Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

1.1 Le paradoxe de Zénon d'Élée

Dans le paradoxe de Zénon d'Elée ($\mathrm{V}^{\text{ième}}$ avant JC), un caillou est lancé sur un arbre et parcourt la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié restante, puis la moitié de ce qui reste... Il semble ainsi ne jamais arriver à destination car il lui faut franchir une infinité d'étapes et chacune lui demande un temps non nul.

Essayons de résoudre ce paradoxe. Mettons que pour parcourir la distance d, il faut un temps t. Pour parcourir la moitié de la distance, il faut un temps $t/2$. Pour parcourir la moitié restante, il faudra un temps $t/4$ et il restera $d/4$ à parcourir. Puis pour parcourir la moitié de la distance restante, il faudra un temps $t/8$ et il restera $d/8$ à parcourir... Donc à l'étape n, il restera certes encore $d/2^n$ de distance qu'il faudra $t/2^n$ à franchir, mais on n'a attendu que

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\ldots+\frac{t}{2^n}=t-\frac{t}{2^n}$$

et donc c'est normal que le caillou n'ait pas encore atteint l'arbre. Au passage, il semble que l'on puisse écrire carrément, pour $t=1$,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1 \tag{1.1}$$

avec une somme infinie. Le paradoxe vient du fait que cette somme, bien qu'infinie, ait une valeur finie. Même s'il y a une infinité d'étapes, on n'a pas encore passé plus qu'un temps 1 à observer la scène. Mais ici, nous n'avons pas été très rigoureux en écrivant (1.1) : quel sens donner à ces « ... » et à une valeur à cette somme infinie ?

1.2 La série harmonique

Piles de dominos, extraites du site « How round is your circle » par John Bryant et Chris Sangwin.

Dans l'exemple précédent, nous additionnons une infinité de termes, mais ceux-ci sont de plus en plus petits et tendent vers 0. Est-ce que cela suffit à faire que la somme soit finie ? Regardons maintenant une pile de dominos (de longueur disons 2 unités) que nous penchons pour la faire avancer le plus possible. Le domino le plus haut, afin de ne pas tomber, ne doit pas être avancé de plus de 1. Si nous avonçons de 1 le domino en-dessous, les deux dominos basculeront. En fait, si on l'avance de d, il faut que

$$(2-d)+(2-d-1) \;\geq\; d+(d+1)$$

ce qui donne $d \leq 1/2$. Puis un calcul similaire, montre que le troisième domino ne peut pas être avancé de plus de $1/3$ et par récurrence, le $n-$ième ne peut pas être avancé de plus de $1/n$.

Jusqu'où peut-on aller, c'est-à-dire que peut-on atteindre avec

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} \text{ ?}$$

En fait, la réponse est qu'on peut aller jusqu'à aussi loin de l'on veut ! En effet, prenons $n=2^p$, on regroupe les termes par paquets

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} = 1&+\frac{1}{2}\\ &+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\ &+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\\ &+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\\ &+\ldots+\frac{1}{2^p}\ .\end{aligned}$$

Le paquet $1/(2^{j-1}+1)+\ldots+1/2^j$ contient 2^{j-1} termes qui sont tous plus grands que $1/2^j$ et donc est plus grand que $1/2$. On obtient donc que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^p} \geq 1+\frac{p}{2}\ .$$

On peut donc obtenir une avancée de dominos aussi grande que l'on veut, ce que l'on pourrait traduire de façon informelle par

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty .$$

Ainsi, même si les termes de la somme sont de plus en plus petits, la somme entière est infinie. Quand on compare avec le cas précédent, on voit que la nuance est subtile : la vitesse à laquelle les termes deviennent petits influence sur le fait que la somme est finie ou non.

Remarquons que la divergence de cette série était connue depuis le moyen-âge d'après les travaux du français Nicolas Oresme.

A propos de la situation présentée, on pourra consulter
`http ://images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html`

1.3 Séries entières

On sait que, quand x est proche de 0, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \tag{1.2}$$

où n est fixé et où $o\left(x^n\right)$ est un terme de la forme $x^n\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Le développement de Taylor nous donne donc une approximation de e^x mais seulement quand x se rapproche de 0 et à n fixé. On ne sait pas si à x fixé, le développement est d'autant meilleur que n est grand. En particulier, peut-on écrire

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

avec une somme infinie ? Cela serait pratique pour calculer ne serait-ce que e. En effet, seules les sommes et produits sont réellements calculables. Est-ce ainsi qu'une calculette calcule e^x ? Et si oui, quels nombres peuvent ainsi être calculés par une somme infinie ?

Les scientifiques indiens ont repris les travaux des grecs de l'antiquité et ont introduit les fonctions sin et cos. Pour calculer leur valeur, ils mettent au point une méthode de calcul qui se traduirait par le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Ces méthodes seront reprises et développées par les perses et les arabes avant de revenir en occident. Depuis longtemps, ces sommes infinies sont utilisées concrètement.

1.4 Des calculs étranges

Regardons le calcul formel suivant

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$$

donc

$$0 = 1 + (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) \quad \text{puis} \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = -1\ .$$

On voit bien qu'il y a anguille sous roche. Notre problème est bien sûr d'avoir manipulé des sommes infinies qui ne sont pas définies. Ici, on sent bien l'arnaque, mais on peut faire des cas similaires plus subtiles : il faut définir proprement les choses pour savoir comment les manipuler. Ci-dessous, deux exemples de grands mathématiciens à l'époque où on commence à comprendre qu'il manque une théorie propre sur les sommes infinies.

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series $\odot\ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ **etc. in infinitum** $\sqcap$ **2.**

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ **etc. in infinitum.**

Exponatur et series $\odot$ **dimidiata:**

series ♉ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ **etc. in infinitum**

Quam ajo esse $\sqcap$ **1.**

Nam auferatur series ♉ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252}$ **etc. sive depressis fractionum Terminis**

series ♀ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ **etc. in infinitum.**

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ♉ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ♉ sive series $\odot$ **erit aequalis binario.**

Quod demonstrandum sumseramus.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) utilise une série divergente dans un calcul intermédiaire. Il obtient une valeur juste après soustraction de l'infini de chaque côté de l'égalité ! Remarquons au passage que les notations très différentes d'aujourd'hui comme le $\sqcap$ *pour l'égalité.*

205

DE

SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infiniteſimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſunt conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . .	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} +$ etc.
II. . . .	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} +$ etc.
III. . . .	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc.
	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ etc.
IV. . . .	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.
	$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 +$ etc.

Cc 3 §. 2.

§. 3. Ex ſpecie ſecunda Leibnitius primus hanc contemplatus eſt ſeriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{ etc.}$$

cuius ſummam valere $= \frac{1}{2}$ ſtatuerat, his ſatis firmis rationibus innixus: Primum enim haec ſeries prodit, ſi

[illegible]

quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 +$ etc. deberet eſſe:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{ etc.}$$

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) se questionne sur le sens des sommes infinies. Il dit par exemple que Leibniz pense que $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ *vaut* $1/2$ *mais que cela reste contesté. Il montre que les valeurs* 0 *ou* 1 *sont possibles mais donc qu'il est normal de penser que le vrai résultat est la moyenne. Il donne aussi un exemple de série dont la somme vaut* $-\infty$ *ou* $+\infty$ *suivant le raisonnement et conclut donc que le résultat doit être une valeur réelle intermédiaire !*

2 Notions et propriétés de base

Pour le moment, nous n'avons pas écrit les choses rigoureusement. Typiquement, les « ... » sont souvent problématiques (peut-on trouver une unique logique pour boucher les trous ?).

2.1 Définitions et notations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leq q$, on note $\sum_{n=p}^{q} u_n$ la somme des termes depuis $n = p$ jusqu'à $n = q$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{q-1} + u_q \ .$$

On introduit les *sommes partielles* comme étant les nombres

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + \ldots + u_N$$

pour $N \in \mathbb{N}$. On appelle *série de terme général* u_n et on note $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ la suite des sommes partielles S_N.

Si la suite des sommes partielles converge quand N tend vers $+\infty$ vers un nombre $S \in \mathbb{C}$, on dit que *la série converge* ou *la série est convergente* et $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$ est appelé *somme de la série*. On peut alors noter $S = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que *la série diverge* ou *la série est divergente* et $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'a aucun sens en tant que nombre. Concernant la convergence ou divergence de la série, on parle de *nature* de la série.

Si la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ est convergente et de somme S, on appelle *restes* les termes du type $S - S_N = S - \sum_{n=0}^{N} u_n$ que l'on peut noter $R_N = S - S_N = \sum_{n\geq N+1} u_n$. Par définition, ce reste tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (s'il y a convergence... mais écrire un reste n'a pas de sens si la série diverge).

Notons que le choix de faire partir l'indice n à $n = 0$ n'est pas obligatoire et on peut regarder des séries $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ ou avec un autre point de départ.

Le premier écueil est de confondre la suite du terme général (u_n) avec la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$. La série est la suite des sommes partielles. Regarder la convergence de la suite du terme général (u_n) n'est pas ce qu'on se demande quand on se pose la question de la convergence de la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$.

L'objet « série » $(\sum_n u_n)$ est une suite. Il est important de ne pas le confondre avec l'objet « somme » $\sum_n u_n$ qui est la limite de la série, qui d'ailleurs n'existe pas quand la série diverge. Certes, la différence d'écriture est subtile, ce n'est pas une convention générale qui se retrouve partout en dehors de ce cours et on fera parfois des oublis et abus dans ces notations, mais il est important de garder cette différence en tête. L'objet « série » ne peut se trouver que dans des phrases du type « converge », « diverge », « a pour limite »…. Un calcul du type $2 + (\sum_n u_n)$ est louche. Si on peut écrire $2 + \sum_n u_n$ au sens que le deuxième terme est la somme de la série, ceci ne peut s'écrire que une fois que l'on sait que la série converge.

L'indice n dans la sommation est un indice muet. On peut lui préférer d'autres indices comme k, p etc. et on peut aussi changer d'indice en posant par exemple $n = 2p$ pour écrire $(\sum_{n \text{ pair}} u_n) = (\sum_p u_{2p})$. Dans tous les cas, l'indice de sommation ne peut pas apparaître en dehors de la somme. S'il le fait, c'est souvent indice d'une erreur de calcul ou dans les concepts. Cela peut aussi être dû à une mauvaise notation où n sert à deux choses différentes… ce qui amènera à une erreur à coup sûr. En particulier, la somme d'une série $\sum_n u_n$ ne peut pas dépendre de n !

2.2 Propriétés élémentaires

Les séries n'étant qu'une écriture particulière de suites, les propriétés connues des limites des suites nous donne directement des propriétés élémentaires pour les séries.

Proposition 1.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \lambda u_n)$ ont même nature c'est-à-dire qu'elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux. Si elles convergent alors les sommes vérifient $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$.*

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries convergentes, alors $(\sum (u_n + v_n))$ converge et a pour somme $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$.

Démonstration : Toutes les propositions se démontrent de la même façon en utilisant les propriétés élémentaires des limites de suites. Faisons par exemple le cas de la somme. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n$$

car il s'agit d'une somme finie de termes et donc leur ordre peut être changé. Par hypothèse, les deux sommes de droite convergent vers des limites $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ quand N tend vers $+\infty$. Donc la somme de gauche converge vers la somme des limites quand $N \to \infty$. □

⚠ Le mécanisme de la démonstration ci-dessus est important : on ne manipule surtout pas une somme infinie sans précaution et encore moins sans savoir si elle converge ou pas. On verra par exemple que l'ordre des termes dans une somme infinie peut changer le résultat de la somme ! Il est donc important de se ramener d'abord à une somme finie de termes en passant d'abord par les sommes partielles puis de faire tendre le nombre de termes vers l'infini. Ce mécanisme de preuve sera commun à quasiment toutes les démonstrations.

⚠ Au passage, on notera qu'il n'y a pas de résultat sur une série du type $(\sum_n u_n v_n)$ puisqu'il n'y a pas de rapport entre $\sum_{n=0}^N u_n v_n$, $\sum_{n=0}^N u_n$ et $\sum_{n=0}^N v_n$.

Notons que les résultats ci-dessus donne une structure d'espace vectoriel aux séries convergentes. La proposition suivante insiste sur le fait que la nature d'une série est une propriété asymptotique et ne dépend pas des premiers termes de la série (ce qui n'est évidemment pas le cas de la somme totale en cas de convergence).

Proposition 1.2. *Si $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ sont deux séries telles qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$, alors $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ ont même nature.*

Pour tous rangs n_1 et n_2, les séries $(\sum_{n\geq n_1} u_n)$ et $(\sum_{n\geq n_2} u_n)$ ont même nature.

Démonstration : On regarde de nouveau les sommes partielles. Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$, alors pour tout $N \geq n_0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} v_n + \left(\sum_{n=0}^{n_0}(u_n - v_n)\right) .$$

Les suites des sommes partielles ne diffèrent donc que d'une constante $\sum_{n=0}^{n_0}(u_n - v_n)$ pour n assez grand. Elles convergent donc ou divergent donc en même temps.

La deuxième propriété est une conséquence de la première en rajoutant aux débuts des séries suffisamment de termes nuls. □

Le critère de divergence suivant est important.

Proposition 1.3. *Soit $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ une série de termes complexes. Si elle est convergente alors (u_n) tend vers 0. Autrement dit, si (u_n) ne tend pas vers 0 alors $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ diverge.*

Démonstration : Supposons que $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ tende vers une limite S. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. □

⚠ Il s'agit d'un critère de divergence puisque prouver que (u_n) tend vers 0 <u>n'implique pas</u> que $(\sum u_n)$ converge. Il s'agit pourtant d'une erreur très classique que beaucoup trop d'étudiants font malgré les avertissements.

Exemples : La série $1-1+1-1+1-1+\ldots$ mentionnée par Euler est donc divergente. Il est normal de ne pas pouvoir définir précisément sa somme. De même, le calcul $1+2+4+8+\ldots=-1$ ne veut donc rien dire. Pour les séries $(\sum 1/2^n)$ et $(\sum 1/n)$, le terme général tend vers $0\ldots$ et donc on ne peut rien en déduire. D'ailleurs la première converge alors que la deuxième diverge.

Nous allons passer une partie de ce cours sur les séries à termes positifs. Une des raisons vient de la propriété suivante. Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes, on dit qu'elle est *absolument convergente* si $(\sum |u_n|)$ est une série convergente de termes réels positifs. Dans le cas contraire, on dire qu'elle *diverge en valeur absolue.*

Proposition 1.4. *Soit $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ une série de termes généraux $(u_n)\subset\mathbb{C}$ qui converge absolument. Alors $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ est une série convergente dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration : On utilise le critère de convergence de Cauchy dans $\mathbb{C}$: les sommes partielles $S_N=\sum_{n=0}^N u_n$ forment une suite convergente si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \ \exists N_0\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall P>Q\geq N_0\ ,\ \ |S_P-S_Q|\leq\varepsilon\ .$$

Or

$$|S_P-S_Q|=\left|\sum_{n=Q+1}^{P} u_n\right|\leq\sum_{n=Q+1}^{P}|u_n|=\tilde{S}_P-\tilde{S}_Q$$

où $\tilde{S}_N=\sum_{n=0}^N|u_n|$ représente la somme partielle de la série $(\sum|u_n|)$. Comme cette dernière est supposée convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et l'estimation ci-dessus montre que c'est aussi le cas pour (S_N). $\square$

3 Les séries géométriques

Les séries géométriques forment un type de séries très important. Elles se rencontrent dans de nombreux problèmes et serviront de séries de références pour l'étude d'autres séries plus complexes.

Définition 1.5. *Soit $a\in\mathbb{C}$. On appelle série géométrique de raison a une série de la forme $(\sum_{n\geq n_0} a^n)$.*

Le cœur de cette partie est la formule suivante qu'il est important de connaître. Notons qu'elle semble avoir été connue des Egyptiens (papyrus de 1650 av. JC) et qu'elle apparaît comme la proposition 35 des éléments d'Euclide (300 av. JC)

Proposition 1.6. *Soient $p \geq q$ deux entiers de $\mathbb{Z}$ et soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. Alors*

$$\sum_{n=q}^{p} a^n = a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p = \frac{a^q - a^{p+1}}{1-a} \ .$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence ou simplement en constatant que

$$\begin{aligned}(1-a)(a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p) &= a^q - a^{q+1} + a^{q+1} - a^{q+2} + \ldots + a^p - a^{p+1} \\ &= a^q - a^{p+1} \ .\end{aligned}$$

□

On peut retenir la formule ci-dessus par la phrase

« *Premier écrit moins premier pas écrit sur un moins la raison.* »

Bien entendu, le cas $a = 1$ est trivial mais doit toujours se traiter à part.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.7. *La série géométrique $(\sum_n a^n)$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans le cas où $|a| < 1$, alors la somme est donnée par $\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

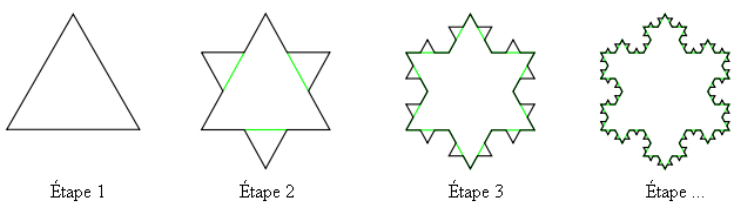
Démonstration : Soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n$ les sommes partielles. Si $a = 1$, alors $S_N = N+1 \to +\infty$ et donc la série diverge. Si $a \neq 1$, alors la formule ci-dessus donne $S_N = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ qui a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$ et alors $a^{N+1} \to 0$. □

Exemple : On a donc proprement justifié que $(\sum_{n\geq 1} 1/2^n)$ converge et que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2} = 1 \ .$$

Application : aire du flocon de Von Koch

Le flocon de Helge Von Koch (1870-1924, Suède) se construit à partir d'un triangle et en ajoutant à chaque étape un triangle sur le tiers central de chaque côté de l'étape précédente.



Prenons comme unité d'aire la surface du triangle de départ. A l'étape 2, on ajoute 3 triangles d'aire 1/9. Puis à l'étape 3, on ajoute 12 triangles d'aire 1/81, puis 12×4 triangles d'aire $1/9^3$ etc. On se persuade rapidement qu'à l'étape n, on ajoute $3 \times 4^{n-2}$ triangles de taille $1/9^{n-1}$. On obtient donc comme aire totale

$$\begin{aligned} 1 + 3\frac{1}{9} + 12 \times \frac{1}{81} + \ldots &= 1 + \sum_{n \geq 2} 3 \frac{4^{n-2}}{9^{n-1}} = 1 + \frac{3}{4} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &= 1 + \frac{3}{4} . \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3} . \frac{9}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

En particulier, on obtient une aire finie, alors qu'elle est entourée par une courbe de longueur infinie.

Chapitre 2 : Séries de termes positifs

Nous avons vu que la convergence en valeur absolue d'une série $(\sum u_n)$ implique sa convergence. De ce fait, on est ramené à l'étude d'une série de termes réels positifs $(\sum |u_n|)$. Le but de ce chapitre est de donner des outils pour étudier cette convergence.

La plupart des résultats et critères énoncés dans ce chapitre sont spécifiques aux séries à termes positifs et ne doivent pas être utilisés dans les cas où le terme de la série change de signe. On notera quand même que :

- comme $(\sum(-u_n))$ et $(\sum u_n)$ ont même nature, on peut aussi appliquer les résultats à des séries à termes négatifs.
- comme $(\sum_{n\geq N} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ont même nature, on peut appliquer les résultats même si les premiers termes ne sont pas de signe constant.

En résumé, on écrira les théorèmes dans le cadre des séries à termes positifs, mais ils restent valables si les termes sont tous réels et de même signe à partir d'un certain rang.

1 Critères de comparaison

Commençons par noter que si $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ est une série de termes positifs, alors les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N}$ forment une suite croissante et seuls deux comportements sont possibles : S_N tend vers l'infini et diverge, ou S_N reste bornée et converge. On en déduit le théorème suivant.

Proposition 2.1. *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries de réels positifs tels que $u_n \geq v_n \geq 0$. Si $(\sum u_n)$ converge, alors $(\sum v_n)$ converge et les sommes respectives U et V vérifient $U \geq V$. Si $(\sum v_n)$ diverge, alors $(\sum u_n)$ diverge.*

Démonstration : Supposons que $(\sum u_n)$ converge, alors la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est majorée par la somme $U = \sum_{n\geq 0} u_n$. Donc $\sum_{n=0}^{N} v_n$ est une suite croissante majorée par U et donc convergente. Par ailleurs, l'ordre des limites est évident. La deuxième partie de la proposition est la contraposée de la première. □

Pour une série de termes positifs qui tendent vers 0 (donc non trivialement divergente), la question fondamentale est de savoir à quelle vitesse les termes tendent vers 0. La proposition ci-dessus dit exactement cela : plus les termes généraux sont petits, plus la série a des chances de converger.

En outre, remarquons que nous avons vu que les premiers termes ne changent pas la nature d'une série. Donc pour ce critère comme pour les suivants, on peut se contenter d'être à termes positifs et vérifier les hypothèses de comparaison seulement à partir d'un certain rang.

Exemples :

- On considère la série $(\sum_n \frac{1}{n2^n})$ qui est à termes positifs. On a $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum_n \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ et donc convergente. Donc $(\sum_n \frac{1}{n2^n})$ est aussi une série convergente.
- On considère la série $(\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}})$ qui est à termes positifs. On a $1/\sqrt{n} \geq 1/n$ pour $n \geq 1$ et comme $(\sum \frac{1}{n})$ est une série divergente, alors $(\sum \frac{1}{\sqrt{n}})$ est aussi une série divergente.

On a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries de réels positifs. Si les termes généraux sont équivalents c'est-à-dire que $u_n \sim v_n$ alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ ont même nature (donc convergent ou divergent toutes les deux). Si u_n est négligeable devant v_n, c'est-à-dire que $u_n = o(v_n)$, alors $(\sum u_n)$ converge si $(\sum v_n)$ converge et $(\sum v_n)$ diverge si $(\sum u_n)$ diverge. Si u_n est du même ordre de grandeur ou négligeable devant v_n, c'est-à-dire que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $(\sum u_n)$ converge si $(\sum v_n)$ converge et $(\sum v_n)$ diverge si $(\sum u_n)$ diverge.*

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $u_n/v_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ et donc $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$. Il suffit donc d'utiliser la proposition précédente avec ε fixé. De même, si $u_n = o(v_n)$ ou si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors il existe une constante C et un rang à partir de duquel $u_n \leq Cv_n$. □

Exemple : On considère la série $(\sum \sin(\frac{1}{3^n}))$ qui est à termes positifs. Comme $\frac{1}{3^n}$ tend vers 0 quand n tend vers 0 et comme $\sin x \sim x$ près de zéro, on a $\sin(\frac{1}{3^n}) \sim \frac{1}{3^n}$. Or la série $(\sum \frac{1}{3^n})$ est une série géométrique convergente, donc la série $(\sum \sin(\frac{1}{3^n}))$ est aussi convergente.

2 Séries de Riemann

Nous avons vu une première famille importante de séries : les séries géométriques. Comme on a vu ci-dessus, cette famille de série est utile pour étudier des séries de comportement similaire de type exponentielle. Nous allons voir ici d'autres familles de séries.

En particulier les séries de Riemann sera l'autre famille-étalon fondamentale permettant d'étudier les convergences de séries de comportement de type polynômial.

2.1 Comparaison avec une intégrale

On a la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$ et décroissante. Alors la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge si et seulement si la limite $\lim_{X\to+\infty}\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.*

Démonstration : Comme f est décroissante, on a

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n)$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)\ .$$

Comme f est positive, la fonction $X \mapsto \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante. Donc si cette fonction n'a pas de limite, c'est qu'elle tend vers $+\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. L'inégalité de droite montre que $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$ tend vers l'infini et donc les sommes partielles diverge.

Si $\lim_{X\to+\infty}\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie alors $N \mapsto \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$ est bornée et $\sum_{n=2}^N f(n)$ est majorée. Comme $f \geq 0$, $N \mapsto \sum_{n=2}^N f(n)$ est croissante. Comme une suite croissante et majorée converge, alors la suite des sommes partielles converge bien et donc la série par définition. □

On remarque que la borne de démarrage de l'intégrale n'est en fait pas importante et on peut remplacer 1 par ce que l'on veut.

2.2 Séries de Riemann

Dans cette partie, nous allons voir le cas particulier des *séries de Riemann* qui sont les séries qui s'écrivent sous la forme

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

avec $\alpha > 0$ (notons que si $\alpha \leq 0$, la série diverge trivialement car son terme général ne tend pas vers 0). Leur nom vient évidemment du grand mathématicien Bernhard Riemann (1826-1866, Allemagne).

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 2.4. *La série de Riemann* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration : On applique alors la proposition précédente à $f(x) = 1/x^\alpha$. Pour $\alpha \neq 1$, $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{X^{\alpha-1}}\right)$ ce qui montre le théorème car la limite existe si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \ln X$ et on est bien dans un cas de divergence. $\square$

Les deux exemples fondamentaux sont les suivants.

Exemples :

- La série $(\sum_{n\geq 1} 1/n)$ diverge vers $+\infty$ à une vitesse logarithmique.
- La série $(\sum_{n\geq 1} 1/n^2)$ converge.

En retenant ces deux exemples et le fait que l'exposant 1 est l'exposant critique, on ne peut se tromper sur la nature des séries. Quand on étudie la nature de séries de type polynomiale, on pourra alors se ramener à une série de Riemann par les théorèmes de comparaison.

Exemples :

- Considérons la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$. On a $n/(n^2+1) \sim 1/n$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, les séries sont à termes positifs. Donc comme la série $(\sum 1/n)$ diverge, la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$ diverge aussi.
- Dans le texte du chapitre 1, Leibniz s'intéresse à la somme des inverses des nombres triangulaires, c'est-à-dire à la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n(n+1)})$. On a une série à termes positifs et $\frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$. Donc la série étudiée par Leibniz est bien convergente.
- Considérons la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$. Ce n'est pas une série à termes positifs, mais si on regarde la convergence absolue, on a $|\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. La série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^{3/2}})$ est convergente donc $(\sum |\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}|)$ est convergente et $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$ est absolument convergente (et donc convergente).

Pour sa culture mathématique, on pourra retenir les formules suivantes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \ \sim\ \ln n + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec γ la constante d'Euler $\gamma \simeq 0{,}577$. On note

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

avec $s > 1$. On a

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \;=\; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\zeta(4) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \;=\; 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots \;=\; \frac{\pi^4}{90}\ .$$

En fait, il existe des formules explicites pour les sommes de séries de Riemann d'exposant entier pair. A l'inverse, très peu de choses sont connus sur les sommes pour les entiers impairs. Par exemple si on sait que

$$\zeta(3) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \;\simeq\; 1{,}202$$

est irrationnel, on ne sait pas s'il est transcendant c'est-à-dire s'il est solution d'une équation polynomiale. On ne sait pas quelles autres valeurs $\zeta(2n+1)$ sont irrationnelles.

2.3 Séries de Bertrand

Dans ce paragraphe, nous allons parler des séries de Bertrand, du nom de Joseph Bertrand (1822-1900, France). Il est intéressant de connaître ces séries, mais cette famille est bien moins importante que les séries géométriques et les séries de Riemann. Les séries de Bertrand sont les séries de la forme

$$(\sum u_n) \;=\; \left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)\ .$$

Notons que si $\alpha > 1$, alors $u_n = o(1/n^{\alpha-\varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\alpha - \varepsilon > 1$. On a alors que $1/n^{\alpha-\varepsilon}$ est le terme d'une série de Riemann convergente et donc la série de Bertrand converge dans ce cas. De même, si $\alpha < 1$, alors $1/n = o(u_n)$ et la série de Bertrand diverge. Le cas intéressant est donc le cas $\alpha = 1$.

Proposition 2.5. *La série de Bertrand* $\left(\sum_n \frac{1}{n\ln^\beta n}\right)$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

Démonstration : On utilise de nouveau le critère de comparaison avec une intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x\ln^\beta x}$. Il s'agit bien d'une fonction décroissante pour n assez grand (même si $\beta < 0$). Par ailleurs, si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)}\right]_2^X$$

et donc une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Si $\beta = 1$, alors

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_2^X$$

et l'intégrale n'a pas de limite finie et donc la série diverge. $\square$

Notons que l'on pourrait par le même principe voir que la série $(\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n})$ diverge et continuer à enchaîner les ln.

3 Règles de D'Alembert et de Cauchy

Les critères de d'Alembert et de Cauchy sont des critères d'utilisation rapide pour savoir si une série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. Comme on ne regarde que la convergence de $(\sum |u_n|)$, ces critères sont reliés à ce chapitre. Mais on les utilise aussi pour des séries de termes non positifs, et donc les énoncés seront généraux.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783, France) fut avec Diderot chargé d'éditer l'Encyclopédie. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857, France) fut un mathématicien très important dans son temps. On lui doit en particulier un cours à l'Ecole Polytechnique qui servit de refondation à l'analyse en utilisant des preuves rigoureuse avec la technique des « epsilon-delta ».

Théorème 2.6. Règle de D'Alembert.
Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes non nuls. Si le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ a une limite finie ℓ et si $\ell < 1$, alors la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. Si $|u_{n+1}/u_n|$ a une limite finie ℓ et si $\ell > 1$, alors la série diverge trivialement.

Démonstration : Le cas de la limite $\ell > 1$ est trivial car alors, à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| \geq |u_n| > 0$ et la suite ne peut tendre vers 0. Supposons que $\ell < 1$ et prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < 1 - \varepsilon$. Alors, il existe un rang N à partir duquel $|u_{n+1}/u_n| \leq 1 - \varepsilon$. Par récurrence, on obtient donc que $|u_{N+k}| \leq |u_N|(1-\varepsilon)^k$. Comme $(\sum (1-\varepsilon)^k)$ est une série géométrique convergente, alors par comparaison, $(\sum |u_{N+k}|)$ est une série convergente et $(\sum u_n)$ est une série absolument convergente. $\square$

Théorème 2.7. Règle de Cauchy.
Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes non nuls. Si la racine $|u_n|^{1/n}$ a une limite finie ℓ et si $\ell < 1$, alors la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. Si $|u_n|^{1/n}$ a une limite finie ℓ et si $\ell > 1$, alors la série diverge trivialement.

Démonstration : La preuve est très semblable. Faisons le cas $\ell < 1$ et posons $\alpha \in]\ell,1[$. A partir d'un rang N, on a $|u_n|^{1/n} \leq \alpha$ et donc $|u_n| \leq \alpha^n$. Par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. $\square$

Il est important de retenir que le cas $\ell = 1$ est non-concluant, c'est-à-dire qu'il contient des exemples de convergence et de divergence. En fait, on pourra retenir que les règles de D'Alembert et Cauchy concernent des cas de convergence type géométrique (comme les preuves le montrent). Ainsi, elles ne peuvent conclure si la série n'est pas de type géométrique.

Exemples :

- On considère la série $(\sum \frac{n^2}{3^n})$. Posons $u_n = n^2/3^n$, on a
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2 3^n} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1$$
et donc la série converge d'après la règle de D'alembert.

- On considère la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (1-1/n)^{n^2}$. On a
$$|u_n|^{1/n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-1/n)} = e^{n(-1/n+o(1/n))} = e^{-1+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$
et donc la série converge d'après la règle de Cauchy.

- On considère la série $(\sum 1/n)$. On sait que la série diverge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n/(n+1) \to 1$ qui est le cas non concluant de la règle de D'Alembert.

- On considère la série $(\sum 1/n^2)$. On sait que la série converge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n^2/(n+1)^2 \to 1$ qui est le cas non concluant de la règle de D'Alembert.

Exemple avec calcul de la somme :
Dans un pays (imaginaire), les couples veulent un et un seul garçon. Chaque famille fait donc des enfants et s'arrêtent dès qu'elle a un garçon. Les familles sont donc du type G, FG, FFG, FFFG etc. On supposera que pour chaque naissance, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon. On se demande s'il y a plus ou moins de garçons que de filles dans ce pays.

Il est admis que chaque famille a exactement un garçon. Comptons les filles :

Famille G	proportion 1/2	0 filles
Famille FG	proportion 1/4	1 filles
Famille FFG	proportion 1/8	2 filles
Famille FFFG	proportion 1/16	3 filles
...		

La moyenne du nombre de filles par famille est donc de $\sum u_n$ avec $u_n = n/2^{n+1}$. Commençons d'abord par vérifier que cette modélisation n'est pas absurde et que $(\sum u_n)$ converge. On a $u_{n+1}/u_n = \frac{1}{2}(n+1)/n \to \frac{1}{2} < 1$ et donc la série est bien convergente d'après la règle de D'Alembert.

Pour calculer la somme, nous n'avons pas le droit de travailler sur la somme infinie mais nous devons passer par les sommes partielles. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{N+1}} \\
&= \frac{1/4 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \frac{1/8 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \frac{1/16 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \ldots + \frac{1/2^{N+1} - 1/2^{N+2}}{1-1/2} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} - \frac{N}{2^{N+1}} \\
&= \frac{1/2 - 1/2^{N+1}}{1-1/2} - \frac{N}{2^{N+1}} \\
&= 1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}
\end{aligned}$$

Quand N tend vers $+\infty$, on obtient la somme de la série qui vaut donc 1. Il y a en moyenne une fille par famille, c'est-à-dire autant que de garçons ! Ce paradoxe est facilement levable : à aucun moment dans notre modèle nous n'avons parlé d'avortement sélectif ou d'abandon d'enfants, donc chaque naissance a autant de chance d'être un garçon ou une fille.

Chapitre 3 : Séries de termes quelconques

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux séries $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ avec (u_n) une suite de nombres complexes quelconques. Nous avons vu que (u_n) doit tendre vers 0 pour pouvoir espérer que la série converge. Nous avons aussi déjà vu que si $(\sum |u_n|)$ est une série convergente, alors c'est aussi le cas de $(\sum u_n)$. Mais il est en fait possible que $(\sum u_n)$ converge sans que $(\sum |u_n|)$ converge. Plutôt que d'illustrer cela avec un exemple artificiel, prenons l'exemple type de la série $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ et admettons que cette série converge (nous en verrons la preuve dans pas longtemps). On peut même montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \;=\; \ln 2 \;.$$

Cette série converge, mais $(\sum |u_n|) = (\sum \frac{1}{n})$ est divergente. La série $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ converge donc mais ne converge pas absolument. Pour les séries de nombres complexes quelconques, il y a donc trois degrés de nature :

1. la série $(\sum u_n)$ diverge,
2. la série $(\sum u_n)$ converge mais ne converge pas absolument,
3. la série $(\sum u_n)$ converge absolument.

Quand on demande la nature de la série, il est important de préciser entre les deux derniers cas. Nous verrons en effet plus tard que certaines manipulations ne sont autorisées que si la série converge absolument.

Profitons aussi de notre série de référence $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ pour voir que les critères de comparaison du chapitre précédent ne sont pas valables dans le cas d'une série dont les termes ne sont pas tous positifs. Considérons par exemple les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n\ln n}$. On a

$$\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \;\longrightarrow\; 1$$

et donc $u_n \sim v_n$. On verra que $(\sum u_n)$ converge. Si $(\sum v_n)$ converge aussi, alors ce devrait être le cas de $(\sum(v_n - u_n))$ mais $v_n - u_n = \frac{1}{n \ln n}$ est une série de Bertrand divergente. Donc $(\sum v_n)$ diverge. On a donc deux séries de termes généraux équivalents mais de nature différente.

Nous allons devoir étudier des outils plus perfectionnés pour étudier les cas des séries de termes de signe quelconque qui converge mais pas en valeur absolue.

2 Séries alternées

Le cas typique et le plus simple est celui des séries alternées.

Définition 3.1. *Une série $(\sum u_n)$ est appelée série alternée si le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ un réel positif (ou de la forme $u_n = (-1)^{n+1} v_n$).*

La convergence des séries alternées est souvent obtenue par le critère suivant.

Théorème 3.2. *Soit $(\sum u_n)$ une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$. Si (v_n) est une suite décroissante et convergente vers 0, alors $(\sum u_n)$ est une série convergente.*

Démonstration : Soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ les sommes partielles et soient $P_K = S_{2K}$ et $Q_K = S_{2K+1}$ les suites extraites paire et impaire. Nous allons montrer que P_K et Q_K sont deux suites adjacentes, c'est-à-dire que (P_K) est décroissante, (Q_K) est croissante et $|P_K - Q_K|$ tend vers 0.

La suite (P_K) est décroissante car $P_{K+1} - P_K = u_{2K+2} + u_{2K+1} = v_{2K+2} - v_{2K+1}$ et (v_n) est décroissante. On montre de même que (Q_K) est croissante. Par ailleurs, $P_K - Q_K = -u_{2K+1} = v_{2K+1}$ tend bien vers 0. On a donc deux suites adjacentes et elles convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour finir, il suffit de voir que si les suites extraites paire et impaire ont même limite, alors la suite totale converge. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe des rangs K_0 et K_1 tels que si $K \geq K_0$, alors $|S_{2K} - \ell| \leq \varepsilon$ et si $K \geq K_1$, alors $|S_{2K+1} - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $N_0 = \max(2K_0, 2K_1 + 1)$, on a alors pour tout $N \geq N_0$, $|S_N - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui montre bien que les sommes partielles convergent vers ℓ. $\square$

Le cas typique est celui de la série alternée $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ qui converge puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant. C'est aussi le cas de la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ qui converge mais pas en valeur absolue.

Considérons la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (-1)^n \sin(1/n)$. On pourrait dire que $u_n \sim (-1)^n/n$ qui est le terme général d'une série convergente. Sauf que cela ne permet pas de conclure que $(\sum u_n)$ converge car on ne peut utiliser cette comparaison dans le cas de séries de termes de signe quelconque (voir exemple de l'introduction). Il faut donc dire que $\sin(1/n)$ est une suite positive décroissante vers 0 et utiliser directement le théorème précédent.

Il est important de montrer que $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ décroissante. En effet, si on reprend l'exemple de $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}$ de l'introduction, nous avons vu que $(\sum u_n)$ diverge. Pourtant, pour n assez grand, $1/n > 1/n \ln n$ et donc u_n est du signe de $(-1)^n$. Si on ne peut utiliser le théorème précédent, c'est bien que $|u_n|$ n'est pas décroissant.

3 Transformation d'Abel

Dans cette partie, nous allons parler de la transformation d'Abel et du critère de convergence associé. Il ne sera pas demandé de connaître par cœur les résultats de cette partie, mais on pourra demander de les appliquer avec l'énoncé rappelé, ou d'utiliser une feuille de notes qui sera autorisée aux examens.

Niels Henrik Abel (1802-1829, Norvège) est avec Evariste Galois (1811-1832, France) le représentant de la figure romantique du génie mathématique qui meurt jeune et incompris. Son nom est associé à un des plus grand prix mathématique, équivalent du prix Nobel.

La transformation d'Abel est une intégration par partie discrète. On considère une somme $\sum_{n=0}^{N} u_n$ avec $u_n = a_n b_n$. On va « dériver » b_n c'est-à-dire faire apparaître $b_{n+1} - b_n$ et on va « intégrer » a_n, c'est-à-dire faire apparaître $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_N b_N \\
&= a_0(b_0 - b_1) + (a_0 + a_1)(b_1 - b_2) + (a_0 + a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \ldots \\
&\quad + (\sum_{k=0}^{N} a_k)(b_N - b_{N+1}) + (\sum_{k=0}^{N} a_k) b_{N+1} \\
&= A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n
\end{aligned}$$

avec

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \delta b_n = b_{n+1} - b_n \ .$$

Cette transformation a son intérêt propre et permet au passage de démontrer le critère suivant.

Théorème 3.3. Abel (1802-1829, Norvège)
Soit $(\sum u_n)$ *une série de nombres complexes dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*
i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*
ii) la série $(\sum |b_{n+1} - b_n|)$ *est convergente,*
iii) la suite (b_n) *est tend vers* 0*.*
Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Pour prouver la convergence de la série $(\sum u_n)$, on regarde les sommes partielles. Par la transformation d'Abel, on sait que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n \tag{3.1}$$

avec les notations ci-dessus. Les hypothèses nous disent que la suite (A_n) est uniformément bornée en n, disons $|A_n| \leq M$, que (b_n) tend vers 0 et que $(\sum \delta b_n)$ est une série absolument convergente. On en déduit que $|A_N b_{N+1}| \leq M|b_{N+1}|$ tend aussi vers 0 et que

$$|A_n \, \delta b_n| \leq M|\delta b_n|$$

est le terme positif d'une série qui converge. Donc $\sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n$ converge aussi et a bien une limite quand N tend vers $+\infty$. Revenant à (3.1), on obtient les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ ont une limite finie et donc que la série converge. □

En corollaire, on a un critère plus simple pour les cas standards.

Corollaire 3.4. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de nombres complexes dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*
i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*
ii) la suite (b_n) *est réelle décroissante et tend vers* 0*.*
Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Il suffit de voir que si (b_n) est réelle décroissante vers 0, alors $b_{n+1} - b_n \leq 0$ et

$$\sum_{n=0}^{N} |b_{n+1} - b_n| = -\sum_{n=0}^{N} (b_{n+1} - b_n) = b_0 - b_{N+1}$$

par une simplification en cascade. Comme b_{N+1} tend vers 0, les sommes partielles ont une limite et *ii*) du théorème d'Abel est vérifié. □

Exemples :

- Soit $(\sum(-1)^n b_n)$ une série alternée avec (b_n) réelle décroissante vers 0. On est dans le cadre du corollaire si on montre que $\sum_{k=0}^n (-1)^k$ est bornée. Mais cette suite ne fait que prendre les valeurs 1 puis 0, puis 1, puis 0… On en conclut que le critère des séries alternées est un corollaire du théorème d'Abel.

- Le cas typique qui n'est pas inclus dans les séries alternées mais qui peut se traiter avec la transformation d'Abel est la série $(\sum \frac{\cos n}{n})$. Notons que ce n'est pas une série alternée (par exemple $\cos n$ n'alterne pas toujours de signe). On pourrait rentrer dans le cadre du corollaire avec $a_n = \cos n$ et $b_n = 1/n$ si on sait montrer que les sommes partielles $\sum_{k=0}^n \cos k$ sont bornées. Par ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^n \cos k\right| &= \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right)\right| \\ &\le \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \le \frac{|1|+|e^{i(n+1)}|}{|1-e^i|} \\ &\le \frac{2}{|1-e^i|}\ .\end{aligned}$$

  On obtient bien que les sommes de cosinus sont uniformément bornés en n. Notons au passage qu'il est carrément possible de trouver la valeur des sommes $\sum_{k=0}^n \cos k$ avec juste un peu plus d'efforts.

4 Sommation par paquets

On pourrait vouloir ne pas sommer les termes d'une série un par un, mais en faisant des paquets. Le calcul suivant nous montre qu'il faut être prudent : $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ mais $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$. On pourrait penser que c'est parce que notre série n'a pas un terme qui tend vers 0, mais alors que penser de

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ =\ 0$$

et

$$1+\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots\ =\ 1\ ?$$

Formalisons un peu les choses. Soit $(\sum u_n)$ une série et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$ qui va marquer les débuts des paquets. On appelle *sommation par paquets* la série $(\sum v_n)$ avec $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$. Cela revient à dire que si $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ sont les sommes partielles, on ne considère que la suite extraite $(S_{\varphi(N)})$ qui somme directement par paquets d'indices $\varphi(N) \le n < \varphi(N+1)$.

Théorème 3.5. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante avec* $\varphi(0) = 0$*. Soit* $(\sum v_n)$ *avec* $v_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$ *la série consistant à sommer par paquets. Supposons que* $|\varphi(n+1) - \varphi(n)|$ *soit uniformément bornée, c'est-à-dire que la taille des paquets est bornée et supposons que* $u_n \to 0$ *(ou autrement* $(\sum u_n)$ *diverge trivialement). Alors* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *ont même nature.*

Démonstration : Si $(\sum u_n)$ converge, alors $(\sum v_n)$ aussi puisque ses sommes partielles ne forment qu'une suite extraite des sommes partielles de $(\sum u_n)$. Supposons maintenant que $(\sum v_n)$ converge et soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe N' tel que $\varphi(N') \leq N < \varphi(N')$. Soit M tel que $|\varphi(n+1) - \varphi(n)| < M$ pour tout n. On a

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\varphi(N')} u_n \right| = \left| \sum_{n=\varphi(N')+1}^{N} u_n \right| \leq M \max_{\varphi(N')+1<n\leq\varphi(N)} |u_n| \; .$$

Comme (u_n) tend vers 0, on obtient que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\varphi(N')} u_n \right| \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} 0 \; .$$

Quand N tend vers $+\infty$, N' doit aussi tendre vers $+\infty$. Comme les sommes partielles de la série sommée par paquets converge, cela doit aussi être le cas pour les sommes partielles de la série d'origine. $\square$

Remarquons que si la série converge, alors la sommation par paquets donne la bonne valeur de la somme.

Proposition 3.6. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série qui converge. Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante avec* $\varphi(0) = 0$*. Soit* $(\sum v_n)$ *avec* $v_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$ *la série consistant à sommer par paquets. Alors* $(\sum v_n)$ *converge aussi et les séries* $(\sum v_n)$ *et* $(\sum u_n)$ *ont même somme.*

Démonstration : Soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$ les sommes partielles. On a $T_N = S_{\varphi(N)}$, c'est-à-dire que la sommation par paquets consiste à regarder une sous-suite des sommes partielles. Comme (S_N) est une suite convergente, ses sous-suites sont aussi convergentes vers la même limite. $\square$

Exemple : On considère la série $(\sum_{n\geq 2} u_n)$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. A priori, c'est un bon candidat pour le critère des séries alternées... sauf que la suite $(1/(n+(-1)^n))_{n\geq 2}$ vaut $\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$... et n'est donc pas décroissante. Comme u_n tend vers 0, nous pouvons regarder la nature de la série en sommant par paquets de taille bornée, ici par paquets de 2. On a

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)}{2n+1+(-1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{2n-(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)}$$

Donc $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ est une suite négative et $v_n \sim \frac{-1}{4n^2}$. Ce que nous avons dit avec les séries à termes positifs se passe évidemment pareil avec les séries de termes négatifs, quitte à changer v_n en $-v_n$. On peut donc utiliser l'équivalence avec une série de Riemann convergente pour conclure que $(\sum v_n)$ converge et donc $(\sum u_n)$ aussi.

Au passage, notons que l'on peut traiter cet exemple par un développement limité. Comme les termes de la série ne sont pas de signe constant, on ne peut s'arrêter à un équivalent. Il faut aller jusqu'à ce que le reste soit contrôlé par le terme d'une série absolument convergente. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) \ .$$

Le terme général u_n est donc la somme d'une série alternée convergente et d'un reste dont la valeur absolue est contrôlée par le terme d'une série de Riemann convergente. Donc la série $(\sum u_n)$ est convergente.

5 Un dernier exemple

Concluons ce chapitre par le traitement d'exemple avec les diverses méthodes. Considérons la somme

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

c'est-à-dire la série $(\sum u_n)$ avec

$$u_n = \begin{cases} +1/n & \text{si} \quad n = 4p+1 \\ +1/n & \text{si} \quad n = 4p+2 \\ -1/n & \text{si} \quad n = 4p+3 \\ -1/n & \text{si} \quad n = 4p \end{cases}$$

Avec les séries alternées : on regarde une somme partielle $\sum_{n=1}^{N} u_n$. Si $N = 4p$, on peut la réorganiser (il s'agit d'une somme finie !) pour écrire

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{N-1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{N}\right) \ .$$

On fait ainsi apparaître deux sommes partielles de séries alternées qui ont une limite quand N tend vers $+\infty$. Donc $\sum_{n=1}^{4p} u_n$ a aussi une limite quand p tend vers $+\infty$. Comme pour les sommations par paquets, si $N \neq 4p$, il est à distance au plus 2 d'un multiple de 4 et comme les termes tendent vers 0, on peut remplacer N par ce multiple de 4 en ne faisant qu'une erreur qui tend vers 0.

Par le critère d'Abel : on pose $u_n = a_n b_n$ avec $b_n = 1/n$ et (a_n) la suite 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, $-1\ldots$ Evidemment, (b_n) est réelle décroissante vers 0 et les sommes $\sum_{k=0}^{n} a_k$ oscillent entre 0 et 2 et sont donc bornées. Donc on peut appliquer le corollaire du critère d'Abel et on obtient que la série converge.

Par sommation par paquets : on va faire des sommes par paquets de 4. On note d'abord que le terme général tend bien vers 0. On a

$$\begin{aligned}
u_{4p+1}+u_{4p+2}+u_{4p+3}+u_{4p+4} &= \frac{1}{4p+1}+\frac{1}{4p+2}-\frac{1}{4p+3}-\frac{1}{4p+4}\\
&= \frac{(4p+2)(4p+3)(4p+4)+(4p+1)(4p+3)(4p+4)}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)(4p+4)}\\
&\quad -\frac{(4p+1)(4p+2)(4p+4)+(4p+1)(4p+2)(4p+3)}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)(4p+4)}\\
&= \frac{(4^3p^3+4^2(2+3+4)p^2+o(p^2))+(4^3p^3+4^2(1+3+4)p^2+o(p^2))}{4^4p^4+o(p^4)}\\
&\quad -\frac{(4^3p^3+4^2(1+2+4)p^2+o(p^2))+(4^3p^3+4^2(1+2+3)p^2+o(p^2))}{4^4p^4+o(p^4)}\\
&= \frac{4^2\times 4p^2+o(p^2)}{4^4p^4+o(p^4)} \sim \frac{1}{4p^2}\,.
\end{aligned}$$

On obtient bien le terme général d'une série de Riemann convergente. De plus, l'équivalent ne change pas de signe, donc le paquet de 4 termes est lui aussi positif à partir d'un certain rang et on peut conclure de l'équivalence que la somme par paquet donne une série convergente. Comme les paquets sont de taille finie, la série $(\sum u_n)$ est aussi convergente.

Chapitre 4 : Compléments sur les séries

1 L'écriture décimale

Il nous est naturel d'écrire $0{,}33333\ldots = \frac{1}{3}$, mais pourtant cette écriture cache une somme infinie. En effet, la signification de $0{,}33333\ldots$ est

$$0{,}33333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

et il s'agit donc d'une somme infinie. Notons que l'écriture décimale infinie $0{,}a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ définit bien un nombre puisque la série $(\sum_n \frac{a_n}{10^n})$ est convergente. En effet, elle est composée de termes positifs. D'autre part, comme $\frac{a_n}{10^n} \leq 9\frac{1}{10^n}$ et comme $(\sum \frac{1}{10^n})$ est une série géométrique convergente, alors $(\sum_n \frac{a_n}{10^n})$ est convergente. On peut donc définir le nombre $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Par exemple, on a

$$0{,}33333\ldots = \sum_n \frac{3}{10^n} = 3\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}\ .$$

On a la propriété suivante.

Proposition 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel qui a pour écriture décimale $\lfloor x \rfloor, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ Alors x est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration : La démonstration générale est fastidueuse à cause des notations qui ne feraient que cacher les idées. Nous allons donc ne regarder que deux cas particuliers mais leur étude permettra de se convaincre de la généralité du raisonnement.

Soit $x = 0{,}170731707317073\ldots$ On a

$$\begin{aligned} x &= \frac{17073}{10^5} + \frac{17073}{10^{10}} + \frac{17073}{10^{15}} + \ldots = 17073 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{5n}} \\ &= 17073\,\frac{\frac{1}{10^5}}{1-\frac{1}{10^5}} = 17073\,\frac{1}{99999} \\ &= \frac{7}{41}\ . \end{aligned}$$

Maintenant, regardons le nombre $x = \frac{13}{7}$. On calcule son développement décimal comme à l'école en posant la division euclidienne. On s'aperçoit qu'à chaque étape, le reste doit être en 0 et 6. Donc soit on tombe sur 0 et la division s'arrête (nombre fini de chiffres), soit on retombe sur un reste déjà vu puisqu'on a seulement un nombre fini de choix. A partir de là, le processus tourne en boucle et le développement est périodique. On a ainsi

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{6}{7} = 1 + \frac{1}{10}\frac{60}{7} = 1{,}8 + \frac{1}{100}\frac{40}{7} = 1{,}85 + \frac{1}{1000}\frac{50}{7} \\ &= 1{,}857 + \frac{1}{10^4}\frac{10}{7} = 1{,}8571 + \frac{1}{10^5}\frac{30}{7} = 1{,}85714 + \frac{1}{10^6}\frac{20}{7} \\ &= 1{,}857142 + \frac{1}{10^7}\frac{60}{7} = 1{,}857142857142857142\ldots \end{aligned}$$

□

2 A propos des restes des séries

Pour le moment, nous avons surtout regardé si des séries convergeaient ou non. Nous avons aussi vu quelques sommes comme par exemple

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

ou

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

ou encore

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Ces sommes permettent de calculer e, $\ln 2$ ou π si on peut faire des sommes infinies, sauf que cela est bien sûr impossible. On devra donc faire une somme d'un nombre fini (mais grand) de termes et s'arrêter. Mais cela ne donnera aucune information sur la valeur des nombres si on n'a aucune estimation sur l'erreur commise. Le but de cette partie est d'avoir quelques estimations de ce type.

Définition 4.2. *Soit $(\sum u_n)$ une série convergente de somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et de sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. On appelle reste au rang N de la série l'erreur $R_N = S - S_N = \sum_{n\geq N+1} u_n$.*

Notre but est de trouver une estimation a priori de ce reste. Cela est possible dans plusieurs des cas que nous avons vus.

Proposition 4.3. *Soit $(\sum u_n)$ une série telle qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, M et $\alpha \in [0,1[$ tels que*

$$\forall n \geq N_0 \ , \ \ |u_n| \leq M\alpha^n \ .$$

Alors la série $(\sum u_n)$ converge absolument et pour tout $N \geq N_0$, le reste vérifie

$$|R_N| \ = \ \left|\sum_{n\geq N+1} u_n\right| \ \leq \ \frac{M}{1-\alpha}\alpha^{N+1} \ \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0 \ .$$

Démonstration : Comme $(\sum \alpha^n)$ est une série géométrique convergente, la convergence absolue de la série se déduit des théorèmes de comparaison. Pour obtenir une estimation du reste, on écrit que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{K} u_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{K} |u_n| \leq M \sum_{n=N+1}^{K} \alpha^n = M\frac{\alpha^{N+1}-\alpha^{K+1}}{1-\alpha}$$

et on fait tendre K vers l'infini en sachant que tous les termes ont bien une limite. On obtient alors

$$\left|\sum_{n\geq N+1} u_n\right| \leq M\frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \ .$$

□

Exemple : Pour tout $n \geq N+1$, on a

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{n-(N+1)} = \frac{(N+1)^{N+1}}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{n} \ .$$

Donc le reste de la série de e vérifie

$$R_N = \sum_{n\geq N+1} \frac{1}{n!} \leq \frac{(N+1)^{N+1}}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1} \frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} = \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{1}{(N+1)!} \ .$$

En prenant en compte les K premiers termes de la série $e = \sum \frac{1}{n!}$, on obtient donc e avec la précision assurée suivante :

K termes	5	10	15
erreur au plus	0,0105	$3{,}1 \times 10^{-7}$	$8{,}2 \times 10^{-13}$

(attention, les K premiers termes correspondent à prendre $N = K-1$ et par ailleurs notre estimation n'est pas valable avec $N = 0$).

Pour une série alternée, on a l'estimation suivante.

Proposition 4.4. *Soit (v_n) une suite de nombres positifs décroissante et tendant vers* 0. *Alors $(\sum_n (-1)^n v_n)$ est une série convergente dont le reste vérifie*

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n v_n \right| \leq v_{N+1} \ .$$

Démonstration : On a déjà vu que les sommes partielles paires et impaires S_{2p} et S_{2p+1} sont deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite. En outre, cette limite ℓ est coincée entre les deux suites. Si on s'arrête au rang N, alors l'écart entre S_N et S_{N+1} vaut v_{N+1} et comme ℓ est entre ces deux sommes, alors $|\ell - S_N| \leq v_{N+1}$. □

Exemple : Pour calculer $\ln 2$ à 10^{-10} près, il suffit de calculer $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}/n$ jusqu'à un rang N tel que $1/(N+1) \leq 10^{-10}$ donc le rang $N = 999\,999\,999$ suffit.

Pour les séries de type Riemann, on peut détailler le théorème de comparaison avec une intégrale de la façon suivante. Notons que cela donne aussi une information en cas de divergence.

Proposition 4.5. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$ et décroissante. Alors la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge si et seulement si la limite $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.*

Si la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge, alors le reste de la série vérifie

$$R_N = \sum_{n\geq N+1} f(n) \leq \lim_{X\to+\infty} \int_N^X f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Si la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ diverge, alors les sommes partielles de la série vérifient

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \sim \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Démonstration : Comme déjà expliqué, nous avons le contrôle

$$\sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_p^q f(x)dx \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n) \ .$$

Si la série converge, on prend $p = N$ et on utilise l'inégalité de gauche en faisant tendre q vers $+\infty$. Si la série diverge, on prend $p = 1$ et $q = N$ et on divise par $\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$ pour obtenir

$$1 + \frac{f(N)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\sum_{n=1}^{N} f(n)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x} \leq 1 + \frac{f(1)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x} \ .$$

Quand N tend vers $+\infty$, les deux bornes tendent vers 1, ce qui montre l'équivalence. $\square$

Exemples :

- On retrouve que la série harmonique vérifie $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$.
- Pour la série convergente $(\sum \frac{1}{n^2})$, on obtient donc que

$$\sum_{n\geq N+1} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{X\to+\infty} \int_N^X \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{X}\right) = \frac{1}{N} \ .$$

3 Quelques remarques sur les séries sur ordinateur

Remarquons d'abord que la somme dans un ordinateur n'est pas une opération commutative ! Cela est dû à la troncation : des nombres peuvent être négligés s'ils ne changent pas une somme au-delà de l'erreur machine, même si la somme de tous ces nombres n'était pas négligeable. Regardons un exemple en *Xcas*.

```
1 Digits:=4;
```
4

```
2 0.0005+0.0005
```
0.001

```
3 0.001+1
```
1.001

```
4 1+0.0005
```
1.0

```
5 1.0+0.0005
```
1.0

Nous comprenons donc qu'il ne faut pas sommer de petits nombres avec les grands mais d'abord les petits nombres entre eux puis les grands. L'expérience suivante montre que le résultat est bien différent suivant l'ordre de sommation.

```
1 a:=0; pour j de 1 jusque 100000 faire a:=evalf(a+1/j,5); ffaire;
```
(0.0,10.0)

```
2 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire a:=evalf(a+1/j,5);
ffaire;
```
(0.0,11.75)

On peut aussi noter que la série $\sum 1/n$ converge sur un ordi, car les nombres ajoutés finissent par devenir plus petits que la précision machine et l'ordinateur ne va faire qu'une somme finie de nombres. Ceci paraît contradictoire avec la divergence en mathématique. Mais celle-ci agit comme un avertissement que le nombre obtenu par ordinateur n'a pas de sens. De fait, le résultat du calcul va dépendre de la précision de la machine et de l'ordre de sommation, ce n'est donc pas une somme qui aura un sens véritable même si la sommation nous renvoie un nombre. Faisons l'expérience avec notre série ($\sum 1/n$) que l'on calcule avec une précision de 5 chiffres ou de 10 chiffres. La somme est fortement changée :

```
2 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire a:=evalf(a+1/j,5);
ffaire;
```

(0,11.75)

```
3 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire a:=evalf(a+1/j,10);
ffaire;
```

(0,12.09014625)

Alors que pour la série ($\sum 1/n^2$), passer d'une précision de 5 chiffres à une de 10 chiffres ne fait qu'améliorer la précision.

```
4 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j^2,5);ffaire;
```

(0,1.6449)

```
5 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j^2,10);ffaire;
```

(0,1.644924067)

4 Convergence de la série de l'exponentielle

On sait que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $e^x = 1 + x + \ldots + x^N/N! + o(x^N)$, mais peut-on écrire carrément que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \ e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \ ? \tag{4.1}$$

Pour écrire (4.1), il y a deux problèmes à considérer :

1. Pour x fixé, la somme de (4.1) a-t-elle un sens, c'est-à-dire est-elle convergente ?
2. La somme obtenue est-elle bien égale à l'exponentielle ?

Notons que le deuxième point n'est pas facultatif : il existe des séries de Taylor qui convergent mais pas vers la fonction associée. Ce genre de question sera vu plus en détail au second semestre. Nous allons nous limiter ici au cas de l'exponentielle.

Considérons donc la série $(\sum \frac{x^n}{n!})$ avec $x \in \mathbb{R}$ fixé. Appliquons le critère de D'Alembert

$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty \ .$$

Comme $0 < 1$, la série converge bien pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer (4.1), il nous reste à prouver que la série converge bien vers l'exponentielle. Pour cela, on utilise la formule de Taylor avec reste intégral.

Proposition 4.6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbb{R})$, alors pour tout $x_0 \in I$,*

$$\begin{aligned}\forall x \in I \ , \ \ f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt \ .\end{aligned}$$

Démonstration : On fait une récurrence sur k en utilisant que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}dt = \left[-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt \ .$$

□

Il s'agit donc de montrer que le reste intégral tend vers 0 dans la formule

$$e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt \ .$$

Or, on a

$$\left|\int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right| \leq |x|\frac{e^{|x|}}{N!}|x|^N \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} 0$$

Donc (4.1) est bien vérifiée.

5 Ordre de sommation

On ne peut pas changer l'ordre d'une sommation en général. Par exemple

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

mais

$$\sum_{n \text{ impairs}} \frac{1}{n} - \sum_{n \text{ pairs}} \frac{1}{n}$$

n'a pas de sens car les résultats des sommes sont infinis.

Nous allons voir que changer l'ordre de sommation peut avoir des effets encore plus frappants : on peut obtenir n'importe quelle valeur pour la somme en changeant l'ordre de sommation ou même faire diverger la série.

Proposition 4.7. *Soit $(\sum_n u_n)$ une série réelle convergente mais non absolument convergente. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Alors il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(\sum_n u_{\phi(n)})$ ait pour somme ℓ.*

Démonstration : Ecrire une preuve avec les notations rigoureuses et les indices serait trop complexe. Nous allons plutôt expliquer la méthode. On commence par séparer les u_n en deux tas : les positifs v_n^+ et les négatifs v_n^-. Si les deux séries $(\sum v_n^+)$ et $(\sum v_n^-)$ convergeaient, alors la série $(\sum |u_n|)$ serait aussi convergente mais ce n'est pas le cas par hypothèse. Si l'une convergeait et l'autre non, alors la série $(\sum u_n)$ serait divergente. On en conclut que les hypothèses impliquent que ces deux séries divergent. Notons aussi que, comme $(\sum u_n)$ converge, on a $v_n^\pm \to 0$.

Fixons nous une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (le cas $\ell = \pm\infty$ est laissé en exercice). Nous allons d'abord ajouter des termes positifs $v_0^+, \ldots$ jusqu'à dépasser strictement ℓ. Notons que cela est possible puisque la somme de tous les v_n^+ est infinie. Une fois dépassé ℓ, nous ajoutons maintenant des termes négatifs $v_0^-, \ldots$ jusqu'à retomber en-dessous strictement de ℓ, ce qui arrivera forcément pour la même raison. Puis on rajoute des positifs etc. On note qu'à chaque fois, on utilise au moins un terme et donc qu'on épuise petit à petit nos paquets de termes : il s'agit bien d'un changement d'ordre de sommation. Il ne reste plus qu'à voir que la limite de ce procédé est ℓ. Pour cela, il faut voir qu'à chaque fois qu'on dépasse ℓ, on ne s'éloigne pas plus que le dernier terme v_n^+ utilisé. Puis on ne fait que descendre vers ℓ et quand on descend trop bas, ce n'est pas à plus que le dernier v_n^- utilisé. Comme $v_n^\pm$ tend vers 0, ces écarts sont de plus en plus petits et les sommes oscillent de plus en plus proches de ℓ. □

Exemple : Voici un exemple concret. On a déjà admis que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2\ .$$

En fait peu importe la valeur de cette somme pour cet exemple, mais ce sera plus simple de l'écrire comme cela. Nous allons maintenant réordonner la sommation de cette façon :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \ldots$$

On somme bien tous les termes car on prend successivement un indice impair et deux indices pairs tout en gardant leur ordre global. Mais

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} = \frac{1}{4n+2}$$

donc une sommation par paquets de 1 ou 2 termes donne la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \ldots$$

qui est convergente et qui est la moitié de la série d'origine. Notre sommation par paquets étant licite, on a donc montré que

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \ldots = \frac{\ln 2}{2}$$

et donc le changement d'ordre de sommation a diminué la série de moitié !

Toutefois, si jamais on sait que la convergence est meilleure, on peut changer l'ordre de sommation.

Proposition 4.8. *Soit $(\sum_n u_n)$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(\sum_n u_{\phi(n)})$ est aussi absolument convergent et a même somme que $(\sum_n u_n)$.*

Démonstration : Posons $v_n = |u_n|$. On veut montrer que $(\sum v_n)$ converge implique que $(\sum v_{\phi(n)})$ converge. Il s'agit de séries de termes positifs. La suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} v_{\phi(n)}$ est donc croissante et il suffit de la majorer pour avoir la convergence. Mais

$$\sum_{n=0}^{N} v_{\phi(n)} \leq \sum_{n=0}^{\max_{k=0..N} \phi(k)} v_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

et donc la série $(\sum |u_{\phi(n)}|)$ converge.

Montrons que les limites sont égales. Pour N donné, il existe $N' \geq N$ tel que $\{1,\ldots,N\} \subset \{\phi(1),\ldots,\phi(N')\}$ c'est-à-dire qu'il faut N' termes réarrangés $u_{\phi(n)}$ pour qu'on ait bien inclus les N premiers termes u_n. Il y a sûrement d'autres valeurs de $\phi(n)$ que $1..N$ dans les N' premiers $u_{\phi(n)}$. Appelons I cet ensemble de valeurs supplémentaires, qui sont forcément plus grandes que N. On a alors

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N'} u_{\phi(n)}\right| = \left|\sum_{n\in I} u_n\right| \leq \sum_{n\geq N} |u_n|$$

où on a bien utilisé le fait que $(\sum |u_n|)$ converge. Par ailleurs, cela implique que le reste tend vers 0, ce qui montre que $\left|\sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N'} u_{\phi(n)}\right|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Chaque somme partielle tend vers la somme de la série (rappelons-nous que $N' \geq N$ et donc N' tend aussi vers $+\infty$) et donc les deux sommes sont égales. $\square$

Ces résultats montrent que pour une série de termes de signe quelconque, faire la différence entre convergence et convergence en valeur absolue est primordial.

6 Le problème de Bâle

En 1644, Pietro Mengoli pose un défi aux mathématiciens : calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Plusieurs grands mathématiciens s'y frottent sans succès, dont Jacques Bernoulli né à Bâle. C'est en 1735 que Léonhard Euler, lui aussi né à Bâle, montre que la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. En fait sa preuve manque un peu de rigueur et sera amélioré par la suite. Notons qu'il confirme le résultat aussi par un calcul numérique très fastidieux à l'époque.

Commençons par un peu d'algèbre des polynômes. Soit un polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d$$

qui a d racines complexes $z_1,\ldots,z_d$. On a la factorisation classique

$$P = a_d(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_d)$$

mais si 0 n'est pas racine, on peut aussi factoriser le polynôme sous la forme

$$P = a_0(1 - \frac{X}{z_1})(1 - \frac{X}{z_2})\ldots(1 - \frac{X}{z_d})$$

En identifiant les coefficients en X, on trouve alors que

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_d} = -\frac{a_1}{a_0} \ .$$

Euler, passant rapidement sur la justification, fait alors le calcul suivant. Le sinus cardinal a pour développement

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$$

et s'annule sur les valeurs $n\pi$. Donc $\operatorname{sinc}(\sqrt{x})$ s'annule sur les valeurs $n^2\pi^2$ et on pourrait écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(\sqrt{x}) &= 1 - \frac{x}{6} + \dots \\ &= \big(1 - \frac{x}{\pi^2}\big)\big(1 - \frac{x}{4\pi^2}\big)\big(1 - \frac{x}{9\pi^2}\big)\dots\end{aligned}$$

et par analogie avec le calcul sur les polynômes, on obtient

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots = \frac{1}{6}\ .$$

Pour rendre cela rigoureux, il faut en fait utiliser la théorie des fonctions analytiques qui sont équivalentes à des polynômes avec une infinité de termes.

)o(123

DE

SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

TAntopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ... meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſum-

§. 2. Deductus ſum autem nuper omnino inopinato ad elegantem ſummae huius ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + etc. expreſſionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt ſi huius feriei vera ſumma haberetur, inde ſimul circuli quadratura ſequeretur. Inueni enim ſummae huius ſeriei ſextuplum aequale eſſe quadrato peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1; ſeu poſita iſtius ſeriei ſumma $= s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem ſeriei ſummam nuper oſtendi proxime eſſe 1,644934066848226436 4, ex cuius numeri ſextuplo, ſi extrahatur radix quadrata, reipſa prodit numerus 3,14159265358979323 8 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter eſt 1. Iisdam porro veſtigiis, quibus hanc ſummam ſum conſecutus ...

muto aequationem propoſitam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y}$ + etc. Si nunc omnes radices huius aequationis ſeu omnes arcus, quorum idem eſt ſinus y, fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes iſtae quantitates, $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \text{etc.} = (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et reſolutione aequati...