TD n° 4 : Intégrales de Riemann

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

Cette feuille est en grande partie des révisions de L1. Il peut être utile de faire un tableau des primitives usuelles.

*** Définitions à connaître par cœur**

somme de Riemann

*** Propriétés à connaître par cœur**

- linéarité, positivité de l'intégrale
- lien entre intégration et primitive
- formule d'intégration par parties
- formule de changement de variables

Exercice 1. *Des sommes de Riemann

1. Montrer que la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
est une suite de sommes de Riemann convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. Pour quelle valeur du réel α la suite
$$v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin \frac{k}{n}$$
est-elle une suite de sommes de Riemann ? Que vaut alors sa limite ? Que se passe-t-il pour les autres valeurs de α dans $]-1, +\infty[$?
4. A l'aide des sommes de Riemann, montrer les équivalents
$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \quad (\alpha > 0) \qquad\qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \sim n \ln n\ .$$

Exercice 2. *Rappels de primitives

Pour chacune des intégrales suivantes,

- déterminer les intervalles $[a, b]$ tels que la fonction soit Riemann intégrale sur $[a, b]$.
- calculer alors la valeur de l'intégrale,

1. $\int_a^b t^n\, dt$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\int_a^b P(t)\, dt$, avec P polynôme de degré d
3. $\int_a^b e^{\alpha t}\, dt$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $\int_a^b \sqrt{t}\, dt$
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$
6. $\int_a^b t^{1/3}\, dt$
7. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\, dt$

Exercice 3. *Calcul de primitives de fractions rationnelles

1. $\int \frac{x^3dx}{x^2+1}, \int \frac{dx}{x(1+x)^2}, \int \frac{dx}{4x^2-3x+2}, \int \frac{x^2dx}{x^4-1}$.
2. $\int \frac{dx}{49-4x^2}, \int \frac{(5x-12)dx}{x(x-4)}, \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1}$.

Exercice 4. *Calcul de primitives par changement de variables

Donner des primitives de $\sqrt{x^2+1}, \sqrt{x^2-1}, \sqrt{1-x^2}$ en utilisant les changements de variable $x = \sinh u$ ou $x = \cosh u$ ou $x = \sin u$.

Exercice 5. *Calcul de primitives de fonctions en sin, cos

$$\int (\sin x)^3 dx,\ \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2} dx,\ \int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx,\ \int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx,\ \int \sin^2 x \cos^3 x dx,\ \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

Exercice 6. *Calcul de primitives

$$\int x^3 \ln x dx,\ \int e^{-x}\cos x dx$$

Exercice 7. *Intégration et dérivation

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 8. ** Cas d'égalité

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Donner une CNS sur f pour que $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$.
2. Même question si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9. ** Primitive avec fonction exponentielle

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$ où P est un polynome et a un réel est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$ où Q est un polynome et C une constante.
2. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\cos\alpha x$ où P est un polynome et α un réel est de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos\alpha x + Q_2(x)\sin\alpha x + C$ où Q_1, Q_2 sont des polynomes et C une constante.