Contrôle continu 1

le 26 octobre 2017 de 12h30 à 14h30

Les documents, calculatrices, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Seule une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Autour du cours (2 points).

1. Que signifie « *la série de réels* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ *converge* » ?
2. Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$ deux séries à termes positifs. On suppose que pour tout n on a l'inégalité $a_n \leq b_n$. Démontrer le critère de comparaison suivant :

$$\textit{Si } \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) \textit{ converge alors } \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \textit{ converge.}$$

Exercice 2. (4 points) Dire si les séries suivantes sont convergentes et, dans l'affirmative, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{n!}$

Exercice 3. (6 points) Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^3 + \ln(n) + 5^n}$
2. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
4. $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$
5. $u_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^3}$
6. $u_n = (-1)^n \sin(1/n)\sqrt{n}$

Exercice 4. (4 points) Pour tout $a > 0$, discuter la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + a^n}$.

Exercice 5. (5 points) Posons $u_1 := 1$. Pour tout $n \geq 1$ on définit par récurrence u_n par la formule

$$u_{n+1} \ := \ \frac{1}{n} e^{-u_n} \ .$$

1. Montrer que pour tout n, $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire un équivalent de u_n.
3. Déterminer la convergence de la série de terme général u_n.
4. Déterminer la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n}$.
5. Déterminer la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 6. (4 points) En comparant à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$.

(Indication : une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est $x \mapsto x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)$.)

Contrôle continu 1

le 26 octobre 2017 de 12h30 à 14h30

Documents, calculators, telephones and any other electronic device is strictly forbidden. A recto-verso handwritten sheet is authorized. All the answers have to be justified, and the quality of the redaction will be taken into account.

Exercise 1. About the lectures (2 points).

1. What does it mean « *the series of real numbers* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ *converges* » ?
2. Let $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ and $\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$ be two series with positive general terms. We assume that for all n we have the inequality $a_n \leq b_n$. Prove the following comparison criterion :

   If $\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$ *converges, then* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ *converges too.*

Exercise 2. (4 points) Are the following series convergent ? If yes, compute their sum :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{n!}$

Exercise 3. (6 points) Give the nature of the series with general term u_n in the following cases :

1. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^3 + \ln(n) + 5^n}$
2. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
4. $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$
5. $u_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^3}$
6. $u_n = (-1)^n \sin(1/n)\sqrt{n}$

Exercise 4. (4 points) For all $a > 0$, give the nature of the series $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + a^n}$.

Exercise 5. (5 points) Let $u_1 := 1$. For all $n \geq 1$ we define u_n inductively by the formula

$$u_{n+1} := \frac{1}{n} e^{-u_n} .$$

1. Show that for all n, $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Deduce an equivalent of u_n.
3. Determine the nature of the series with general term u_n.
4. Determine the nature of the series with general term $\frac{u_n}{n}$.
5. Determine the nature of the series with general term $(-1)^n u_n$.

Exercise 6. (4 points) Comparing with an integral, give an equivalent of $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$. (Hint : a primitive of $x \mapsto (\ln x)^2$ is $x \mapsto x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)$.)