Contrôle continu 1

le 26 octobre 2018 de 8h à 10h

Les documents, calculatrices, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Seule une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Autour du cours (3 points).

1. Prouver que si la série de réels $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge son terme général u_n tend vers 0.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que si la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge alors la série $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ converge aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. (4 points) Dire si les séries suivantes sont convergentes et, dans l'affirmative, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2-1}{n!}$

Exercice 3. (8 points) Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^3+3^n}{(-1)^n n + \ln(n) + 4^n}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+1}{e^n}$
3. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(3n)+2}$
5. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$

Exercice 4. (4 points) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et considérons la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ où

$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Donner un développement de u_n sous la forme $u_n = \ln(n)\left(A + \frac{B}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right)$.
2. Trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge puis calculer sa somme.

Exercice 5. (3 points) Soit (S_n) la somme partielle de la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\right)$ et S sa somme. Soit R_N le reste d'ordre N. On rappelle que $R_N = S - S_N$.

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, donner un encadrement de R_N.
2. En déduire un équivalent de R_N.

Partial exam 1

October 26, 8-10h

Documents, calculators, telephones and any other electronic devices are strictly forbidden. A recto-verso handwritten sheet is authorized. All the answers have to be justified, and the quality of the redaction will be taken into account.

Exercise 1. Around the course (3 points).

1. Prove that if the series $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converges, then its general term u_n tends to 0.
2. Let $(u_n)_{n\geq 0}$ be a sequence. For any $n \in \mathbb{N}$, set $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Prove that if the series $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converges, then so does the series $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$. Is the converse also true ?

Exercise 2. (4 points) Are the following series convergent ? If yes, compute their sum.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2-1}{n!}$

Exercise 3. (8 points) Indicate if the series with general term u_n converges or diverges in the following cases :

1. $u_n = \dfrac{n^3 + 3^n}{(-1)^n n + \ln(n) + 4^n}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+1}{e^n}$
3. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(3n)+2}$
5. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$

Exercise 4. (4 points) Let $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ and consider the series $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ where

$$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Find a development of u_n of the form $u_n = \ln(n)\Big(A + \frac{B}{n} + O(\frac{1}{n^2})\Big)$.
2. Find $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ such that the series $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converges, then compute its sum.

Exercise 5. (3 points) Let (S_n) be the partial sum of the series $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\right)$ and S be its sum. Let $R_N = S - S_N$ be its rest of order N.

1. Using a comparison series-integral, give upper and lower bounds for R_N.
2. Deduce an equivalent of R_N.