Corrigé

Exercice 1. Autour du cours (3 points).

1. Par le cours, on sait qu'une fonction continue sur un segment admet une intégrale finie bien determinée. Donc, pour tout réel $c < 1$, l'intégrale $\int_0^c f(t)dt$ existe et est finie. On dit que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t)dt$ converge si $\int_0^c f(t)dt$ admet une limite finie quand $c \to 1^-$, et la valeur de l'intégrale impropre est alors cette limite.

2. Si $f = 0$, alors f est une fonction constante. On peut alors suivre la définition de l'intégrale d'une fonction localement constante. L'intégrale est définie, dans ce cas, comme l'aire du rectangle tracé par son graphe. Donc $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

   Inversement, supposons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $f \geq 0$ et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Il suffit de montrer que si $f \neq 0$, alors $\int_0^1 f(t)dt > 0$. Si $f \neq 0$ prenons $x \in [0,1]$ t.q. $f(x) > 0$. La continuité entraîne que $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. La définition de limite entraîne qu'on peut trouver un intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$ contenant x et d'intérieur non vide tel que pour tout $y \in [a,b]$ on a $f(y) > \frac{1}{2}f(x)$. Donc on a $f \geq g$, où g est la fonction localement constante sur $[0,1]$ qui est égale à 0 en dehors de $[a,b]$ et qui vaut $\frac{1}{2}f(x)$ sur $[a,b]$. Maintenant, par définition de l'intégrale de Riemann, $\int_0^1 f(t)dt$ est la borne supérieure des intégrales de toutes les fonctions localement constantes h telles que $h \leq f$. Comme g est une fonction localement constante, cette borne supérieure est plus grande que l'intégrale de g (qui est strictement positive). D'où $\int_0^1 f(t)dt > 0$ comme souhaité.

Exercice 2. (4 points) On décompose la fraction $f = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ en éléments simples : il existe a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

Cette formule montre que :

$$a = \lim_{x\to 1} (x-1)f(x) = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

$$c = \lim_{x\to -1} (x+1)^2 f(x) = \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

Finalement on déduit b :

$$b = \lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\Big(f(x) - \frac{c}{(x+1)^2}\Big) \tag{3}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\Big(\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{1/2}{(x+1)^2}\Big) \tag{4}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\Big(\frac{x - \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}\Big) \tag{5}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}\Big) = \lim_{x\to -1}\frac{1}{2(x-1)} = -\frac{1}{4}\,. \tag{6}$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} =]-\infty,-1[\, \cup\,]-1,1[\, \cup\,]1,+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles,

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C\,. \tag{8}$$

En particulier, sur $]-1,1[$, f admet pour primitives les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{4}\ln(1-x) - \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C = \frac{1}{4}\ln(\tfrac{1-x}{1+x}) - \frac{1}{2(x+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Passons à la primitive suivante. La fonction g en question est définie et continue sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ ($1+\cos x = 0$ ssi $x \in \{\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$). En prenant le carré de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ on obtient $\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{i2x} = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 + 2i\sin(x)\cos(x)$. Ce qui donne $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Donc $g(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)}$ sur D_g. On voit que $g(-x) = -g(x)$. La règle de Bioche nous dit que le changement de variable $t = \cos(x)$ transforme notre intégrale en un intégrale d'une fraction de deux polynômes. On a $dt = -\sin(x)dx$. Donc sur chaque intervalle de D_g,

$$\begin{aligned}
\int g(x)dx &= \int \frac{-2\cos(x)}{1+\cos(x)}(-\sin(x))dx \; = \; -2\int \frac{t}{1+t}dt && (9)\\
&= -2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt \; = \; 2(-\int dt + \int \frac{1}{1+t}dt) && (10)\\
&= -2t + 2\ln|1+t| + C \; = \; -2\cos(x) + 2\ln(1+\cos(x)) + C && (11)
\end{aligned}$$

car $1+\cos(x) > 0$ sur D_g.

Exercice 3. (3 points) On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n^3+k^3)^{1/3}} && (12)\\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{(1+(k/n)^3)^{1/3}} && (13)
\end{aligned}$$

Cela montre que $(S_n)_n$ est une suite de sommes de Riemann de la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/3}}$ continue sur $[0,1]$, donc :

$$\lim_n S_n = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/3}}dx \; . \qquad (14)$$

On considère le changement de variable $y = 1+x^3$, C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $dy = 3x^2dx$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/3}}dx &= \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{y^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}dy && (15)\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}y^{2/3}\right]_1^2 = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2} \; . && (16)
\end{aligned}$$

Exercice 4. (4 points)

1. La primitive de la fonction $\frac{1}{\ln}$ ne peut pas s'exprimer avec des fonctions élémentaires. On ne cherche donc pas à calculer une primitive. La fonction $\frac{1}{\ln}$ est positive sur $[2,+\infty[$, donc on peut utiliser le critère de comparaison. En particulier, on voit que sur cet intervalle $\ln(t) \leq t$ et que donc $1/\ln(t) \geq 1/t$. L'intégrale $\int_2^\infty \frac{dt}{t}$ diverge (car la fonction $t \mapsto 1/t$ a pour primitive $\ln(t)$ qui tend vers l'infini en $+\infty$). Donc, par comparaison, l'intégrale $\int_2^\infty \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge en $+\infty$.

2. La fonction $(t^{100}+1)e^{-t^2+t}$ est positive, donc on peut utiliser le critère de comparaison. La fonction est définie et continue sur $[0,+\infty[$ donc il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$. On soupçonne la convergence car l'exponentielle est toujours "gagnante"

par rapport au polynôme. En effet, pour de grandes valeurs de t on a $t^{100} + 1 \leq e^t$, donc pour t très grand on a

$$(t^{100} + 1)e^{-t^2+t} \;\leq\; e^{-t^2+2t} \, .$$

Maintenant, pour t grand (en fait $t \geq 3$), nous avons $t^2 - 2t \geq t$ donc $e^{-t^2+2t} \leq e^{-t}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$ (car cette fonction a pour primitive $t \mapsto -e^{-t}$ qui converge en $+\infty$). Donc par comparaison l'intégrale $\int_0^{+\infty}(t^{100} + 1)e^{-t^2+t}$ est convergente.

3. La fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur $]0, 1]$, donc l'intégrale converge en 1.

   Montrons que l'intégrale converge absolument (i.e. l'intégrale $\int_0^1 |\sin(1/t)|dt$ converge). Cela entraîne la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \sin(1/t) \cdot dt$ en 0. Pour $x \to 0$, la fonction $|\sin(1/x)|$ n'a pas de limite, mais elle est bornée : $|\sin(1/x)| \leq 1$. Or $x \mapsto 1$ a une intégrale convergente en 0, donc par comparaison, $x \mapsto |\sin(1/x)|$ aussi.

4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0, 1[$ et a pour primitive arcsin, donc pour $0 < b < 1$, $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est bien définie et vaut

$$[\arcsin(x)]_0^b = \arcsin(b) - \arcsin(0) = \arcsin(b) \longrightarrow_{b\to 1^-} \frac{\pi}{2}$$

   donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge et sa valeur est $\pi/2$.

   On peut démontrer la convergence de l'intégrale en 1 sans connaître la primitive. Quand $x \to 1^-$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est positif et équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ puisque $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc l'intégrale impropre considérée est de même nature que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ (impropre en 1), qui, par le changement de variable $y = 1 - x$, est elle-même de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{y^{1/2}}dy$ (impropre en 0 cette fois), qui est convergente. Donc l'intégrale impropre initiale est convergente.

Exercice 5. (3 points)

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\ln(x)/x^\alpha$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale $\int_1^\infty \ln(x)/x^\alpha dx$ converge en 1.

   Regardons maintenant l'infini. Pour tout α, la fonction $x \mapsto \ln(x)/x^\alpha$ est positive, donc on peut utiliser l'équivalence et la comparaison.

   • Si $\alpha \leq 1$: pour tout $x \geq e$, $\ln(x)/x^\alpha \geq 1/x^\alpha$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ diverge (intégrales de Riemann) donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx$ diverge aussi.

   • Si $\alpha > 1$, on prends $1 < \beta < \alpha$ et on remarque que, comme $\alpha - \beta > 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha-\beta}} = 0$. Donc pour tout x assez grand on a

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \;=\; \frac{1}{x^\beta} \cdot \frac{\ln(x)}{x^{\alpha-\beta}} \;\leq\; \frac{1}{x^\beta} \, . \tag{17}$$

   Comme $\beta > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}dx$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx$ converge aussi.

2. Calculons les primitives de $x \mapsto \ln(x)/x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$, où la fonction est définie et continue. Par parties, en prenant $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}$, de sorte que $v'(x) = x^{-\alpha}$, on a

$$\begin{aligned}
\int x^{-\alpha}\ln(x)dx &= \frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\ln(x) - \int \frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}dx && (18)\\
&= \frac{1}{1-\alpha}\Big(x^{1-\alpha}\ln(x) - \int x^{-\alpha}dx\Big) && (19)\\
&= \frac{1}{1-\alpha}\Big(x^{1-\alpha}\ln(x) - \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big) + C && (20)\\
&= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big(\ln(x) - \frac{1}{1-\alpha}\Big) + C. && (21)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale impropre. Notons F l'une des primitives ci-dessus, par exemple celle correspondant à la constante $C = 0$. Alors pour tout $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt \;=\; \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \left(\ln(x) - \frac{1}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \,.\end{aligned}$$

Exercice 6. (3 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie l en $+\infty$.

1. Soit $F(x) = \int_x^{x+a} f(t)dt$. La définition de limite $\lim_{t\to\infty} f(t) = \ell$ dit que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $M > 0$ tel que pour tout $t > M$ on a $\ell - \epsilon \leq f(t) \leq \ell + \epsilon$. Pour un tel grand M, et pour tout $x > M$, on a :

$$\forall t \in [x, x+a], t > M \text{ donc } \ell - \epsilon \leq f(t) \leq \ell + \epsilon$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{x+a} (\ell - \epsilon)dt \;\leq\; F(x) \;\leq\; \int_x^{x+a} (\ell + \epsilon)dt$$

c'est-à-dire

$$a(\ell - \epsilon) \;\leq\; F(x) \;\leq\; a(\ell + \epsilon)$$

ou encore $|F(x) - a\ell| \leq a\epsilon$. Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x > M, |F(x) - a\ell| \leq a\epsilon.$$

Mais alors pour tout $\epsilon' > 0$, en posant $\epsilon = \epsilon'/a$, l'assertion ci-dessus nous donne l'existence de $M > 0$ tel que pour tout $x > M$, $|F(x) - a\ell| \leq \epsilon'(= a\epsilon)$, ce qui signifie précisément que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell a$.

2. La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge en 0. Regardons maintenant l'infini. Soit $F(x) = \int_x^{x+a} f(t)dt$ la fonction du point précédent. On a $F(x) = \int_0^{x+a} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$, ce qui entraîne que

$$F'(x) \;=\; f(x+a) - f(x) \;=\; g(x) \,. \tag{22}$$

F est alors une primitive de g. Mais par définition, l'intégrale impropre étudiée converge en $+\infty$ si et seulement si $\int_0^x g(t)dt = F(x) - F(0)$ converge quand $x \to +\infty$, ce qui est le cas d'après la question précédente. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}(f(t+a) - f(t))dt$ est donc globalement convergente.