Contrôle continu 2

le 4 Décembre 2017 de 9h45 à 11h45

Les documents, calculatrices, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Seule une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Le barème est indicatif.

Exercice 1. Autour du cours (3 points).

1. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner la définition de convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t)dt$.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Démontrer que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ si, et seulement si, f est la fonction nulle.

Exercice 2. (4 points) Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles de $\mathbb{R}$ où elles existent :

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\ , \qquad g(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\ .$$

Exercice 3. (3 points) Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de la suite suivante en l'interprétant comme une somme de Riemann :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}.$$

Exercice 4. (4 points) Discuter la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$;
2. $\int_0^{+\infty} (t^{100}+1)e^{-t^2+t} dt$
3. $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x}) dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Exercice 5. (3 points)

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge.
2. Pour ces valeurs, en utilisant une intégration par parties [1], calculer une primitive et l'intégrale.

Exercice 6. (3 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie l en $+\infty$.

1. En utilisant la définition de limite montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(x) := \int_x^{x+a} f(t)dt$ tend vers $l \cdot a$ quand $x \to +\infty$.
2. Déduire du point précédent que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(x+a) - f(x))\, dx$ converge.

1. On fera attention de justifier proprement toute intégration par parties ou changement de variable dans l'intégrale généralisée.

Second mid-term

December 4th 2017, 9h45 - 11h45

Documents, calculators, telephones and any other electronic device is strictly forbidden. A recto-verso handwritten sheet is authorized. All the answers have to be justified, and the quality of the redaction will be taken into account.

The points attributed to every exercise can be modified afterwards.

Exercise 1. About the course (3 points).

1. Let $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ be a continuous function. Give the definition of convergence of the improper integral $\int_0^1 f(t)dt$.

2. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(x) \geq 0$ for all $x \in [0,1]$. Prove that $\int_0^1 f(t)dt = 0$ if, and only if, f is the zero function.

Exercise 2. (4 points) For each of the following functions, compute all their primitives over the subset of $\mathbb{R}$ where they exist :

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\ , \qquad g(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\ .$$

Exercise 3. (3 points) Determine the limit, for n going to $+\infty$, of the following sequence by interpreting it as a Riemann sum :

$$S_n \ := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}.$$

Exercise 4. (4 points) Study the convergence of the following improper integrals :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt$;
2. $\int_0^{+\infty} (t^{100}+1)e^{-t^2+t}dt$
3. $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Exercise 5. (3 points)

1. Determine the values of $\alpha \in \mathbb{R}$ such that the integral $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ converges.
2. For those values, using an integration by parts [2], compute a primitive and the integral.

Exercise 6. (3 points) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function admitting a finite limit l in $+\infty$.

1. Using the definition of limit show that, for all $a \in \mathbb{R}_+$, the function $F(x) := \int_x^{x+a} f(t)dt$ tends to $l \cdot a$ for $x \to +\infty$.

2. Deduce from the above item that the integral $\int_0^{+\infty}(f(x+a)-f(x))\,dx$ converges.

2. Pay attention to justify properly any integration by parts or change of variable in the improper integral.