

TD n° 3 : séries à termes quelconques

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

* Définitions à connaître par cœur

— convergence absolue

* Propriétés à connaître par cœur

— critère spécial des séries alternées

— séries géométriques convergentes/divergentes, séries de Riemann convergentes/divergentes

— comparaison entre termes généraux et implication sur la convergence/divergence des séries à termes quelconques.

Exercice 1. * Séries alternées

Les séries suivantes vérifient-elles le critère spécial des séries alternées ?

$$1. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n},$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{(-1)^n}{n} \right),$$

$$5. \text{ ** } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + a^n}$$

en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

$$2. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n},$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right),$$

Exercice 2. * Convergence absolue

Les séries suivantes convergent-elles absolument ?

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^3},$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{\cos(n)}{n^2} \right),$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{(-1)^n}{n} \right),$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right).$$

Exercice 3. * Domination et convergence

Comparer les séries suivantes à des sommes de séries de Riemann, et en déduire si elles convergent.

$$1. \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{\cos(n)}{n^2} \right),$$

$$3. \sum_{n \geq 2} 1 - \sqrt{1 - \frac{(-1)^n}{n}},$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right),$$

$$4. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}.$$

Exercice 4. ** Convergence sans indication

Les séries suivantes convergent-elles ?

1. $\sum_{n \geq 1} \cos(n)e^{-3n}$,
2. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$,
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$,
4. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$,
5. $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^\pi \frac{\cos x}{n^2 + \cos^2 x} dx \right)$,
6. $\sum_{n \geq 0} \sqrt[3]{n + (-1)^n} - \sqrt[3]{n}$,
7. $\sum_{n \geq 1} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$,
8. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
9. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + a^n}$, en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 5. ** Calculs de sommes

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n$,
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$,
3. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$,
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$,
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$,
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, où $x \in]-1, 1[$.

Exercice 6. ** Comparaison séries-intégrales

1. Dériver la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$, et en déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Montrer qu'on a également $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

2. En exploitant une comparaison avec une intégrale, établir $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}$.

Exercice 7. ** Série à terme général défini par une récurrence Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

En utilisant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\sum u_n^3$ converge.

En utilisant $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

Que peut-on dire de la série $\sum u_n$?

Exercice 8. ** Une série définie par récurrence

Soit $u_n, n \geq 0$ une suite de réels positifs vérifiant la relation de récurrence suivante

$$u_{n+2} = \frac{1}{6}(u_{n+1} + u_n) \quad (*)$$

on pose $c = \max(u_0, u_1)$

1. Montrer par récurrence que $u_n \leq c2^{1-n}$ pour tout $n \geq 2$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. A l'aide de la propriété (*), trouver une relation entre les sommes $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $S' = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$

$$\text{et } S'' = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k.$$

En déduire l'expression de S en fonction de u_0 et u_1 .

Exercice 9. ** Calcul de $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$

Soit x un nombre réel, avec $|x| < 1$.

1. Montrer que $\sum_n x^n$ et $\sum_n nx^{n-1}$ convergent.

2. Donner des expressions fermées (c'est-à-dire sans signe \sum) de $\sum_{n=0}^N x^n$ et $\sum_{n=1}^N nx^{n-1}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

4. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-2)3^{-n} + (n-3)2^{-n}) \qquad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 2n)3^{-n}.$$

Exercice 10. * Critère d'Abel

Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\left(\sum \frac{\cos n}{n} \right), \quad \left(\sum \frac{\sin^2 n}{n} \right)$$

Exercice 11. ** Développement en série entière

1. Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

2. (a) En déduire en utilisant la fonction exponentielle que :

$$|e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})| \leq \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

(b) Montrer que, tout $x \in \mathbb{R}$, la série $(\sum \frac{x^n}{n!})$ converge.

Indication : On pourra utiliser le critère de D'Alembert.

(c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!} = 0.$$

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Pour tout $x \in]-1, 1]$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et montrer que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x) .$$

En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

Exercice 12. * Attention à la semi-convergence**

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes complexes. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.