TD n° 2 : séries à termes positifs

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

* Définitions à connaître par cœur

— somme partielle d'ordre k d'une série, suite des sommes partielles d'une série,

— série convergente, série divergente, somme d'une série convergente,

* Propriétés à connaître par cœur

— séries géométriques convergentes/divergentes, séries de Riemann convergentes/divergentes,

— terme général positif et suite des sommes partielles majorée $\Longrightarrow$ série convergente,

— comparaison entre termes généraux et implication sur la convergence/divergence des séries à termes positifs,

— critère de d'Alembert, critère de Cauchy

Exercice 1. * Des suites aux séries : une somme télescopique

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 0, 1 et -1 on ait :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

2. En utilisant cette relation pour $x = 2, 3, \ldots, n$, déterminer pour tout $n \geq 2$ une expression simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n^2-1)}$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. En déduire que la série $\left(\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k^2-1)}\right)$ converge et donner sa somme.

Exercice 2. * Convergence d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs.

Montrer que la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} u_k\right)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 3. * Séries convergentes ou divergentes

Déterminer la nature des séries de terme général donné, à l'aide des indications données.

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}$ (montrer que u_n ne tend pas vers 0),
2. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n n^2}$ (comparer u_n à une série géométrique),
3. $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4+\sin n}$ (comparer u_n à une série géométrique),

4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ (trouver un équivalent polynomial de u_n),
5. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ (trouver un équivalent polynomial de u_n),
6. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (utiliser le critère de d'Alembert),
7. $u_n = ne^{-n}$ (utiliser le critère de d'Alembert),
8. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (passer par $\log(u_n)$).

Exercice 4. ** Séries convergentes ou divergentes

Déterminer la nature des séries de terme général donné.

1. $u_n = \dfrac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$,
2. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$,
3. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 1)$,
4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}$,
5. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$,
6. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$,
7. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 2)$,
8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha} \quad (n \geq 1)$
(discuter selon la valeur du réel α),

$$9. \quad u_n = n^2\left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} + \left(\ln(1-\frac{1}{n})\right)^2 - e^{\frac{1}{n}}\right).$$

Exercice 5. ** "Vis ma vie de chargé de TD"

Inventer une série qui nécessite un développement limité à l'ordre 3 pour savoir si elle converge ou diverge.

Exercice 6. ** Calculs de sommes de séries

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $\left(\sum_{n\geq 0} 3^{-n}\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 3} \dfrac{2}{5^n}\right)$
3. $\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}\right)$
4. $\left(\sum_{n\geq 2} \dfrac{3}{(n-1)!}\right)$
5. $\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{n+2}{n!}\right)$
6. $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+n+1}{n!}\right)$

Exercice 7. ** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs telle que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge. Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{u_n+1}\right)$ converge.

Exercice 8. * Comparaison série intégrale

1. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$ quand α est un réel strictement plus petit que 1.
2. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ quand α est un réel strictement plus grand que 1.
3. Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln n$.

Exercice 9. ** Équivalence des sommes partielles ou des restes

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites positives. On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge. Montrer que $\sum_{k>n} u_k \sim \sum_{k>n} v_k$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On suppose que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 10. ** Écriture décimale et séries

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

1. Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n}\right)$ converge.
2. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est un nombre rationnel.

Pour x un nombre dans l'intervalle $[0, 10[$, on note x_0 la partie entière du nombre x, puis on définit par récurrence x_{n+1} comme la partie entière du nombre $10^n(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k})$.

3. Montrer par récurrence que pour tout n on a $x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et $10^n(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}) \in [0, 10[$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{10^n}$ converge et que sa somme vaut x. (La suite x_n est donc la suite des décimales de x.)
5. *** Montrer que si x est rationnel, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang. (Commencer part le vérifier pour un nombre comme $11/7$.)

Exercice 11. ** Une autre preuve de convergence pour les séries de Riemann en faisant des paquets

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.

1. Montrer que les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle démonstration des critères de convergence des séries de Riemann.
3. Étudier la convergence des séries $\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}\right)$.

Exercice 12. * Séries à terme général positif décroissant**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante telle que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $(n-N)u_n \leqslant \varepsilon$.
2. En déduire que nu_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Donner un exemple de suite positive $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et nv_n ne tend pas vers 0.

Exercice 13. *** Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$.

Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$. (Indication : on pourra considérer $\log S_{n+1} - \log S_n$)

Exercice 14. *** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et notons $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.

1. Montrer par des exemples que la divergence de $(\sum u_n)$ ne permet pas de déterminer la nature de $(\sum v_n)$.

On suppose dans la suite que $(\sum u_n)$ converge et on va montrer que $(\sum v_n)$ diverge.

2. Traiter le cas où n^2u_n ne tend pas vers $+\infty$.
3. Traiter le cas où $n^2u_n \to +\infty$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2}v_n^{1/2}$.

Exercice 15. Un calcul de Leibniz

Dans le texte ci-dessous, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) souhaite calculer la somme des inverses des nombres triangulaires. On rappelle qu'un nombre triangulaire est de la forme

$$t_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Les premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15.... Leibniz veut donc calculer la somme $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$.

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series ⊙ $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ etc. in infinitum ⊓ 2.

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ etc. in infinitum.

Exponatur et series ⊙ dimidiata:

series ☿ $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ etc. in infinitum

Quam ajo esse ⊓ 1.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2}+\frac{4}{12}+\frac{9}{36}+\frac{16}{80}+\frac{25}{150}+\frac{36}{252}$ etc. sive depressis fractionum Terminis

series ♀ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ etc. in infinitum.

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

Son calcul est le suivant. Comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} - 1 \qquad (1)$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ ce qui donne la valeur 2 pour la somme des inverses des nombres triangulaires. Le problème du raisonnement de Leibniz est qu'il utilise pour calcul intermédiaire une somme divergente $\sum_n 1/n$ et simplifie de fait par $+\infty$ de chaque côté de (1).

Reprendre le calcul (1) de Leibniz mais en écrivant des sommes partielles plutôt que les sommes complètes qui ne sont pas toutes définies. Montrer alors rigoureusement que $(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)})$ est une série convergente qui a pour somme 1.