MAT308
2016-2017

Géométrie

Exercice 1 : On considère dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ le vecteur $\overrightarrow{v} = (2, 1)$. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans les bases $((0, 1); (1, 1))$ et $((1, 1); (-1, 1))$.

Exercice 2 : On considère le point $C = (2, -1, 1)$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{BC} = (3, 0, -2)$. Quelles sont les coordonnées de A ? Quelle est la distance AC ? Avec des produits scalaires, déterminer si le triangle ABC est rectangle ou non.

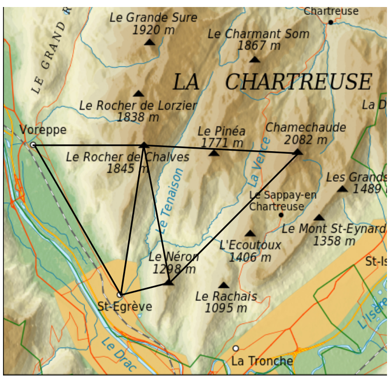
Exercice 3 : Convertir $35^{\text{o}}\,15'\,24''$ en degrés décimaux et en radians.

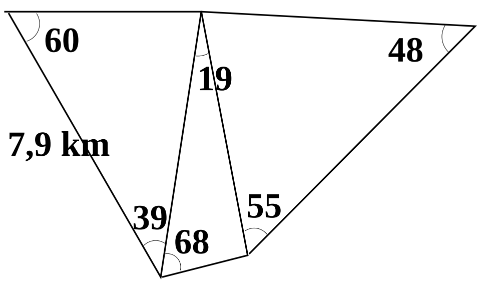
Exercice 4 : A partir des formules $\cos^2 a+\sin^2 a = 1$ et $\cos(a+b) = \cos a \cos b-\sin a \sin b$, montrer que

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} .$$

Exercice 5 : Par une analyse géométrique, prouver que $\sin(a+b) = \sin a \cos b+\sin b \cos a$ pour des angles a et b dans $[0, \pi/2]$ tels que $a + b$ est aussi dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 6 : Calculer la distance entre le sommet de Chamechaude et le repère de St-Égrève (les angles indiqués sont en degrés).





Exercice 7 : Un mousse est posté dans la vigie du grand mât d'un navire, à 53 m de haut. Il regarde tout autour de lui mais ne voit qu'une mer d'huile. A quelle distance est le point de la mer le plus lointain qu'il voit ? Rappel : le rayon de la Terre est d'environ 6 371 km.

Exercice 8 : Avec les données ci-dessous, déterminer si on peut voir le Mont-Blanc depuis la Tour Eiffel par très beau temps.

	Latitude	Longitude	Altitude
Dernier étage Tour Eiffel	$48^{\circ}\,51'\,30''$ Nord	$002^{\circ}\,17'\,40''$ Est	309,63 m
Sommet du Mont-Blanc	$45^{\circ}\,49'\,57''$ Nord	$006^{\circ}\,51'\,53''$ Est	4 808,73 m

Exercice 9 : Un avion a mis 07 h et 53 minutes pour aller de l'aéroport Lyon-Saint-Exupéry ($45^{\circ}\,43'\,32''$ Nord et $005^{\circ}\,04'\,52''$ Est) à celui de Montréal-Trudeau ($45^{\circ}\,28'\,07''$ Nord et $073^{\circ}\,44'\,29''$ Ouest). S'il a suivi le chemin le plus court, a-t-il volé plus au nord et/ou plus au sud que leur latitudes ? Quelle a été sa vitesse moyenne ?

Exercice 10 : Un point de la sphère est repéré par ses coordonnées sphériques (θ, φ). Toute projection cylindrique (pour laquelle on suit l'échelle de la longitude) s'écrit de la forme

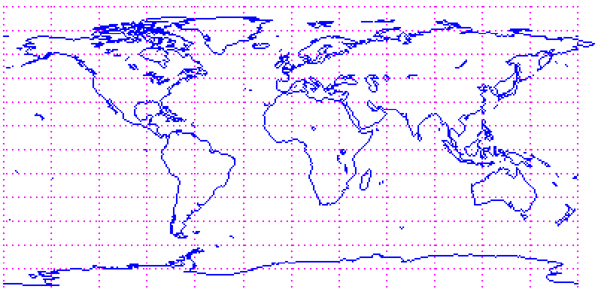
$$(\theta, \varphi) \longmapsto (\theta, f(\varphi))$$

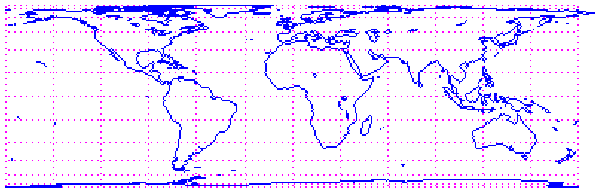
avec f, vérifiant $f(0) = 0$, une fonction de la latitude qui varie suivant les projections.

1) Si on prend $f(\varphi) = \varphi$, quelle est la propriété de cette projection, dite *plate carrée* ?

2) Calculer f dans le cas de la *projection cylindrique de Lambert* qui projette les points en gardant leur hauteur par rapport à l'horizontale.

3) Montrer que la projection cylindrique de Lambert est équivalente, c'est-à-dire conserve les aires.





Exercice 11 :
Les frontières du Colorado ont été découpées selon un grand rectangle en suivant les parallèles et les méridiens : de 37° à 41° Nord et de $102^{\circ}03'$ à $109^{\circ}03'$ Ouest. La page Wikipédia indique qu'il fait donc 451 sur 612 km pour $269\,837\ \text{km}^2$. Trouvez-vous quelques choses d'étrange dans ces mesures ? Pouvez-vous donner les longueurs selon vos calculs ?