Examen MAT302

Indications de solutions et correction de l'exercice 4

Exercice 1 : Voir cours.

Exercice 2 : On pourra utiliser les arguments ci-dessous.

1. La série $\left(\sum_{n\geq 1} \ln(1+1/n)e^{1+1/n}\right)$ est à termes positifs et on a que $\ln(1+1/n)e^{1+1/n} \sim \frac{e}{n}$. La série est donc divergente.
2. La série $\left(\sum_{n\geq 0} ne^{-n}\right)$ est à termes positifs, on a $ne^{-n} = o\big(e^{-n/2}\big)$ et $\left(\sum e^{-n/2}\right)$ est une série géométrique convergente. La série est donc convergente.
3. La dernière série n'est pas à termes positifs, mais le développement de son terme général donne
$$\frac{1}{\ln n + (-1)^n n} \;=\; \frac{(-1)^n}{n} \;+\; o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \;.$$
Le premier terme est celui d'une série alternée convergente, le deuxième terme celui d'une série absolument convergente. Donc la série initiale converge.

Exercice 3 : Sans détailler tous les calculs, on a

$$A = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x = -4\ln 3 + 7\ln 2 \;.$$

$$\begin{aligned} B \;&=\; \int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\,x(\ln x)^2\,\big]_1^2 \;-\; \int_1^2 2x\frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x \\ &=\; 2(\ln 2)^2 - 2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; 2(\ln 2)^2 \;-\; 2\big[\,x\ln x - x\,\big]_1^2 \;=\; 2(\ln 2)^2 \;-\; 4\ln 2 \;+\; 2 \;. \end{aligned}$$

Exercice 4 : *Cet exercice est le seul pour lequel la rédaction va être détaillée et peut servir d'exemple.*

Pour $a \in [0,\pi/2]$, on pose
$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \;.$$

1. Supposons d'abord que $a < \pi/2$ et posons $u = \tan x$. Notons d'abord que $\tan x$ est bien définie et dérivable sur $[0,a]$ puisque $a < \pi/2$ et on peut donc procéder au changement de variable. On a $\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ et donc

$$\begin{aligned} I(a) \;&=\; \int_0^a \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^a \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &=\; \int_0^a \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \;=\; \int_0^a \frac{1}{1+2\tan^2 x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &=\; \int_0^{\tan a} \frac{1}{1+2u^2}\,\mathrm{d}u \;. \end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$I(a) \;=\; \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)\right]_0^{\tan a} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan a\right)\;.$$

2. La fonction $x \mapsto 1/(1+\sin^2 x)$ est continue sur $[0,\pi/2]$. D'après le cours, son intégrale sur $[0,a]$ est donc bien définie pour tout $a \leq \pi/2$ et est continue par rapport à a. On a donc par continuité que $I(a) \longrightarrow I(\pi/2)$ quand $a \longrightarrow \pi/2^-$.
3. Le calcul de la première question n'était pas valable pour $a = \pi/2$ car la tangente n'y est pas définie. Mais d'après la question précédente, il suffit de passer à la limite $a \to \pi/2^-$ dans l'expression obtenue. Comme $\tan a \to +\infty$ quand $a \to \pi/2^-$ et que la limite en $+\infty$ de l'acrtangente est $\pi/2$, on obtient finalement que

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\;.$$

Exercice 5 :

1. Voir cours.
2. $(\cos x)^2 = \frac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix}+2+e^{-2ix}) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$.
3. On a $|\cos(x)| \geq (\cos x)^2$ car $|\cos x| \leq 1$ et donc $|\cos x| \times |\cos x| \leq |\cos x|$ ce qui donne, à l'aide d'un rapide changement de variable, que

$$\int_1^M \frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_1^M \frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^M \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_2^{2M}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\;.$$

L'intégrale $\int_1^M \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ tend vers $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$ et l'intégrale $\int_2^{2M}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ reste bornée (convergence de la question 1.). Donc le terme de droite de l'inégalité tend vers $+\infty$, ce qui fait diverger le terme de gauche.

Exercice 6 :

1. On procède par récurrence avec le calcul clef

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{40}\right) < \left(\frac{2}{3}\right)^n\;.$$

2. La série est donc à termes positifs contrôlés par une série géométrique convergente et donc elle converge, de même que les séries qui débutent à un autre terme initial (cf cours).
3. Par « rigoureusement », il faut comprendre que l'on doit d'abord travailler sur les sommes partielles avant de passer à la limite (sinon on fait des changements d'ordre de sommation sans justifier). On a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} u_n \;+\; \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{N-2} u_n \;+\; u_0 \;+\; u_1 \;-\; \frac{1}{2}u_0\;.$$

On passe à la limite $N \to +\infty$ (tout converge) et on obtient

$$\sum_{n\geq 0} u_n \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} u_n \;+\; \frac{1}{10}\sum_{n\geq 0} u_n \;+\; \frac{1}{2}$$

ce qui donne que la somme vaut $5/4$.