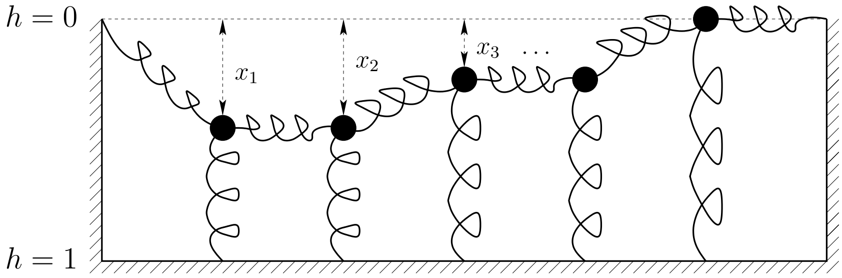
Minimisation d'une énergie

On considère une chaîne de $n+1$ ressorts attachée par ses extrémités à un support et dont chaque nœud est relié au sol par un autre ressort.



On note $x_1,\ldots,\ x_n$ les écarts entre les nœuds et l'horizontale. L'énergie du système est la somme des énergies de chaque ressort. En supposant chaque x_i assez petit et en prenant toutes les constantes égales à 1, l'énergie du système est donc donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) &= |0-x_1|^2+|x_1-x_2|^2+|x_2-x_3|^2+\ldots+|x_{n-1}-x_n|^2+|x_n-0|^2\\ &\quad+|1-x_1|^2+\ldots+|1-x_n|^2\\ &= |x_1|^2+\sum_{i=2}^{n}|x_i-x_{i-1}|^2+|x_n|^2+\sum_{i=1}^{n}|1-x_i|^2\ . \qquad (1)\end{aligned}$$

Pour trouver la position d'équilibre du système, il nous faut trouver les valeurs des x_i telles que l'énergie $\mathcal{E}(x)$ soit minimale.

Nous allons considérer l'espace $X=\mathbb{R}^{n+2}$ et on notera les coordonnées de $x\in X$ par $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n+1})$. Pour tous x et y dans X, on introduit la quantité

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=0}^{n+1}x_iy_i\ +\ \sum_{i=1}^{n+1}(x_i-x_{i-1})(y_i-y_{i-1})\ .$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire et donner la norme $\|\cdot\|$ associée.
2) On note F le sous-espace vectoriel de X composé des vecteurs $x\in X$ tels que $x_0=0$ et $x_{n+1}=0$. Donner une base de F.
3) On note $\mathbb{1}$ le vecteur de X dont toutes les coordonnées valent 1. Pour $x\in F$, montrer que $\|x-\mathbb{1}\|^2=\mathcal{E}(x)+2$, où $\mathcal{E}$ est l'énergie introduite dans (1).
4) En déduire que minimiser l'énergie $\mathcal{E}(x)$ revient à faire une projection orthogonale adéquate dans l'espace X muni du produit scalaire φ.

Nous allons faire l'application numérique dans le cas $n=2$, c'est-à-dire $X=\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire

$$\varphi(x,y)=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+(x_1-x_0)(y_1-y_0)+(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(x_3-x_2)(y_3-y_2)\ .$$

5) Orthonormaliser la base $(\,(0,1,1,0)\,,\,(0,1,-1,0)\,)$ de F.
6) Calculer la projection orthogonale de $(1,1,1,1)$ sur F et conclure à propos du problème initial.