Contrôle continu 1- Correction

le 26 octobre 2018 de 8h à 10h

Exercice 1. Autour du cours (3 points).

1. Soit une suite $(u_n)_n$ telle que $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge, i.e que la suite des sommes partielles $(S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n)_N$ converge vers une limite S. Le terme général de la série peut s'écrire, pour $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Mais comme $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S$, par sommation, la suite (u_n) est convergente et sa limite vaut 0.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Supposons que $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge. Soit $N \geq 0$. Par définition de v_n, on a $\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{2N+1} u_n$. Or le membre de droite converge par hypothése ; donc la série $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ est convergente. La reciproque est fausse : pour $u_n = (-1)^n$, on a $(\sum u_n)$ qui diverge grossierement mais les sommes partielles de $(\sum v_n)$ sont constantes egales a 0, donc convergent.

Exercice 2. (4 points)

1. On a, pour $N \geq 3$,
$$\sum_{n=3}^{N} (\frac{-1}{3})^{n-2} = \sum_{n=1}^{N-2} (\frac{-1}{3})^{n} = \frac{(\frac{-1}{3}) - (\frac{-1}{3})^{N-1}}{1-(\frac{-1}{3})} = \frac{\frac{-1}{3}}{1-(\frac{-1}{3})} + o(1) = -\frac{1}{4} + o(1),$$
car $\left|\frac{-1}{3}\right| < 1$. Donc la série est convergente et sa somme vaut $-\frac{1}{4}$.
2. Pour $n \geq 2$, on a $n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1$ donc
$$\frac{n^2-1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)!} + \frac{n}{n(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!},$$
donc en regardant les sommes partielles jusqu'a N, pour $N \geq 2$, on a :
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!}.$$
Puis, comme la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!})$ est convergente de somme e, on en déduit que la série est convergente et, en rajoutant les termes manquants, on obtient que la somme vaut
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 + 2 = e + 1.$$

Exercice 3. (7 points)

1. Soit $u_n = \dfrac{n^3 + 3^n}{(-1)^n n + \ln(n) + 4^n}$. Par croissance comparée, $u_n \sim \frac{3^n}{4^n} = (\frac{3}{4})^n$, donc par comparaison de séries de termes positifs, la série de terme géneral u_n converge.

2. Soit $u_n = \dfrac{n^2+1}{e^n}$. Par le critere de Cauchy, comme $|u_n|^{1/n} \to \frac{1}{e} < 1$, la série de terme géneral u_n converge.
3. Soit $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. On a $u_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1$, et comme $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$, $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$ qui est le terme géneral d'une série divergente, donc par comparaison de séries a termes positifs, la série diverge.
4. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(3n)+2}$. Comme $\ln(3n)+2$ est une suite croissante, la suite (u_n) est alternee, et sa valeur absolue, $\frac{1}{\ln(3n)+2}$ est décroissante et tend vers 0. Donc d'apres le critere des series alternees, la serie converge.
5. Soit $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$. On a $u_n = e^{n^3\ln(1-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4}))} = e^{-n/2+O(\frac{1}{n})} \sim e^{-n/2}$, qui est le terme general d'une serie convergente, donc par comparaison de series a termes positifs, la serie converge.
6. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$. Montrons la croissance de la suite $(n+\sin(n))$ ce qui montrera que la suite verifie le critere des series alternees et donc que la serie converge. On a $(n+1+\sin(n+1)) - (n+\sin(n)) = 1+\sin(n+1)-\sin(n) \geq 0$ car $|\sin(n+1)-\sin(n)| \leq 1$ par l'inegalite des accroissements finis par exemple. Donc la serie converge.

Exercice 4. (4 points) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et considérons la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ où

$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \ln n + a(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})) + b(\ln n + \ln(1+\frac{2}{n})) = (1+a+b)\ln n + \frac{(a+2b)}{n} + O(\frac{1}{n^2}),$$

i.e s'ecrit $u_n = A\ln n + \frac{B}{n} + (\frac{1}{n^2})$ avec $A = 1+a+b$ et $B = a+2b$.

2. Pour que $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge, il faut et il suffit que $A = B = 0$. En effet un $O(\frac{\ln n}{n^2})$ est un terme dont la serie converge absolument. Donc si $A = B = 0$, la serie de terme general u_n est convergente, et si $A \neq 0$, la serie diverge grossierement pour tout B, et si $A = 0$ et $B \neq 0$, u_n est une somme de deux termes dont la serie de l'un diverge et l'autre converge, donc la serie diverge.

Or, $A = B = 0 \iff a = -2, b = 1$. Pour ces valeurs, en regardant les sommes partielles de u_n pour $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}\ln n - 2\sum_{n=2}^{N+1}\ln n + \sum_{n=3}^{N+2}\ln n = \ln 1 - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln 2 = -\ln 2 + o(1)$$

car $\ln(N+2) - \ln(N+1) = \ln(1+\frac{1}{N+1}) \to 0$. Donc la somme vaut $-\ln 2$.

Exercice 5. (3 points) Soit (S_n) la somme partielle de la série $\left(\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^3}\right)$ et S sa somme. Soit R_n le reste d'ordre n. On rappelle que $R_n = S - S_n$.

1. On a, pour $N \geq 1$, $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Pour $n \geq 2$, par decroissance de $t \to \frac{1}{t^3}$, on a l'inegalite suivante :

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^3};$$

en sommant entre $N+1$ et $M \geq N+1$, on obtient

$$\int_{N+1}^{M+1} \frac{dt}{t^3} \leq \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^3} \leq \int_{N}^{M} \frac{dt}{t^3},$$

ce qui, apres integration, donne

$$\frac{1}{2(N+1)^2} - \frac{1}{2(M+1)^2} \leq \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2N^2} - \frac{1}{2M^2}.$$

Toutes ces quantites ont une limite quand M tend vers l'infini, donc par passage a la limite,

$$\frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2N^2}.$$

2. En multipliant l'inegalite precedente par $2N^2$, on obtient

$$\left(\frac{N}{N+1}\right)^2 \leq \frac{R_N}{1/2N^2} \leq 1,$$

donc par le theoreme des gendarmes, comme les membres de gauche et droite tendent vers 1 quand N tend vers l'infini, on obtient que $R_N \sim \frac{1}{2N^2}$.