) \mapsto \langle u(x) \mid u(y) \rangle$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Donner la matrice de φ dans une base orthonormée de E en fonction de celle de u.

Exercice 14 : Pour tout entier n positif ou nul, on note $\pi_{2n}(x) = (x^2-1)^n$ et $R_n = \pi_{2n}^{(n)}$. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :
$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)\,Q(x)\,dx.$$

1. Montrer que R_n est un polynôme de degré n.
2. Calculer les coefficients de x^n et x^{n-1} dans R_n.
3. Montrer que $\left\langle R_n \mid x^k \right\rangle = 0$ pour $n > 0,\ \ 0 \leq k \leq n-1$. Conclusion ?
4. Calculer $\|R_n\|$, pour tout entier n positif ou nul. Les polynômes $P_n = \dfrac{1}{\|R_n\|} R_n$ sont les polynômes de Legendre normalisés.

Exercice 15 : Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{0} P(t)\,Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer l'orthogonal de $P(X) = 1 + 12X + 3X^2 + 20X^3$.

Exercice 16 : On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :
$$(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

On ne demande pas de montrer que cette application définit bien un produit scalaire.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2} \frac{\pi}{2}.$$
2. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, déduire de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Projections orthogonales

Exercice 17 : Calculer le projeté orthogonal de $(1,0,0)$ sur le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(0,0,1)$.

Exercice 18 : On considère le plan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 2$. Donner une base orthonormale de ce plan et calculer le projeté orthogonal de 0 sur $\mathcal{P}$.

Exercice 19 : On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt$.

1. Construire une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $H = 1 + x + x^3$. Déterminer $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|H - P\|$ soit minimal.

Exercice 20 : Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left(\ln(x) - ax - b\right)^2 dx$.

Exercice 21 : Calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 x^2 \left(e^x - ax^2 - bx - c\right)^2 dx$ de deux manières différentes.

Exercice 22 : Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt = 0.$$

Exercice 23 : Soient E un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que la projection orthogonale p_F de E sur F est une application linéaire.

Exercice 24 : Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ et $F = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $E \neq F \oplus F^{\perp}$.