MAT308
2016-2017

Matrices

Exercice 1 : Calculer les vecteurs suivants

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Calculer les produits de matrices suivants

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Calculer les invariants des matrices suivantes (trace, déterminant et deuxième invariant pour les matrices 3×3).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA et vérifier que, pour ces matrices, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 5 : On considère le champ de vecteurs vitesses

$$V(x,y,z) \;=\; (\,x^2 - y^3 z\,,\, -2xy + z\,,\, xy - 1\,)\;.$$

Calculer la différentielle du champ V en (x,y,z). Montrer que la divergence de V est nulle. Ecrire le tenseur des vitesses au point $(0,0,0)$.

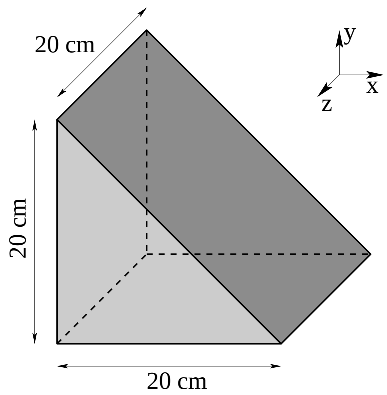
Exercice 6 :

La pièce métallique ci-contre est soumise à différentes forces de pressions sur ces parois. Les contraintes sont réparties uniformément dans la pièce et sont décrites par le tenseur de contraintes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\;,$$

l'orientation étant suivant le repère indiqué sur la figure et les unités étant en Newton par cm^2.

Donner le vecteur des contraintes V correspondant à la face oblique et calculer la pression P exercée par cette face sur l'environnement extérieur (si n est le vecteur normal à la face, la pression est la composante normale de V que l'on trouve en calculant $V.n$).



Exercice 7 : Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : On travaille dans $\mathbb{R}^2$. On considère la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Ecrire la matrice R représentant cette rotation dans la base canonique.

2) Quelle est la matrice inverse de R et quelle est la transformation géométrique associée ?

Exercice 9 : On considère une application f sur $\mathbb{R}^2$, représentée dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\;.$$

1) Quels sont les deux invariants d'une matrice 2×2 ? Les calculer pour la matrice A.

On considère une nouvelle base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (2,1)$ et $v_2 = (-1,2)$. On rappelle que la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{V}$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

2) Représenter la nouvelle base dans le repère canonique.
3) Donner l'inverse de la matrice P.
4) Calculer la matrice $\tilde{A} = P^{-1}AP$ représentant f dans la base $\mathcal{V}$. Vérifier que $\tilde{A}$ a les mêmes invariants que A.
5) Sans calculs, décrire géométriquement l'action de l'application f et donner son inverse.

Exercice 10 : On considère un tenseur de contraintes

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

1) La matrice T est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de T.
3) Donner une base orthonormale de vecteurs propres, écrire la matrice de passage P correspondante et calculer son inverse.
4) Vérifier que $T = PDP^{-1}$ et que la trace de T est égale à la somme des valeurs propres.
5) Dessiner les différentes pressions à l'origine des contraintes représentées par T.

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie par récurrence

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n .$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} .$$

1) Montrer que l'on a $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = (1,0)$.
2) Diagonaliser A.
3) En déduire l'expression de A^n puis celle de u_n.

Exercice 12 : Diagonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} .$$