Examen MAT302

21 décembre 2017

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée
Tout appareil électronique interdit

Questions de cours :

1) Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur [0,1].
2) Donner la valeur de la somme

$$\sum_{n=2}^{9} 2^n \, .$$

Exercice 1 : Donner la nature des séries suivantes

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 1} \left[e^{(-1)^n/n} + \sin(\frac{1}{2n}) - \cos(\frac{1}{n})\right]\right)$$

Exercice 2 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3 : Calculer la valeur des intégrales suivantes, en justifiant leur convergence si nécessaire,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$$

T.S.V.P.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est de montrer l'existence de la constante d'Euler γ.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n+1} \ \leq \ \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \ \leq \ \frac{1}{n}\ .$$

2) En déduire que quand $n \to +\infty$,

$$0 \ \leq \ \frac{1}{n} \ - \ \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \ \leq \ \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\ .$$

3) Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ = \ \ln N \ + \ \gamma \ + \ o(1)$$

(on demande de bien justifier que γ est strictement positive).

Exercice 5 : On souhaite calculer l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{1}{x} \sin(x^p)\, \mathrm{d}x$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$$

est convergente, éventuellement en reprenant la preuve du cours (on ne demande rien sur l'intégrale de la valeur absolue).

Par la suite on admettra que $\int_0^\infty \frac{1}{x}\sin(x)\, \mathrm{d}x = \pi/2$.

2) A l'aide d'un changement de variable adéquat, exprimer pour $\xi > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale

$$\int_0^\xi \frac{1}{x} \sin(x^p)\, \mathrm{d}x$$

en fonction d'une intégrale de la fonction $\frac{\sin(y)}{y}$.

3) En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \sin(x^p)\, \mathrm{d}x$$

converge pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et en donner la valeur.

Barème indicatif : 2/3/3/4/3/5