Examen MAT302

Lundi 7 janvier 2019 de 10 h à 12 h

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée
Tout appareil électronique interdit

Exercice 1 : Autour du cours

1. On considère une série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ de terme général u_n réel. Rappeler ce que signifie « la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ converge ».
2. Montrer que si la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ converge, alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 : Donner la nature des séries suivantes :

$$\left(\sum_{n\geq 1} \ln(1+1/n)e^{1+1/n}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 0} ne^{-n}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln n + (-1)^n n}\right)$$

Exercice 3 : Calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x \qquad B = \int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x\ .$$

Indication : le calcul de B peut se faire par des intégrations par parties.

Exercice 4 : Calcul d'une intégrale

Soit $a \in [0,\pi/2]$, on considère l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ .$$

1. Supposons d'abord que $a < \pi/2$. Effectuer le changement de variable $u = \tan x$ pour montrer que
$$I(a) = \int_0^{\tan a} \frac{1}{1+2u^2}\,\mathrm{d}u$$
et en déduire la valeur de $I(a)$.
2. Justifier que $I(a) \longrightarrow I(\pi/2)$ quand $a \longrightarrow \pi/2$.
3. En déduire la valeur de $I(\pi/2)$.

T.S.V.P.

Exercice 5 : Une intégrale impropre

1. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x$$

   est convergente.

2. Montrer que $(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.
3. Justifier que $|\cos(x)| \geq (\cos x)^2$ et en déduire que

$$\int_1^M \frac{|\cos x|}{x} \, \mathrm{d}x \ \geq \ \int_1^M \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_2^{2M} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x \ .$$

   Conclure que $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} \, \mathrm{d}x$ est divergente.

Exercice 6 : Un terme général défini par récurrence

Dans cet exercice, on considère la suite (u_n) définie par la récurrence

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad \text{et pour } n \geq 2 \quad u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{10} u_{n-2} \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq (2/3)^n$.
2. Montrer que la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n)$ est convergente. Que dire des séries $(\sum_{n \geq 1} u_n)$ et $(\sum_{n \geq 2} u_n)$?
3. Traduire *rigoureusement* la relation de récurrence définissant la suite (u_n) en une relation entre les nombres $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} u_n$. En déduire que $\sum_{n \geq 0} u_n = 5/4$.

Barème indicatif : 2/4/3/4/4/3