Chapitre 7 : Intégrales généralisées

1 Introduction

Nous avons pour le moment considéré l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ compact. Or il existe des applications faisant intervenir des intégrales sur des segments non compacts ou bien sur des fonctions non continues par morceaux sur $[a,b]$, comme par exemple

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ \ldots$$

On parlera d'*intégrale généralisée* ou bien d'*intégrale impropre*.

Définition 7.1. *Soit $a < b$ des bornes dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$). On dit que f est intégrable sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) si la limite*

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\textit{resp. } \lim_{\xi \to a} \int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

existe et est finie. On dit aussi que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et on note cette limite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Si l'intégrale n'est pas convergente, on dira qu'elle est divergente. Ce statut est appelé nature de l'intégrale.

Par définition, on a la proposition suivante.

Proposition 7.2. *Soit $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction continue sur $[a,b[$ qui admet F comme primitive. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si F admet une limite en b et alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi \to b} F(\xi) - F(a) := [F(x)]_a^b$$

où le dernier terme est une notation par convention.

Le cas $]a,b]$ est symétrique.

On notera que ces définitions sont cohérentes : si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ compact, alors elle est intégrable sur $[a,b]$ mais aussi sur $[a,b[$ et $]a,b]$.

On peut étendre ce principe à une situation qui a plusieurs problèmes.

Définition 7.3. *Soit $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit*

$$a = x_1 \ < \ x_2 \ < \ x_3 \ < \ \ldots \ < \ x_p = b \ .$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur chacun des intervalles $]x_i,x_{i+1}[$. On dit que f est intégrable sur $]a,b[$ si f est intégrable au sens généralisé sur chaque intervalle $]x_i,m_i]$ et $[m_i,x_{i+1}[$ avec $m_i \in]x_i,x_{i+1}[$. On notera alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la somme de chaque intégrale généralisée obtenue, conformément à la relation de Chasles.

Comme pour l'étude des séries, il ne faut pas confondre l'objet intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui pourra avoir le statut de la convergence ou de la divergence et le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui n'existe que si l'intégrale converge. Le problème est qu'il n'y a pas de notation différente cette fois-ci et c'est donc le contexte qui décidera.

Quand on demande la nature d'une intégrale comme

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x-1} \ln x \,\mathrm{d}x$$

il faut commencer par repérer chacun des problèmes : soit une borne infinie soit un endroit où la fonction n'est pas continue par morceaux (typiquement explosion vers $\pm\infty$). Pour I, il y a trois soucis : 0 (explosion du log), 1 (division par 0) et $+\infty$ (borne infinie). Puis on étudie la convergence à chacun des points qui pose problème. Si on trouve le moindre cas de divergence à un de ces points, on s'arrête car alors l'intégrale est divergente. Si l'intégrale converge en tous ces points, alors on conclut que l'intégrale est convergente.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie car $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On calcule donc

$$\int_0^\xi e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^\xi = 1 - e^{-\xi}$$

dont la limite $\xi \to +\infty$ converge et est finie. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

Cette exemple montre que l'aire sous la courbe de la fonction e^{-x} sur tout $[0,+\infty[$ est finie, même si la surface n'est pas bornée.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0{,}1]$, le seul souci est en $x = 0$. On a
$$\int_\xi^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_\xi^1 = -\ln \xi \ .$$
Quand $\xi \to 0$, la limite explose vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc divergente. On peut parfois faire l'abus de notation $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ dans ce cas et parler d'aire infinie.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie. On a
$$\int_0^\xi \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^\xi = \sin \xi$$
qui n'a pas de limite quand $\xi \to +\infty$. Donc non seulement $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ est divergente, mais on ne peut même pas parler d'aire infinie ou autre. Dans ce cas, $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ n'a aucun sens possible.

2 Exemples et propriétés fondamentales

Pour les intégrales impropres, on va procéder comme pour les séries : on disposera d'une liste de cas types pour lesquels la nature de l'intégrale est connue et on traitera les autres cas par des théorèmes de comparaisons ou des techniques plus fines.

2.1 Exponentielles

Une fonction du type $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le seul cas qui pourrait donner une intégrale impropre est quand une des bornes est infinie.

Proposition 7.4. *Soit $\lambda > 0$ et a et b dans $\mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\int_a^\infty e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est divergente. L'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.*

Démonstration : Il suffit de voir qu'une primitive de $e^{\lambda x}$ est $e^{\lambda x}/\lambda$. Donc
$$\int_a^b e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\right) \ .$$
Si $b \to +\infty$, alors $e^{\lambda b}$ tend vers $+\infty$ et l'intégrale diverge vers $+\infty$. Si $a \to -\infty$, alors $e^{\lambda a}$ tend vers 0 et l'intégrale converge vers $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda b}$. □

Bien entendu, on fera attention au signe de λ. Par la symétrie $x \mapsto -x$, on obtient que

Proposition 7.5. *Soit $\lambda > 0$ et a et b dans $\mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\int_a^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est convergente. L'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.*

Pour résumé, si on intègre une exponentielle, le seul soucis est en $\pm\infty$. Soit c'est le côté où l'exponentielle diverge et alors l'intégrale diverge évidemment, soit c'est le côté où l'exponentielle tend vers 0 et tout va bien. Notons aussi qu'une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} e^x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^x\,\mathrm{d}x$ est forcément divergente puisque fait intervenir les deux extrémités.

2.2 Puissances

On veut intégrer une fonction du type $P(x)/Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes. On peut rencontrer deux types de problèmes : une borne de l'intégrale est infinie ou bien la fonction n'est pas définie en un point x_0 car $Q(x_0) = 0$. Pour comprendre ce cas, on ne retiendra que les comportements types donnés par les cas suivants.

Proposition 7.6. *Soit $\alpha > 0$ et soit $a > 0$. L'intégrale impropre*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit de voir que, si $\alpha \neq 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) .$$

Pour $\alpha < 1$, $1/b^{\alpha-1} = b^{1-\alpha}$ avec $1 - \alpha > 0$ et donc l'intégrale explose quand $b \to +\infty$. A l'inverse, si $\alpha > 1$, $1/b^{\alpha-1}$ tend vers 0 et l'intégrale converge.

Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln a$$

qui tend vers $+\infty$ quand b tend vers $+\infty$. □

On s'aperçoit que la borne $a > 0$ n'a pas d'importance. On pourra juste parler d'*intégrabilité ou non près de $+\infty$.*

Proposition 7.7. *Soit $\alpha > 0$ et soit $b > 0$. L'intégrale impropre*

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration : C'est la même que la proposition précédente sauf qu'on regarde cette fois la limite quand a tend vers 0. Dans ce cas, $a^{1-\alpha}$ convergera si et seulement si $\alpha < 1$. Le log divergera toujours. $\square$

En résumé : $1/x$ est toujours le cas critique et n'est jamais intégrable. Pour les autres, il faut se demander ce qui est mieux ou pire que $1/x$. Par exemple $1/x^2$ converge plus vite vers 0 que $1/x$ en $+\infty$ donc est intégrable près de $+\infty$. A l'inverse, il tend plus vite vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ donc il n'est pas intégrable près de 0.

⚠ Seule l'intégrabilité proche de $+\infty$ se comporte comme les séries de Riemann par le théorème de comparaison série/intégrale. Bien se rappeler que le problème de l'intégrabilité près de 0 est quasiement l'inverse.

Par translation ou symétrie, on obtient les autres cas d'intégrabilité de fonctions puissances. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est convergente}\\
\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente}\\
\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est convergente}\\
\int_{1}^{2} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente}\\
\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente}
\end{aligned}$$

2.3 Le log

Dans le cas du log, comme il tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on s'attend à avoir une aire infinie sous la courbe. Du côté de 0, il faut voir qu'il tend vers $+\infty$ moins vite que tout puissance de x et est donc logiquement intégrable (nous allons voir ce genre de théorème bientôt).

Proposition 7.8. *Soit a et b strictement positifs.*

$$\begin{aligned}
\textit{L'intégrale} \quad \int_a^{\infty} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est divergente.}\\
\textit{L'intégrale} \quad \int_0^{b} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est convergente.}
\end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit de voir qu'une primite du log est $x\ln x - x$. Quand b tend vers $+\infty$, $b\ln b - b = b(\ln b - 1)$ tend vers $+\infty$. Quand a tend vers 0, le terme $a\ln a$ tend aussi vers 0 (un polynôme l'emporte sur le log) et donc la primite a bien une limite quand a tend vers 0. $\square$

2.4 Propriétés élémentaires

La linéarité de l'intégrale et de la limite permettent de généraliser les propriétés élémentaires des intégrales aux intégrales impropres. Voici des exemples d'énoncés (qu'on pourra transposer de façon évidente aux autres cas).

Proposition 7.9. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ telles que les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ soient convergentes et soient λ et μ deux complexes. Alors $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente et*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration : Il suffit de voir que

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \lim_{\xi \to b} \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

$\square$

De façon classique on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 7.10. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ telles que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente. Alors $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.*

Démonstration : Si l'intégrale de $f+g$ était convergente, alors celle de $g = f - (f+g)$ le serait aussi d'après le résultat précédent. $\square$

La définition de la convergence des intégrales impropres ayant plusieurs singularités donne directement que la relation de Chasles se généralise.

Proposition 7.11. *Soient $a < b < c$ trois bornes de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit f une fonction telle que les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Alors l'intégrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi et*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Idem pour la monotonie de l'intégrale.

Proposition 7.12. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ telles que les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ soient convergentes. Si $f \geq g$ sur $[a,b[$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Démonstration : On écrit d'abord la monotonie des intégrales entre a et $\xi < b$ puis on fait $\xi \to b$. □

Notons aussi que par définition de la limite dans les complexes et par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, on a la proposition suivante.

Proposition 7.13. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs complexes. Alors f est intégrable sur $]a,b[$ si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. On a alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

3 Fonctions localement de signe constant

Dans cette partie, nous allons voir des théorèmes nous permettant de nous ramener aux exemples fondamentaux par des comparaisons. Exactement comme pour les séries, ces théorèmes ne pourront être appliqués que pour les fonctions positives (ou négatives) près de la zone posant problème. Nous allons écrire les résultats pour le cas de fonctions localement positives et pour une borne posant problème à droite. Par symétries, les résultats seront encore valables dans le cas de fonctions localement négatives ou bien si on considère la borne de gauche.

Redisons-le : comme pour les séries, il faudra toujours penser à justifier que le signe est constant avant d'appliquer les résultats suivants.

Proposition 7.14. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et telle qu'il existe $m \in [a,b[$ tel que*

$$f(x) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } x \in [m,b[\ .$$

Alors soit l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, soit $\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers $+\infty$ quand $\xi \to b^-$.

Démonstration : Notons que la fonction $\xi \mapsto \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante pour $\xi \geq m$ car on ne fait que rajouter de l'aire positive. Donc soit la fonction explose vers $+\infty$, soit elle reste bornée. Dans ce cas, toute suite $n \mapsto \int_a^{\xi_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\xi_n \to b$ en croissant sera convergente (suite croissante majorée). De plus toutes limites seront égales (disons à $\ell \in \mathbb{R}$) car pour deux suites données, on pourra les combiner en une suite croissante qui convergera. Toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite donc les deux suites de départ auront la même limite. Imaginons maintenant le cas où $\xi_n \to b$ mais pas en croissant. Si la suite ne tend pas vers ℓ, il y a une sous-suite qui reste éloignée de ℓ. Mais de cette sous-suite, on peut extraire une sous-suite telle que $\xi_\varphi(n)$ est croissante et donc celle-ci tend vers ℓ ce qui est absurde. □

Proposition 7.15. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et telles qu'il existe $m \in [a,b[$ tel que*

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \textit{pour tout } x \in [m,b[\;.$$

Si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi divergente.

Démonstration : Pour tout $\xi \in [m,b[$, les intégrales de f et g sur $[a,\xi]$ sont bien définies et

$$\forall \xi \in [m,b[\;, \quad \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

(monotonie de l'intégrale de Riemann). Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit divergente. D'après la proposition précédente, comme les fonctions sont positives près de b, on doit avoir

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; +\infty \;.$$

Mais alors par comparaison, $\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi vers $+\infty$.

L'autre assertion est la contraposée de celle que l'on vient de démontrer. □

Proposition 7.16. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et telles qu'il existe $m \in [a,b[$ tel que*

$$g(x) \geq 0 \quad \textit{et} \quad f(x) \geq 0 \quad \textit{pour tout } x \in [m,b[\;.$$

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ont même nature.

Supposons que $f(x) = o(g(x))$ ou que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \to b^-$. Alors si l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge alors $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi et si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

Démonstration : On applique exactement la même stratégie que pour les séries. Il suffit de montrer que les équivalences ou petits et grands o impliquent des encadrements et ensuite appliquer le principe de comparaison précédent. Par exemple, si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$ alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [b-\delta,b[$, $\frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$. $\square$

Exemple : On considère
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ .$$
La fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc les seuls soucis sont en $\pm\infty$. On a $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to \pm\infty$. Or $1/(1+x^2)$ est positif et $1/x^2$ est intégrable en $\pm\infty$ car $2 > 1$. Donc $1/(1+x^2)$ est intégrable en $\pm\infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Par ailleurs, en utilisant la primitive connue, on a même que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to+\infty} \arctan\xi - \lim_{\xi\to+\infty} \arctan\xi = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \ .$$

Exemple : On considère l'intégrale
$$\int_0^3 \frac{x^2-2x+5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \ .$$
Comme $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, la fonction intégrée est continue sur $[0,1[\cup]1,3]$ et le seul problème est en $x = 1$. En $x = 1$, on a
$$\frac{x^2-x+2}{x^2-1} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1^2-2+5}{1+1}\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-1} \ .$$
Pour $x > 1$ proche de 1, les fonctions sont positives (car $2/(x-1)$ est positive). La fonction $x \mapsto 1/(x-1)$ n'est pas intégrable près de 1^+ car diverge comme une puissance -1. Donc $\int_0^3 \frac{x^2-2x+5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est divergente et n'a pas de sens en tant que nombre. Notons qu'on n'a pas besoin de regarder le problème de 1^- car une seule divergence suffit à conclure.

Exemple : On considère
$$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x \ .$$
Notons que $x \mapsto xe^{-x}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$. Le seul problème est donc la borne infinie. On remarque que $xe^{-x} = o(e^{-x/2})$ quand $x \to +\infty$ car $x = o(e^{x/2})$. Or $e^{-x/2}$

est intégrable et positif près de $+\infty$, donc xe^{-x} est aussi intégrable en $+\infty$ et $\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente. On peut obtenir sa valeur par intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^\xi xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\xi\to+\infty}\left[-xe^{-x}\right]_0^\xi + \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^\xi e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{\xi\to+\infty}\xi e^{-\xi} + \lim_{\xi\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\xi\\ &= \lim_{\xi\to+\infty}(1-e^{-\xi})\\ &= 1\ .\end{aligned}$$

Notons le processus : on évite de faire les calculs avec la borne infinie pour éviter les problèmes puis on passe à la limite en vérifiant que cela est possible.

4 Fonctions quelconques

4.1 Convergence absolue

Comme pour les séries, la convergence absolue entraine la convergence simple.

Proposition 7.17. *Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $b\in\,]a,+\infty]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ telle que $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ soit une intégrale impropre convergente. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente et*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \ \leq\ \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration : Supposons que f soit réelle. On pose alors $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$. On a $f^\pm \geq 0$ et $f = f^+ - f^-$. C'est pour cela qu'on appelle $f^\pm$ les parties positives et négatives de f. Par ailleurs, $|f| = f^+ + f^-$ et donc $|f| \geq f^\pm \geq 0$. D'après les résultats plus hauts, comme on travaille avec des fonctions positives, on a donc que les intégrales $\int_a^b f^\pm(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes. Par linéarité, $f = f^+ - f^-$ implique que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente.

Si f est à valeur complexe, on décompose aussi en parties réelle et imaginaire

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-\ .$$

On estime ensuite parties réelle et imaginaire par $|f| \geq \max(|\operatorname{Re} f|,|\operatorname{Im} f|)$.

Pour obtenir l'inégalité, il suffit de commencer par l'écrire entre a et $\xi < b$ puis de faire tendre ξ vers b. □

Comme pour les séries, dans le cas général, on distinguera trois natures possibles :

1. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.
2. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente mais pas $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. On parle alors de *semi-convergence*.
3. L'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, et donc aussi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. On parle de *convergence en valeur absolue* ou *en module* pour les fonctions complexes.

Quand une fonction ne sera pas localement de signe constant près de l'endroit où il y a un problème, il faudra donc distinguer les deux convergences différentes. Comme pour les séries, certaines manipulations ne sont pas a priori autorisées si l'intégrale n'est que semi-convergente.

Dans certains cas, la convergence donc se prouve de façon élémentaire.

Proposition 7.18. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ qui est bornée sur $]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.*

Démonstration : La constante M est intégrable sur $[a,b]$. Par comparaison, comme $|f|$ est positive, on a que $|f|$ est aussi intégrable sur $[a,b]$. La proposition précédente montre que f est aussi intégrable. □

Cette proposition justifie que les problèmes sont de deux types : une des bornes est infinie ou la fonction explose près d'une borne finie. Même si la fonction a un comportement étrange sur une borne finie, si elle reste bornée, elle sera intégrable.

Exemple : La fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ est bornée et donc intégrable sur $]0,1]$. Notons que la fonction en question ne peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ car $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite à gauche en 0.

4.2 Utilisation de l'IPP

Nous avons détaillé certaines techniques pour les séries de signe quelconque comme les séries alternées ou la transformation d'Abel. Or nous avons vu que la transformation d'Abel est une sorte d'intégration par partie discrète. Dans le cas des intégrales, cette intégration par partie peut se faire plus simplement. Plutôt qu'énoncer un théorème général, nous allons plutôt voir des exemples pour comprendre le processus.

Considérons le *sinus cardinal*

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

qui joue un rôle important en traitement du signal et dans les transformations de Fourier. On souhaite savoir si

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$$

est convergente. Il y a deux problèmes : la borne infinie et la division par 0. Commençons par voir que 0 n'est pas en fait un problème. En effet, $\sin x \sim x$ en 0 et donc le sinus cardinal est prolongeable par continuité en 0 en posant $\operatorname{sinc} 0 = 1$. La fonction est a fortiori intégrable en 0 (par exemple en disant quelle est bornée près de 0).

Pour étudier la convergence en $+\infty$, on va faire une intégration par partie. Pour être prudent, il convient de faire les calculs qu'avec une borne finie pour laquelle on sait que tout est défini.

$$\begin{aligned}
\int_1^\xi \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x &= \int_1^\xi \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^\xi - \int_1^\xi \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \cos 1 - \frac{\cos \xi}{\xi} - \int_1^\xi \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

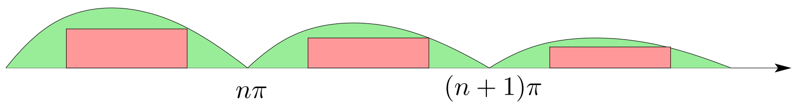
Quand $\xi \to +\infty$, le terme $\frac{\cos\xi}{\xi}$ tend vers 0. Par ailleurs, $|\cos x/x^2| \leq 1/x^2$ qui est intégrable en $+\infty$. Comme on compare des fonctions positives, on en déduit que $|\cos x/x^2|$ est intégrable en $+\infty$ et donc que $\cos x/x^2$ est intégrable en $+\infty$. Du coup, $\int_1^\xi \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x$ a une limite finie quand ξ tend vers $+\infty$. Le membre de droite ayant une limite finie, il en est de même pour l'intégrale de gauche. Cela revient à dire que $\int_1^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x$ est convergente. En recollant les deux morceaux, on a montré que

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x \qquad \text{est convergente.}$$

On peut maintenant se poser la question de la convergence absolue. On va montrer que $\int_0^\infty |\operatorname{sinc} x| \,\mathrm{d}x$ diverge en minorant l'intégrale par une intégrale divergente. Pour tout $x \in [n\pi + \pi/4, (n+1)\pi - \pi/4]$, on a $x \leq (n+1)\pi$ et $|\sin x| \geq \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$. On obtient donc que

$$\forall x \in [n\pi, (n+1)\pi] \ , \ \ |\operatorname{sinc} x| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{\pi\sqrt{2}(n+1)}$$

ce qui se traduit graphiquement comme ci-dessous.



Si on fait la somme des aires des rectangles pour tout n, on obtient la série $\left(\sum \frac{1}{\pi\sqrt{2}(n+1)}\right)$ qui est divergente. Donc l'aire sous la courbe de $|\operatorname{sinc} x|$ est aussi infinie.

On conclut que

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \, \mathrm{d}x \qquad \text{est semi-convergente.}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_1^\infty \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \ .$$

On effectue le même genre de calcul.

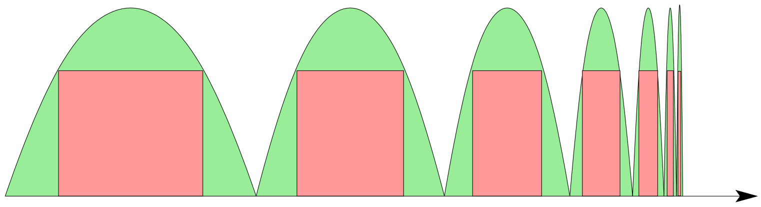
$$\begin{aligned}
\int_1^\xi \cos(x^2) \, \mathrm{d}x &= \int_1^\xi \frac{x}{x} \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{x}\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_1^\xi + \frac{1}{2}\int_1^\xi \frac{1}{x^2}\sin(x^2) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\sin(\xi^2)}{2\xi} - \frac{1}{2}\sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^\xi \frac{1}{x^2}\sin(x^2) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Quand $\xi \to +\infty$, le terme $\frac{\sin(\xi^2)}{2\xi}$ tend vers 0. Par ailleurs, $|\sin(x^2)/x^2| \leq 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $1/x^2$ l'est. Donc $\sin(x^2)/x^2$ est absolument intégrable et $\int_1^\xi \frac{1}{x^2}\sin(x^2) \, \mathrm{d}x$ a une limite quand ξ tend vers $+\infty$. On en déduit que c'est le cas pour le membre de gauche, ce qui donne la convergence de l'intégrale considérée. Montrons maintenant qu'elle est divergente en valeur absolue.

On considère $|\cos(x^2)|$. Cette fonction atteint son maximum aux points $\sqrt{k\pi}$. Par ailleurs, elle reste plus grande que $1/\sqrt{2}$ sur les intervalles $[\sqrt{-\pi/4 + k\pi}, \sqrt{\pi/4 + k\pi}]$ qui ont pour longueur

$$\begin{aligned}
u_k &= \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{k\pi - \frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{k\pi}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{k}} - \sqrt{1 - \frac{4}{k}}\right) \\
&= \sqrt{k\pi}\left(1 + \frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\right) \\
&= \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^{3/2}})
\end{aligned}$$

On en déduit que la somme des longueurs $\sum u_k$ diverge vers $+\infty$. On a donc mis sous la courbe de $|\cos(x^2)|$ une infinité de rectangles dont la somme des aires tend vers $+\infty$. Cela montre que $\int_1^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$.



5 Compléments

5.1 A propos de la limite de f

Le cas où on intégre sur un intervalle non borné une fonction qui a une limite non nulle est assez clair.

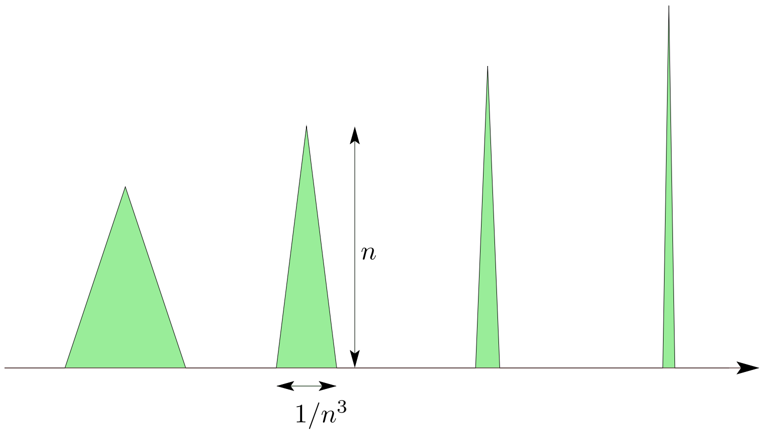
Proposition 7.19. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe, finie ou infinie, et est non nulle alors $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.*

Démonstration : Supposons par exemple que la limite est strictement positive ou égale à $+\infty$ (le cas négative est symétrique). Puisque la limite est non nulle, pour m assez grand, on aura $f(x) \geq \varepsilon > 0$ pour $x \geq m$ avec $\varepsilon > 0$ fixé. Comme la constante ε n'est pas intégrable sur un intervalle non borné, l'intégrale de f est aussi divergente. $\square$

Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

⚠ Contrairement aux séries, il n'est pas nécessaire que f tende vers 0 pour que $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. En fait, il n'est pas nécessaire d'être borné, ni même de s'approcher à un moment de 0 !

Voici deux contre-exemples frappants. Dans le premier, nous allons construire une fonction continue positive sur $[0,+\infty[$ qui n'est pas bornée (et donc ne tend pas vers 0) mais pourtant d'intégrale bornée ! Pour cela, nous allons mettre sur chaque entier n un triangle (fonction parfois appelée « tente ») qui a pour largeur $1/n^3$ et pour hauteur n.



Les aires sous la courbes se calculent facilement avec la formule d'aire du triangle. On trouve que

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

On a bien une intégrale convergente alors que la fonction n'est même pas bornée.

On pourrait croire que, pour avoir une intégrale sur $[0,+\infty[$ convergente, la fonction se doit quand même de passer régulièrement proche de zéro. C'est vrai pour les fonctions réelles positives, mais pas pour les fonctions quelconques. Prenons la fonction $f(x) = e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\sin(x^2)$. Cette fonction reste toujours à distance 1 de 0. Mais pourtant on a déjà montré que l'intégrale $\int_1^\infty \cos(x^2)$ converge. Donc c'est aussi le cas pour l'intégrale sur $[0,+\infty[$. On peut aussi montrer de même que l'intégrale de la partie imaginaire converge. On obtient alors que

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge mais } \quad |e^{ix^2}| = 1 \ \ \forall x \geq 0 \ .$$

La convergence vient ici d'une oscillation de plus en plus rapide. Comme l'intégrale voit surtout des moyennes et que la moyenne de l'oscillation est 0, ces oscillations de plus en plus rapides jouent un rôle équivalent à une décroissance vers 0 du point de vue de l'intégrale.

5.2 Discussion autour des IPP

Pour les séries, on a vu qu'il fallait se méfier de certaines transformations a priori anodines avec des sommes finies. La bonne méthode pour être sûr de ne pas faire d'erreurs est de considérer d'abord les sommes partielles, faire les manipulations dessus, puis passer à la limite.

Il en est de même avec les intégrales généralisée. Une intégrale impropre, même convergente, doit être vue comme une limite. On ne fera les calculs (intégration par parties, changement de variables etc.) que sur une intégrale standard sur un intervalle compact (par exemple $[a,\xi]$) et on passera à la limite partout ensuite (par exemple $\xi \to +\infty$).

Voyons un exemple des problèmes que l'on pourrait rencontrer. On considère $\int_0^1 \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$. On a vu que cette intégrale est convergente. Faisons l'intégration par parties formelle

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ce calcul ne va pas car $(\cos x)/x$ n'est pas défini en 0 et l'intégrale de droite est divergente en 0. Essayons de façon plus rigoureuse : soit $\xi > 0$,

$$\int_\xi^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_\xi^1 - \int_\xi^1 \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ce calcul est correct, mais on voit qu'on va toujours avoir un soucis quand $\xi \to 0$. Pour corriger cela, une idée est de changer la primitive du sinus que l'on considère. Ainsi,

$$\int_\xi^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x - 1}{x}\right]_\xi^1 - \int_\xi^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Comme $\cos x - 1 \sim -x^2/2$ près de 0, on obtient que chaque terme est maintenant bien défini quand $\xi \to 0$. En passant à la limite, on obtient alors que

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = (1 - \cos(1)) + \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

où chaque terme est bien défini et donc ce calcul est maintenant correct.

5.3 Des exemples concrets

La Gaussienne $x \longmapsto e^{-x^2}$ est une fonction important en probabilités et statistiques, en particulier à cause du théorème de la limite centrale. On peut écrire une primitive de la Gaussienne avec les fonctions usuelles, mais on a que

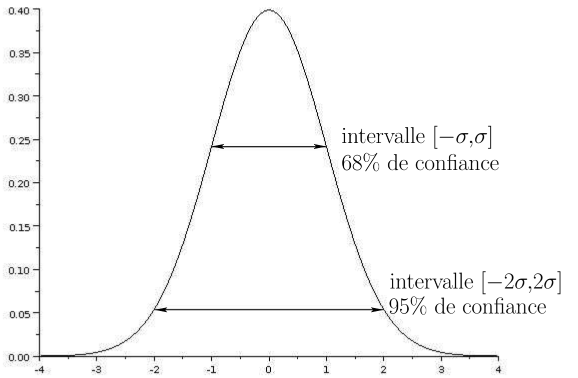
$$\frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = e^{-x^2+|x|} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\ .$$

Donc e^{-x^2} est une fonction positive et est négligeable devant $e^{-|x|}$ qui est intégrable en $\pm\infty$. On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \ = \ \sqrt{\pi}\ .$$

La loi normale centrée d'écart-type σ est donnée par la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ .$$



On justifie l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ comme ci-dessus. Calculons la valeur de l'intégrale. Soit $\xi > 0$, on a

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi/(\sqrt{2}\sigma)}^{\xi/(\sqrt{2}\sigma)} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

par le changement de variable $y = x/(\sqrt{2}\sigma)$. En faisant tendre ξ vers $+\infty$, comme toutes les intégrales convergent, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

ce qui montre qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.

Calculons maintenant l'écart-type de f. Celui-ci est donné par

$$ET^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

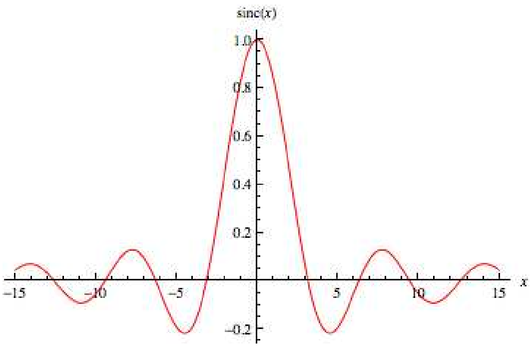
car la moyenne de la variable x selon la densité f est nulle car f est paire. Notons d'abord que cette intégrale converge car xe^{-x^2} est aussi négligeable devant $e^{-|x|}$. Nous allons faire une intégration par partie. Soit $\xi > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{\xi} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\xi}^{\xi} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\xi}^{\xi} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Quand $\xi \to +\infty$, on a $\xi e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \to 0$ et donc le premier terme s'en va. Il reste

$$ET^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2$$

où on a utilisé le calcul plus haut. On trouve bien que σ est l'écart-type de notre densité.



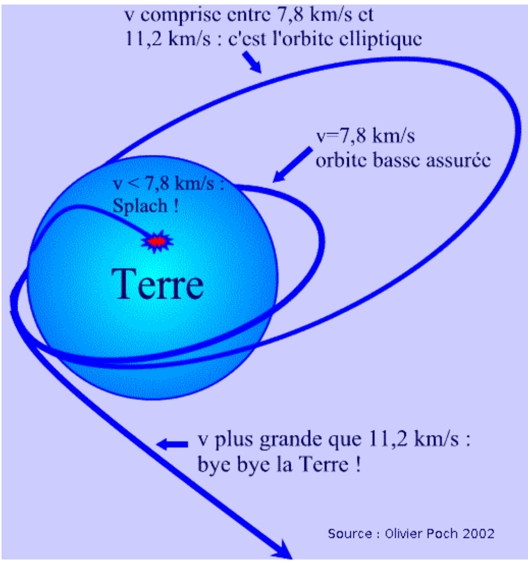
Le sinus cardinal et son intégrale sont importants par exemple en théorie du signal. Il s'agit en effet de la transformée de Fourier d'un créneau et donc d'un filtre « passe-bas ». On retrouve aussi cette fonction dans certaines démonstration mathématiques. On pourra retenir que

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\ .$$

Calculons le travail W nécessaire pour envoyer un objet à la distance infinie de la Terre. A partir de la surface de la Terre, le travail nécessaire à l'éloignement de l'objet décroit comme k/r^2 où r est la distance au centre de la Terre. Donc on doit calculer

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

où $r_0 \simeq 6378100\,\mathrm{m}$ est le rayon de la Terre. Il s'agit d'une intégrale impropre convergente et en outre $E = k/r_0$. Comme l'accélération de la pesanteur est d'environ $9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}$ en $r = r_0$, on a $k/r_0^2 = 9{,}81m$ où m est la masse de l'objet et donc $W = k/r_0 \simeq 6{,}26 \times 10^7 m$.



L'énergie cinétique nécessaire vérifie donc $E = \frac{1}{2}mv^2 = 6{,}26 \times 10^7 m$ et donc la vitesse de libération d'un objet de l'attraction terrestre est de

$$v \ = \ \sqrt{2E/m} \ \simeq \ 11\,200\,\mathrm{m.s}^{-1} \ \simeq \ 40\,000\,\mathrm{km.h}^{-1}\ .$$