Examen MAT302 – janvier 2020

Correction : proposition d'une très bonne copie

Exercice 1 :

1. On considère la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ de terme général $u_n = \frac{n}{7+n+n^2}$. Ce terme général est positif et $u_n \sim \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $(\sum \frac{1}{n})$ est une série de Riemann divergente, les théorèmes de comparaison du cours impliquent que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ est aussi une série divergente.
2. On considère la série $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ de terme général $v_n = \frac{\ln n}{7+n+n^2}$. On procède par comparaison comme ci-dessus, car ce terme général est positif et $v_n \sim \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme la série $\left(\sum \frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série de Riemann convergente, la série $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ est aussi convergente.
3. On considère la série $\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right)$ de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$. Le terme général n'étant pas de signe constant, on ne peut utiliser les théorèmes de comparaison. On effectue le développement limité

$$w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n/n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) .$$

La série $(\sum(-1)^n/\sqrt{n})$ est clairement une série alternée avec $1/\sqrt{n}$ qui décroît vers 0 donc par le critère des séries alternées, cette série converge. Le terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est le terme général d'une série qui converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. Donc $(\sum w_n)$ est la somme de deux séries convergentes et donc converge.

Exercice 2 : Séries des termes pairs et impairs

Soit $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ une séries de nombres réels.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a que $P = \lfloor N/2 \rfloor$ est le plus grand entier tel que $2P \leq N$ et $Q = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ est le plus grand entier tel que $2Q-1 \leq N$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{p=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} u_{2p} + \sum_{q=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} u_{2q-1} .$$

Si par hypothèse les deux sommes de droites sont des sommes partielles de séries convergentes, on peut passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ et on obtient que la somme de gauche a une limite quand N tend vers $+\infty$. Cela montre que $(\sum u_n)$ est une série convergente et aussi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{p=1}^{\infty} u_{2p} + \sum_{q=1}^{\infty} u_{2q-1} .$$

2. On sait par le critère des séries alternées que $(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n})$ converge. En effet, son terme général s'écrit sous la forme $(-1)^n$ que multiplie la suite positive $1/n$ qui décroît et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'un autre côté, $(\sum_{q\geq 1} \frac{1}{2q-1})$ est une série de termes positifs qui vérifient $\frac{1}{2q-1} \sim \frac{1}{2q}$. Comme $(\sum \frac{1}{q})$ est une série de Riemann divergente, la série $(\sum_{q\geq 1} \frac{1}{2q-1})$ diverge. Cela montre que l'implication réciproque de celle de la question précédente est fausse en général.
3. On considère maintenant le cas d'une série positive $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ avec $u_n \geq 0$. Supposons que $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge. Pour tout $P \in \mathbb{N}$, par positivité des termes, on a
$$\sum_{p=1}^{P} u_{2p} \leq \sum_{n=1}^{2P} u_n .$$
Quand P tend vers $+\infty$, le majorant a une limite puisque la série est supposée convergente. La somme partielle de gauche est donc croissante (car $u_{2p} \geq 0$) et majorée et donc converge. Cela montre que $(\sum_{n \text{ pair}} u_n)$ est une série convergente. Les mêmes arguments montrent que $(\sum_{n \text{ impair}} u_n)$ converge aussi.
4. Prenons le cas particulier $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Il s'agit d'une somme de Riemann convergente et donc la question précédente montre que les séries des termes pairs et impairs convergent aussi. On a
$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{1}{(2q-1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{2Q} \frac{1}{n^\alpha} - \sum_{p=1}^{Q} \frac{1}{(2p)^\alpha} = \sum_{n=1}^{2Q} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} \sum_{p=1}^{Q} \frac{1}{p^\alpha} .$$
En passant à la limite $Q \to +\infty$ (toutes les séries convergent), on obtient
$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(2q-1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Exercice 3 : Effectuons une décomposition en éléments simples. On sait qu'il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\frac{x+2}{x(x^2+9)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+9} \; .$$

En mettant au même dénominateur, on trouve que $(a+b)x^2+cx+9a = x+2$, donc que $a = 2/9$ puis $b = -2/9$ et $c = 1$. On a donc

$$\frac{x+2}{x(x^2+9)} = \frac{2}{9x} + \frac{-2x/9+1}{x^2+9} \; .$$

On a que

$$\int_1^2 \frac{2}{9x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{9}[\ln x]_1^2 \;=\; \frac{2}{9}\ln 2 \; .$$

Par ailleurs

$$\frac{-2x/9+1}{x^2+9} \;=\; \frac{-1}{9}\frac{2x}{x^2+9} \;+\; \frac{1}{9}\frac{1}{1+(x/3)^2} \; .$$

On a

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln(x^2+9)]_1^2 \;=\; \ln 13 - \ln 10$$

et

$$\int_1^2 \frac{1}{1+(x/3)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; [3\arctan(x/3)]_1^2 \;=\; 3\arctan(2/3) - 3\arctan(1/3) \; .$$

Au final,

$$I = \frac{1}{9}\left(2\ln 2 - \ln 13 + \ln 10\right) + \frac{1}{3}\left(\arctan(2/3) - \arctan(1/3)\right) \; .$$

Exercice 4 : Linéarisons le polynôme trigonométrique $\cos^3(x)$:

$$\begin{aligned}\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \; .\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^\pi x\cos(3x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{12}[x\sin(3x)]_0^\pi - \frac{1}{12}\int_0^\pi \sin(3x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}[x\sin(x)]_0^\pi - \frac{3}{4}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \frac{1}{36}[\cos(3x)]_0^\pi + 0 + \frac{3}{4}[\cos(x)]_0^\pi\\ &= -\frac{1}{18} - \frac{3}{2} = -\frac{14}{9}.\end{aligned}$$

Exercice 5 : Une famille d'intégrales généralisées

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(\ln x)^2}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 car quand x tend vers 0, $\frac{1}{1+(\ln x)^2}$ tend vers 0. En particulier, elle est bornée sur $]0,1]$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(\ln x)^2}$ converge (théorème du cours ou bien comparaison en valeur absolue avec une fonction constante).
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2(1+(\ln x)^2)}$ est positive sur $]0,1]$ et
$$\frac{1}{x^{3/2}} \;=\; o\left(\frac{1}{x^2(1+(\ln x)^2)}\right)$$
car $\sqrt{x}(\ln x)^2 \to 0$ quand $x \to 0$ (croissance comparée). Comme l'intégrale de $1/x^{3/2}$ diverge près de 0, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+(\ln x)^2)}$ diverge aussi par comparaison.
3. On pose $u = \ln x$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ et on obtient que
$$\int_\xi^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+(\ln x)^2)} \;=\; \int_{\ln \xi}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \;=\; -\arctan(\ln \xi)\ .$$
Quand ξ tend vers 0^+, $-\arctan(\ln \xi)$ tend vers $\pi/2$, qui est donc la limite finie de $\displaystyle\int_\xi^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+(\ln x)^2)}$. Par définition, cela signifie que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+(\ln x)^2)}$ converge et vaut $\pi/2$.