Examen MAT302 – 2^e session

juin 2018

Durée : 2 heures

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée
Tout appareil électronique interdit

Cours : Démontrer que si $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ sont deux séries convergentes, alors $(\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n))$ est aussi convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

Exercice 1 : Donner la nature des séries suivantes

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{1+n}{1+3^n}}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{6+(-1)^n n}\right)$$

Exercice 2 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 3 : Calculer la valeur des intégrales suivantes,

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+2)} \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$$

T.S.V.P.

Exercice 4 : Produit direct de séries
Le but de cet exercice est d'étudier la véracité de l'implication

$$(\sum_{n\geq 0} u_n) \text{ et } (\sum_{n\geq 0} v_n) \text{ convergent} \quad \Longrightarrow \quad (\sum_{n\geq 0} u_n v_n) \text{ converge.} \qquad (1)$$

1) Montrer que la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}})$ converge. En déduire que l'implication (1) est fausse en général quand les termes généraux sont de signe quelconque.

2) Montrer que l'implication (1) est vraie si $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ sont deux séries à termes positifs.
Indication : on pourra utiliser un des théorèmes de comparaison.

Exercice 5 : Etude d'une intégrale en ne prenant que certaines bornes
Dans cet exercice et dans la rédaction des réponses, N désignera toujours un nombre entier naturel.

1) Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que

$$I(N) = \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[N\in\mathbb{N}\longrightarrow+\infty]{} C \in \mathbb{R}\ . \qquad (2)$$

A-t-on forcément que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, c'est-à-dire que

$$I(X) = \int_0^X f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\in\mathbb{R}_+\longrightarrow+\infty]{} C \in \mathbb{R}\ ?$$

Indication : on pourra penser à essayer $f(x) = \cos(\pi x)$.

2) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ est à valeurs positives, alors (2) implique que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut C.
Indication : justifier que $X \mapsto I(X)$ est une fonction croissante.

3) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est de signe quelconque mais vérifie $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors (2) implique que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut C.

Barème indicatif : 2/3/3/3/4/5