MAT244 Université Grenoble-Alpes
2015-2016 Centre Drôme-Ardèche

Feuille d'exercices n°1
Formes bilinéaires et quadratiques

Exercice 1 : Pour chacune des applications suivantes, dire s'il s'agit d'une application bilinéaire. Préciser s'il s'agit d'une forme bilinéaire et si elle est symétrique ou anti-symétrique.

1. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1y_1 - 3x_2y_2 \in \mathbb{R}$
2. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1y_1 - 2x_2y_2 \in \mathbb{R}$
3. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto -x_1y_1 - 4x_2y_1 + x_2y_2 \in \mathbb{R}$
4. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto x_1y_2 + 2x_2x_3y_1 \in \mathbb{R}$
5. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3 \in \mathbb{R}$
6. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3 \in \mathbb{R}$
7. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_1 - x_1y_2) \in \mathbb{R}^2$
8. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1y_1 + x_2x_1 \in \mathbb{R}$
9. $\varphi\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1 + x_2 + y_1)^2 - (x_2 + x_1)^2 - y_1^2 \in \mathbb{R}$

Dans les cas où φ est une forme bilinéaire, donner la matrice la représentant dans la base canonique.

Exercice 2 : On considère $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de

$$\varphi\ :\ (N,M) \in E^2\ \longmapsto\ MN - NM\ .$$

Montrer qu'il s'agit d'une application bilinéaire anti-symétrique. Est-elle dégénérée ?

Exercice 3 : On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application

$$\varphi\ :\ (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]\ \longmapsto\ P'(0)Q(0) + P(0)Q'(0)\ .$$

Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique. Calculer la matrice représentant φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$. Cette forme bilinéaire est-elle dégénérée ?

Exercice 4 : On considère la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2$. Calculer l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}.(1,1)$.

Exercice 5 : On considère la forme bilinéaire symétrique de l'exercice 3.

1. Calculer l'orthogonal du plan $\{\alpha + \beta X, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. Calculer l'orthogonal du plan $\{\alpha X + \beta X^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Que constatez-vous ?

Exercice 6 : On se place sur $\mathbb{R}^2$ et on pose

$$\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 \ .$$

Calculer la forme quadratique associée à φ_1 et φ_2. Que constate-t-on ? Montrer que φ_1 et φ_2 ne diffèrent que d'une forme bilinéaire anti-symétrique.

Exercice 7 : On considère la forme quadratique de Lorentz $q(x, y, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ sur $\mathbb{R}^{3+1}$, où $c \simeq 3.10^8 m.s^{-1}$ est la vitesse de la lumière. On admet ici la loi de la relativité restreinte : si un mobile se déplace d'un point A à un point B de l'espace-temps selon le vecteur $\overrightarrow{AB} = (x, y, z, t)$ alors la durée du déplacement pour le mobile est donnée par

$$d(\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{c}\sqrt{-q(x, y, z, t)} \ .$$

Pour simplifier les notations, dans la suite de l'exercice, nous ne considèrerons qu'une variable d'espace x (déplacements en ligne droite) et donc $q(x, t) = x^2 - c^2t^2$.

1. Montrer que si l'on reste immobile, la définition de la durée est cohérente. Par continuité, la durée est quasiment la même si l'on voyage à vitesse petite devant c.
2. La forme q est-elle définie ? Quel est son cône isotrope ?
3. A-t-on des vecteurs (x, t) pour lesquels la formule donnant d n'est pas définie ? Pour lesquels $d = 0$? Comment interprétez-vous ces vecteurs ?
4. Dans la suite, on dit que (x, t) est de type *temps* si $q(x, t) < 0$ et *tournés vers l'avenir* si en outre $t > 0$. Soient $u = (x, t)$ et $v = (x', t')$ de type temps et tournés vers l'avenir, que l'on prendra non-colinéaires. Montrer sur un dessin que la somme $u + v$ est encore de type temps et tournée vers l'avenir. Montrer par un calcul explicite que $\varphi(u, v) < 0$, où φ est la forme bilinéaire symétrique associée à q.
5. Représenter la droite $u + \mathbb{R}.v$ et déterminer sa position par rapport au cône isotrope de q. En considérant le discriminant du polynôme $q(u + \lambda v)$, montrer que $\varphi(u, v) < -\sqrt{q(u)q(v)}$.
6. En développant $q(u + v)$ et en utilisant les questions précédentes, montrer que $d(u + v) > d(u) + d(v)$.
7. En déduire le paradoxe des jumeaux : un jumeau reste immobile pendant que son frère fait un aller-retour jusqu'à un point distant ; à l'arrivée, le jumeau qui est parti est plus jeune que celui qui est resté. Connaissez-vous des situations pratiques où ce principe relativiste est pris en compte ?

Exercice 8 : Calculer le noyau et le cône isotrope des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \qquad \text{et} \qquad \psi(x,y) = x_1y_1 - x_3y_3 \ .$$

Exercice 9 : On reprend la forme bilinéaire de l'exercice 3. Donner la forme quadratique associée et calculer son cône isotrope.

Exercice 10 : Montrer que les formes linéaires $(\ell_j)_{1\leq j\leq 3}$ définies sur $\mathbb{R}^5$ par :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \ell_2(x) = 3x_1 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \ell_3(x) = 3x_2 + x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

sont linéairement indépendantes.

Exercice 11 : Pour chacune des applications suivantes, dire s'il s'agit d'une forme quadratique et donner la forme bilinéaire symétrique associée.

1. $q \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 2x_1^2 - x_1x_2x_3$
2. $q \ : \ x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 4x_1^2 + x_1x_2$
3. $q \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xy$
4. $q \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_3x_2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + x_1^2$
5. $q \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2 + 2xy$
6. $q \ : \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto xy + yz - zx$
7. $q \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$
8. $q \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$
9. $q \ : \ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x+y)^2 + (z+t)^2 - (z-t)^2 - t^2$

Calculer une forme réduite de chacune des formes quadratiques précédentes et donner sa signature. Dire si la forme est définie ou non et si elle est dégénérée ou non.

Exercice 12 : Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x,y,z) = x^2 + (1+a)\,y^2 + \left(1+a+a^2\right) z^2 + 2xy - 2ayz \ ,$$

où a est un paramètre réel.

1. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Réduire q et donner son rang en fonction de a.
3. Déterminer le noyau de q en fonction de a.

Exercice 13 : On considère l'ensemble $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel assimilable à l'ensemble des matrices symétriques de taille $d \times d$. En déduire la dimension de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 14 : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ et on considère $q(x)$ comme une fonction de plusieurs variables x_i. Montrer que q est dérivable par rapport à chaque x_i et que la forme bilinéaire symétrique associée à q est donnée par

$$\varphi(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \, y_i \frac{\partial q}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_d) \; .$$

Exercice 15 : Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit φ l'application

$$\varphi \;:\; (A,B) \in E^2 \;\longmapsto\; \varphi(A,B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)\right) \; .$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Donner la matrice représentant φ dans la base

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire que φ est non-dégénérée.
4. On rappelle qu'une matrice annule son polynôme caractéristique, en particulier que, pour tout $A \in E$, $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)Id = 0$. Montrer que la forme quadratique associée à φ est $q(A) = det(A)$. Cette forme q est-elle définie ?
5. En déduire que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \; , \;\; \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB) = \det(A+B) - (\det(A) + \det(B)) \; .$$