Cours MAT252

Analyse élémentaire

Romain Joly

Dernière mise à jour : janvier 2022

Utilise `tcolorbox` *de Thomas F. Sturm*

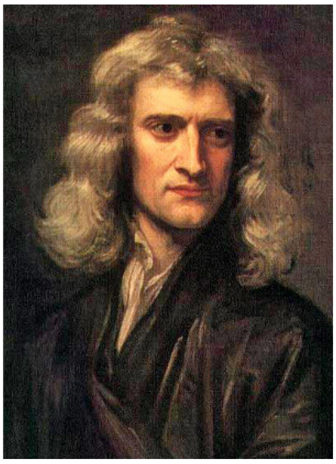
Table des matières

Avant-propos

L'idée de *fonction* c'est-à-dire d'associer à un antécédent une valeur image, même si non formalisée, est utilisée depuis longtemps :

- Les opérations standards et donc les carrés, cube, racine carrée… sont connues depuis le début des civilisations (Mésopotamie, Égypte et Chine il y a plus de 4.000 ans).
- On faisait déjà de la trigonométrie dans l'Antiquité grecque. Mais les fonctions *cosinus* et *sinus* telle qu'on les connaît apparaissent en Inde vers le Vème siècle (Aryabhata) puis sont reprises et développés par la civilisation arabe. Par exemple al-Khwārizmī sera le premier à calculer une table de la fonction *tangente*.
- Le *logarithme* est introduit en 1614 par John Napier pour transformer les produits en sommes et ainsi faciliter les grands calculs astronomiques que l'on faisait à l'époque. Képler lui-même va participer à la mise sous la forme moderne du logarithme et l'utilisera pour découvrir ses trois lois sur le mouvement des planètes. L'*exponentielle* apparaît plus tard et de façon plus diffuse. En 1728, Euler introduit le nombre e et sa notation.

Jusqu'au XVII siècle, les fonctions sont donc plutôt vues comme des tables de valeurs. Ce sont les débuts de la **mécanique newtonienne** qui vont développer l'**analyse** au sens de ce cours. Les scientifique ont alors besoin de calculer des vitesses et des accélérations et donc dériver des fonctions. On pose et on résout aussi des équations différentielles faisant intervenir ces quantités. D'un coup, les mathématiques permettent de comprendre le monde, prévoir le retour de la comète de Halley, découvrir Neptune en observant les perturbations de l'orbite d'Uranus… et tout cela avec un crayon, un peu de papier et beaucoup de calculs !



Isaac Newton
1642-1727
Angleterre

Louis Augustin Cauchy
1789-1857
France

Au fur et à mesure que les scientifiques progressent dans la mathématisation du monde, les outils et notions d'analyse se complexifient. Au XIXème siècle, certains domaines des mathématiques deviennent tellement pointus qu'ils donnent des résultats que l'intuition a du mal à comprendre. Par exemple la transformation de Fourier semble indiquer qu'une limite de fonctions continues peut être discontinue. Est-ce vrai ou est-ce qu'il y a des erreurs dans certaines théories ? A cette époque, beaucoup de preuves et notions restent basées sur de l'intuition ou des arguments trop rapides. Comme on commence à rencontrer des paradoxes, les mathématiciens du XIXème décident de remettre au propre toute l'analyse pour la fonder sur des bases solides. Le cours que donne Cauchy à l'École polytechnique deviendra une référence. Il y systématise les définitions et démonstrations de type « *epsilon-delta* », qui seront la base de tout ce cours.

But de ce cours : introduire les outils de base de l'analyse avec la rigueur moderne

- Utilisation pratique en mécanique, physique, biologie, économie...
- Introduction de concepts et de méthodes de preuve ouvrant sur des théories mathématiques plus avancées (elles-mêmes pouvant être utiles en physique, biologie, économie...).
- Pédagogiquement, suivre des procédures de calculs mais aussi commencer à faire des preuves et résoudre des problèmes plus ouverts.

Chapitre 1 : La droite réelle

Le but de ce chapitre est d'introduire la *topologie* de la droite réelle, c'est-à-dire un point de vue d'analyste sur les nombres réels. Ces derniers n'ont pas échappés à la refondation des mathématiques du XIXème siècle et en toute logique, il faudrait commencer par définir proprement ce qu'est un nombre… mais ce serait laborieux et on peut retenir simplement que *la construction des nombres réels ne cache aucune surprise et ceux que vous connaissez déjà sont bien les nombres que l'on construit rigoureusement.* Nous ferons une parenthèse à la fin du chapitre pour en parler.

1 Une rapide histoire des nombres

À part pour les entiers naturels, l'idée de nombre s'est construite avec les civilisations et l'écriture, c'est-à-dire très récemment à l'échelle de l'histoire de l'humanité.

- $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}_+^*$: les entiers naturels et les fractions positives sont utilisés depuis le début des temps historiques (premiers écrits). Toutes les cultures du monde ont des noms pour les premiers nombres entiers et des façons de les représenter. Les écritures des nombres ont été très diverses et plus ou moins pratiques. Il faut noter qu'il existe encore des peuples de chasseurs-cueilleurs qui n'ont pas de mot (et donc de représentation mentale) pour les nombres au-dessus de quelques unités (les Pirahãs comptent « un, deux, beaucoup »). Les grands nombres et le calcul sont donc des affaires de civilisations.

- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})_+$: on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel depuis les pythagoriciens (vers 500 avant J.C). Les grecs de l'Antiquité avaient la vision des nombres comme des longueurs et donc se plaçant sur une ligne droite. Dans ce sens, on peut dire qu'ils voyaient les nombres positifs comme un continuum et donc incluaient les irrationnels.

- $\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$: les nombres négatifs sont utilisés en Chine et en Inde deux siècles avant notre ère. Cela consiste à noter avec des couleurs différentes les dettes et de connaître les règles d'opération sur les signes. Ils ne seront utilisés que bien plus tard chez les arabes et en occident.

- L'écriture décimale et le chiffre zéro apparaissent en Inde vers le Vème siècle avant d'être adoptés par la civilisation arabe. D'ailleurs, ceux que nous appelons « chiffres arabes » étaient qualifiés d'« indiens » par al-Khwārizmī (IXème siècle, Perse). Ce dernier rédige un manuel d'utilisation de l'écriture décimale qui sera traduit et participera à l'essor de cette écriture en occident pendant la renaissance. Ceci explique que « chiffre » se dit « algarismo » en portugais (une autre partie de l'œuvre d'al-Khwārizmī fera que son nom donnera aussi le mot « algorithme » et le titre d'un de ces livres notre mot « algèbre »).

- 0 : le nombre zéro n'apparaît que vers 500 en Inde. Il ne faut pas le confondre avec le chiffre zéro qui ne sert qu'à indiquer une position vide dans une écriture positionnelle (parfois un espace blanc ou un dessin ont joué le même rôle que le chiffre zéro).

- $\mathbb{C}$: pendant la renaissance italienne, Tartaglia, Cardan et Ferrari développent la résolution des équations de degré 3 et 4. Leurs formules peuvent conduire à des calculs du type $\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$. A priori, cela n'a pas de sens, mais si on admet $\sqrt{-1}$ comme un nombre « imaginaire », alors le calcul donne 0 et on obtient la solution qu'on sait exister. Il s'agit donc au début d'une astuce pour faire un calcul mais pas de « vrais » nombres. C'est Raphaël Bombelli (1526-1572, Italie) puis Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) qui feront de ces nombres de vrais nombres, bien que « complexes ».

2 Topologie de la droite réelle

Pour faire de l'analyse sur les réels, il nous faut définir une notion de distance, de proximité, de voisinage de l'infini... Ce qui suit n'est pas vraiment à considérer comme des définitions. Mais dans tout ce cours, il sera important d'avoir à l'esprit une interprétation intuitive des notions ci-dessous. Ainsi la phrase mathématique « $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \ldots$ » ce comprendra « il existe x aussi proche que souhaité de x_0 tel que... ». Il sera très difficile de comprendre les définitions des chapitres suivants sans ce dictionnaire.

La **distance** entre deux réels x et y est $|x - y|$.

Un **voisinage d'un point** $x \in \mathbb{R}$ est un petit intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ autour de x avec $\varepsilon > 0$. Il s'agit de tous les réels à distance au plus ε de x, c'est donc la boule de centre x et de rayon ε. Plus généralement, on appelle aussi *voisinage* de x tout ensemble qui contient une boule $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

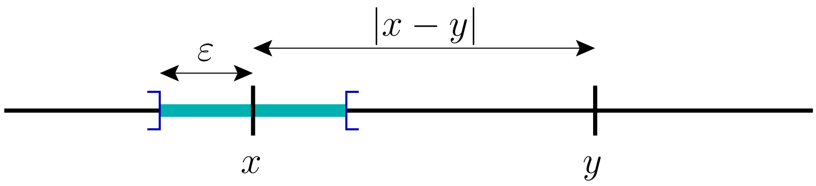


FIGURE 1.1 – *la distance $|x-y|$ entre deux nombres réels correspond bien à la notion usuelle. Un voisinage de x contient un petit intervalle autour de x.*

Les infinis $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels, même si on peut les conceptualiser. Dans ce cours, **il faut comprendre l'infini comme une notation** et non un nombre pouvant intervenir dans des calculs. Un **voisinage de** $+\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]M,+\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ (pensé comme grand). Un **voisinage de** $-\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]-\infty,M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ (pensé comme très négatif).

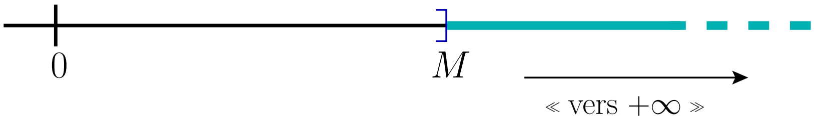


FIGURE 1.2 – *un voisinage de l'infini.*

Comme on l'a vu, la valeur absolue est une fonction primordiale pour faire de l'analyse sur $\mathbb{R}$.
Voici quelques rappels concernant la valeur absolue :

- si $x \geq 0$, $|x| = x$ et si $x \leq 0$, $|x| = -x$. En particulier, $|x| = |-x|$.
- $|x| \leq a$ est équivalent à $-a \leq x \leq a$. En particulier, les boules sur $\mathbb{R}$ sont des intervalles car $\{y \in \mathbb{R},\, |x-y| < \varepsilon\} =]x-\varepsilon\,, x+\varepsilon[$.
- $|x| \geq a$ est équivalent à ($x \leq -a$ ou $x \geq a$).
- $|x \times y| = |x| \times |y|$

Une des propriétés fondamentales de la valeur absolue est la suivante.

Proposition 1.1

L'**inégalité triangulaire** s'énonce

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Il y a égalité si et seulement a et b ont même signe.

Pour $b = -c$, on obtient une majoration pour une différence $|a-c| \leq |a| + |c|$. C'est une inégalité triangulaire sur les distances si on l'écrit sous la forme

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

Il est aussi important de connaître une deuxième version de l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.2

Pour tous réels a et b

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \quad \text{et} \quad ||a| - |b|| \leq |a-b| \;.$$

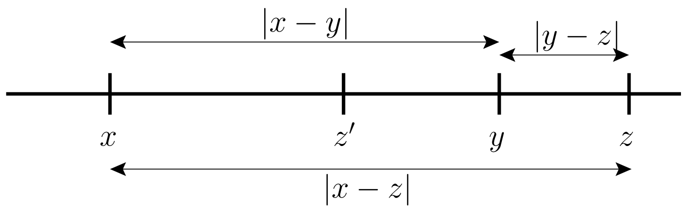


FIGURE 1.3 – *L'inégalité triangulaire équivaut à dire que la distance entre x et z est toujours plus petite que celle entre x et y ajoutée à celle entre y et z. Dans cette figure, il y a égalité si on prend z à droite de y, mais la distance de x à z' est plus strictement courte directement que si on passe par y.*

Démonstration : On utilise la première version de l'inégalité triangulaire

$$|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b|$$

et donc $|a+b| \geq |a| - |b|$. Mais les rôles de a et b sont symétriques, donc on trouve aussi $|a+b| \geq |b| - |a|$ (quitte à refaire l'argument en changeant les rôles de a et b). Pour la deuxième inégalité, il suffit de changer b en $-b$. $\square$

3 Rationnels et irrationnels

Plusieurs civilisations ne savaient écrire les nombres que sous forme d'entiers ou de fractions. Le problème est que dès l'Antiquité, on savait que certains nombres ne pouvaient s'écrire sous forme de fraction.

Proposition 1.3 (irrationalité de $\sqrt{2}$)

Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme a/b avec a et b entiers. En particulier, la diagonale d'un carré n'est pas commensurable à son côté.

Démonstration : Commençons par rappeler que le carré d'un nombre pair est pair car $(2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$ et que le carré d'un nombre impair est impair car $(2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.
Supposons qu'il existe deux entiers positifs a et b tels que $\sqrt{2} = a/b$. On a alors $2b^2 = a^2$, et donc a^2 est pair. Comme le carré d'un impair est impair, ceci implique que a est pair et s'écrit $a = 2a'$ avec a' entier. Mais alors $2b^2 = a^2 = 4a'^2$ et donc $b^2 = 2a'^2$ est pair. On en déduit que b est pair et s'écrit $b = 2b'$ avec b' entier. On a donc aussi que $\sqrt{2} = a'/b'$.
Mais on pourrait de nouveau appliquer l'argument et diviser par deux chacun des nombres de la fraction et ainsi de suite une infinité de fois. Comme aucun entier ne peut être divisé une infinité de fois par 2 (on finit par obtenir des nombres non entiers, ne serait que parce qu'ils sont plus petits que 1), c'est absurde. Donc notre hypothèse de départ est fausse et $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous

forme d'une fraction a/b avec a et b entiers. $\square$

On peut donc classer les réels en deux catégories.

Définition 1.4

Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est dit **rationnel** si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Si $x \in \mathbb{R}$ n'est pas rationnel, il est dit **irrationnel**.

Exemples :

- tous les nombres décimaux (et donc les nombres utilisés par les ordinateurs) sont rationnels.
- on vient de voir que $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est aussi le cas du nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$.
- le nombre $1{,}1010010001000010\ldots$ est irrationnel. De manière général, un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.
- e est irrationnel (1737, Leonhard Euler)
- π est irrationnel (1768, Jean-Henri Lambert)

La notion suivante de densité est une notion importante de topologie, mais nous n'allons l'utiliser que pour les rationnels et les irrationnels.

Définition 1.5

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit **dense** s'il vérifie une des caractérisations équivalentes suivantes :

i) chaque voisinage d'un point x de $\mathbb{R}$ contient un point de A

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists a \in A\ ,\ a \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

ii) A rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x < y \implies (\exists a \in A\ ,\ x < a < y)\,.$$

iii) tout réel peut être approché par une suite de A (cf chapitre suivant)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\ ,\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Proposition 1.6

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous les deux denses dans $\mathbb{R}$.

Cela implique par exemple que :

- Tout réel peut être approché aussi près que l'on veut par un rationnel.
- Entre deux réels, il y a une infinité de rationnels mais aussi une infinité d'irrationnels.

4 Bornes supérieure et inférieure

Les notions de *maximum* ou de *borne* sont des notions courantes. Comme dans tout ce cours, il nous faut maintenant les préciser avec une définition formelle pour être sûr qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans le vocabulaire.

Définition 1.7

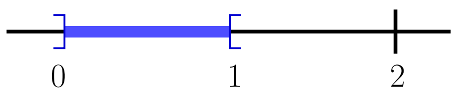
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des nombres réels.
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **un majorant** de A si

$$\forall a \in A, , \quad a \leq M \ .$$

On dit que A est **majoré** s'il existe un réel M qui majore A.
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, si c'est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire que c'est un majorant et que tout nombre plus petit n'est plus un majorant.
Si $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A et que M appartient à A, alors on dit que M est **le maximum** de A et on le note $\max(A)$.

Exemples :

- Le segment $]0{,}1[$ est majoré par 2. Sa borne supérieure est 1 car d'une part tout $x \in]0{,}1[$ est plus petit que 1 et, d'autre part, tout nombre $1-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ n'est pas majorant car $x = \max(1-\varepsilon/2, 1/2)$ est dans $]0{,}1[$ et est plus grand que $1-\varepsilon$. Par contre 1 n'appartient pas à $]0{,}1[$ donc 1 n'est pas le maximum de $]0{,}1[$ et écrire $\max(]0{,}1[)$ n'a pas de sens.



- $\{x \in \mathbb{Q},\, x \leq 2\}$ a 2 pour maximum.
- $\{x \in \mathbb{Q},\, x^2 \leq 2\}$ a $\sqrt{2}$ pour borne supérieure mais n'a pas de maximum.

Si $A = \emptyset$ est vide, alors A est majoré par tous les réels car une proposition concernant tous les éléments de $\emptyset$ est trivialement vérifiée (il n'y a aucun élément à considérer !). L'ensemble des majorants de l'ensemble vide est donc $\mathbb{R}$ tout entier et il n'y a pas de plus petit majorant. Donc $A = \emptyset$ n'a pas de borne supérieure. De même, un ensemble non majorée n'a aucun majorant et donc pas de borne supérieure. Mais pour simplifier les notations, il peut être agréable de quand même faire un abus de notation utilisant les infinis.

Définition 1.8

Si $A = \emptyset$ est vide, on pose $\sup(A) = -\infty$.
Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.

! Attention : il ne s'agit que d'une notation. C'est commode pour énoncer des propositions sans avoir à faire plusieurs cas, mais il faut se méfier si on veut utiliser ces définitions comme des nombres concrets puisque des calculs comme $\infty - \infty$ n'ont pas de sens.

On procède de même pour la borne inférieure.

Définition 1.9

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des nombres réels.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **un minorant** de A si

$$\forall a \in A, \ , \quad m \leq a \ .$$

On dit que A est **minoré** s'il existe un réel m qui minore A.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, si c'est le plus grand minorant de A, c'est-à-dire que c'est un minorant et que tout nombre plus grand n'est plus un minorant.
Si $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A et que m appartient à A, alors on dit que m est **le minimum** de A et on le note $\min(A)$.

De nouveau, pour simplifier les notations, on peut écrire

Définition 1.10

Si $A = \emptyset$ est vide, on pose $\inf(A) = +\infty$.
Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.

Et naturellement

Définition 1.11

Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Exemples :

- Remarquons que, par définition, l'ensemble vide est borné.
- Un intervalle du type $]a,b]$ est borné. Il admet un maximum qui est b et une borne inférieure qui est a mais n'a pas de minimum.
- Un intervalle du type $[a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré, il n'est donc pas borné et n'admet pas de borne supérieur (ni de maximum). Il admet a comme minimum (et donc aussi comme borne inférieure).

- Supposons que $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble pour lequel on a trouvé une borne $M > 0$ telle que pour tout $a \in A$, $|a| \leq M$. Alors A est borné et contenu dans $[-M,M]$.

- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1\}$ est borné (c'est le segment $[-1,1]$). Mais l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ 1 \leq x^2\}$ n'est ni majoré, ni minoré (il est égal à $]-\infty,1] \cup [1,+\infty[$). Attention donc à bien décrypter ce qu'est l'ensemble avant de décider s'il est majoré ou minoré (ne pas se fier juste aux sens des inégalités le définissant).

Une des propriétés fondamentales des réels est l'existence d'une borne supérieure.

Théorème 1.12 (existence de la borne supérieure)

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure.
Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

Exemples :

- Prenons $a < b$. Le segment $[a,b]$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure b qui est aussi un maximum. Le segment $[a,b[$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure b mais pas de maximum.

- L'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ \ x^5 - 3x - 1 \leq 0\}$$
est majoré (car $x^5 - 3x - 1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$) et contient $x = 0$. Il admet donc une borne supérieure, mais qu'on ne peut pas écrire à l'aide des fonctions usuelles. C'est donc le théorème 12 qui me donne l'existence de cette borne supérieure même si je ne peux pas écrire ce qu'elle vaut exactement.

Même si elle peut paraître naturelle, il s'agit d'une propriété *topologique* fondamentale de $\mathbb{R}$. Prenons l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q},\ r^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ qui est un ensemble de rationnels dont la définition n'a utilisé que des rationnels. Clairement, A est non vide car $0 \in A$ et A est majoré car si $x \in A$ alors $x \leq 2$ et pourtant A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Mais si on étend notre vue à tous les réels, c'est-à-dire qu'on regarde A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure qu'on note $\sqrt{2}$. Donc le théorème 12 n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ et c'est la prise en compte de tous les réels qui permet d'obtenir toutes les bornes supérieures.

5 La construction des réels

Au cours du XIXème siècle, les mathématiciens ont remis à plat les mathématiques pour les refonder sur des bases logiques solides. Ils se sont alors demandé comment définir proprement un nombre, et en particulier un nombre réel.

L'écriture décimale

Notre intuition des réels repose surtout sur l'écriture décimale d'un nombre. Pour les nombres *décimaux*, c'est-à-dire qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres, c'est assez convenable. C'est plus compliqué quand un nombre comme π a une infinité de décimale sans régularité apparente. Par ailleurs, l'écriture décimale *propre* interdit les séquences de chiffres se terminant par une infinité de 9 pour éviter que 1 puisse s'écrire aussi 0,99999.... Ceci rend la définition rigoureuse des opérations assez laborieuse. Enfin, cette écriture décimale est liée au choix de la base 10 qui est arbitraire : les mésopotamiens de l'Antiquité comptaient en base 60 (d'où nos 60 minutes dans une heure ou les 360 degrés découpant le cercle) et certains peuples comptent en base 20 (c'était le cas des gaulois, d'où notre « quatre-vingt » ou notre « soixante-douze »). Les mathématiciens n'aiment pas qu'une construction repose sur des choix culturels.

Les coupures de Dedekind

L'idée de Dedekind est de représenter un nombre par une coupure (A,B) de $\mathbb{Q}$, i.e. deux ensembles complémentaires non vides A et B tels que pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a \leq b$. Il faut vraiment voir la coupure comme un trait coupant $\mathbb{Q}$ en deux parties : A à gauche et B à droite. Ces coupures peuvent déjà représenter les rationnels en posant qu'un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ est représenté par

$$A_q = \{r \in \mathbb{Q},\, r < q\} \text{ et } B_q = \{r \in \mathbb{Q},\, q \leq r\} \ .$$

Richard Dedekind
1831-1916
Allemagne

Ainsi, une coupure (A,B) telle que B admet un minimum $q \in \mathbb{Q}$ représente le rationnel q. Mais on peut aussi regarder la coupure

$$A = \{r \in \mathbb{Q},\, r^2 < 2 \text{ ou } r \leq 0\} \text{ et } B = \{r \in \mathbb{Q},\, 2 < r^2 \text{ et } 0 \leq r\}$$

qui est une coupure admise, entièrement décrite par des rationnels, mais qui n'est pas de la forme (A_q,B_q) avec $q \in \mathbb{Q}$ puisque B n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. C'est donc un nouveau nombre, qui va correspondre à $\sqrt{2}$. Pour vraiment construire la théorie, il faut retrouver toutes les propriétés de $\mathbb{R}$, bien définir ce qu'est la somme de deux coupures, leur produit etc. Par exemple, $(A,B) \leq (A',B')$ peut être défini par $A \subset A'$. De même, on peut définir l'addition de coupures par $(A,B)+(A',B') = (A+A',B+B')$. On montre ainsi qu'on obtient une bonne représentation de ce qu'on appelle « nombre réel ».

Les suites de Cauchy

Louis Augustin Cauchy a eu lui l'idée d'introduire une notion de suite qui assurerait la convergence sans pour autant introduire la limite elle-même. Une suite $(u_n) \subset \mathbb{Q}$ est dite « de Cauchy » si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n,m \geq n_0 \ , \ \ |u_n - u_m| \leq \varepsilon \ .$$

Notons que cette définition n'utilise que des nombres rationnels (la définition plus standard des suites numériques de Cauchy sera donnée dans le chapitre suivant).

Une suite convergente dans $\mathbb{Q}$ est de Cauchy mais certaines suites sont de Cauchy sans converger dans $\mathbb{Q}$ car leur potentielle limite n'y est pas. On définit alors les réels comme toutes les limites possibles de suite de Cauchy de rationnels. Le procédé est plus compliqué à formaliser mais il a l'avantage d'être utilisable dans beaucoup d'autres situations mathématiques où il faut « compléter » un espace où certaines suites de Cauchy ne convergent pas.

Louis Augustin Cauchy
1789-1857, France

De toute ces constructions, on obtient des propriétés fondamentales de la droite réelle comme l'existence d'une borne supérieure énoncée plus haut dans le théorème 12. On obtient aussi que toute suite de Cauchy est convergente (voir chapitre suivant). On pourra aussi retenir une propriété évidente mais qui est importante, c'est que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Théorème 1.13 ($\mathbb{R}$ est archimédien)

Pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

En particulier, on en déduit une propriété qu'il est important de saisir pour les définitions des chapitres suivants.

Proposition 1.14

La borne inférieure de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est 0. Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ |x| < \varepsilon$$

alors $x = 0$.

À connaître :

- Notion de rationnel/irrationnel, savoir les manipuler.
- Connaître la valeur absolue, les inégalités triangulaires et savoir les manipuler.
- Connaître les définitions majorant/minorant, borne sup/inf, max/min etc.

Utile pour la suite :

- Se forger l'intuition du concept de voisinage, de distance entre réels
- Le théorème d'existence de la borne sup

Chapitre 2 : Les suites numériques

Si on se permet de discrétiser le temps, la majorité des phénomènes physiques ou biologiques peuvent se modéliser à l'aide de suites. Le but de ce chapitre est de formaliser cette notion de suite, de savoir obtenir les limites de suites dans les cas les plus élémentaires et de faire quelques applications avec les modèles les plus simples.

1 Introduction

Une suite est une succession discrète et infinie de nombres. L'adjectif *discret* veut dire qu'il y a un premier nombre, puis un deuxième, un troisième etc. La définition formelle est la suivante.

Définition 2.1

Une **suite numérique** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{R} .$$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ cette suite et on dit que u_n est le **terme général** de la suite.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la collection de nombres

$$u_0 \ , \ \ u_1 \ , \ \ u_2 \ , \ \ u_3 \ , \ \ u_4 \ , \ \ u_5 \ldots$$

Quand on parle de suite, on sous-entend plus que l'idée d'une collection statique : dans l'idée de suite, il y a souvent un sens du « temps qui passe ». En général, notre problème sera de comprendre ce qui se passe « dans le futur » quand n grandit voire tend vers l'infini. Notons qu'on n'est pas obligé de commencer à l'indice $n = 0$. Si on commence $n = 1$, on peut utiliser la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou bien $(u_n)_{n\geq 1}$ (on sous-entend que n est forcément un entier). Mais on pourrait aussi commencer à l'indice $n = 2$ ou bien $n = -3$, voire même une suite indexée par tous les entiers relatifs $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, même si nous ne traiterons pas ce dernier cas dans ce cours. Pour ne pas alourdir les énoncés, on prendra le plus souvent $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices, mais les autres possibilités sont parfaitement admises. Quand l'indice de départ n'est pas très important (en général, on veut surtout savoir ce qu'il se passe quand n tend vers l'infini), considéré comme évident ou déjà mentionné, on peut juste noter la suite (u_n).

> **!** Dans la notation, il est important de noter la présence des parenthèses qui distinguent (u_n) et u_n. La *suite* (u_n) est une collection de nombre dont on peut chercher la limite par exemple. Le *terme général* u_n est un nombre réel (éventuellement dépendant de n) que l'on peut manipuler comme n'importe quel nombre. Ainsi, il est aussi absurde de dire « u_n a une limite » que de dire « 2 a une limite ». Mais on peut dire « (u_n) a une limite ». A l'inverse, c'est absurde d'écrire $(u_n)^2$ car on ne sait pas mettre une suite au carré, mais on peut écrire u_n^2 qui est un nombre au carré ou bien (u_n^2) qui est la suite des carrés des nombres u_n.
> Cela peut paraître du pinaillage, mais c'est important pour structurer la pensée et détecter facilement des erreurs dans des raisonnements (de la même façon que l'homogénéité des unités permet de repérer facilement des erreurs dans les formules physiques).

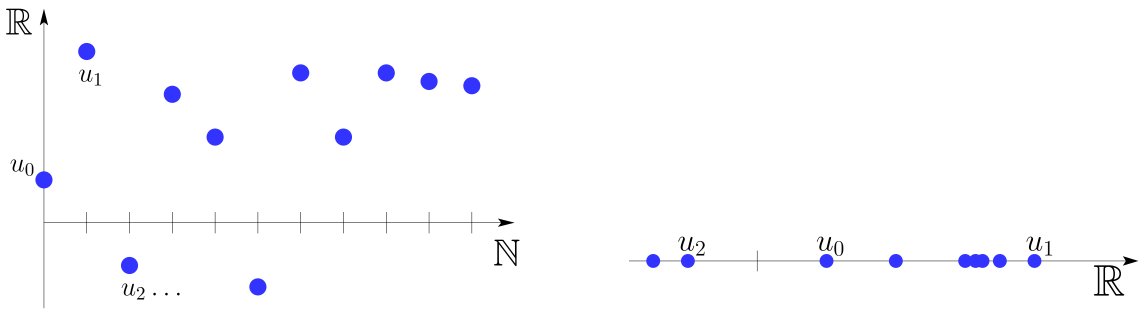


FIGURE 2.1 – *Une même suite représentée de deux façons. À gauche, on a représenté le graphe de la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note que les variations de la suite et « l'écoulement du temps » sont clairement visibles. À droite, on a représenté les valeurs de la suite sur la droite réelle. On voit plus facilement les zones où la suite s'accumule. Par contre, il est difficile de voir l'ordre des points sans les numéroter tous.*

Exemples :

- Dans une expérience, on relève la température toutes les minutes. On obtient une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où T_n est la température à la minute n. Il peut être impossible de décrire T_n par une formule mais (T_n) est quand même une suite de nombres.

- Le terme général u_n est donné par une formule $u_n = f(n)$, par exemple $u_n = 1/(1+n^2)$. On obtient la suite $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on peut par exemple montrer qu'elle décroît et tend vers 0 (notons bien que la suite (u_n) décroît mais le nombre u_n lui est juste un nombre tout seul, ce serait absurde de dire qu'il décroît). Dans la vraie vie, il faut déjà avoir fait de la modélisation pour obtenir une formule mathématique à partir d'un problème concret.

- La suite est définie par récurrence : on connaît $u_0 \in \mathbb{R}$ et on a une formule $u_{n+1} = f(u_n)$ qui permet de calculer de proche en proche les termes suivants. Là encore, en dehors des exercices académiques, cela provient de modélisation, de lois physiques etc. Nous allons voir plusieurs exemples concrets dans la suite de cette partie.

- La suite de Syracuse est une suite qui intrigue toujours les mathématiciens. Elle est définit par récurrence comme suit. On part de $u_0 \in \mathbb{N}^*$ un entier choisi. Puis on passe du rang n au rang $n+1$ ainsi : si u_n est pair, on le divise par 2 en posant $u_{n+1} = u_n/2$, si u_n est impair, on pose $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Par exemple, si on prend $u_0 = 10$, on obtient la suite

$$10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1\ldots$$

On voit qu'elle finit par tourner dans la boucle $4 \to 2 \to 1 \to 4$. En fait, à chaque fois qu'on teste cette suite pour une valeur $u_0 \in \mathbb{N}^*$, on retombe dans cette boucle. On sait que c'est le cas pour plusieurs milliards de milliards de nombres de départ, mais personne n'a encore réussi à démontrer que c'est toujours vrai. Il est même possible que cela soit *indécidable*, c'est-à-dire que cette propriété serait impossible à démontrer, mais cela reste une conjecture ouverte.

- La suite de Conway (appelée aussi « look and say ») est la suite 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211... Bien qu'il s'agisse juste d'une suite jouet, elle peut conduire à des résultats assez complexes. Ainsi John Horton Conway (1937-2020, Angleterre) a démontré qu'elle tend vers l'infini comme une exponentielle λ^n avec $\lambda \simeq 1{,}3$ un nombre parfaitement décrit mathématiquement.

- Dans une population de N individus, un virus se propage. Une personne met une semaine à guérir mais peut transmettre pendant cette semaine-là ce virus à une personne qui n'a jamais été malade. On note u_n le nombre de personnes malades pendant la semaine n. Le nombre total de personnes qui ont été malades et sont immunisées est donc $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. La probabilité que deux personnes se croisent, une étant malade et l'autre non immunisée est proportionnelle au pourcentage de ces populations dans la population totale. On obtient alors une récurrence

$$u_{n+1} = \alpha u_n \big(N - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)\big)$$

où $\alpha > 0$ quantifie la facilité avec laquelle le virus se transmet.

Il existe deux classes de suites qui regroupent des cas simples mais qui sont des exemples importants.

Définition 2.2

Une suite **arithmétique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et une **raison** $a \in \mathbb{R}$ grâce à la récurrence $u_{n+1} = u_n + a$.

Proposition 2.3

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et de **raison** $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = u_0 + na\ .$$

Démonstration : La formule se démontre par une récurrence très simple. Par définition, on a bien $u_0 = u_0 + 0.a$. Supposons que la formule soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = u_n + a = (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$ et donc la formule est aussi vraie au rang $n+1$. □

Exemple :

Une personne a 1.000 € en épargne et économise 60 € chaque mois. La suite (u_n) de son argent épargné au mois n en euros est une suite arithmétique de raison 60 et de donnée initiale 1.000. Au mois n, elle aura donc épargné $u_n = 1.000 + 60n$ €.

Définition 2.4

Une suite **géométrique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et une **raison** $a \in \mathbb{R}$ grâce à la récurrence $u_{n+1} = a.u_n$.

Proposition 2.5

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et de **raison** $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = a^n u_0\ .$$

Démonstration : La formule se démontre encore par une récurrence simple laissée en exercice pour le lecteur. □

Exemples :

- Un épargnant a mis 1.000 € sur un compte rémunéré à 2 % par an. Chaque année, son épargne est donc multipliée par un facteur 1,02 : c'est une suite géométrique de raison 1,02. Au bout de 10 ans, elle est multipliée par un facteur $1{,}02^{10} \simeq 1{,}219$ soit un gain de 21,9 %.

- Le carbone 14 est un isotope instable du carbone. Naturellement, dans un bloc de carbone, une petite fraction de x % de carbone 14 se désintègre chaque année. La masse de carbone 14 présent suit donc une suite géométrique de raison $a = (1 - x/100)$. On sait que la demi-vie du carbone 14 est d'environ 5.730 années, ce qui veut dire que la moitié du carbone 14 s'est désintégrée pendant cette période. On a donc $a^{5730} = 1/2$ soit $\ln a = -(\ln 2)/5730$. On trouve que $x \simeq 0{,}012$ % c'est-à-dire qu'environ 1/12.000-ième du carbone 14 disparaît chaque année.

- Le premier modèle de dynamique des populations est dû à Thomas Robert Malthus (1766-1834, Angleterre). Si une génération de u_n individus a un taux de fécondité de a enfants par individu (donc $2a$ enfants par couple ou par femme), alors la génération suivante est de taille $u_{n+1} = au_n$. Donc la population totale croît de façon exponentielle $u_n = a^n u_0$. Pour l'histoire connue, la population mondiale suit pour le moment cette courbe exponentielle avec un taux d'accroissement de 1,2 % par an environ. Donc sur les dernières générations, pour disons 30 ans chaque génération, alors l'accroissement est environ de $1{,}012^{30} \simeq 1{,}4$, soit 2,8 enfants par femme en moyenne.

- Soit N_n le nombre de transistors dans un microprocesseurs d'un ordinateur à l'année n. La loi empirique de Moore énoncée en 1975 dit que ce nombre double tous les deux ans, donc que N_n est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$. Cela reste étonnamment vérifié près de 50 ans plus tard.

- Si on reprend le modèle du virus ci-dessus et que l'on suppose qu'au début, quasiment personne n'est immunisé. Alors le nombre de malades suit la règle $u_{n+1} = \alpha N u_n$ qui est une suite géométrique conduisant à une croissance exponentielle du nombre de malades. Si une part β de la population a été immunisée, alors le taux tombe à $\alpha\beta N$. Pour éviter l'épidémie, il faut arriver à faire baisser ce taux sous 1, par exemple en vaccinant un certain pourcentage de la population.

Leonardo Fibonacci
(dit aussi Léonard de Pise)
1175-1250
Italie

Pour la culture, nous allons finir cette introduction avec un exemple historique classique, celui de **la suite de Fibonacci**. Léonard Fibonacci a une grande importance puisqu'il a grandement participé à l'importation du savoir arabe oriental en Europe, en particulier l'introduction de l'écriture décimale qui va aider au développement du commerce et de la finance.
Mais son nom est surtout connu à cause de la suite qu'il a introduite en étant un des premiers à étudier la dynamique d'une population. Il imagine une population de lapins qu'on va compter par couples. Chaque mois, un couple de lapins donne naissance à deux petits (c'est-à-dire un autre couple numériquement parlant). Les petits mettent deux mois pour devenir adultes et donc féconds. Si on part d'un couple originel ($u_0 = 1$), il ne donnera pas de naissance le premier mois ($u_1 = 1$) puis naissance à un couple le second mois ($u_2 = 2$), puis a nouveau naissance à un couple au troisième mois alors que le jeune couple précédent n'est pas encore mature ($u_3 = 3$) etc. De manière générale, au mois n, il y aura les couples déjà présents au mois $n-1$ et toutes les naissances, qui sont autant que de couples âgés d'au moins 2 mois, i.e. présents au mois $n-2$. Cela donne la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Avec les données initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, on obtient la célèbre suite de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55\dots$$

On peut retrouver cette suite dans divers problèmes et même dans les végétaux en comptant les spirales dans les pommes de pins ou les tournesols. Il existe un algorithme permettant d'obtenir une formule pour ces suites récurrentes et on peut prouver que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1}\right) \quad \text{où} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

est le nombre d'or (voir la partie ci-dessous sur les suites récurrentes). En particulier, le rapport u_{n+1}/u_n tend vers le nombre d'or ϕ, ce qui a amené un caractère mystique à cette suite.

2 Limites de suites

Nous avons déjà parler de limites de suites et cela ne pose pas trop de problèmes intuitifs pour le moment. Mais si on regarde des cas plus complexes et qu'on veut obtenir des théorèmes rigoureux, il nous faut en donner une définition précise.

Définition 2.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel. On dit que (u_n) a pour **limite** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall n \geq n_0,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon\ .$$

On notera

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell\ .$$

On dit aussi que (u_n) **converge** ou **tend vers** ℓ.
On dit (u_n) est **convergente**, ou bien converge, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) tend vers ℓ. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente**.

Les mathématiciens étant humains, ils ne sont pas toujours cohérents. Ainsi, s'il est clair que c'est la suite (u_n) qui est convergente ou qui admet une limite, la notation est $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$ (sans les parenthèses). De même, on utilise très souvent l'abus de notation de dire que c'est le terme général u_n qui tend vers ℓ.

Décryptons la notation en quantificateurs. On a vu que l'ensemble des x tels que $|x - \ell| \leq \varepsilon$ correspond à l'ensemble des points plus proche de ℓ que la distance $\varepsilon > 0$ fixée. La partie $\forall \varepsilon > 0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ signifie donc que u_n peut être pris plus proche de ℓ que n'importe quelle petite marge d'erreur $\varepsilon > 0$ qu'on s'est fixé à l'avance. On a aussi vu qu'un ensemble d'entiers n vérifiant $n \geq n_0$ est du type voisinage de l'infini. La partie $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ correspond à prendre n assez grand, en quelque sorte assez proche de l'infini. Au total, on peut donc lire « quitte à prendre n assez grand, u_n est aussi proche de ℓ que voulu ». Avant la notation rigoureuse des quantificateurs, un mathématicien comme Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) tentait d'écrire la notion de limite avec des phrases comme

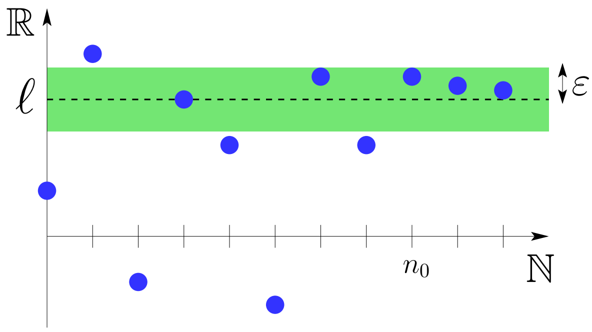


FIGURE 2.2 – *Une illustration de la définition de la limite. Les points de la suite ne sont pas tous dans l'intervalle* $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ *mais il existe un rang* n_0 *à partir duquel c'est le cas. Plus* $\varepsilon > 0$ *sera petit, plus il faudra aller chercher loin ce rang* n_0.

« à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée. »

On peut aussi définir les limites infinies. Pour cela, on se rappelle qu'être de plus en plus proche de $+\infty$, c'est devenir plus grand que n'importe quel nombre fixé à l'avance (un voisinage de $+\infty$ étant de la forme $]M,+\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$).

Définition 2.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) a pour **limite** $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq n_0,\ \ u_n \geq M\ .$$

On notera

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty\ .$$

Symétriquement, on dit que (u_n) a pour **limite** $-\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq n_0,\ \ u_n \leq M$$

avec les notations symétriques évidentes.

Attention, si on peut parler de limite infinie, on considère bien qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente, comme le dit la définition 2.6.

On parle de *la* limite d'une suite à cause de la proposition suivante.

Proposition 2.8

Si (u_n) est une suite convergente, alors sa limite ℓ est unique. De même, une suite qui tend vers $\pm\infty$ ne peut avoir d'autre limite que $\pm\infty$.

Démonstration : Supposons que la suite (u_n) ait deux limites ℓ et ℓ' réelles différentes (on laisse les cas des limites infinies au lecteur). Comme $|\ell-\ell'|$ n'est pas nul, $|\ell-\ell'| > 0$. On applique la définition de la limite pour $\varepsilon = |\ell-\ell'|/3$:

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Si on prend $n = \max(n_1{,}n_2)$, l'inégalité triangulaire implique que

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$$

ce qui est absurde car $|\ell - \ell'| > 0$. □

On peut faire quelques cas simples à la main.

Exemples :

- Supposons que (u_n) est une suite constante égale à α. Soit $\varepsilon > 0$, on prend $n_0 = 0$ et on a pour tout $n \geq n_0 = 0$ que $|u_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$. Donc (u_n) tend vers α.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $a > 0$. On sait d'après la proposition 2.3 que $u_n = u_0 + na$. Soit $M \in \mathbb{R}$, on pose $M' = M - u_0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien (ce qui découle de la construction des réels et est donc une propriété presque axiomatique, cf chapitre précédent), on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $n_0 a > M' = M - u_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $u_n = u_0 + na \geq u_0 + n_0 a > M$. Ceci montre que (u_n) tend vers $+\infty$. Symétriquement si la raison a est strictement négative, on aura que (u_n) tend vers $-\infty$.

- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$. Soit $\varepsilon > 0$ et prenons un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > 1/\varepsilon$. Pour tout $n \geq n_0$, on a alors $|u_n| = 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$. Ceci montre que (u_n) tend vers 0.

Avant de regarder d'autres cas concrets, faisons encore un peu de théorie.

Définition 2.9

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** si l'ensemble $\{u_n{,}n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** si l'ensemble $\{u_n{,}n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est minoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.10

Une suite convergente est bornée.

Démonstration : Supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On applique la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < 1$. L'inégalité triangulaire (2ème version) montre que

$|u_n| - |\ell| \leq 1$ et donc que $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour tout $n \geq n_0$. Il n'y a qu'un nombre fini d'indices $n < n_0$. On peut donc les borner par leur maximum. On pose $M = \max(|u_0|,|u_1|,\ldots,|u_{n_0-1}|,|\ell|+1)$. On a que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (u_n) est bornée. $\square$

! Une suite bornée n'est pas forcément convergente. Le contre-exemple typique est la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Derrière le théorème 12 ci-dessous se cache une propriété importante des nombres réels. Il s'agit d'une propriété fondamentale, quasiment axiomatique, du même niveau que l'existence de la borne supérieure.

Définition 2.11

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** (resp. strictement croissante) si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** (resp. strictement décroissante) si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

Théorème 2.12

Toute suite croissante majorée converge (vers une limite réelle finie). Symétriquement, toute suite décroissante minorée converge (vers une limite réelle finie).

Démonstration : Si (u_n) est croissante et majorée, alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble majorée non vide de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$, cf chapitre précédent. Par construction, comme ℓ est un majorant, $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme ℓ est le plus petit majorant, pour tout $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon$ n'est plus un majorant et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. On a donc que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in\,]\ell - \varepsilon, \ell]$ et donc que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
On vient de montrer qu'une suite croissante majorée converge. Le cas symétrique se démontre de la même façon. $\square$

Corollaire 2.13

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors on a l'alternative suivante :

i) soit (u_n) est majorée et converge vers une limite finie,

ii) soit (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Symétriquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors on a l'alternative suivante :

i) soit (u_n) est minorée et converge vers une limite finie,

ii) soit (u_n) n'est pas minorée et diverge vers $-\infty$.

Démonstration : On va se limiter au cas où (u_n) est croissante (l'autre cas se démontre avec les arguments symétriques). Si (u_n) est majorée, alors le théorème 2.12 conclut. Supposons donc que (u_n) n'est pas majorée : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe forcément $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$ puisque M ne peut pas être un majorant. Mais comme la suite est croissante, on a alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > M$. Par définition, cela veut dire que (u_n) tend vers $+\infty$. $\square$

On peut déjà retrouver des limites grâce à ces résultats. Sans doute que ces limites semblent bien connues, mais il faut être capable d'en donner des démonstrations pour voir si la théorie est cohérente.

Exemples :

- Le logarithme a été introduit par John Napier en 1614. Son intérêt est de transformer les multiplications complexes en des sommes beaucoup plus simples à faire à la main. La fonction ln est donc définie afin que $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$ et normalisée par $\ln(1+x) \simeq x$ pour x petit. On en déduit que ln est croissante et donc que la suite (u_n) définie par $u_n = \ln n$ est croissante. Par ailleurs, par construction $\ln(2^n) = n\ln 2$ est une suite arithmétique qui tend vers $+\infty$ et donc la suite ne peut pas être majorée. Le résultat précédent nous montre donc que $(\ln n)$ tend vers $+\infty$.

- On considère une suite géométrique croissante, disons $u_n = 2^n$. Soit elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ qui est forcément positive car $u_n \geq 1$, soit elle converge vers $+\infty$. Si jamais elle converge vers $\ell > 0$, alors on aurait, en prenant $\varepsilon = \ell/3$, l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n est dans l'intervalle $]2\ell/3,4\ell/3[$. Mais alors $u_{n_0+1} = 2u_{n_0}$ serait dans l'intervalle $]4\ell/3,8\ell/3[$ ce qui est contradictoire. Donc on a bien que (u_n) tend vers $+\infty$.

- On considère une suite géométrique $u_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$. On a que $|u_{n+1}| = |\alpha||u_n| < |u_n|$ et donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à la limite $|u_{n+1}| = |\alpha||u_n|$, on obtient $\ell = |\alpha|\ell$ et donc $\ell(1-|\alpha|) = 0$. Comme $|\alpha| < 1$, cela implique que $\ell = 0$. On vient de montrer que $|\alpha^n| \to 0$ mais d'après la proposition 2.14 ci-dessous, c'est équivalent à dire que $\alpha^n \to 0$.

Nous venons d'utiliser une remarque pratique qui est simple mais pourra souvent servir. C'est pourquoi nous pouvons la mettre sous forme de proposition.

Proposition 2.14

Une suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0.

Démonstration : Dans la définition de la convergence, si $\ell = 0$, la condition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ devient $|u_n| < \varepsilon$. La proposition découle simplement du fait que $\big||u_n|\big| = |u_n|$. $\square$

3 Calcul de la limite d'une suite

Le principe général pour s'attaquer à l'étude de la convergence d'une suite est la suivant. On connaît par cœur quelques limites de suites standards. Pour les autres limites, on se ramène à ces cas standards à l'aide des règles sur les opérations (sommes, produits...). Cela va être résumé dans les tableaux ci-dessous.

Multiplication par un réel λ

Si $\lambda > 0$

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (λu_n)	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$

Si $\lambda < 0$

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (λu_n)	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

Dans le prochain tableau et les suivants, « F.I. » signifie « forme indéterminée ». Cela veut dire qu'il n'existe aucune règle générale pour traiter ce cas là.

Somme de suites (u_n) et (v_n)

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de (v_n)	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.

Comme on le voit, ces tableaux sont très logiques. Il n'est pas nécessaire de les apprendre par cœur car il suffit de comprendre leur logique. Ainsi si (v_n) tend vers l'infini, il devient de plus en plus grand. Si on lui ajoute (u_n) bornée ou bien qui elle-même est de plus en plus grand, alors la somme va devenir aussi très grande. C'est l'intuition des cas 2 et 3 du tableau ci-dessus.

Pour comprendre la forme indéterminée « $\infty - \infty$ », il faut voir que si on soustrait quelque chose de très grand à quelque chose de très grand, le reste obtenu peut être n'importe quoi suivant la compensation qui s'est produite. Voici quelques exemples

Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$	$n+a$	$2n$	n	$n+(-1)^n$
Une suite (v_n) qui tend vers $-\infty$	$-n$	$-n$	$-2n$	$-n$
La somme $w_n = u_n + v_n$ des deux suites	a	n	$-n$	$(-1)^n$
La limite de la somme	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	pas de limite

On voit qu'une des questions est de savoir laquelle des suites tend « plus vite » vers l'infini que l'autre. Pour cela, connaître juste la limite n'est pas suffisant : il faut estimer la vitesse de convergence de ces suites. Cela permet de « lever l'indétermination ». Les techniques classiques pour ce faire utilisent les équivalents et les développements limités, que nous verrons à la fin de ce cours.

Les règles de multiplication de limites sont ainsi.

Produit de suites (u_n) et (v_n)

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
Limite de (v_n)	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de $(u_n.v_n)$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Encore une fois, il n'y a pas de pièges dans ces règles. Les cas où la limite est négative peuvent même se déduire des cas positifs en factorisant des termes ± 1. Ainsi, si (u_n) tend vers $\ell < 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, on pose $u'_n = -u_n$. Comme il ne s'agit que d'une multiplication par un scalaire, on a que (u'_n) tend vers $-\ell > 0$. On a alors que $(u'_n v_n)$ tend vers $+\infty$ d'après le tableau précédent. Comme $u_n v_n = -u'_n v_n$, on trouve que $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$ par le tableau de multiplication par un scalaire.

La forme indéterminée est aussi logique puisqu'en regardant des cas $u_n = 1/n^k$ et $v_n = n^{k'}$, on voit que la limite de $u_n v_n = n^{k'-k}$ va dépendre de si $k' > k$ ou l'inverse. Donc si on n'a pas de précision de la vitesse de convergence des suites vers 0 et $+\infty$ pour les comparer, on ne peut lever l'indétermination.

On finit avec l'inverse d'une suite. A ce moment, il peut être agréable d'introduire la notion de limite à gauche ou à droite.

Définition 2.15

On dit qu'une suite (u_n) converge **à droite** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si (u_n) converge vers ℓ et que $u_n \geq \ell$ à partir d'un certain rang. On note $u_n \to \ell^+$.
On dit qu'une suite (u_n) converge **à gauche** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si (u_n) converge vers ℓ et que $u_n \leq \ell$ à partir d'un certain rang. On note $u_n \to \ell^-$.

On obtient le tableau suivant dans lequel on a sous-entendu que $u_n \neq 0$ pour pouvoir parler de son inverse.

Inverse d'une suite (u_n)

Limite de (u_n)	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0^+	0^-
Limite de $(1/u_n)$	$1/\ell$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

Pour obtenir la limite d'un quotient (u_n/v_n), on pourra écrire le quotient comme le produit avec l'inverse $u_n/v_n = u_n \times 1/v_n$ et se reporter aux deux tableaux.

Les cas basiques à connaître

Puissances :
Si $\alpha > 0$ alors $n^\alpha \longrightarrow +\infty$.
Si $\alpha < 0$ alors $n^\alpha \longrightarrow 0$.

Polynômes :
La limite d'une suite définie par un polynôme $a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots$ est celle du terme de plus haut degré $a_d n^d$

Suites géométriques :
Soit (u_n) un suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$.
Si $a = 1$, alors (u_n) est constante égale à u_0 et tend vers u_0.
Si $|a| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
Si $a > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $a < 1$ alors (u_n) diverge sans avoir de limite même infinie.

Fonctions :
On a $\lim \ln(n) = +\infty$ et $\lim e^n = +\infty$.
De manière générale si f est une fonction dont on connaît la limite en $+\infty$, alors $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers cette limite.

On notera ici un abus dans le plan de ce cours puisque la question des limites de fonctions ne sera abordée qu'au chapitre prochain mais nous supposons que le lecteur en a quelques notions quand même.

Cette partie est pour le moment de la révision du programme de lycée. La nouveauté est que nous pouvons maintenant en faire des démonstrations. Comprendre le mécanisme de ces preuves est important pour comprendre comment nous pourrons généraliser ces notions de limites à des cas plus complexes, comme les limites de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ ou les limites de fonctions.

Nous allons finir cette partie par quelques démonstrations choisies pour donner des exemples. Faire les démonstrations des autres cas est un bon exercice.

Démonstration pour la somme de limites finies : Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. De même, il existe un rang n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on a $|v_n - \ell'| < \varepsilon/2$. On pose $n_0 = \max(n_1{,}n_2)$. Pour tout $n \geq n_0$, les deux estimations précédentes sont vérifiées et donc

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

par l'inégalité triangulaire. On vient de démontrer la proposition

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n \geq n_0 \ , \ \ |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| < \varepsilon$$

qui veut dire par définition que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$. $\square$

Démonstration pour la somme d'une limite finie et une infinie : Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit (v_n) une suite qui diverge vers $+\infty$. Comme (u_n) converge, elle est bornée et il existe un minorant $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence vers $+\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \geq (M-m)$. On a alors que $u_n + v_n \geq m + (M-m) = M$. On a donc montré que

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n \geq n_0 \ , \ \ u_n + v_n \geq M$$

ce qui signifie que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. □

Démonstration pour le produit de limites finies : Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On commence par constater que comme (v_n) converge, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|v_n| \leq M$. Quitte à prendre M plus grand, on peut aussi supposer que $M \geq |\ell|$. On applique maintenant la convergence des deux suites pour une erreur $\varepsilon/(2M)$ et on peut trouver n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/(2M)$ et pour $n \geq n_2$, $|v_n - \ell'| < \varepsilon/(2M)$. On pose $n_0 = \max(n_1,n_2)$. Pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &= |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell|.|v_n| + |\ell|.|v_n - \ell'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2M}|\ell| \leq \varepsilon \ . \end{aligned}$$

On vient de montrer que $(u_n v u_n)$ tend vers $\ell\ell'$. □

Démonstration pour l'inverse d'une suite tendant vers l'infini : Soit (u_n) une suite qui tend vers l'infini dans le sens où $|u_n| \to +\infty$ (ce qui est en particulier vrai si (u_n) tend vers $+\infty$, ou bien $-\infty$). Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition de la convergence vers $+\infty$ avec $M = 1/\varepsilon$, on obtient qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \geq 2/\varepsilon$ et donc $1/|u_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Comme $1/|u_n| = |1/u_n| = |1/u_n - 0|$, cela montre que $(1/u_n)$ tend vers 0. □

Démonstration pour les limites des puissances entières et polynômes : On peut traiter le cas des puissances entières en les exprimant comme produits de suites du type $u_n = n$ ou $u_n = 1/n$ dont on a déjà étudié la convergence. Soit maintenant une suite polynômiale $u_n = a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots + a_0$. À part le terme constant, les monômes tendent vers $\pm\infty$ et on pourrait avoir des formes indéterminées pour la somme si elle comprend des signes opposés. On utilise donc le principe général important qui est de factoriser par le terme dominant, c'est-à-dire celui qui tend le plus vite vers l'infini qui est ici $a_d n^d$ (avec bien sûr $a_d \neq 0$). On a alors

$$u_n = a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots + a_0 = a_d n^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d}\frac{1}{n} + \frac{a_{d-2}}{a_d}\frac{1}{n^2} \ldots + \frac{a_0}{a_d}\frac{1}{n^d}\right) \ .$$

Dans la parenthèse, on a une somme de suites : une constante égale à 1 et les autres des puissances négatives qui tendent vers 0. Donc la somme tend vers 1. On en fait le produit avec $a_d n^d$ et par la proposition sur la limite des produits, la suite u_n tend vers $\pm\infty$, le signe étant le même que celui du coefficient a_d. □

4 Encadrements et limites

Dans la partie précédente, nous avons vu des méthodes permettant d'obtenir la limite d'une suite directement. Dans cette partie, nous allons voir des résultats un peu plus indirects qui utilisent des comparaisons.

La comparaison entre deux suites convergentes passe à la limite, du moment que l'on passe d'une inégalité stricte à une inégalité large.

Proposition 2.16

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. S'il existe un rang n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration : On pose $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. Supposons que l'on ait $\ell' < \ell$. On pose $\varepsilon = (\ell - \ell')/2 > 0$. Pour n assez grand, on doit avoir que $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et que $v_n \in]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$. En particulier, $u_n > \ell - \varepsilon = (\ell + \ell')/2$ et $v_n < \ell' + \varepsilon = (\ell + \ell')/2$. Donc à partir d'un certain rang $v_n < u_n$. Par contraposition, on obtient le résultat énonce. □

! A fortiori si $u_n < v_n$, on a aussi $\lim u_n \leq \lim v_n$. Mais il ne faut pas espérer obtenir $\lim u_n < \lim v_n$. Pour avoir un contre-exemple simple, on peut prendre (u_n) constante égale à 0 et $v_n = 1/2^n$. On a $u_n < v_n$ pour tout n mais les deux limites sont égales.

Il est encore plus intéressant de voir que les comparaisons permettent d'obtenir des résultats sur des suites dont on ne connaît même pas la convergence.

Proposition 2.17

Soient (u_n) et (v_n) deux suites pour lesquelles il existe un rang n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$. Si (v_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration : Supposons que (u_n) tende vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \geq M$ par définition. Donc à partir du rang $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a $v_n \geq u_n \geq M$. Cela montre que (v_n) tend vers l'infini. La démonstration de l'autre cas est symétrique. □

Il faut bien se rendre compte à quel point ce résultat est logique : si on est plus grand qu'une suite qui explose vers $+\infty$, alors on ne peut qu'exploser vers $+\infty$ (éventuellement même « encore plus vite »). Comprendre un tel résultat évitera d'avoir à l'apprendre par cœur et surtout de se tromper dans les sens des inégalités. Cela évitera aussi de tomber dans le piège suivant.

! Si la limite de (u_n) est finie, alors on ne peut rien dire sur (v_n) qui pourrait tout à fait diverger en oscillant, diverger vers $+\infty$ ou tendre vers une limite finie (seulement dans ce dernier cas la Proposition 2.16 peut donner une information sur cette limite grâce à la comparaison). Par exemple si (u_n) est la suite constante égale à 0, la comparaison $u_n \leq v_n$ dit juste que (v_n) est positive. On peut donc avoir plein de différents comportements $v_n = 2 + (-1)^n$ ou $v_n = n$ ou encore $v_n = 1 \ldots$

Corollaire 2.18

Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) une suite minorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. Symétriquement, si (u_n) est une suite qui tend vers $-\infty$ et (v_n) une suite majorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration : Nous n'allons considérer que le premier cas, le second étant symétrique. Soit $M \in \mathbb{R}$ un minorant de (v_n), par définition, on a $u_n + v_n \geq u_n + M$. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, $(u_n + M)$ tend aussi vers $+\infty$ (puisque la constante M est une suite constante qui tend vers $M \in \mathbb{R}$). D'après la proposition 2.17, $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$. En effet, on a $u_n \geq n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \ln(n+1)$ tend vers $+\infty$. En effet, on montre facilement par récurrence que $u_n \geq \ln n$.

Théorème 2.19 (théorème des gendarmes)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

i) il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \quad u_n \leq v_n \leq w_n \ ,$$

ii) les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite finie ℓ.

Alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 à partir duquel u_n et v_n sont dans $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En particulier,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$$

ce qui montre que (v_n) tend aussi vers ℓ. □

L'image est assez simple : deux gendarmes encadrent v_n et la comprime de plus en plus vers ℓ. La suite est donc obligée de converger vers ℓ. De nouveau, la compréhension de ce théorème permet d'éviter d'en déformer l'énoncé. Ainsi il est important que les limites de (u_n) et (w_n) soient les mêmes. Si (u_n) tend vers 0 et (w_n) tend vers 2, alors (v_n) a de la marge pour faire un peu n'importe quoi dans l'intervalle $[0,2]$ (par exemple $v_n = 1 + \sin(n)$).

Le théorème suivant est un outil encore plus puissant. En effet, il permet d'obtenir la convergence de suites sans avoir supposé aucune convergence. Dans beaucoup d'applications, on cherche à avoir des suites qui approchent une certaine limite. On ne connaît pas cette limite et c'est justement pour cela qu'on en veut des valeurs approchées. Les approximations forment des suites dont on ne pourra pas directement montrer la convergence puisque la définition de la convergence contient le nombre limite… dont on ne sait pas ce qu'il est. C'est pour cela que le principe des suites adjacentes est puissant : on construit la limite sans la connaître au départ et on obtient même un encadrement de cette limite. Nous verrons plus bas l'exemple de l'approximation de $\sqrt{a}$ par l'algorithme de Héron.

Théorème 2.20 (suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on suppose **adjacentes** c'est-à-dire que :

i) la suite (u_n) est croissante,
ii) la suite (v_n) est décroissante,
iii) on a $|u_n - v_n| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n \leq \ell \leq v_n\ .$$

Démonstration : D'après la définition de la convergence, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq 1$. En particulier, à partir de ce rang, $v_n \geq u_n - 1$. D'après la monotonie des suites, si $n \geq n_0$, on a $v_n \geq u_n - 1 \geq u_{n-1} - 1 \geq \ldots \geq u_0 - 1$. Pour $n \leq n_0$, on a aussi $v_n \geq v_{n_0} \geq u_{n_0} - 1 \geq u_0 - 1$. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'après le théorème 2.12. Par ailleurs, la preuve de ce théorème montre bien que ℓ est la borne inférieure de (v_n) et donc que $\ell \leq v_n$ pour tout n.
On peut faire le raisonnement symétrique pour (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$. Il reste à voir qu'il s'agit en fait de la même limite. Mais

comme les deux suites convergent, leur différence $u_n - v_n$ tend vers $\ell' - \ell$ et donc $|u_n - v_n|$ tend vers $|\ell' - \ell|$. Par hypothèse, ce nombre est égal à 0 donc $\ell = \ell'$. □

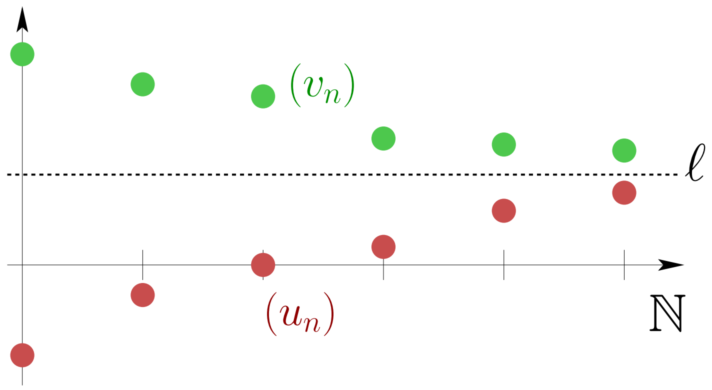
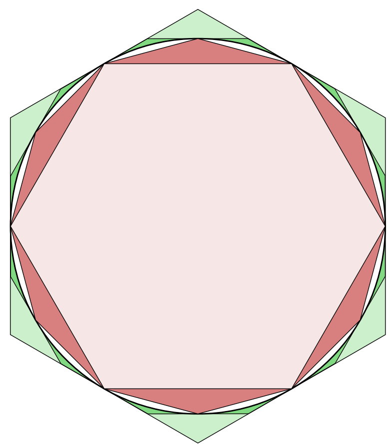


FIGURE 2.3 – *Illustration des suites adjacentes. La limite ℓ n'a pas à être connue à l'avance : elle se construit par approximations progressives par l'encadrement $\ell \in [u_n, v_n]$.*

Exemples :

- Un exemple très visuel est donné par la méthode de quadrature du cercle qu'a utilisée Archimède au IIIème siècle avant J.C. pour donner l'encadrement $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. On note u_n la surface du polygone à 6×2^n côtés inscrit dans le cercle et v_n la surface du polygone à 6×2^n côtés circonscrit au cercle. On part donc d'un hexagone puis on double le nombre de côtés comme sur la figure jointe. Il est clair que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante et on peut se convaincre que $u_n - v_n \to 0$. Le calcul de u_n et v_n peut se faire par itération de formules trigos. On obtient deux suites adjacentes qui donnent des approximations de plus en plus proches de π. Archimède avait été jusqu'à $n = 5$, c'est-à-dire pour des polygones à 96 côtés, obtenant les trois premiers chiffres significatifs de π.



- On considère les suites (u_n) et (v_n) données par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ .$$

  Comme u_n est une somme de plus en plus grande de termes positifs, la suite (u_n) est clairement croissante. On peut montrer que (v_n) est décroissante (calcul laissé au lecteur ou aux TDs). Comme $|u_n - v_n| = 1/n! \to 0$, il s'agit de deux suites adjacentes. La puissance du théorème 2.20 est de montrer qu'elles convergent, même si on ne sait rien de cette limite. Il se trouve que leur limite est un nombre important en mathématique, on va donc lui donner un nom : c'est le nombre e. On peut ainsi s'autoriser à écrire

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

- On considère la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

Il s'agit d'une série, c'est-à-dire d'une somme avec de plus en plus de termes. En particulier, $S_{n+1} - S_n = (-1)^n/(n+1)$. On voit que la suite des indices pairs $u_n := S_{2n}$ est croissante car $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = -1/(2n+2) + 1/(2n+1) > 0$ et de même la suite des indices impairs $v_n := S_{2n+1}$ est décroissante car $v_{n+1} - v_n = 1/(2n+3) - 1/(2n+2) < 0$. Par ailleurs, $|v_n - u_n| = |S_{2n+1} - S_{2n}| = 1/(2n+1) \longrightarrow 0$. Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et d'après le théorème 2.20 elles convergent vers la même limite. On peut alors montrer facilement (cf exercice du TD) que le fait que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite implique que (S_n) converge toute entière vers cette limite. En fait, on peut montrer (niveau L2) que cette limite est $\ln 2$, c'est-à-dire qu'on peut écrire, en en donnant un sens rigoureux,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

5 Suites récurrentes

5.1 Suites arithmético-géométriques

Les suites arithmético-géométriques sont les suites (u_n) qui suivent une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux constantes réelles. Cette classe de suites contient évidemment les suites arithmétiques ($a = 1$) comme les suites géométriques ($b = 0$). Elles aussi simples à traiter que ces deux cas grâce au résultat suivant.

Théorème 2.21 (suites arithmético-géométriques)

Soient a et b deux réels et soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = au_n + b$. Si $a = 1$, alors $u_n = u_0 + nb$. Sinon

$$u_n \;=\; a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \qquad (a \neq 1).$$

Démonstration : Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique, ce que nous avons déjà traité. Si $a \neq 1$, il suffit de vérifier que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - b/(1-a)$ est une suite géométrique de raison a. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

Exemples :

- On s'intéresse à la température (T_n) d'un objet placé dans une pièce à la température T_{ext} supposée constante, le temps n étant compté en unité discrète (en secondes ou en minutes par exemple). Joseph Fourier a énoncé à Grenoble en 1822 que le transfert de chaleur est proportionnel à la différence de température, c'est-à-dire que l'évolution de la température suit la loi $T_{n+1} - T_n = -\alpha(T_n - T_{\text{ext}})$ avec $\alpha \in (0{,}1)$ un coefficient dépendant des matériaux et de la géométrie de l'objet. On a donc $T_{n+1} = (1-\alpha)T_n + \alpha T_{\text{ext}}$. La formule ci-dessus donne donc que $T_n = (1-\alpha)^n(T_0 - T_{\text{ext}}) + T_{\text{ext}}$, c'est-à-dire que T_n tend exponentiellement vite vers la température d'équilibre de la pièce, et d'autant plus vite que α est grand.

- Une personne a emprunté 10.000 € à un taux de 2 % qu'elle rembourse au rythme de 1.000 € par an. On note (u_n) le montant qu'il reste à rembourser à l'année n en milliers d'euros. Le mécanisme est le suivant : chaque année, la personne verse à sa banque 1 k€, la banque en prélève 2 % du montant u_n qu'il restait à rembourser et le reste des 1 k€ sert à diminuer le montant à rembourser. L'année n, elle paye donc $0{,}02u_n$ d'intérêt et rembourse $1-0{,}02u_n$ de capital. La suite (u_n) vérifie donc $u_{n+1} = u_n - (1 - 0{,}02u_n) = 1{,}02u_n - 1$. C'est une suite arithmético-géométrique et on obtient que $u_n = 50-40\times 1{,}02^n$. Au bout de 11 ans, $u_n \simeq 0{,}265$. Donc il faudra que l'emprunteur paye 11 annuités puis un dernier versement de 265 €.

5.2 Suites à récurrence linéaire d'ordre 2

Nous allons étudier le cas des suites (u_n) qui sont définies par la donnée de u_0, de u_1 et d'une récurrence $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ avec a et b deux constantes. Avant le résultat, nous allons procéder à une analyse montrant comment on peut arriver à des formules. L'idée de base est que les suites vérifiant (2.1) forment un espace vectoriel de dimension 2 (paramétré par la donnée de u_0 et u_1). Donc si on connaît deux suites indépendantes de cet espace, elles en formeront une base. Cherchons des suites simples sous la forme $u_n = \lambda^n$. Si une telle suite vérifie (2.1), alors on doit avoir $\lambda^{n+1} = a\lambda^n + b\lambda^{n-1}$ et donc $\lambda^2 = a\lambda + b$. Si cette équation a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2, alors les suites vérifiant (2.1) s'écrivent sous la forme $u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ par linéarité. Il suffit alors d'ajuster a et b pour que les conditions initiales soient satisfaites et on tombe sur la formule du théorème suivant.

Théorème 2.22 (suites à récurrence linéaire d'ordre 2)

Soient a et b deux nombres complexes et soit (u_n) la suite définies par la donnée de u_0, de u_1 et par la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \; . \tag{2.1}$$

On considère l'équation polynomiale de degré 2

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \; . \tag{2.2}$$

- Si l'équation (2.2) admet deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$u_n \; = \; \frac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \lambda_1^n \; + \; \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \lambda_2^n \; .$$

- Si l'équation (2.2) a une racine double $\lambda \neq 0$, alors

$$u_n = u_0 \lambda^n + \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} \cdot n\lambda^n \; .$$

- Si l'équation (2.2) a $\lambda = 0$ pour une racine double, alors c'est que $a = b = 0$ et la suite est u_0, u_1, 0, 0...

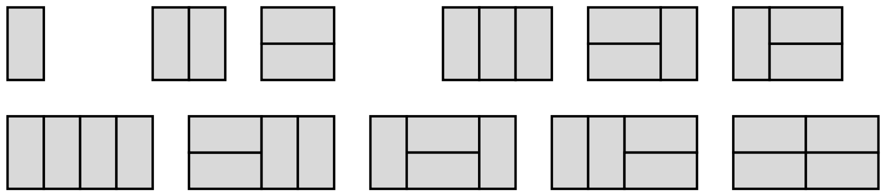
Démonstration : Nous n'avons pas besoin de véritablement préciser l'analyse effectuée avant le théorème. Pour prouver ce dernier, il suffit de faire la synthèse en prenant pour acquises ces formules tombées du ciel. Par exemple, supposons que $\lambda \neq 0$ est une racine double. Alors $\lambda^2 = a\lambda + b$ mais aussi $2\lambda = a$ (la racine annule le polynôme et sa dérivée). Posons $v_n = u_0\lambda^n + \beta n \lambda^n$ avec $\beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}$. Pour $n = 0$, la formule donne bien $v_0 = u_0$. Pour $n = 1$, on obtient $v_1 = u_0 + \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} \cdot \lambda = u_1$. Montrons que la formule passe la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
av_n + bv_{n-1} &= a\big(u_0\lambda^n + \beta n\lambda^n\big) + b\big(u_0\lambda^{n-1} + \beta(n-1)\lambda^{n-1}\big) \\
&= a(u_0 + (n-1)\beta)\lambda^n + a\beta\lambda^n + b(u_0 + (n-1)\beta)\lambda^{n-1} \\
&= \big(u_0 + (n-1)\beta\big)\lambda^{n-1}(a\lambda + b) + a\beta\lambda^n \\
&= \big(u_0 + (n-1)\beta\big)\lambda^{n-1}\lambda^2 + 2\lambda\beta\lambda^n = u_0\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1} \\
&= v_{n+1}
\end{aligned}$$

Comme il est clair que les données initiales et la relation de récurrence permettent de calculer de façon unique la suite de proche en proche, on a bien égalité entre u_n et la formule v_n. □

Exemple :

En application, nous allons compter combien il y a de façons F_n de paver un rectangle $2 \times n$ avec des dominos 2×1. Les premiers essais montrent que $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$ et $F_4 = 5$.



Imaginons maintenant que nous connaissons $F_1, \ldots, F_n$. Nous voulons paver le rectangle $2 \times (n+1)$. On peut soit mettre à droite un domino vertical puis paver le reste comme un rectangle $2 \times n$, soit mettre à droite deux dominos horizontaux puis paver le reste comme un rectangle $2 \times (n-1)$. On obtient donc que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ldots$ c'est la suite de Fibonacci ! Voici l'occasion de démontrer la formule du début du chapitre. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ qui a pour racines $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\phi' := -1/\phi = (1-\sqrt{5})/2$. Pour voir que la deuxième racine est bien $-1/\phi$, on remarquera que le produit des racines vaut le coefficient constant -1 (ou on fait le calcul). On notera que $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, que $\phi - \phi' = \sqrt{5}$, $1 - \phi' = \phi$ et $1 - \phi = \phi'$. On trouve au final

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+1} - (-1/\phi)^{n+1} \right) .$$

Par exemple, il y a 89 façons de paver le rectangle 2×10.

5.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Le cas le plus général pour une suite récurrente d'ordre 1 est celui d'une suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et d'une récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f une fonction continue voire dérivable. C'est un cas trop général pour permettre d'obtenir une formule pour u_n ou même pour savoir si elle converge. Nous verrons l'exemple plus loin de la suite logistique qui peut même avoir des comportements chaotiques. Si on prend $f(x) = -x$, alors on obtient la suite $u_n = (-1)^n u_0$ qui oscille de période 2. On peut obtenir aussi des cycles de longueur 3, par exemple en prenant une fonction f telle que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 1$. Pour en obtenir une, il suffit de faire un graphe qui passe par ces trois points imposés, voir la figure 2.4.

Dans le cas où la suite (u_n) converge, alors elle converge obligatoirement vers un point fixe de la fonction.

Proposition 2.23

Si (u_n) est une suite qui admet une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est définie et continue au point ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire que $\ell = f(\ell)$.

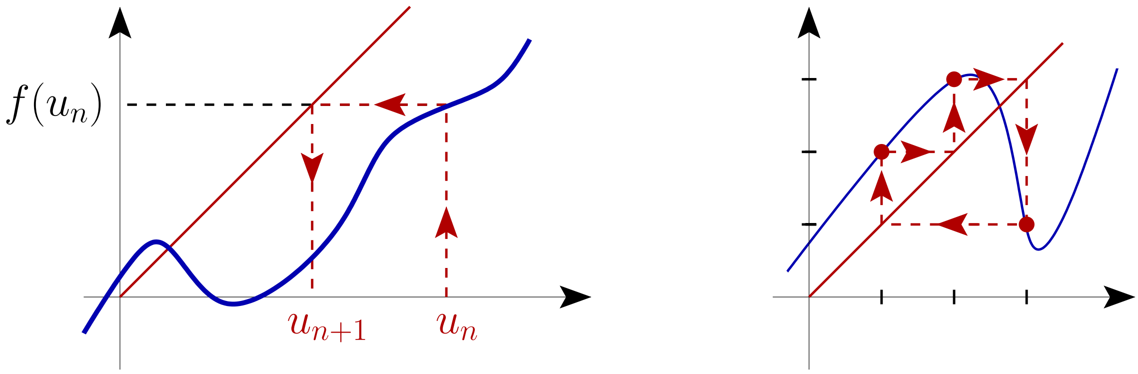


FIGURE 2.4 – *À gauche, une construction graphique du point $u_{n+1} = f(u_n)$ qui utilise la droite d'équation $y = x$ permettant de renvoyer l'ordonnée $y = f(u_n)$ sur l'abscisse $u_{n+1} = f(u_n)$. À droite, un exemple de fonction admettant le cycle* $1 \to 2 \to 3 \to 1$ *pour la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Démonstration : On anticipe sur le chapitre suivant en admettant la notion de continuité connue. On a alors que $u_n \to \ell$ implique que $f(u_n) \to f(\ell)$. Mais comme u_{n+1} tend aussi vers ℓ, en passant à la limite dans l'équation de récurrence, on a $\ell = f(\ell)$. □

Cela permet donc de connaître la limite dans certains cas. Notons que sous son air simple, cette proposition contient un bonus : l'existence d'un point fixe dans I qui n'est pas supposée au départ.

Proposition 2.24

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I sur I, i.e. telle que $f(I) \subset I$. On suppose que soit $f(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, soit $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$. Alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans I et converge vers un point fixe de f dans I.

Démonstration : Comme $f(I) \subset I$, si u_0 est dans I, alors $u_1 = f(u_0)$ est aussi dans I et par une récurrence triviale, toute la suite (u_n) reste dans I et est donc bien définie. Si $f(x) \geq x$ sur I, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ et donc (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par b, elle converge et la proposition 2.23 conclut. Symétriquement, si $f(x) \leq x$ sur I, la suite (u_n) est décroissante minorée et donc convergente. □

On peut utiliser cette proposition pour des fonctions un peu plus complexes mais pour lesquelles on peut découper l'intervalle d'étude en sous-intervalles sur lesquels cette proposition s'applique, voir la figure 2.5.

Nous allons encore regarder un dernier cas souvent utile : celui des points fixes dits *attractifs*. En pratique, l'hypothèse de cette proposition se démontrera à l'aide du théorème des accroissements finis que nous verrons dans le chapitre suivant.

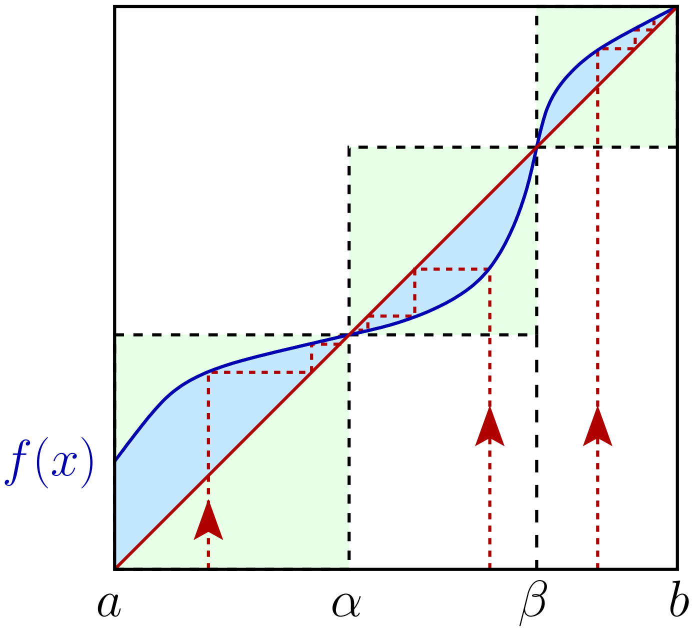


FIGURE 2.5 – *La fonction f envoie l'intervalle $I = [a,b]$ sur lui-même et possède trois points fixes α, β et b. Par ailleurs, cette fonction laisse stable les intervalles $[a,\alpha]$, $[\alpha,\beta]$ et $[\beta,b]$. On peut donc appliquer la proposition 2.24 sur chacun de ces intervalles. On trouve que si $u_0 \in [a,\alpha]$, la suite converge vers α ; si si $u_0 \in [\alpha,\beta[$, la suite converge vers α ; si $u_0 = \beta$, la suite est constante égale à β ; et enfin si $u_0 \in]\beta,a]$, la suite converge vers a. On dit que α et b sont des points fixes attractifs ou stables, alors que b est répulsif ou instable.*

Proposition 2.25 (point fixe attractif)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. Supposons que I contient un point fixe α qui est attractif dans le sens où il existe une constante positive k telle que $k < 1$ et

$$\forall x \in I \ , \ \ |f(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha| \ .$$

Alors si (u_n) est une suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_n) converge vers α.

Démonstration : Par construction, on a $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. La suite $v_n = u_n - \alpha$ vérifie donc

$$0 \leq |v_n| \leq k|v_{n-1}| \leq k^2|v_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n|v_0| \ .$$

Comme $|k| < 1$, on a $k^n \to 0$ et par le théorème des gendarmes, (v_n) tend vers 0. Donc $u_n = v_n + \alpha$ tend vers α. $\square$

Exemples :

- On s'intéresse aux suites définies par la donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Ce sont des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f = \sin$. Comme le sinus ne prend que des valeurs entre -1 et 1, u_n sera dans $I = [-1{,}1]$ pour tout $n \geq 1$ et $f(I) \subset I$. Plus précisément, f laisse stable $[-1{,}0]$ et $[0{,}1]$. Comme $|\sin x| \leq |x|$, on a aussi $0 \geq f(x) \geq x$ pour tout $x \in [-1{,}0]$ et $0 \leq f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0{,}1]$. Enfin, $x = 0$ est le seul point fixe du sinus. D'après la proposition 2.24, toutes les suites récurrentes $u_{n+1} = \sin(u_n)$ convergent donc vers 0.

- On considère la suite définie par $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Ses premiers termes sont donc

$$1 = \sqrt{1} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1}} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \quad \text{etc.}$$

  C'est une suite récurrente avec $f(x) = \sqrt{1+x}$. La fonction f est croissante. Cherchons ses points fixes : si $f(\alpha) = \alpha$, alors $(1+\alpha) = \alpha^2$ et donc α est soit le nombre d'or ϕ soit $-1/\phi$, mais ce dernier est négatif et donc ne peut vérifier $\alpha = \sqrt{1+\alpha}$. Le nombre ϕ est donc le seul point fixe de f. Par ailleurs, si $x \in [0{,}\phi]$, alors $f(x) = \sqrt{1+x} \geq 0$ et $f(x) \leq \sqrt{1+\phi} = \phi$. Donc le segment $[0{,}\phi]$ est stable par f. Enfin, si $x \in [0{,}\phi]$, alors x est entre les racines ϕ et $-1/\phi$ de $x^2 - x - 1$ et donc $x^2 - x - 1 \leq 0$. On obtient $x^2 \leq x + 1$ et comme les nombres considérés sont positifs et que la racine carrée est croissante, alors $x \leq \sqrt{1+x} = f(x)$. En conclusion, on peut donc appliquer la proposition 2.24 pour obtenir que (u_n) tend vers le nombre d'or ϕ. En abusant un peu des notations, on peut donc écrire la jolie formule

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}\,.$$

6 Suites et topologie

Dans cette partie, nous allons voir quelques notions et théorèmes qui sont fondamentaux dans plusieurs domaines des mathématiques. Nous ne les utiliserons pas tant que cela cette année et c'est pour cela qu'ils ne sont pas centraux pour ce cours. Mais ils serviront pour plusieurs démonstrations importantes et surtout pour les années suivantes.

Nous avons déjà parlé des suites de Cauchy qui jouent un rôle central dans la construction des réels dans le cours de Louis Augustin Cauchy (1789-1857, France).

Définition 2.26

Une suite (u_n) est dite **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall p,q \geq n_0 \ , \ \ |u_p - u_q| < \varepsilon \ .$$

Une suite de Cauchy est donc une suite dont tous les termes finissent par être aussi proches que l'on veut les uns des autres. Attention, il ne s'agit pas seulement de comparer u_p et u_{p+1} mais bien tous les u_p et u_q pour p et q assez grand, donc aussi u_p et u_{p+2}, u_{p+100}... L'intérêt des suites de Cauchy, c'est qu'elles apportent un critère de convergence sans même savoir quoi que ce soit sur la limite potentielle.

Plus précisément, une des implications est toujours vraie (même dans des espaces autres que $\mathbb{R}$).

Proposition 2.27

Si (u_n) est une suite convergente, alors elle est de Cauchy.

Démonstration : Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n). Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Pour tous p et q plus grands que n_0, on a donc

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

$\square$

Mais la réciproque n'est pas vraie dans n'importe quel espace. Elle est vraie pour les réels et il s'agit d'une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, dans le sens où cette propriété provient de la construction même des réels. On ne pourra donc pas en donner une démonstration sans revenir à la construction de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans le cadre de ce cours et on admettra le théorème suivant.

Théorème 2.28 ($\mathbb{R}$ est complet)

Si $(u_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy de réels, alors elle est convergente dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.

Exemple :

On considère la suite $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{k!}$. On a déjà vu plus haut que la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge (vers e) et on sait donc que la suite (u_n) est de Cauchy d'après la proposition 2.27. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc n_0 tel que pour tout $p \geq q \geq n_0$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Mais alors,

$$|w_p - w_q| = \left| \sum_{k=q+1}^{q} \frac{\sin k}{k!} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{q} \left| \frac{\sin k}{k!} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{q} \frac{1}{k!} = |u_p - u_q| < \varepsilon \ .$$

On vient de démontrer que (w_n) est de Cauchy. D'après le théorème 2.28, cela montre que (w_n) converge, même si on ne sait pas pour le moment quelle est sa limite.

La notion suivante de sous-suites fait partie de ces définitions importantes dans le sens où elles peuvent servir dans des cadres beaucoup plus généraux que ceux de ce cours.

Définition 2.29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que (v_n) est une **suite extraite** ou bien une **sous-suite** de (u_n) s'il existe une **extraction** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, c'est-à-dire une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$. Dans ce cas, on pourra noter directement $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite extraite.

Même si la définition peut être formelle, le principe est simple : dans la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on a viré certains termes et on n'a gardé que certains éléments de la suite. La fonction φ indique quels termes sont gardés. Attention, il faut en garder une infinité (pour avoir encore une suite à la fin) et il ne faut pas revenir en arrière dans les numéros. Par exemple

$$v_0 = u_1 \ , \quad v_1 = u_5 \ , \quad v_2 = u_7 \ , \quad v_3 = u_8 \ , \quad v_4 = u_{12} \ , \quad v_5 = u_{17} \ldots$$

est le début d'une sous-suite de (u_n) pour l'extraction φ dont les premières images sont

$$\varphi(0) = 1 \ , \quad \varphi(1) = 5 \ , \quad \varphi(2) = 7 \ , \quad \varphi(3) = 8 \ , \quad \varphi(4) = 12 \ , \quad \varphi(5) = 17 \ldots$$

Par contre, après $\varphi(1) = 5$, on ne pourra pas revenir à $\varphi(2) = 3$.

Exemples :

- D'une suite (u_n), on ne garde que les termes d'indices pairs, c'est-à-dire la sous-suite (u_{2n}) qui correspond au choix $\varphi(n) = 2n$.

- D'une suite (u_n), on ne garde que les termes d'indices impairs, c'est-à-dire la sous-suite (u_{2n+1}) qui correspond au choix $\varphi(n) = 2n + 1$.

- La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est aussi une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui correspond au choix $\varphi(n) = n + 2$.

- De la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on ne garde que la sous-suite $(\cos(\varphi(n)))$ des termes positifs. Dans ce cas, il est difficile de donner une formule pour φ, mais sa construction est simple : on regarde si un terme $\cos(n)$ est positif. Si oui, on le garde dans la sous-suite et on lui attribue le prochain numéro libre i.e. $\varphi(k + 1) = n$ si on a déjà gardé k termes. Sinon, on ne le prend pas et on passe au terme suivant. Ce faisant, il manque encore une démonstration pour prouver qu'une infinité de termes seront gardés, mais ce n'est pas l'objet ici.

Proposition 2.30

Si (u_n) est une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors toutes ses sous-suites convergent vers ℓ. Si (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toutes ses sous-suites tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration : Faisons un seul des trois cas. Supposons par exemple que (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction. Commençons par une remarque importante : si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ (récurrence rapide laissée au lecteur). Soit $M \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq M$. On a alors pour tout $n \geq n_0$ que $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ et donc $u_{\varphi(n)} \geq M$. Ceci montre que $(u_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$. □

Exemple :

On regarde la suite définie par $u_n = (-1)^n$. La suite des indices pairs est donnée par $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. Comme elle est constante égale à 1, elle converge vers 1.La suite des indices impairs est donnée par $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, et elle converge donc vers -1. Ces deux sous-suites convergent vers des limites différentes. Ce n'est donc pas possible que (u_n) converge vers un réel ou tende vers $\pm\infty$.

Le théorème suivant touche à ce qu'on appelle la *compacité*. C'est une notion topologique qui sera généralisée à d'autres espaces plus tard. Son nom Il vient des mathématiciens Bernard Bolzano (1781-1848, Hongrie) et Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne).

Théorème 2.31 (Bolzano-Weierstrass)

Soit (u_n) une suite bornée de réels. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge.

Démonstration : Nous allons voir comment déduire ce résultat de la complétude de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire du théorème 2.28. Notre raisonnement consiste à appliquer une méthode de dichotomie. Comme (u_n) est bornée, il existe un segment $[a_0,b_0]$ tel que $u_n \in [a_0,b_0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On prend $\varphi(0) = 0$. Soit $m = (a_0 + b_0)/2$ le milieu de $[a_0,b_0]$. Comme il y a une infinité de termes de la suite dans $[a_0,b_0]$, il faut bien qu'il y en ait une infinité dans au moins une des moitié $[a_0,m]$ et/ou $[m,b_0]$ (principe des tiroirs). On note $[a_1,b_1]$ une des moitiés qui convient et on pose $\varphi(1)$ comme le premier $n > \varphi(0) = 0$ tel que u_n soit dans $[a_1,b_1]$. De nouveau, on prend le milieu $m = (a_1 + b_1)/2$. Comme il y a une infinité de termes de la suite dans $[a_1,b_1]$, il faut bien qu'il y en ait une infinité dans au moins une des moitié $[a_0,m]$ et/ou $[m,b_0]$, que l'on note $[a_2,b_2]$. On pose $\varphi(2)$ comme le premier $n > \varphi(1)$ tel que u_n soit dans $[a_2,b_2]$. De proche en proche, on peut extraire ainsi une sous-suite. À partir du rang n_0, tous les termes de la sous-suite se retrouvent dans un intervalle de taille

$2^{-n_0}|b_0 - a_0|$ puisqu'on divise l'intervalle considéré par deux à chaque étape. Cela montre que cette sous-suite est une suite de Cauchy. Le théorème 2.28 nous dit qu'elle converge donc. □

Quand on parle de compacité, on pense plutôt à prendre une suite de points dans un ensemble. La version topologique du théorème précédent s'énoncera plutôt comme suit.

Corollaire 2.32 (compacité dans $\mathbb{R}$)

Soient $a < b$ deux réels. Soit $(x_n) \subset [a,b]$ une suite de points de l'intervalle fermé borné $[a,b]$, alors on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$.

Démonstration : Comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout n, la suite est bornée et on peut utiliser le théorème précédent pour en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $x_{\varphi(n)} \geq a$ pour tout n, les théorèmes de comparaison nous disent que $\ell \geq a$. De même, on obtient que $\ell \leq b$, ce qui conclut. □

7 Quelques exemples concrets supplémentaires

7.1 La méthode de Héron

Il y a plus de 3.000 ans, les savants de l'Antiquité mésopotamienne et égyptienne savaient extraire des racines carrées. On trouve ainsi des tablettes d'argile avec la valeur de la diagonale d'un carré montrant qu'ils savaient calculer $\sqrt{2}$ à la précision du millionième. Les scribes n'ont pas expliqué leur méthode, mais on pense qu'il s'agit du même algorithme que celui utilisé par les grecs plusieurs siècles plus tard. Il est appelé *méthode de Héron* ou *méthode babylonienne*. L'idée est géométriquement simple. Supposons que l'on veuille calculer $\sqrt{a}$, cela revient à trouver quel est le côté d'un carré de surface a. On part d'un rectangle de surface a, par exemple de côtés $u_0 = a$ et $v_0 = 1$ (en pratique, il est plus rapide de partir d'une meilleure approximation du bon carré, par exemple $u_0 = 4$ et $v_0 = 2{,}5$ pour calculer $\sqrt{10}$). Ce premier rectangle a la bonne surface mais n'est pas un carré. Pour le rendre « plus carré », on prend comme nouveau côté la moyenne des côtés en posant $u_1 = (u_0+v_0)/2$ et donc $v_1 = a/u_1$. Notre nouveau rectangle est encore d'aire a mais il est proche du carré. On itère ainsi le procédé et on se rapproche de plus en plus de la racine carrée cherchée.

Un calcul de $\sqrt{2}$ datant de plus de 3.500 ans

Mathématiquement parlant, comme $v_n = a/u_n$, cela revient à partir de $u_0 = a$ et itérer la récurrence

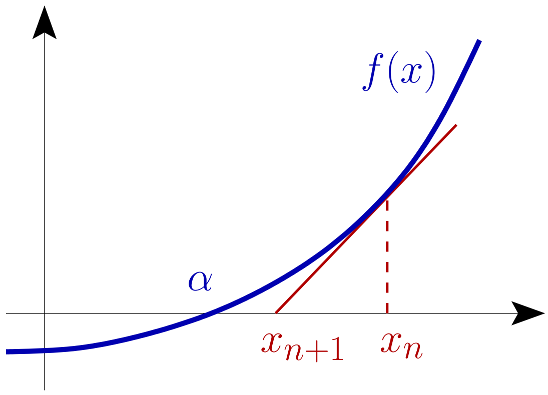
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) . \tag{2.3}$$

L'étude de la fonction $f : x \mapsto (x+a/x)/2$ montre qu'elle est décroissante sur $]0,\sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a},+\infty[$ et que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. En particulier, f envoie $[\sqrt{a},+\infty[$ sur lui-même et pour tout n, $u_n \geq \sqrt{a}$. On a alors que $v_n = a/u_n \leq \sqrt{a}$ et donc que $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \leq (u_n + u_n)/2 = u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ et elle converge vers un réel $\ell \geq \sqrt{a}$. En passant à la limite dans (2.3), on obtient que $\ell = (\ell + a/\ell)/2$ ce qui donne $\ell^2 = a$. Comme ℓ est positive, on a donc $\ell = \sqrt{a}$.

Pour obtenir une bonne approximation de $\sqrt{a}$, il suffit donc de partir d'une valeur raisonnable et d'itérer la formule (2.3) qui n'est composée que d'opérations élémentaires. On peut prouver que cette méthode est très efficace car elle converge quadratiquement : à chaque étape, on double le nombre de chiffres exacts de notre approximation.

7.2 L'algorithme de Newton

La méthode de Newton est utilisée pour approcher les zéros de fonctions. Considérons une fonction f dont on veut trouver un zéro α, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(\alpha) = 0$. L'idée géométrique est de partir d'une valeur assez proche x_0, puis d'approcher la fonction f par sa tangente en x_0 et de prendre comme nouvelle position x_1 le zéro de cette tangente. Puis on recommence le procédé et on espère que la suite (x_n) tende bien vers α. Ce n'est pas toujours le cas et l'algorithme peut échouer, ne serait-ce que si la tangente que l'on regarde est horizontale et donc n'a pas de zéro. La méthode a été introduite par Isaac Newton en 1669 mais celui-ci ne l'a utilisée que pour les polynômes. Il a fallu un peu de temps avant que l'on comprenne la généralité de l'algorithme et qu'il prenne sa forme moderne.



Concrètement, si f est dérivable, sa tangente au point x_n est la droite d'équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Comme x_{n+1} est le zéro de cette tangente, on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} . \tag{2.4}$$

Supposons que sur l'intervalle $[\alpha,x_0]$, la fonction f soit croissante. Elle est donc positive et f' est positive aussi. On obtient alors que $x_{n+1} \leq x_n$. Supposons en outre que f soit convexe sur $[\alpha,x_0]$, elle est alors au-dessus de ses tangentes et $\alpha \leq x_{n+1}$ (voir la figure ci-dessus). Sous ces hypothèses, la suite (x_n) est donc décroissante et minorée par α et elle converge vers une limite $\ell \in [\alpha,x_0]$. En passant à la limite dans

(2.4), on a que $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell)$ et donc que $f(\ell) = 0$. Comme α est le seul zéro de f dans l'intervalle considéré, $\ell = \alpha$. On vient de montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et convexe sur $[\alpha,x_0]$, alors la suite (x_n) partant de x_0 et définie par la récurrence (2.4) converge vers la solution de l'équation $f(\alpha) = 0$. On peut montrer que cette convergence est en fait très rapide si elle a lieu.

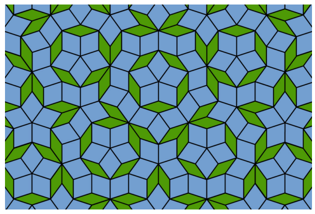
Une application simple de l'étude précédente est le cas du plus grand zéro des polynômes scindés. Prenons par exemple $f(x) = x^2 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est croissante pour $x \geq 0$ et convexe sur $\mathbb{R}$. Si on part d'un point $x_0 \geq \sqrt{a}$ et qu'on itère la méthode de Newton, la suite (x_n) va donc converger vers $\sqrt{a}$. Dans le cas $f(x) = x^2 - a$, (2.4) devient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big) \ .$$

On retrouve la méthode de Héron !

7.3 Un quasi-cristal de Fibonacci

Un cristal est une structure atomique régulière avec un motif qui se répète périodiquement. On peut mathématiquement classer les 230 structures périodiques possibles en dimension 3. Mais en 1982, Dan Shetchman obtient un solide de structure qui semble régulière mais avec une symétrie d'ordre 5 qui ne correspond à aucune structure périodique possible. Il s'agit de ce qu'on appelle maintenant un *quasi-cristal* qui présente une structure quasi-périodique qui avait déjà été explorée par les mathématiciens comme Roger Penrose dans les années 70.



Un pavage quasi-périodique de Penrose

Nous allons étudier le cas plus élémentaire d'un quasi-cristal 1D qui donne déjà une idée de la façon de construire des quasi-cristaux en plus grande dimension. On regarde un alignement composé d'atomes de type A et B. Un cristal 1D serait un mot périodique du type ABABABAB... ou bien AABAABAAB... qui présentent des motifs se répétant à l'infini. Nous allons construire un quasi-cristal suivant le *mot de Fibonacci*. On part des premiers mots A et B puis on agrandit le mot en concaténant les deux mots précédents. Ainsi, on obtient B+A=BA puis BA+B=BAB, BAB+BA=BABBA, BABBA+BAB=BABBABAB... On note que le mot suivant est une extension du précédent et on obtient ainsi un mot qu'on peut prolonger à l'infini et qui commence par

ABAABABAABAABABAABABAABAABABAABAAB...

Par construction, n'importe quel motif de ce mot se retrouve une infinité de fois et qu'on peut trouver des motifs qui se répètent de taille aussi grande que voulue (puisqu'on recolle le mot qui contient le motif à la suite de lui-même). Notre mot présente ainsi des répétitions typique d'un cristal. Mais si cela en était un, il faudrait qu'un motif se répète périodiquement.

Nous allons montrer que ce mot de Fibonacci n'est pas périodique. Notons u_n le nombre de lettres du mot en construction à la $n-$ième étape. On voit que ce nombre u_n suit la suite de Fibonacci $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ puis par concaténation $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Mais si on regarde le nombre v_n de B dans le mot, on retrouve le même principe $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ puis $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ et (v_n) suit aussi la suite de Fibonacci, mais décalée par rapport à (u_n), i.e. $v_n = u_{n-1}$. La proportion de B dans l'étape n est donc u_{n-1}/u_n qui tend vers le nombre d'or ϕ. Si le mot était périodique, c'est-à-dire composé d'un motif de longueur q se répétant tout les q atomes, alors la proportion de B tendrait vers p/q avec p le nombre de B dans ce motif. La proportion serait donc rationnelle, ce qui n'est pas le cas puisque ϕ est irrationnel. On vient donc de montrer que le mot de Fibonacci n'est pas un mot périodique même s'il présente des motifs qui se répètent (ces répétitions ne sont donc pas tout à fait régulières). C'est la caractéristique des quasi-cristaux.

7.4 Séries de Riemann

Piles de dominos, extraites du site « How round is your circle » par John Bryant et Chris Sangwin.

On considère une pile de dominos (de longueur disons 2 unités) que nous penchons pour former une avancée la plus grande possible. Le domino le plus haut, afin de ne pas tomber, ne doit pas être avancé de plus de sa moitié, c'est-à-dire 1 unité de longueur. Si nous avançons de 1 le domino en-dessous, les deux dominos basculeront. En fait, si on avance de d cet ensemble de deux dominos, il faut que

$$(2-d) + (2-d-1) \geq d + (d+1)$$

ce qui donne $d \leq 1/2$. Puis un calcul similaire montre que le troisième domino ne peut pas être avancé de plus de $1/3$ et par une récurrence, le $n-$ième domnio ne peut pas être décalé de plus de $1/n$ unité de longueur.

On note u_n la taille de l'avancée obtenu en décalant au maximum une pile de n dominos. On a donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}\ .$$

Jusqu'où peut-on aller, c'est-à-dire quelles longueurs peut-on atteindre avec u_n ? La réponse est qu'on peut aller aussi loin de l'on veut ! En effet, prenons $n = 2^p$, on regroupe les termes par paquets

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}$$
$$+ \boxed{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}} + \ldots + \boxed{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^p}}\ .$$

Le paquet $1/(2^{j-1}+1) + \ldots + 1/2^j$ contient 2^{j-1} termes qui sont tous plus grands que $1/2^j$ et donc est plus grand que $1/2$. On obtient donc que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}\ .$$

La suite (u_n) est croissante et le calcul précédent montre qu'elle n'est pas bornée puisque $u_{2^p} \geq 1 + p/2$. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$, ce que l'on pourrait traduire de façon informelle par

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty \ .$$

Ainsi, même si les décalages entre dominos sont de plus en plus petits, leur somme est aussi grande que l'on veut. Cette divergence est connue depuis le moyen-âge d'après les travaux du français Nicolas Oresme.

A propos de la situation présentée, on pourra consulter
`http ://images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html`

Maintenant, nous considérons les suites (u_n) et (v_n) données par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \ .$$

Comme $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2$, la suite (u_n) est croissante. Comme

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

la suite (v_n) est décroissante. Il est clair que $|u_n - v_n| \to 0$ et donc il s'agit de suites adjacentes. On obtient donc que (u_n) converge vers une limite $\ell > 0$. Contrairement à l'exemple précédent, cette somme infinie de termes de plus en plus petits donne un résultat fini. La question de savoir si on pouvait exprimer cette limite a longtemps été ouvert jusqu'à ce qu'Euler montre en 1735 (pas complètement rigoureusement) que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

7.5 Suite logistique

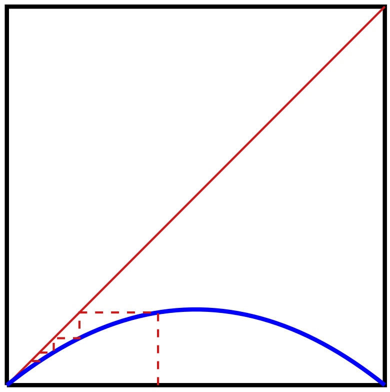
Nous avons vu plus haut des modèles simples de dynamique des populations sous la forme de suites géométriques $u_{n+1} = \lambda u_n$. Dans ces modèles, la population s'éteint ou grandit exponentiellement vite sans limitation. Si on veut faire intervenir une notion de surpopulation, il faut rajouter un terme pénalisant les populations trop fortes du type $-\alpha u_n^2$. Ce terme est le plus simple possible qui soit négligeable devant λu_n pour les petites populations mais l'emporte pour les plus grandes. En normalisant la taille de la population, on tombe sur le modèle logistique :

$$u_{n+1} = \lambda u_n (1 - u_n) \ .$$

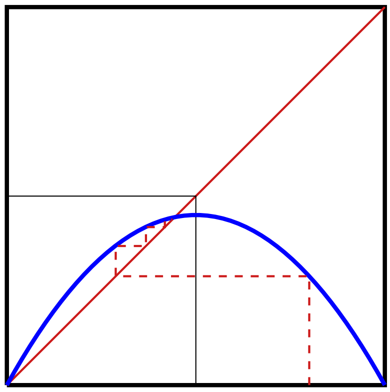
Notons que ce modèle est encore trop simpliste, surtout dans sa version discrète (il est plus réaliste si on regarde l'équation différentielle associée). Par exemple, si la population est trop grande, elle subit directement une chute qui peut conduire à l'extinction si $u_n = 1$, voire à des nombres négatifs si $u_n > 1$. Ce dernier cas est absurde pour le modèle et on va donc se limiter à prendre $u_0 \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,4]$ de telle sorte que la fonction $f : x \longmapsto \lambda x(1 - x)$ envoie $[0,1]$ sur lui-même.

Malgré cette simplicité, ce modèle jouet montre que l'on peut obtenir des comportements dynamiques extrêmement différents en fonction de la valeur de λ. En particulier, il est possible d'obtenir des évolutions chaotiques, même avec une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et f un simple polynôme de degré deux. Quand λ grandit de 0 à 4, on observe ce qu'on appelle des bifurcations, c'est-à-dire des moments où le comportement qualitatif change brusquement.

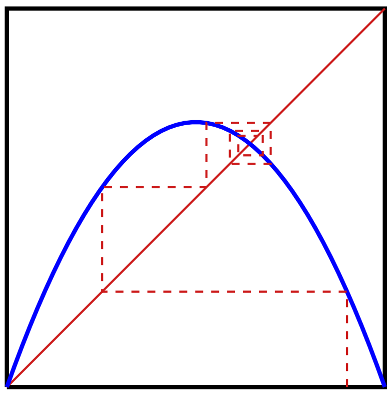
• 1er cas : $\lambda \leq 1$
Si λ est trop petit, la population décroît, même sans le terme de mortalité, car il n'y a pas assez d'enfants par génération. Mathématiquement, $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est forcément décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Comme 0 est le seul point fixe de f, la seule limite possible est 0 d'après la proposition 2.23. En fait, si $\lambda < 1$, on peut même appliquer la proposition 2.25 et obtenir une décroissance exponentielle.



• 2ème cas : $\lambda \in]1,2]$
Si λ est plus grand, alors 0 devient un point fixe répulsif (une petite population va croître exponentiellement) et un deuxième point fixe apparaît $\alpha = (\lambda - 1)/\lambda$. Par ailleurs, le maximum de f est atteint en $x = 1/2$ et on vérifie que $\alpha \leq 1/2$ et $f(1/2) \leq 1/2$. Cela montre que le segment $[1/2,1]$ est envoyé sur $[0,1/2]$ et que $[0,1/2]$ est envoyé sur lui-même. Toutes les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ finissent donc dans $[0,1/2]$ où f est croissante. On peut découper $[0,1/2]$ en deux parties où la proposition 2.24 s'applique. On montre ainsi que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe α (les cas $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ restent trivialement sur la valeur 0). Notre population animale se stabilise sur une population optimale adaptée au milieu.



• 3ème cas : $\lambda \in]2,3]$
À partir de $\lambda > 2$, le point fixe α devient plus grand que $1/2$ et passe dans la zone où f est décroissante. Ce cas demande un peu plus d'étude, mais on peut le traiter avec les outils de ce chapitre. En analysant les différents intervalles et leur images, on montre que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite finit par tomber dans un intervalle où on peut appliquer la proposition 2.25. Elle se met alors à tendre vers α en oscillant autour. De nouveau, la population animale se stabilise sur la population optimale adaptée au milieu.



• Naissance du chaos : $\lambda \in]3,4]$
À partir de $\lambda > 3$, on observe une succession de bifurcations dites *doublement de période* qui engendre de plus en plus de cycles périodiques de longueur 2^n, voir la figure 2.2.6. Quand λ passe la valeur 3,57, la suite devient chaotique : on ne peut prévoir le futur de la population car une minuscule variation de la mesure de u_n peut amener des variations énormes dans le futur. C'est ce qu'on appelle « l'effet papillon » selon l'image d'Edward Lorenz qui demandait « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ».

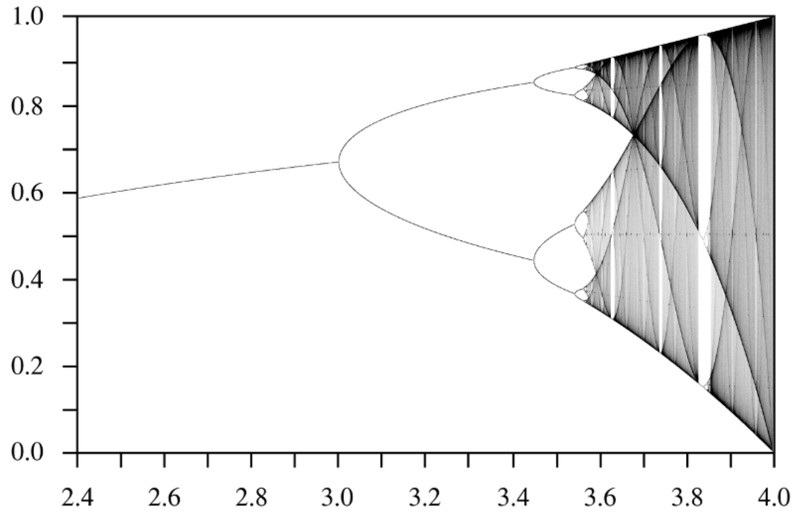


FIGURE 2.6 – *Le paramètre λ est en abscisse et on marque en ordonnée les points où une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ typique s'accumule. Pour $\lambda \leq 3$, toutes les suites convergent vers l'unique point fixe α. Mais ensuite, on voit apparaître un cycle de période 2, qui bifurque vers un cycle de période 4 et ainsi de suite en une cascade de bifurcation jusqu'au chaos pour $\lambda > 3{,}57$. A partir de là, il devient impossible de prévoir le comportement de la suite qui navigue de façon désordonnée dans une grande plage de valeurs.*

<u>À connaître :</u>

- Définition d'une suite et de sa limite.
- Savoir calculer une limite de suite simple avec les règles de la partie 3.
- Savoir faire des démonstrations élémentaires comme celles de la partie 3.
- Savoir utiliser les théorèmes de comparaison ainsi que le théorème 2.12.
- Définition et manipulation des suites extraites.

<u>Utile pour la suite :</u>

- Les formules de la partie 5 ne sont pas forcément à connaître par cœur pour ce cours, mais il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver. De la même façon, les propositions de la partie 5.3 ne sont pas forcément à apprendre par cœur mais elles suivent des principes comme le théorème 2.12 qu'il faut savoir manipuler.
- La définition d'une suite de Cauchy et le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Les exemples, en particulier ceux de la partie 7, ne sont pas du cours à connaître par cœur. Mais ils peuvent être étudiés comme illustrations des méthodes et des théorèmes et vous le retrouverez sans doute dans la suite de vos études.

Chapitre 3 : Fonctions réelles

1 Notions de base

Soient E et F deux ensembles. Une *fonction* f de E dans F est définie par l'association à tout élément x de E d'un élément $y = f(x)$ de F. On peut donc la définir par la donnée des couples associés $(x,y) \in E \times F$ avec la règle que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x,y) \in E \times F$ dans cette liste. L'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x,y) \in E \times F \ , \ \ y = f(x)\} \ \subset \ E \times F$$

est appelé *graphe* de f. Toute fonction est donc équivalente à la donnée d'un ensemble $\mathcal{G}_f \subset E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $(x,y) \in \mathcal{G}_f$ et tel que si (x,y) et (x,y') sont dans $\mathcal{G}_f$, alors $y = y'$.

Nous allons travailler avec des fonctions réelles, c'est-à-dire que E et F seront des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Une fonction f réelle est donc définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ appelé *domaine de définition de* f et la donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ d'une unique image $y \in \mathbb{R}$. Le graphe de f est un ensemble de $\mathcal{D}_f \times \mathbb{R}$ et donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il y a au plus un élément par ligne verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$. La notation complète pour f sera du type

$$f \ : \ x \in \mathcal{D}_f \ \longmapsto f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad f \ : \ \begin{pmatrix} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} .$$

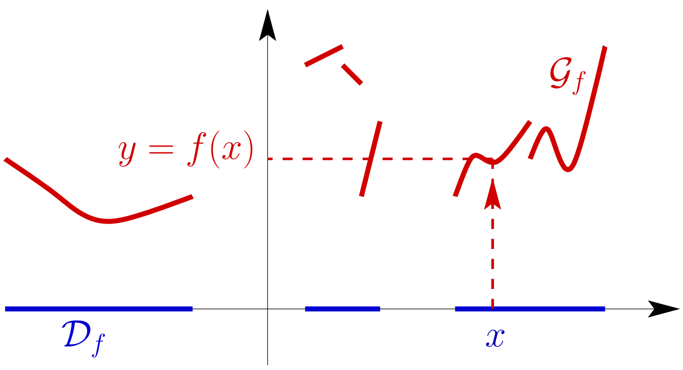


FIGURE 3.1 – *Le graphe $\mathcal{G}_f$ d'une fonction réelle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définissant la fonction. À tout point x de $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, on associe l'unique point $y = f(x)$ tel que (x,y) soit dans $\mathcal{G}_f$.*

Dans certains cours, il est fait une différence entre « fonction » et « application » suivant que l'on ne regarde la fonction que sur $\mathcal{D}_f$ ou sur $\mathbb{R}$ en autorisant un x à ne pas avoir d'image. Nous ne ferons pas cette distinction ici.

! Pour clarifier au maximum les raisonnements, on essayera au mieux de bien distinguer la fonction f de l'image $f(x)$ du point x. Par exemple, il est formellement incorrect de parler de « la fonction x^2 ». Il faudrait dire « la fonction $x \mapsto x^2$ ». On voit bien que la notation x^2 sous-entend qu'un certain x est déjà connu alors que dans la notation $x \mapsto x^2$, x est une variable muette et $t \mapsto t^2$ ou $\theta \mapsto \theta^2$ désigneraient la même fonction.

Exemples :

- f est donnée par n'importe quel procédé définissant une unique image pour x. Par exemple, $f(x)$ peut être un température au temps x en degrés Celsius, une altitude en fonction de la distance x, un nombre tiré au hasard par un jet de dé à chaque rationnel...

- l'image $f(x)$ est donnée par un calcul exact à partir de x, par exemple f est définie par $f(x) = x/(1+x^2)$.

- l'image $f(x)$ est associée à x par une certaine construction ou un algorithme de calcul. C'est le cas des fonctions usuelles comme la racine carrée, les sinus et cosinus etc. Par exemple la racine carrée est définie par $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$ et $y = \sqrt{x}$ est l'unique nombre positif tel que $y^2 = x$. On sait même calculer y avec une précision aussi bonne que voulue par la méthode de Héron. Mais $y = \sqrt{x}$ ne correspond pas à un calcul exact. Plusieurs fonctions de ce type sont utiles. On leur donne donc un nom et une notation et on a des moyens de calculer leur valeur de façon approchée. On les appelle *fonctions usuelles*, dont la liste peut dépendre des utilisation de chacun. Des rappels sur les fonctions usuelles de ce cours seront faits au chapitre suivant.

- l'image $f(x)$ est donnée par une formule combinant les opérations standards et les fonctions usuelles, comme $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(\cos x)$. Dans ce cas, on sous-entendra en général que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est le plus grand domaine pour lequel la formule a un sens. Il faudra donc chercher les problèmes, ce qui nous amènera aux questions :

  - si on divise par quelque chose, quand est-ce que ce quelque chose est nul ?
  - si on écrit $\sqrt{\text{truc}}$, est-ce que ce truc est bien positif ou nul ?
  - si on écrit $\ln(\text{machin})$, est-ce que ce machin est strictement positif ?

  En excluant toutes les situations problématiques, on obtient le domaine de définition de la formule et donc de f.

- l'image $f(x)$ est associée à x en recollant plusieurs formules ou constructions. On commence donc par l'instruction « si x est dans l'ensemble [...] alors [...], sinon, si x est dans... ».

- on a déjà vu l'exemple d'une suite (u_n) qui est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$ par $f : n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = u_n$.
- si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble de réels, on appelle *fonction caractéristique de* A la fonction χ_A définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon (χ étant la lettre grecque chi, il faut prononcer « ki de A »).

Les définitions suivantes sont sans surprise.

Définition 3.1

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $A \subset \mathcal{D}_f$ un sous-ensemble où f est définie. On dit que

- f est **croissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x \leq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **décroissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x \leq y \ \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x < y \ \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est **monotone** (resp. strictement monotone) sur A si elle est soit croissante sur A, soit décroissante sur A (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition 3.2

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $A \subset \mathcal{D}_f$ un sous-ensemble où f est définie. On dit que

- f est **majorée** sur A s'il existe un majorant $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur A s'il existe un minorant $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ f(x) \geq m$.
- f est **bornée** sur A si elle est majorée et minorée sur A.

Si f est majorée sur A non vide, on appelle **sup de f sur** A le nombre

$$\sup_A f := \sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x),\, x \in A\} \ .$$

Si f est minorée sur A non vide, on appelle **inf de f sur** A le nombre

$$\inf_A f := \inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x),\, x \in A\} \ .$$

Définition 3.3

L'**image** de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est $f(\mathcal{D}_f) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathcal{D}_f,\ y = f(x)\}$. Soit $B \subset \mathbb{R}$, l'**image réciproque** de B par f est $f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in B\}$.

Définition 3.4

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) en $x_0 \in A$ si $f(x_0)$ majore (resp. minore) f sur $\mathcal{D}_f$.
On dit que f atteint un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap \mathcal{D}_f$.

Définition 3.5

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (i.e. $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$). On dit que f est **paire** (resp. **impaire**) si $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Définition 3.6

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique de période** $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Définition 3.7

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ est

- **injective dans** A si pour tout $x \neq x'$ dans A, $f(x) \neq f(x')$.
- **surjective sur** B si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
- **bijective de** A **sur** B si f est injective et surjective.

Si f est bijective, alors la fonction $f^{-1} : B \to A$ qui a $y \in B$ associe $x = f^{-1}(y)$ l'unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$ est appelée la **réciproque** de f.

Définition 3.8

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$. On appelle **restriction de** f **à** $\mathcal{D}'$ et on note $f_{|\mathcal{D}'}$ la fonction $x \in \mathcal{D}' \longmapsto f(x)$.
Si $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle et $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une autre fonction telle que $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, alors on dit que $\tilde{f}$ est **un prolongement** ou **une extension** de f à $\mathcal{D}$.

Définition 3.9

Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si on suppose que l'image de g est incluse dans l'ensemble de définition de f, c'est-à-dire que $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$, alors on peut définir la **fonction composée** par $f \circ g \ : \ x \in \mathcal{D}_g \longmapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$.

On peut démontrer facilement un grand nombre de résultats découlant de ces définitions. Nous allons nous contenter d'exemples simples pour illustrer.

Proposition 3.10

La composée de fonctions croissantes est croissante.

Démonstration : Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes avec $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$. Soient x et y dans $\mathcal{D}_g$ avec $x \leq y$. Comme g est croissante, alors $a := g(x) \leq g(y) =: b$. Mais comme $a \leq b$ sont dans $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$ et que f est croissante, nous avons aussi $f(a) \leq f(b)$. On a bien montré que $f(g(x)) \leq f(g(y))$. $\square$

Attention au piège de la multiplication. À cause du potentiel renversement des inégalités par la multiplication par un nombre négatif, il est faux que le produit de fonctions croissantes est croissant. Par exemple $f : x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f^2 : x \mapsto x.x = x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ en entier (strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ puis strictement croissante sur $[0,+\infty[$).

Proposition 3.11

La somme de deux fonctions bornées est bornée.

Démonstration : Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Par définition, il existe M et M' tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \ , \ \ |f(x)| \leq M \qquad \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_g \ , \ \ |g(x)| \leq M' \ .$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ le domaine sur lequel les deux fonctions sont définies et donc sur lequel la somme a un sens. On a pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$$

ce qui montre que $f + g$ est bornée sur $\mathcal{D}$ par $M + M'$. $\square$

2 Limites

La définition de la limite dans le cas des fonctions suit exactement les mêmes principes que dans le cas des suites. Il y a beaucoup de cas différents donc plutôt que de les apprendre tous par cœur, l'important est de comprendre comment ils sont construits. Rappelons que :

- les voisinages d'un point $x \in \mathbb{R}$ sont du type $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$,
- les voisinages de $+\infty$ sont du type $]M,+\infty[$,
- les voisinages de $-\infty$ sont du type $]-\infty, M[$.

On peut retenir le principe général :

La définition de
« *$f(x)$ tend vers $\ell \in [-\infty,+\infty]$ quand x tend vers $\ell' \in [-\infty,+\infty]$* »
s'écrit
« *pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' tel que $f(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}$* »
ce qui peut se comprendre comme
« *si x est suffisamment proche de ℓ', alors $f(x)$ reste aussi proche de ℓ que voulu* ».

On peut ainsi écrire les définitions suivantes.

Définition 3.12 (limites en $+\infty$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie près de $+\infty$, c'est-à-dire que pour tout $x_0 > 0$, $[x_0,+\infty[\cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in [x_0,+\infty[\cap \mathcal{D}_f \ , \ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} \ell$.
- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in [x_0,+\infty[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \geq M \ .$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in [x_0,+\infty[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \leq M \ .$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} -\infty$.

Ces définitions sont un peu lourdes pour pouvoir inclure le cas où f n'est pas définie partout, ni même dans un voisinage de $+\infty$. Par exemple, on notera que si f est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, alors la notion de limite de f en $+\infty$ retombe bien sur la notion de limite pour la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. C'est naturel puisqu'une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Quand la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$, on peut plus simplement remplacer la partie « $\forall x \in [x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ » par « $\forall x \geq x_0$ ».

De façon symétrique on écrit les limites en $-\infty$. On ne mentionne plus les notations qui sont évidemment celles qu'on imagine.

Définition 3.13 (limites en $-\infty$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie près de $-\infty$, c'est-à-dire que pour tout $x_0 < 0$, $]-\infty,x_0] \cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty,x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty,x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \geq M \ .$$

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty,x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \leq M \ .$$

Une nouveauté par rapport aux suites est qu'on est aussi intéressé par les limites en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Encore une fois, on inclut le cas où f n'est pas forcément définie partout autour du point x_0. C'est particulièrement intéressant ici car cela permet par exemple de regarder des limites en 0 de fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou sur un intervalle du type $]0,1]$.

Définition 3.14 (limites en $x_0 \in \mathbb{R}$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie autour de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

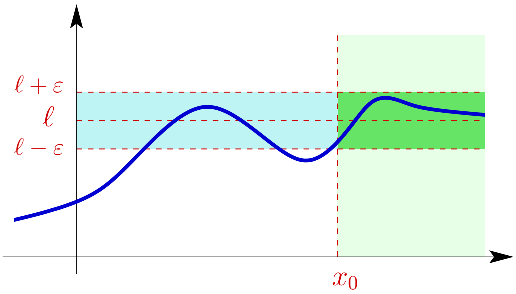
$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \geq M \ .$$

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \leq M \ .$$



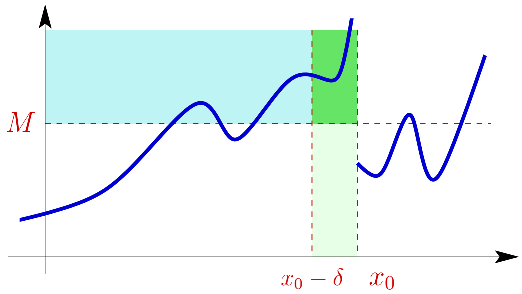


FIGURE 3.2 – *À gauche un exemple où $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point x_0 à partir duquel, pour $x \geq x_0$, $f(x)$ est toujours dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$. À droite un exemple où $f(x) \to +\infty$ quand $x \to x_0^-$: pour tout $M > 0$, il existe un intervalle $]x_0-\delta,x_0[$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta,x_0[$, $f(x)$ est toujours plus grand que M.*

On peut aussi regarder le comportement de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par la droite ou par la gauche. Pour éviter de mettre encore 6 cas différents, nous allons nous limiter aux limites finies (sans compter qu'on peut inclure aussi le fait que ℓ est approchée par la droite ou la gauche).

Définition 3.15 (limites à gauche et à droite)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si f est définie à droite de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0,x_0+\delta[\cap\mathcal{D}_f$ est non vide, alors on dit que f vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à droite si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x \in]x_0,x_0+\delta[\cap\mathcal{D}_f \ , \ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0^+]{} \ell$.

Si f est définie à gauche de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0-\delta,x_0[\cap\mathcal{D}_f$ est non vide, alors on dit que f vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à gauche si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x \in]x_0-\delta,x_0[\cap\mathcal{D}_f \ , \ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0^-]{} \ell$.

Si on regarde par exemple la limite à droite en 0 d'une fonction définie seulement sur $]0,+\infty[$, la définition de la limite à droite coïncide avec la définition de la limite tout court ci-dessus et on ne précisera pas forcément que la limite ne se fait qu'à droite de 0.

Les règles algébriques pour calculer les limites (sommes, produits…) et les propriétés basiques de la convergence (« croissante majorée converge »…) sont mutatis mutandis les mêmes que pour les suites. Il serait trop laborieux d'énoncer tous les cas ici. Un bon exercice est d'en énoncer et d'en démontrer un certain nombre tirés au hasard comme les exemples suivants.

Proposition 3.16

Si f et g sont deux fonctions définies de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}\ ,$$

alors

$$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} +\infty\ .$$

Démonstration : Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme g tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ à droite de 0, il existe $\delta' > 0$ tel que $|g(x)-\ell| < 1$ pour tout $x \in]0,\delta'[$ et en particulier $g(x) \geq \ell - 1$ sur $]0,\delta'[$. Comme f tend vers $+\infty$ à droite de 0, il existe $\delta'' > 0$ tel que $f(x) \geq M - \ell + 1$ pour tout $x \in]0,\delta''[$. On pose $\delta = \min(\delta',\delta'')$, de telle sorte que nos estimations sont valables sur $]0,\delta[$. On a alors que pour tout $x \in]0,\delta[$, $f(x)+g(x) \geq M-\ell+1+\ell-1 = M$. Ceci montre bien que $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$ à droite de 0. $\square$

Proposition 3.17

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et minorée. Alors $f(x)$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$.

Démonstration : Comme f est minorée, son image $\{f(x), x \geq 0\}$ est non vide et minorée et admet donc une borne inférieure $\ell := \inf_{x\geq 0} f(x)$. Comme ℓ est un minorant de l'image de f, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell + \varepsilon$ n'est plus un minorant de l'image de f, il existe $x_0 \geq 0$ tel que $f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Mais comme f est décroissante, on a $f(x) < \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$. Au total, on a $\ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$, ce qui montre que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$. $\square$

Exemple :

On considère les étirements $y(t)$ d'un ressort de raideur k qui est soumis à un frottement d'intensité γ. La longueur $y(t)$ est solution de l'équation différentielle $my''(t)+\gamma y'(t) = -ky(t)$. Si on considère l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}(m|y'(t)|^2 + k|y(t)|^2)$, on a $E'(t) = my'(t)y''(t)+ky(t)y'(t) = -\gamma|y'(t)|^2 \leq 0$. Donc $E(t)$ est décroissante (nous anticipons sur le paragraphe concernant la dérivation) et clairement positive, donc $E(t)$ admet une limite finie positive quand $t \to +\infty$. Ceci est la première étape pour montrer que l'énergie se dissipe jusqu'à ce que le ressort revienne à l'équilibre.

Par rapport aux suites, il y a un cas que l'on peut mettre en avant qui est celui de la composition. Là encore, on n'énonce qu'un seul cas possible mais il y a plusieurs autres situations qui donnent un résultat analogue (limites infinies, limites aux bords gauche ou droit des intervalles...).

Proposition 3.18

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$ et supposons que $g(x) \to y_0 \in J$ quand $x \to x_0$ et que $f(y) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $y \to y_0$. Alors la fonction composée $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ est bien définie et $(f \circ g)(x) \to \ell$ quand $x \to x_0$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(y) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $y \to y_0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in J$ avec $|y - y_0| < \delta$, $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. Mais comme $g(x) \to y_0$ quand $x \to x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$, $|g(x) - y_0| < \delta$. Donc pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$, $y = g(x)$ est tel que $|y - y_0| < \delta$ et donc $|f(y) - \ell| = |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

3 Continuité

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Pour les fonctions réelles, il y a plusieurs façons équivalentes de définir la continuité. On peut donc en choisir une comme définition de base et les autres comme caractérisations équivalentes. Nous allons faire le choix classique de prendre au départ la définition qui est celle qui est la plus facilement généralisable à des espaces plus complexes que $\mathbb{R}$.

Définition 3.19

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est **continue en** $x_* \in \mathcal{D}_f$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \mathcal{D}_f \ , \ |x - x_*| < \delta \implies |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon \ .$$

On dit que f est **continue sur un ensemble** $E \subset \mathcal{D}_f$ si f est continue en tout point de E.
On note $\mathcal{C}^0(E,F)$ l'ensemble des fonctions continues sur $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$.

Exemples :

- Là où elles sont définies, les fonctions usuelles sont continues, sauf la partie entière. Donc toute fonction définie par une formule sera continue là où la formule fait sens (sauf dans le cas rare où la partie entière entre en jeu).
- Beaucoup de grandeurs physiques sont en général considérées comme continues, comme la température, la position, la vitesse... Si bien qu'on pourrait penser qu'il n'y a pas à s'embêter avec les fonctions discontinues. Mais dans

beaucoup de modèles, il est intéressant de prendre des fonctions discontinues. Par exemple, si on modélise un circuit électronique dont on allume le courant avec un interrupteur au temps $t = 0$, il est plus simple de penser que l'intensité est la fonction I définie par $I(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $I(t) = 1$ si $t > 0$ qui est discontinue en 0. En effet, même si la vraie intensité est possiblement continue à cause d'un passage de courant progressif quand l'interrupteur se ferme, cela est trop compliqué à modéliser et il est très probablement non pertinent de s'embêter avec cela. On préférera donc une fonction discontinue. De la même façon, si on regarde une bille qui fait un rebond parfait sur un mur, on supposera le choc élastique. Si la position varie continûment par rapport au temps, sa vitesse sera réfléchie instantanément lors du rebond et ne sera pas continue. Là encore, si on regarde tout en détail, le changement n'est pas immédiat, mais alors la conservation du moment cinétique obligerait à prendre en compte les déformations du mur, ce qui est trop difficile à faire.

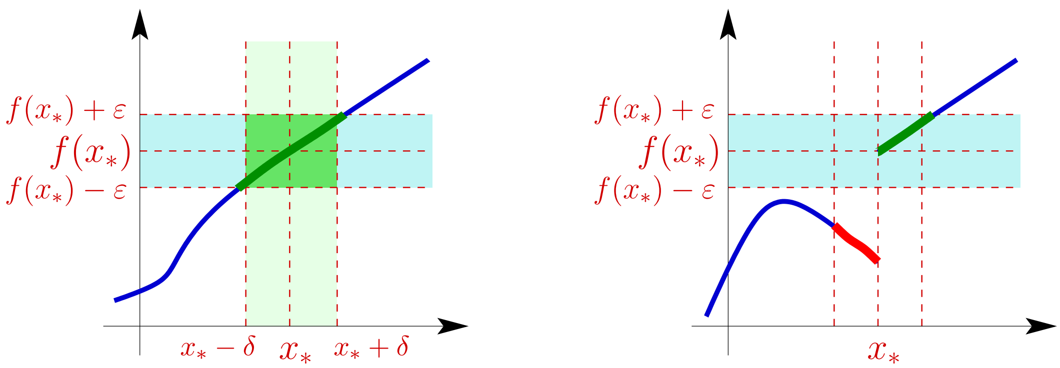


FIGURE 3.3 – *À gauche, une fonction continue en x_* : pour tout écart $\varepsilon > 0$, on peut trouver un petit intervalle $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ autour de x_* dont l'image reste à distance moins de ε de $f(x_*)$. À droite, la fonction n'est pas continue en x_* : quand $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, il y a toujours des points aussi proches que l'on veut de x_* dont l'image est plus loin que ε de $f(x_*)$.*

On pourra utiliser à tout moment les caractérisations équivalentes suivantes.

Théorème 3.20 (critères équivalents pour la continuité)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_* \in \mathcal{D}_f$. Les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est continue en x_*, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in \mathcal{D}_f$ vérifie $|x - x_*| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$,

ii) pour toute suite $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ qui tend vers x_*, $f(x_n)$ tend vers $f(x_*)$,

iii) les limites à gauche et à droite de f en x_* existent, sont finies et égales à la valeur de f en x_*, c'est-à-dire, si ces limites ont un sens,

$$\lim_{x \to x_*^-} f(x) = \lim_{x \to x_*^+} f(x) = f(x_*) .$$

Démonstration : Nous allons procéder par une boucle d'implications.

Commençons par supposer que i) est vérifiée. Soit une suite (x_n) tendant vers x_* et soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$ alors $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$. Comme (x_n) tend vers x_*, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_*| < \delta$ pour $n \geq N$. Donc pour $n \geq N$, $|f(x_n) - f(x_*)| < \varepsilon$ et donc ii) est vérifiée.

Montrons que ii) implique iii) par contraposée. Imaginons que la limite à droite de f en x_* n'existe pas ou bien est différente de $f(x_*)$, c'est-à-dire que la phrase

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x \in]x_*, x_* + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ \ |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$$

est fausse. On a donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0 \ , \ \ \exists x \in]x_*, x_* + \delta[\ , \ \ |f(x) - f(x_*)| \geq \varepsilon \tag{3.1}$$

En appliquant (3.1) à $\delta = 1$, on trouve un point x_1 dans $]x_*, x_* + 1[$ tel que $|f(x_1) - f(x_*)| \geq \varepsilon$. Puis en appliquant (3.1) à $\delta = 1/2$, on trouve un point x_2 dans $]x_*, x_* + 1/2[$ tel que $|f(x_2) - f(x_*)| \geq \varepsilon$ et on recommence ainsi : pour $\delta = 1/n$, on trouve un point x_n dans $]x_*, x_* + 1/n[$ tel que $|f(x_n) - f(x_*)| \geq \varepsilon$. On a ainsi une suite (x_n) qui tend vers x_* et telle que $f(x_n)$ reste à distance plus grande que $\varepsilon > 0$ de $f(x_*)$. Ceci contredit ii). La démonstration est similaire si le problème vient de la limite à gauche.

Supposons finalement que iii) est vraie. Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après les définitions des limites à gauche et à droite, il existe δ_+ et $\delta_- > 0$ tels que pour tout $x \in]x_* - \delta_-, x_*[$ et pour tout $x \in]x_*, x_* + \delta_+[$, $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$. On pose $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$, on a donc $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$ pour tout $x \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$ (le cas $x = x_*$ s'incluant de façon triviale). □

D'après les caractérisations précédentes, la continuité d'une fonction peut se vérifier à l'aide de limites de suites. De ce fait, les règles sur les limites nous permettent d'obtenir des règles sur la continuité sans efforts supplémentaires.

Proposition 3.21 (opérations sur la continuité)

Soient f et g deux fonctions réelles continues en un point $x_* \in \mathbb{R}$. Alors,

- si λ et μ sont deux réels, la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est continue en x_*,
- le produit fg est continu en x_*,
- si $g(x_*) \neq 0$, alors le quotient f/g est continu en x_*.

Démonstration : Si (x_n) est une suite convergeant vers x_*, alors par hypothèse $f(x_n) \to f(x_*)$ et $g(x_n) \to g(x_*)$. On sait que, pour les suites, la limite de la somme est la somme des limites et la multiplication par des scalaires commute avec les limites. Donc $\lambda f(x_n)+\mu g(x_n) \to \lambda f(x_*)+\mu g(x_*)$, ce qui montre que $\lambda f + \mu g$ est continue en x_*. Les autres démonstrations sont similaires. □

Proposition 3.22 (composée de fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions réelles. On suppose que g est continue en x_* et f est continue en $g(x_*)$. Alors $f \circ g$ est continue en x_*.

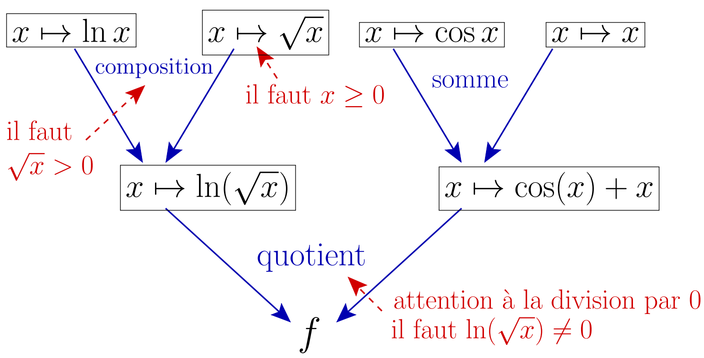
Démonstration : Si $x_n \to x_*$, alors, comme g est continue en x_*, $y_n := g(x_n) \to g(x_*)$. Mais comme f continue en $g(x_*)$ et que $y_n \to g(x_*)$, on a $f(y_n) \to f(g(y_*))$, c'est-à-dire que $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(x_*)$. □

Exemple :

On utilisera souvent une phrase comme « la fonction est continue comme composée, somme et produit de fonctions continues ». Regardons très précisément un exemple pour comprendre le mécanisme (on pourra aller bien plus vite avec l'habitude). On considère la fonction f donnée par la formule

$$f(x) = \frac{\cos(x)+x}{\ln(\sqrt{x})}$$

On doit détailler la construction de cette formule pour savoir où elle est définie et continue.



À chaque fonction ou opération, on fait la liste de ce qu'il faut vérifier. Les points d'attention concernent la racine carrée, le log et les quotients. On liste les problèmes à chaque étape en faisant bien attention à ce qui apparaît dans la condition. Par exemple, le quotient de notre exemple ne demande pas que l'on vérifie $x \neq 0$ mais $\ln(\sqrt{x}) \neq 0$ car c'est par ce nombre qu'on divise. On regroupe ensuite toutes les conditions. Dans notre exemple, la racine carrée demande que $x \geq 0$, puis la composition avec le log que $\sqrt{x} > 0$, ce qui revient à $x > 0$. Enfin, il faut $\ln(\sqrt{x}) \neq 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} \neq 1$ et donc $x \neq 1$. Notre fonction est donc bien définie sur

$$\mathcal{D}_f \ = \ ]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[\ .$$

Par ailleurs, les fonctions impliquées sont continues et les théorèmes précédents nous montre que la construction de la formule garde cette propriété tant que la formule fait sens. Donc f est bien continue sur $\mathcal{D}_f$. Encore une fois, rappelons que la fonction *partie entière* est la seule fonction usuelle non continue.

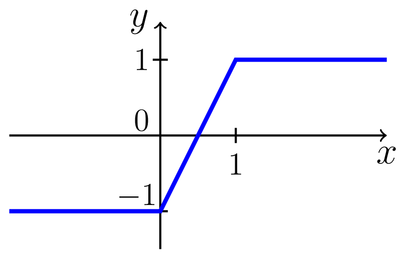
3.2 Raccords et prolongements

Une conséquence utile de la caractérisation de la continuité par les limites à gauche et à droite est le principe de raccord. Soit f une fonction définie sur plusieurs intervalles, disons $[a,b]$ et $]b,c]$ pour fixer les notations, par une formule $f(x) = f_1(x)$ sur $[a,b]$ et une autre formule $f(x) = f_2(x)$ sur $]b,c]$. Si ces formules définissent des fonctions continues sur $[a,b]$ et $]b,c]$, alors f est continue sur $[a,c]$ tout entier si et seulement si $\lim_{x\to b^+} f_2(x) = f_1(b)$. Quand la formule f_2 est même définie et continue en b, cela revient juste à vérifier que $f_1(b) = f_2(b)$.

Exemple :

On souhaite créer une fonction continue faisant une transition entre -1 et 1. Plus précisément, on souhaite avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) = -1$ pour tout $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 1$. Une façon simple de faire est de connecter les deux morceaux par une fonction affine $h(x) = ax + b$ sur $]0,1[$. Pour obtenir une fonction continue, il faut et il suffit que $h(0) = b = -1$ et que $h(1) = a + b = 1$. On trouve donc une fonction f continue décrite par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



La caractérisation de la continuité d'un raccord donne très facilement le résultat suivant.

Proposition 3.23

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie par $f(x) = x$ sur $[0,+\infty[$, qui est clairement continue. De même, la formule $f(x) = -x$ est celle d'une fonction continue sur $]-\infty,0[$. Pour que f soit continue sur tout $\mathbb{R}$, il faut vérifier le raccord en $x = 0$, qui donne bien $0 = -0$. $\square$

Corollaire 3.24

Soit f une fonction continue de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ définie par $x \in E \mapsto |f(x)|$ est aussi continue sur E.
Si f et g sont deux fonctions continues de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $x \in E \mapsto \max(f(x),g(x))$ et $x \in E \mapsto \min(f(x),g(x))$ sont aussi continues sur E.

Démonstration : La fonction $x \in E \mapsto |f(x)|$ est continue comme composée des fonctions f et $y \mapsto |y|$ qui sont continues. Les max et min de deux fonctions sont donc continus car

$$\max(f(x),g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

et

$$\min(f(x),g(x)) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

sont des composées et combinaisons linéaires de fonctions continues. □

Une autre application des caractérisations de la continuité par les limites est celle du *prolongement par continuité*.

Définition 3.25

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Supposons qu'il existe un domaine plus grand $F \supset E$ tel que, pour tout $x \in F \setminus E$, la limite de f en x est bien définie, existe et est finie. Alors le prolongement $\tilde{f} : F \to \mathbb{R}$ défini par $\tilde{f}(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ est une fonction continue appelée **prolongement par continuité de f sur F**.

Remarquons que, si f est bien continue sur E, alors $\tilde{f}(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ vaut $f(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $\tilde{f}$ prolonge bien f. Par ailleurs, la définition par la limite implique la continuité de f. Ce n'est pas si trivial si $F \setminus E$ est compliqué, mais en pratique nous ne prolongerons que sur un point ou au pire sur un nombre fini de points.

Notons aussi que si la limite $\lim_{t \to x} f(t)$ n'a pas de sens ou vaut $\pm\infty$, alors la caractérisation de la continuité par les limites implique qu'on ne peut créer de prolongement continu.

Exemples :

- On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = e^{-1/x^2}$. Comme on ne peut pas diviser par 0, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais si $x \to 0$, $1/x^2 \to +\infty$ et donc $f(x) \to 0$. On peut donc prolonger f par continuité en $x = 0$ en posant

  $$\tilde{f}(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{f}(0) = 0 \ .$$

  La fonction $\tilde{f}$ est maintenant définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

- On considère la fonction g définie par la formule $g(x) = x/|x|$. Là encore, la division par 0 conduit à ne définir g que sur $\mathbb{R}^*$ a priori. On peut chercher à la prolonger en 0. Mais si $x < 0$, $g(x) = -1$ et si $x > 0$, $g(x) = 1$. Les limites à gauche et à droite ne peuvent être égales et donc on ne pourra jamais trouver un prolongement continu de g. Éventuellement, on peut décider de poser $\tilde{g}(0) = 0$ pour respecter la symétrie impaire, mais le résultat n'est pas continu.

3.3 Deux théorèmes fondamentaux

Le théorème des valeurs intermédiaires correspond à l'idée simple de la continuité comme « le tracé sans lever le crayon ». Dans ce sens, il peut paraitre simpliste mais c'est un théorème fondamental qui est plus profond qu'il paraît.

Théorème 3.26 (Théorème des valeurs intermédiaires dit T.V.I.)

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$. Soit y une valeur strictement comprise entre les images de a et b, c'est-à-dire que soit $f(a) < y < f(b)$, soit $f(b) < y < f(a)$. Alors, il existe $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration : La fonction $g : x \mapsto f(x) - y$ est aussi continue sur $[a,b]$. Le problème revient alors à trouver un point $x \in [a,b]$ où g s'annule en sachant que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés.
On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Soit $m_0 = (a+b)/2$ le milieu du segment. Comme $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés, on a soit que $g(m_0)$ est du même signe que $g(u_0) = g(a)$ et on pose alors $u_1 = m_0$ et $v_1 = b$, soit $g(m_0)$ est du même signe que $g(b)$ est on pose alors $u_1 = a$ et $v_1 = m_0$. Puis on reprend $m_1 = (u_1+v_1)/2$ le milieu du nouveau segment. Si $g(m_1) = 0$, on a trouvé notre x tel que $g(x) = 0$ et on peut s'arrêter. Si $g(m_1)$ est du même signe que $g(u_1)$ et on pose alors $u_2 = m_1$ et $v_2 = v_1$, si $g(m_1)$ est du même signe que $g(v_1)$ on pose alors $u_2 = u_1$ et $v_2 = m_1 \ldots$ On continue ainsi en coupant chaque segment en deux et en gardant le morceaux pour lequel les images des bords sont de signes opposés. Soit le processus s'arrête car on a trouvé un point x où g s'annule, soit il se poursuit infiniment. Mais dans ce dernier cas, cela nous construit deux suites (u_n) et (v_n) qui sont par construction adjacentes car (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $|u_n - v_n|$ est la taille de l'intervalle à l'étape n qui vaut $2^{-n}(b-a)$. Donc (u_n) et (v_n) convergent vers un même limite x. Comme $a = u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 = b$, $x \in [a,b]$. Par ailleurs, $g(u_n)$ et $g(v_n)$ sont de signe opposés. Comme g est continue, $g(u_n)$ converge vers $g(x)$ et $g(x)$ est du même signe que $g(u_n)$ au sens large. Mais de même, $g(x)$ est du même signe que $g(v_n)$ au sens large. Le seul nombre que a les deux signes au sens large est $y = 0$. Donc $g(x) = y$ et on a trouvé le point cherché.
Il reste juste à remarquer que x n'est pas seulement dans $[a,b]$ mais en fait dans $]a,b[$. En effet, $g(a)$ et $g(b)$ sont supposés non nuls, donc x ne peut être ni a, ni b. □

Exemples :

- Soit $P : x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ un polynôme de degré 3, c'est-à-dire que $a \neq 0$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Supposons $a > 0$. Quand x tend vers $+\infty$, $P(x)$ tend vers $+\infty$ donc pour x assez grand $P(x) > 0$: il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(b) > 0$. Quand x tend vers $-\infty$, $P(x)$ tend vers $-\infty$ donc il existe a assez négatif pour que $P(a) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $P(x) = 0$. Le cas $a < 0$ est symétrique. On obtient donc le résultat que tout polynôme réel de degré 3 admet au moins une racine réelle. Notons qu'il existe des polynômes de degré 2 sans racines réelles (comme $P(x) = x^2 + 1$).

- Soit $d(t)$ la distance d'un solide à un point de référence, il est naturel de considérer $d(t)$ comme une fonction continue du temps. Si à $t = 0$ le solide était sur le point de référence et si à $t = T > 0$, il était à distance $d(T) = 100\,\mathrm{m}$, alors à un moment entre 0 et T, il a été à distance $d(t) = 10\,\mathrm{m}$.

- Un récipient contient une quantité de liquide que l'on vide progressivement dans un autre récipient qui était vide au départ. Il existe un moment où les deux récipients contiennent exactement le même volume de liquide. En effet, si $V(t)$ est la quantité de liquide dans le récipient d'origine, alors on a au départ $V(0) > 0$ et à la fin $V(T) = 0$. Comme $V(t)$ est naturellement une quantité physique continue, il existe un temps $t \in]0,T[$ tel que $V(t) = V(0)/2$.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ n'est pas continue en $x = 0$. Les valeurs entre $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$ ne sont pas prises par la fonction. Celle-ci ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

- Une bille de vitesse $V > 0$ subit un choc élastique contre un mur et rebondit en repartant à vitesse $-V < 0$. Pourtant la bille n'a jamais été au repos car son énergie cinétique étant conservée, elle vaut toujours $\frac{1}{2}mV^2 \neq 0$. C'est parce que dans cette modélisation, la vitesse passe brutalement de V à $-V$: elle est discontinue et ne vérifie pas forcément le T.V.I.

Le deuxième résultat théorique important concernant la continuité est lié à ce qu'on appelle la compacité. Il permet non seulement de borner une fonction mais il garantit l'existence d'extrema. On lui associe parfois le nom de Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne).

Théorème 3.27 (théorème des valeurs extrêmes)

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. Autrement dit, il existe $x_{\max}$ et $x_{\min}$ tels que

$$f(x_{\max}) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_{\min}) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \;.$$

Démonstration : On va montrer que f est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum. Le cas du minimum est symétrique.
Supposons que f ne soit pas majorée sur $[a,b]$, alors par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geq n$ et en particulier $f(x_n) \to +\infty$. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass (corollaire 2.32 du chapitre précédent), on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. On a que $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$ car c'est une sous-suite

de $f(x_n)$ mais aussi que $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(\ell)$ par continuité de f. Comme $f(\ell)$ est un nombre fini, c'est contradictoire et donc f est majorée sur $[a,b]$.
On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - 2^{-n}$ n'est plus un majorant et il existe donc $x_n \in [a,b]$ tel que $M - 2^{-n} < f(x_n) \leq M$. Donc $f(x_n)$ tend vers M. Mais comme précédemment, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $x_{\max} \in [a,b]$. Et par continuité $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(x_{\max})$. Donc $f(x_{\max}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ est le maximum cherché. $\square$

! Comme on le voit dans les exemples ci-dessous, il est important que f soit continue mais aussi que $[a,b] \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle fermé et borné, c'est-à-dire qu'il inclut ses bornes a et b qui sont des réels (finis).

Exemples :

- Soit $d(t)$ la distance d'un solide à un point de référence, il est naturel de considérer $d(t)$ comme une fonction continue du temps. Pendant un intervalle de temps $[0,T]$, le solide s'est éloigné au maximum d'une distance D et il existe un temps $t_0 \in [0,T]$ où il était pile à distance D.
- La fonction $f : x \mapsto x$ est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas majorée dessus. On ne peut pas appliquer le théorème précédent car $[0,+\infty[$ n'est pas un intervalle borné.
- La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée dessus. On ne peut pas appliquer le théorème précédent car $]0,1]$ n'est pas un intervalle fermé.
- La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \in]0,1]$ n'est pas majorée sur $[0,1]$. Même si $[0,1]$ est fermé et borné, on ne peut pas appliquer le théorème précédent car f n'est pas continue.

En rassemblant les deux énoncés de cette partie, on obtient ce qu'on pourra appeler dans les prochaines années d'études « l'image d'un intervalle compact est un intervalle compact ».

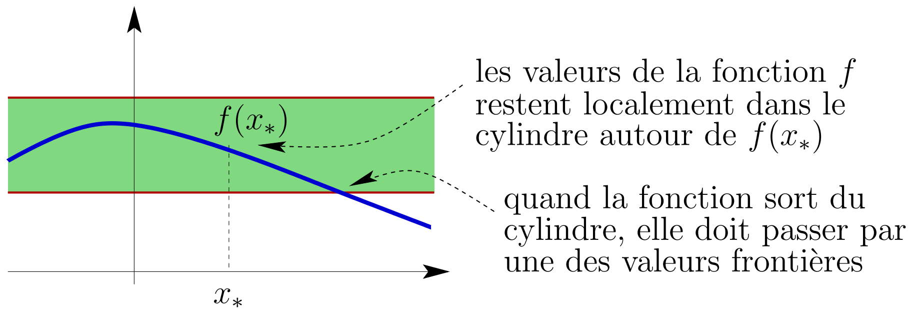
Corollaire 3.28

L'image d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.

Démonstration : Le théorème 3.27 nous dit que l'image par f continue d'un intervalle $[a,b]$ est bornée et que les bornes sont atteintes. Donc $\alpha = \min_{[a,b]} f$ et $\beta = \max_{[a,b]} f$ sont dans l'image de f, atteints aux points $x_{\min}$ et $x_{\max}$ respectivement. Par définition de ces extrema, l'image de f est incluse dans $[\alpha,\beta]$. Mais le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur l'intervalle $[x_{\min},x_{\max}]$ (ou $[x_{\max},x_{\min}]$) nous dit que toutes les valeurs de $[\alpha,\beta]$ sont atteintes. $\square$

3.4 Quelques applications

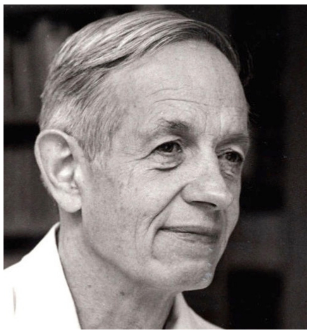
• **Cylindre de contrôle :** soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_* \in I$. Pour toutes valeurs α et β telles que $\alpha < f(x_*) < \beta$, la définition de la continuité implique qu'il existe un petit intervalle $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ tel que $\alpha < f(x) < \beta$ reste vérifié pour $x \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$. Mieux, grâce aux valeurs intermédiaires, si f est continue sur tout un intervalle I, alors $f(x)$ ne peut s'échapper de l'intervalle $]\alpha,\beta[$ qu'en passant par un des bords α ou β. Par exemple, si f est continue et $f(x_*) > 0$, alors on est certain que f reste positive sur un petit intervalle autour de x_*. Par ailleurs, si elle devient négative, c'est qu'elle est passée par la valeur $f(x) = 0$.



• **Méthode de dichotomie :** si on regarde bien la preuve du théorème des valeurs intermédiaires, elle fournit une méthode simple, constructive et explicite pour chercher les zéros d'une fonction continue, c'est-à-dire pour trouver une solution à une équation $f(x) = 0$. Supposons que f soit continue sur un intervalle $[a,b]$ et que l'on sache que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Alors on coupe l'intervalle $[a,b]$ en deux et on garde l'intervalle où f admet des valeurs de signes opposés au bord. Puis on recoupe cette intervalle en deux etc. On sait par le T.V.I. qu'il existe bien une solution de $f(x) = 0$ dans chacun des intervalles et plus on avance, plus ces intervalles sont petits et plus on obtient une bonne approximation de cette solution. Attention toutefois que cette méthode ne garantit pas de trouver toutes les solutions même si elle permet d'en trouver au moins une. L'algorithme est schématiquement :

```
Tant que (a-b)/2 > précision faire boucle
       pose m=(a+b)/2
       si f(a)f(m)<0
             alors pose b=m
             sinon pose a=m
       fin si
fin boucle
Écrit "la solution vaut" (a+b)/2 "avec la précision ±" précision
```

• **Un théorème de point fixe :** les points fixes d'une fonction f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = x$, jouent un rôle important dans beaucoup de théories et applications. Par exemple, leur interprétation en tant qu'équilibres d'une dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ se retrouve en théorie des jeux et donc en économie. En se limitant aux fonctions à une seule variable réelle, cela revient souvent à prendre des modèles simplistes, mais essayons d'en comprendre le principe général. Imaginons un agent économique qui peut produire une quantité x de biens et en tirer un profit $h(x,y)$ qui dépend de sa production x et de l'état du marché y. Il va tenter de maximiser ses gains et donc produire la quantité x_* telle que $h(x_*,y) = \max_x h(x,y)$. On peut supposer que x_* dépend continûment de l'état du marché y. Mais l'état du marché dépend aussi de la production x de l'agent (une surproduction peut baisser les prix etc.), c'est donc aussi une fonction continue $y(x)$. L'agent ne sera satisfait que si sa production est celle lui apportant le gain maximum dans l'état du marché, c'est-à-dire si $x_* = h(x_*,y(x_*))$. On est amené à chercher un point fixe de la fonction $f : x_* \mapsto \max_x h(x,y(x_*))$. C'est un *équilibre de Nash* du nom du mathématicien John Nash, lauréat du prix dit Nobel d'économie et du prix Abel.



John Nash
1928-2015
États-Unis

Théorème 3.29

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$ une fonction continue envoyant $[a,b]$ sur lui-même. Alors f a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_* \in [a,b]$ tel que $f(x_*) = x_*$.

Démonstration : Si $f(a) = a$, c'est gagné, donc supposons que l'on a $f(a) \neq a$, ce qui implique $f(a) > a$ car $f(a) \in [a,b]$. De même, si $f(b) = b$, c'est gagné, donc supposons que l'on a $f(b) \neq b$, ce qui implique $f(b) < b$. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues. Par ailleurs, les hypothèses ci-dessus nous donnent que $g(a) = f(a) - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b < 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on voit qu'il existe $x_* \in]a,b[$ tel que $g(x_*) = 0$. Mais cela veut dire que $f(x_*) - x_* = 0$ et donc x_* est un point fixe de f. □

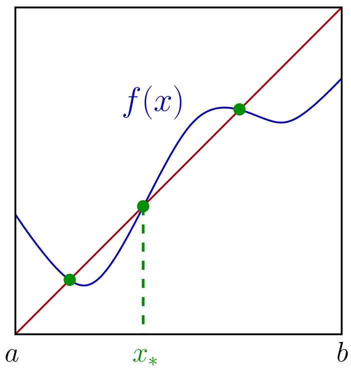
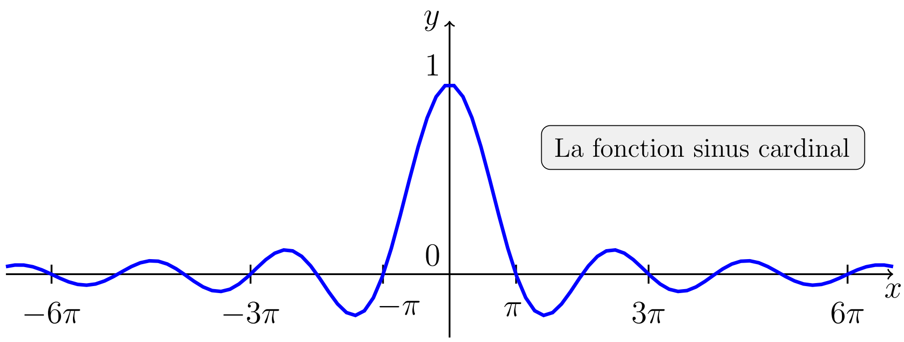


Figure 3.4 – *Une illustration du théorème 3.29 : le graphe de la fonction continue f doit forcément intersecter la droite $y = x$ et donc f a forcément au moins un point fixe (ici elle en a trois).*

• **Le sinus cardinal :** en physique ondulatoire et en théorie du signal, la fonction $x \mapsto (\sin x)/x$ apparaît très fréquemment. Une des raisons est qu'elle est liée aux filtres passe-bas c'est-à-dire au fait de tronquer les hautes fréquences dans une onde, par exemple pour ne garder que les fréquences audibles principales d'un signal sonore. Elle peut être considérée comme suffisamment usuelle pour avoir un nom : on l'appelle *sinus cardinal* et on la note sinc. Pour $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto (\sin x)/x$ est bien définie et est continue. Le problème, c'est qu'elle n'est pas définie en $x = 0$ à cause de la division par x. Mais comme $\sin x$ est équivalent à x quand x tend vers 0, on obtient facilement que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. On peut donc prolonger la fonction par continuité en $x = 0$. C'est en fait ce prolongement qui est appelé sinus cardinal. On pose donc

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on obtient une fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$.



• **Le minimum d'un puits de potentiel :** on considère un potentiel continu $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = +\infty$. Cela veut dire que ce potentiel est un *potentiel puits* qui a tendance à ramener notre système vers une zone bornée. Par les résultats ci-dessus, nous pouvons montrer que V admet un minimum global, c'est-à-dire un point x_* où l'énergie potentielle est la plus petite possible et donc pour lequel, un système dans cet état x_* resterait stable proche de cette énergie minimale. En effet, soit $M = V(0) + 1$. Comme $\lim_{x\to-\infty} V(x) = +\infty$, il existe x_- tel que si $x \leq x_-$ alors $V(x) \geq M$. De même, comme $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$, il existe x_+ tel que si $x \geq x_+$ alors $V(x) \geq M$. Donc pour tout x en dehors de $[x_-,x_+]$, $V(x)$ est minoré par $V(0) + 1$, et en particulier $0 \in [x_-,x_+]$ puisque $V(0) < V(0) + 1$. Par ailleurs, comme V est continue sur l'intervalle fermé borné $[x_-,x_+]$, V y est minoré et atteint son minimum en un point x_*. On a donc que pour tout $x \in [x_-,x_+]$, $V(x) \geq V(x_*)$. Mais comme $0 \in [x_-,x_+]$, pour tout $x \notin [x_-,x_+]$, $V(x) \geq V(0) + 1 > V(0) \geq V(x_*)$. Au total, on a bien que $V(x) \geq V(x_*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et V admet un minimum global en x_*.

4 Dérivation

4.1 Définition et propriétés élémentaires

Si $d(t)$ est la distance parcouru par un véhicule au cours du temps, alors entre les temps a et b, le véhicule a parcouru $d(b) - d(a)$. Sa vitesse moyenne est donc

$(d(b) - d(a))/(b - a)$. L'idée de la dérivée est simplement d'aller chercher la vitesse instantanée en faisant tendre b vers a.

Définition 3.30

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. Pour tout $a \neq b$ dans I, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement de f entre a et b**. Si la limite

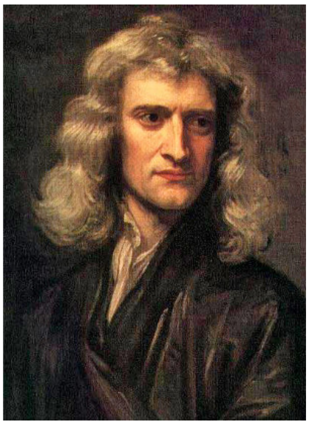
$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

existe et est finie, on l'appelle **nombre dérivé de f en a** que l'on note $f'(a)$ et on dit que f est **dérivable** en a. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et la fonction $f' : x \in I \mapsto f'(x)$ est appelée la **dérivée de f** sur I.

Dans la définition ci-dessus, on peut considérer les points $a = x$ et $b = x + h$, ce qui fait qu'on peut écrire la définition de la dérivée comme

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} .$$

Il existe aussi d'autres notations pour la dérivée, chacune venant d'un des grands fondateurs du calcul infinitésimal. La notation f' vient de Lagrange. Leibniz utilisait la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ pour la dérivée de f au point x. Cette notation est pratique quand f dépend de plusieurs variables et elle fait le lien avec les notations des intégrales. Newton utilisait le point, qui est beaucoup utilisé en physique, par exemple $\dot{x}(t)$ pour la vitesse comme dérivée de la position $x(t)$. Cette notation est évidemment moins pratique pour des lettres hautes comme le f.



Sir Isaac Newton
1642-1727
Angleterre

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716
Allemagne

Joseph-Louis Lagrange
1736-1813
Italie-France

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$. Donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h \to 2x$ quand $h \to 0$. Donc f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 2x$. En utilisant la formule du binôme, on trouve de même que

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} - x^n\Big)\\ &= \frac{1}{h}\Big(\binom{n}{0}x^n - x^n\Big) + \binom{n}{1}x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}\\ &= nx^{n-1} + o(1) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} nx^{n-1}\end{aligned}$$

montrant le résultat bien connu que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$.

Définition 3.31

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est dérivable, on note f'' (ou $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ou $\ddot{f}$) la **dérivée seconde** de f, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée.
Si on peut appliquer la dérivation k fois de suite sur f, on dit que f est k fois dérivable sur I et on note $f^{(k)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ la fonction obtenue, appelée **dérivée k-ième**.
Si f est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k-ième est continue sur I, alors on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur I. On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Si f est infiniment dérivable, on dit qu'elle est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** et on note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

! Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable et si sa dérivée f' est continue. La fonction $f : x \mapsto x^2\sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée est $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$ et f' n'est pas continue en $x = 0$. Donc f peut être dérivable sans être de classe $\mathcal{C}^1$.

En se basant sur les notions de limites à gauche et à droite, il est possible de parler de dérivabilité à gauche et à droite.

Définition 3.32

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f est **dérivable à droite** en $x = a^+$ si la limite $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Symétriquement, on dit que f est **dérivable à droite** en $x = b^-$ si la limite $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ existe et est finie.

Par les arguments similaires à ceux de la preuve du théorème 3.20, on montre qu'une fonction est dérivable en x si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de x et si ces deux dérivées sont égales.

Exemple :

On considère la valeur absolue $f : x \mapsto |x|$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = x$ et donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f' \equiv 1$ et f est dérivable à droite de 0 avec 1 pour dérivée à droite en 0. Symétriquement, pour tout $x \leq 0$, on a $f(x) = -x$ et donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $f' \equiv -1$ et f est dérivable à gauche de 0 avec -1 pour dérivée à gauche en 0.
En $x = 0$, les dérivées à droite et à gauche sont différentes, donc la valeur absolue n'est pas dérivable en $x = 0$.

L'implication suivante est classique mais on prendra garde à ne pas utiliser sa réciproque qui est fausse. On pourra se rappeler de l'exemple ci-dessus de la valeur absolue qui est continue mais pas dérivable en 0.

Proposition 3.33

Si f est dérivable en $x \in \mathcal{D}_f$, alors f est continue en x.

Démonstration : Si f est dérivable en x, alors la limite $\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ existe et est finie. Par règle algébrique sur les limites, on a alors

$$f(y) = (y-x)\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + f(x) \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} f(x)$$

ce qui montre par le théorème 3.20 que f est continue en x. □

On pourra retenir que toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition sauf la partie entière (qui n'est tout simplement pas continue sur les entiers) et la valeur absolue qui n'est pas dérivable en $x = 0$. Pour obtenir la dérivée de fonctions construite à l'aide des fonctions usuelles, il nous faut les règles de calculs que nous apprenons au lycée.

Proposition 3.34

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors

- Si λ et μ son deux réels, alors la combinaison linéaire $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + g'f$.
- Le quotient f/g est dérivable là où $g \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$.

Démonstration : Pour donner un exemple de preuve, traitons le cas du produit. On commence par noter que puisque g est dérivable en $x \in I$, alors g est continue sur I et $g(x+h) \to g(x)$ quand $h \to 0$. Les règles de manipulation des limites donnent

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \frac{1}{h}\big(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)\big)\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

□

Les règles pour la composition et la fonction réciproque s'énoncent ainsi.

Proposition 3.35

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la composée $f \circ g$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.

Démonstration : Soit $x \in I$. Comme g est dérivable en x, g est continue en x. Par ailleurs, f est dérivable en $g(x)$ par hypothèse. On a

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \times \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de la dérivée de f en $a = g(x)$ avec b égal à $g(x+h)$ qui tend vers a quand h tend vers 0. □

Proposition 3.36

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective de I dans J. Alors si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.

Démonstration : Comme f est dérivable, elle est continue. Nous allons supposer connu le fait que la réciproque d'une fonction continue est continue pour nous concentrer sur la partie dérivation. On pourra donc utiliser que $f^{-1}(x+h)$ tend vers $f^{-1}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h} &= \frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{(x+h)-x} = \frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x+h))-f(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x+h))-f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\end{aligned}$$

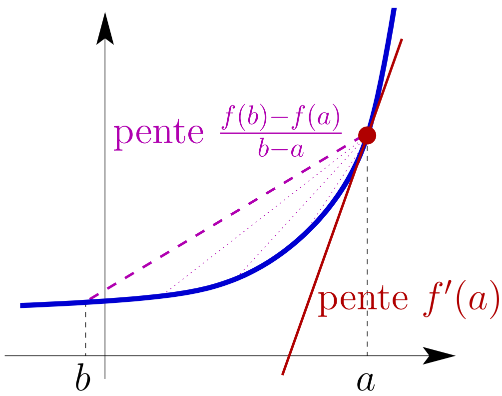
où on a utilisé la définition de la dérivée de f en $a = f^{-1}(x)$ avec b égal à $f^{-1}(x+h)$ qui tend vers a quand h tend vers 0 (continuité admise). $\square$

Notons quelques astuces pour les calculs. Tout d'abord, en cas de doute sur les formules, on pourra regarder l'homogénéité. Si f et g sont en mètres et x en seconde, alors la dérivation multiplie l'unité par s^{-1}. La formule de $(fg)'$ par exemple doit être en $m^2.s^{-1}$ et aussi symétrique en f et g car $fg = gf$. Cela ne laisse pas beaucoup de choix et montre que $(fg)' \neq f'g'$ car $f'g'$ est en $m^2.s^{-2}$.

Ensuite, l'écriture $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$ est meilleure que $(f \circ g)' = g'.(f' \circ g)$ dès qu'on enchaîne plusieurs calculs. Ainsi si on calcule $(f \circ g \circ h)'$, on commence par réfléchir à f' et on écrit $f' \circ g \circ h$ puis on oublie f et on peut se concentrer sur la dérivation de $g \circ h$ etc.

4.2 Tangente et linéarisation

Nous avons vu la dérivée comme la limite du taux d'accroissement et ce dernier comme une sorte de vitesse moyenne. Ce taux d'accroissement a aussi une interprétation géométrique : c'est la pente de la droite reliant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. La dérivée f' est donc la limite de ces pentes quand b tend vers a. Géométriquement, la droite limite est la *tangente* à la courbe de f en a. On peut simplement prendre comme définition de la tangente qu'il s'agit de la droite de pente $f'(a)$ et passant par le point $(a,f(a))$.



Définition 3.37

Si f est dérivable en a, on définit la **tangente à la courbe de f en a** comme la droite d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) .$$

Pour retrouver cette équation, c'est facile : la pente est $f'(a)$ donc l'équation est du type $y = f'(a)x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Puis la droite doit passer par $(a,f(a))$ donc $f'(a)a + c = f(a)$ donne la constante manquante.

Le point clef de cette tangente est qu'il s'agit de la meilleure approximation de f par une droite si on est proche de a, dans le sens où la différence entre $f(x)$ et la tangente $f'(a)(x-a) + f(a)$ est d'ordre plus petit que linéaire. On peut voir cette propriété comme la définition même de la dérivée.

Théorème 3.38

Une fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ avec pour nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \quad \text{avec} \quad \frac{r(x)}{(x-a)} \to 0 \;\; \text{quand } x \to a\;. \quad (3.2)$$

Démonstration : Supposons que f est dérivable en a. Alors si on pose $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, on a

$$\frac{r(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f'(a) - f'(a) = 0\;.$$

Ce qui donne le développement (3.2) souhaité.
Supposons maintenant que (3.2) est vraie (sans savoir que $f'(a)$ est le nombre dérivé mais juste un nombre donné). On a alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f'(a)(x-a)+r(x)}{x-a} = f'(a) + \frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f'(a)$$

ce qui montre que le taux d'accroissement a une limite finie qui est bien le nombre $f'(a)$. □

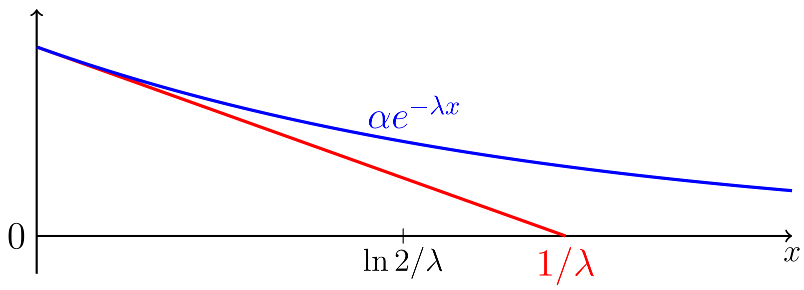
Dans le chapitre suivant, on verra la notation $o(x-a)$ pour un terme $r(x)$ tel que $r(x)/(x-a) \to 0$ quand $x \to a$. On écrira alors (3.2) sous la forme

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

ce qui évite d'introduire une notation pour le reste. Ce genre d'écriture sera vu plus en détail dans chapitre sur les développements limités.

Exemples :

- En $x = 0$, une exponentielle $f(x) = \alpha e^{-\lambda x}$ a pour dérivée $f'(0) = -\alpha\lambda$ et donc pour tangente $-\alpha\lambda x + \alpha$. Cette tangente s'annule en $x = 1/\lambda$. Cela donne un moyen géométrique de récupérer le coefficient λ ou la demi-vie $\ln 2/\lambda$ où l'exponentielle a été divisée par deux.



- Près de $x = 0$, comme $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on retrouve que $\sin(x) = x + r(x)$ avec $r(x)/x \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui est équivalent à dire que $\sin x \sim x$ près de 0.

- On considère un pendule qui peut osciller autour d'un axe. On note $\theta(t)$ l'angle qu'il forme avec la verticale ($\theta = 0$ étant l'équilibre stable où le pendule pend vers le bas). On trouve comme équation $\ddot{\theta}(t)+\omega^2\sin(\theta(t)) = 0$ avec $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Il est impossible de trouver des solutions explicites à cette équation, mais pour des petits oscillations, (θ proche de 0) on peut procéder à une **linéarisation** en remplaçant $\sin\theta$ par θ car $\sin x \sim x$ près de 0. Il peut être très difficile de donner un sens rigoureux à ce procédé, c'est-à-dire de comprendre dans quel sens l'équation originale et sa version linéarisée sont proches. Mais en première approximation, on peut déjà regarder l'équation linéarisée $\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = 0$. Cette équation a pour solution les oscillations de la forme $\alpha\sin(\omega t)+\beta\cos(\omega t)$, ce qui correspond bien à ce qu'on peut observer et justifie a posteriori que la linéarisation est sans doute raisonnable dans ce cas.

4.3 Les accroissements finis

Dans cette partie, nous allons voir plusieurs résultats fondamentaux qui donnent toute la puissance de l'outil dérivation. Tout d'abord, nous pouvons l'utiliser pour chercher des extrema locaux.

Proposition 3.39

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset \mathcal{D}_f$. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration : Supposons que f admet en x_0 un maximum local (le cas du minimum est symétrique). Il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ sur lequel $f(x) \leq f(x_0)$. On a donc pour tout $h \in]0,\eta[$, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$. Comme f est dérivable en x_0, on peut passer à la limite $h \to 0$ et obtenir $f'(x_0) \leq 0$. Mais pour tout $h \in]-\eta,0[$, on a aussi $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ (attention au changement de sens de l'inégalité car h est négatif). En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Au total, on a forcément $f'(x_0) = 0$. □

Cette proposition bien connue est très utile pour trouver les maximums ou minimums d'une fonctions. On prendra garde à ne pas mal l'utiliser comme illustrer dans les exemples suivants.

Exemples :

- Le polynôme $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. D'après le résultat ci-dessus, les extrema locaux de f sont des points où f' s'annule. Il y a donc deux candidats : $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$. Il faudra étudier les variations de la fonction pour savoir s'il s'agit bien d'extrema locaux ou non. Dans tous les cas, il ne s'agira pas d'extrema globaux puisque f tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.

- Un point où f' s'annule n'est pas forcément un extremum local. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en $x = 0$. Pourtant, elle est toujours croissante et donc il n'y a aucun extremum local en $x = 0$.

- Si on est « au bord » de l'ensemble de définition, c'est-à-dire qu'on ne peut trouver un intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ dedans, alors la proposition devient fausse. Par exemple, la fonction $x \in [0,1] \mapsto x$ admet un minimum global en 0 et un maximum global en 1 mais sa dérivée ne s'annule jamais.

Le résultat suivant a été formulé par Michel Rolle (1652-1719, France). Il peut sembler élémentaire et est souvent qualifié simplement de « lemme ». Mais on va voir plus bas sa généralisation appelée théorème des accroissements finis qui est un résultat fondamental de l'analyse infinitésimal. À l'époque de Rolle, la dérivation était à ses débuts et Rolle n'avait traité en fait que le cas des polynômes.

Proposition 3.40 (lemme de Rolle)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si $f(a) = f(b)$ et si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration : D'après le théorème 3.27, la fonction f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes. Si $f(a) = f(b)$ est à la fois les valeurs minimale et maximale de f sur $[a,b]$, alors c'est que f est constante sur ce segment et d'après la proposition 3.39, $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$ puisque $f(c)$ est un maximum de f. Sinon, c'est qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que f atteint son maximum ou son minimum en c. De nouveau, on applique la proposition 3.39 pour avoir $f'(c) = 0$. □

Le théorème le plus important de cette partie est le suivant. On remarquera que le lemme de Rolle correspond au cas $f(b) = f(a)$.

Théorème 3.41 (théorème des accroissements finis dit T.A.F.)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

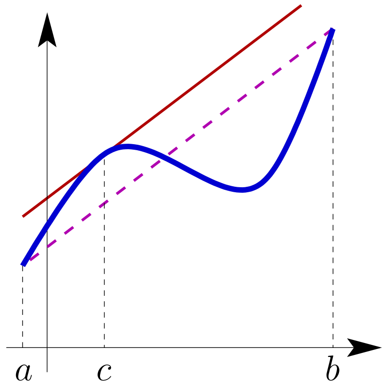
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Démonstration : On considère la fonction auxiliaire

$$g \ : \ x \in [a,b] \ \longmapsto \ f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) .$$

Par les hypothèses sur f, la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a aussi $g(a) = f(a)$ et

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) .$$



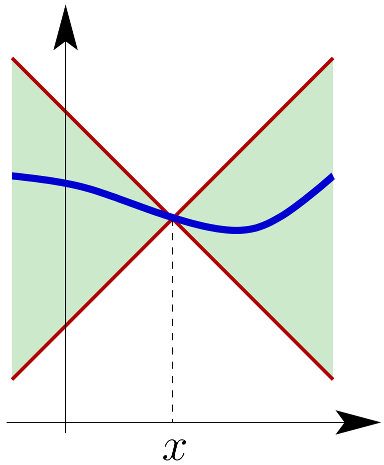


FIGURE 3.5 – *Des illustrations des accroissement finis. À gauche, le taux d'accroissement* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est la pente de la sécante entre* a *et* b*, alors que* $f'(c)$ *est la pente de la tangente en* c*. Le T.A.F. nous dit qu'il existe* c *tel que ces deux pentes sont égales et donc que la tangente est parallèle à la sécante. À droite, si on connaît une borne* M *sur la dérivée d'une fonction, alors l'I.A.F. nous fournit un cône de pointe* $(x,f(x))$ *et de pentes* M *duquel la fonction ne peut s'échapper.*

On peut donc appliquer le lemme de Rolle à g et on trouve qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, le point c est bien celui cherché. □

En corollaire immédiat, on obtient diverses inégalités comme ci-dessous. La forme en inégalités est celle qui est la plus utilisée dans la vie de tous les jours puisque c'est elle qui dit que si on n'a pas dépassé le 80 km/h, alors on n'a pas parcouru plus de 80 km en une heure. Ou plutôt la contraposée utilisée par les radars-tronçons : si vous avez mis moins d'une heure pour faire 80 km, c'est qu'à au moins un moment, vous avez dépassé les 80 km/h. Tout ceci est très logique, et c'est exactement ce qu'exprime le résultat suivant, mais sous une forme complètement générale : si $f(x)$ est une position en fonction du temps x, $(f(b) - f(a))$ est la distance parcourue, $(b - a)$ est l'intervalle de temps et f' la vitesse.

Corollaire 3.42 (inégalités des accroissements finis dit I.A.F.)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si f' est bornée sur $]a,b[$, alors

$$(b-a) \cdot \inf_{x \in]a,b[} f'(x) \leq f(b) - f(a) \ \leq \ (b-a) \cdot \sup_{x \in]a,b[} f'(x) \ .$$

En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur intervalle I et si $x,y \in I$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot \max_{t \in [x,y]} |f'(t)|$$

Démonstration : Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Pour obtenir la première estimation, il ne reste plus qu'à borner $f'(c)$ en remarquant que $b - a > 0$ pour garder le sens de l'inégalité. Dans la deuxième version, on passe d'abord à la valeur absolue pour avoir $|f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot |f'(c)|$, ce qui permet de ne pas se soucier du signe de $x - y$. Puis on utilise que si la dérivée est continue sur $[x,y]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^1$), alors c'est aussi le cas de $|f'|$ qui admet donc un maximum par le théorème 3.27. □

Exemple :

Montrons que $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, on applique une inégalité des accroissements finis. On prend la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et les points $a = n$ et $b = n+1$. On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ sur $[a,b]$. On obtient alors

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 .$$

C'est toute l'essence des inégalités des accroissements finis : si la vitesse de croissance de la fonction diminue et tend vers 0, l'écart des valeurs entre n et $n+1$ doit aussi tendre vers 0.

Le théorème des accroissements finis permet de retrouver tout ce qu'on apprend au lycée concernant le lien entre dérivation et sens de variation.

Proposition 3.43

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

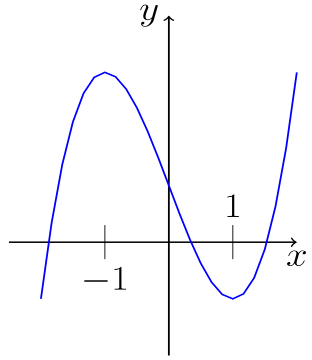
- si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I,
- si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I,
- si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I,
- si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration : Détaillons deux cas. Supposons que $f'(x) \geq 0$ sur I. Soient $a \leq b$ deux points de I. Si $a = b$, on a $f(b) \geq f(a)$ trivialement. Si $a < b$, le théorème 3.41 implique qu'il existe $c \in]a,b[\subset I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Les hypothèses de signe nous donnent donc que $f(b) - f(a) \geq 0$ soit $f(b) \geq f(a)$ et f est donc croissante sur I.
Supposons maintenant que $f'(x) < 0$ sur I. Soient $a < b$ deux points de I, le théorème 3.41 implique qu'il existe $c \in]a,b[\subset I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Les hypothèses de signe nous donnent donc que $f(b) - f(a) < 0$ soit $f(b) < f(a)$ et f est donc strictement décroissante sur I. □

4.4 Quelques applications

• **Étude de fonctions :** on retrouve les tableaux de variations que l'on apprend à faire au lycée. Reprenons notre exemple du polynôme de degré trois $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$. Sa dérivée est un polynôme de degré deux $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ dont le signe est facile à trouver. On obtient alors facilement une allure de la fonction.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Nous avions vu que ± 1 était potentiellement deux extrema locaux, sans en avoir la certitude. Maintenant, nous pouvons bien dire que la fonction f a exactement deux extrema locaux : $x = -1$ est un maximum local et $x = 1$ est un minimum local.

• **Estimations :** par essence, les inégalités des accroissements finis sont la source de nombreuses estimations. Par exemple, comme $|\cos x| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$, on sait que $|\sin x - \sin 0| \leq 1.|x - 0|$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad |\sin x| \leq |x|\ .$$

Regardons maintenant le log. Il a pour dérivée $1/x$ et $1/x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$. Donc $(\ln x - \ln 1) \leq 1.(x - 1)$ pour tout $1 \leq x$. Si $x \in]0,1[$, on a $1/x > 1$ et $(\ln 1 - \ln x) > 1.(1 - x)$ pour tout $x \leq 1$. Dans les deux cas, on retrouve la même inégalité (attention au changement de sens quand on passe de $(1 - x)$ à $(x - 1)$ si $x < 1$) :

$$\forall x > 0\ , \quad \ln x \leq x - 1\ .$$

On peut aussi utiliser l'étude de fonctions. Par exemple, on considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$. Connaissant les valeurs de l'exponentielle, on obtient que la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$: elle atteint son minimum en 0 où $f(0) = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad e^x \geq x + 1\ .$$

• **Caractérisation des fonctions constantes :** le résultat suivant est assez élémentaire mais fournit une façon simple de vérifier qu'une fonction est constante.

Proposition 3.44

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est une fonction constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration : Si f est constante sur I, alors tout taux d'accroissement $(f(a) - f(b))/(a - b)$ vaut zéro (car $f(a) = f(b)$) et donc f est dérivable de dérivée nulle.
Si f est dérivable et $f' \equiv 0$, alors pour tout a et b dans I, le théorème des accroissement finis nous donne l'existence de c dans I tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$. Puisque $f'(c) = 0$, on a $f(a) = f(b)$ pour tout a et b dans I. □

Notons que ce résultat n'est pas si trivial. Par exemple, si I n'est pas un intervalle, il n'est plus vrai. Ainsi considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On a que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f' \equiv 0$. Pourtant f n'est pas constante car elle prend deux valeurs. Par contre, on peut dire que f est constante sur chaque intervalle $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

Exemple :

La proposition ci-dessus permet de démontrer rapidement des formules. Par exemple, si on part de la propriété du logarithme que $\ln 1 = 0$ et que $\ln'(x) = 1/x$. Pour tout $a > 0$, considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(x)$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{ax}a - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

et donc f est une fonction constante. On sait que $f(1) = \ln(a) - \ln 1 = \ln a$ et on obtient donc que pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln a$. Ceci montre la formule

$$\forall x > 0, \forall a > 0 \ , \quad \ln(ax) = \ln a + \ln x \ .$$

• **Règle de L'Hôpital :** il s'agit d'une règle qui peut être utile. Elle a été publiée par le marquis de L'Hôpital (1661-1704, France), mais on pense qu'elle a été découverte par Jean Bernoulli (1667-1748, Suisse). Le marquis de L'Hôpital payait ce dernier pour faire de la recherche en mathématique et avait le droit de publier en son nom les résultats trouvés.

Proposition 3.45 (règle de L'Hôpital)

Si deux fonctions g et h sont continues et dérivables dans un voisinage de a avec $g(a) = h(a) = 0$ et que la limite de $g'(x)/h'(x)$ existe quand $x \to a$, alors la limite de $g(x)/h(x)$ existe aussi et

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} \quad = \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} \ .$$

Démonstration : La preuve consiste à appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$\phi(x) = \big(g(x) - g(a)\big)\big(h(b) - h(a)\big) \quad - \quad \big(h(x) - h(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big)$$

et trouver $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} \ .$$

quand b tend vers a, c tend aussi vers a, ce qui donne la limite voulue. Le détail est laissé au lecteur (voir exercices de TD). $\square$

Il existe d'autres versions (en $\pm\infty$, pour des limites infinies etc.) qu'on pourra trouver dans d'autres cours en ligne.

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x+\sin x}{e^{3x}-1}$. Cette fonction n'est pas définie en $x = 0$ à cause de la division par $e^0 - 1 = 0$. Peut-on la prolonger par continuité en zéro ? La limite est une forme indéterminée du type « 0/0 ». On applique la règle de L'Hôpital. La dérivée de $g : x \mapsto x + \sin x$ est $g'(x) = 1 + \cos x \to 2$ quand $x \to 0$. La dérivée de $h : x \mapsto e^{3x} - 1$ est $h'(x) = 3e^{3x} \to 3$ quand $x \to 0$. Comme $g'(x)/h'(x)$ tend vers $2/3$ quand x tend vers 0, on est bien dans le cadre d'application du résultat ci-dessus et

$$\frac{x+\sin x}{e^{3x}-1} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} \frac{2}{3} \ .$$

• **Théorème de la limite de la dérivée :** voici un autre résultat qui peut être utile quand une fonction n'est pas clairement dérivable en un point. On donne ici l'énoncé « à droite » mais on peut aussi écrire symétriquement l'énoncé « à gauche » et les regrouper pour avoir la dérivation des deux côtés par le théorème 3.20.

Proposition 3.46 (limite de la dérivée)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$. Supposons que la dérivée f' admettent en outre une limite à droite en a quand $x \to a^+$. Alors f est dérivable à droite en a et $f'(a_+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.

Démonstration : Soit $x > a$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]a,x[$ tel que

$$f'(c(x)) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

(on notera que $c : x \mapsto c(x)$ n'est pas forcément continue). Quand x tend vers a, $c(x)$ tend aussi vers a car $c(x) \in]a,x[$. Par hypothèse, $f'(c(x))$ a donc une limite finie et il en est de même pour le taux d'accroissement $\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ quand $x \to a^+$. Par définition, on vient de montrer que f est dérivable à droite en a. $\square$

Exemple :

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}\sin(x)$. Il s'agit bien une fonction continue sur $[0, +\infty[$ mais la dérivabilité en 0 pose problème car la racine carrée n'est pas dérivable en 0 et donc on ne peut appliquer la proposition de dérivation des produits. Mais si $x > 0$, on a bien que f est dérivable et $f'(x) = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. Comme $\sin x \sim x$ en 0, $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$. La proposition précédente nous dit donc que f est bien dérivable à droite en zéro et $f'(0) = 0$.

• **Calculs d'erreurs :** le principe de linéarisation nous dit que si f est dérivable en x et que $x + \delta x$ est proche de x, alors

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + r(\delta x) \quad \text{avec } r(\delta x)/\delta x \to 0 \text{ quand } \delta x \to 0.$$

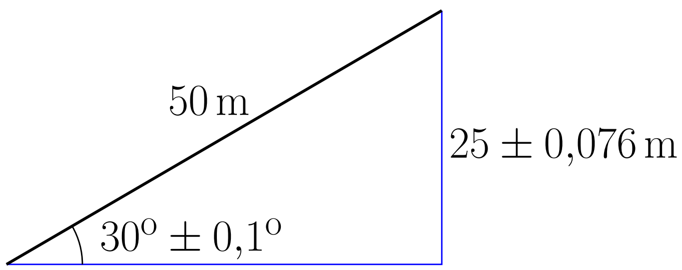
Si on connaît une erreur δx dans une mesure, l'erreur $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$ sur la quantité f vérifie donc $\delta f = f'(x)\delta x + r(\delta x)$. Dans les sciences appliquées, il est alors d'usage de négliger les termes d'ordre petit en δx. Dans ce cas, on retrouve l'estimation d'erreurs

$$\delta f \simeq f'(x)\delta x \ .$$

Notons que nos théorèmes mathématiques permettent de retrouver des principes connus de l'estimation d'erreur comme « *l'incertitude relative d'un produit est la somme des incertitudes relatives des facteurs* ». En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\delta(fg)}{(fg)(x)} &\simeq \frac{1}{(fg)(x)}(fg)'(x)\delta x = \frac{1}{(fg)(x)}\big(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\big)\delta x \\ &= \frac{f'(x)\delta x}{f(x)} + \frac{g'(x)\delta x}{g(x)} \simeq \frac{\delta f}{f(x)} + \frac{\delta g}{f(x)} \ .\end{aligned}$$

Faisons pour finir une petite application numérique. Imaginons que l'on creuse un tunnel qui s'enfonce dans une montagne selon une pente montante de $30^{\text{o}} \pm 0{,}1^{\text{o}}$ pendant 50 m. On pense donc gagner en hauteur $50\sin(30^{\text{o}}) = 25$ m. Mais quelle est l'erreur possible à cause de l'imprécision de la pente ? Notre fonction mesurant l'altitude gagnée en fonction de l'angle est $f : x \mapsto 50\sin(\frac{\pi}{180}x)$. Attention : il est très important de passer en radian car les dérivées des fonctions trigonométriques que l'on apprend correspondent à ces fonctions avec des entrées en radians ! On peut donc calculer que $f'(30) = 50 \times \frac{\pi}{180}\cos(\frac{\pi}{6}) = 0{,}7557\ldots$. En multipliant ce facteur par $\delta x = 0{,}1$, on trouve alors notre gain en altitude en incluant l'erreur possible



5 Quelques applications supplémentaires

5.1 Point fixe stable

Nous allons montrer le critère suivant de stabilité de point fixe pour les suites itératives $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 3.47

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I,I)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui laisse stable I. Supposons qu'il existe un point fixe $x_* \in I$ de f tel que $|f'(x_*)| < 1$. Alors x_* est asymptotiquement stable dans le sens où il existe $\delta > 0$ tel que, si $|u_0 - x_*| < \delta$, alors la suite (u_n) définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et

$$u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x_* .$$

Démonstration : Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée f' est continue. On a $|f'(x_*)| < 1$, donc il existe une petite marge $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(x_*)| + \varepsilon := \alpha < 1$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$ on a $|f'(x) - f'(x_*)| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on a donc $|f'(x)| < \alpha < 1$ pour tout $x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$. L'inégalité des accroissements finis nous assure alors que

$$\forall x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[\ , \quad |f(x) - f(x_*)| \leq \alpha |x - x_*| \ .$$

En utilisant que x_* est un point fixe, si $u_n \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$, on a donc

$$|u_{n+1} - x_*| \leq \alpha |u_n - x_*| \ .$$

Comme $\alpha < 1$, on a en particulier que $|u_{n+1} - x_*| < |u_n - x_*| < \delta$ et donc que $u_{n+1} \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$. Par récurrence, on obtient que si initialement $u_0 \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$, alors la suite (u_n) reste dans cet intervalle et

$$\forall n \geq 0 \ , \quad |u_n - x_*| \leq \alpha^n |u_0 - x_*| \ .$$

La suite (u_n) converge donc exponentiellement vite vers le point fixe x_*. $\square$

Exemple :

On reprend le cas de la suite logistique $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$. Pour le paramètre $\lambda = \frac{5}{2}$, on est dans la zone $]2,3]$ où on s'attend à avoir 0 comme point fixe répulsif et un autre point fixe $x_* \in]0,1[$ vers lequel toutes les suites non nulles convergent. Ce second point fixe est ici $x_* \neq 0$ tel que $x_* = f(x_*) = \frac{5}{2}x_*(1-x_*)$. On trouve donc que $x_* = \frac{3}{5}$. On a $f'(x_*) = \frac{5}{2}(1-2x_*) = -\frac{1}{2}$. Comme $|f'(x_*)| = \frac{1}{2} < 1$, le résultat ci-dessus montre bien que ce second point fixe est attractif. Il faudrait encore travailler un peu en étudiant plus globalement la fonction pour vérifier que son attraction s'exerce sur tout $]0,1[$ et pas seulement un petit voisinage $]x_* - \delta, x_* + \delta[$.

5.2 À la recherche d'un terrain plat

On note C le cercle unité, que l'on peut aussi voir comme le segment $[0{,}2\pi]$ dont on a recollé les extrémités, ou encore comme $\mathbb{R}$ quotienté par la relation d'équivalence modulo 2π. On a le résultat suivant.

Proposition 3.48

Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le cercle. Alors il existe deux points diamétralement opposés où f prend les mêmes valeurs. Autrement dit, il existe un angle $\theta_* \in C$ tel que $f(\theta_*) = f(\theta_* + \pi)$.

Démonstration : Si $f(0) = f(\pi)$, on a gagné. Sinon, on pose $g(\theta) = f(\theta + \pi) - f(\theta)$ qui est une fonction continue de l'angle θ. On a $g(0) = f(\pi) - f(0) := \alpha \neq 0$ mais aussi $g(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(0) - f(\pi) = -\alpha$. Comme α et $-\alpha$ sont de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit un angle intermédiaire θ_* tel que $g(\theta_*) = 0$, c'est-à-dire $f(\theta_*) = f(\theta_* + \pi)$. □

Voici une illustration et application simple de ce résultat. Imaginons que nous voulons poser un objet avec deux pieds à plat sur un terrain accidenté. Par exemple, on essaye de se ternir droit les deux jambes tendues. On suppose que l'altitude du terrain est continue (pas de reliefs type muret). A priori, on peut avoir le pied droit plus haut que le gauche par exemple, et on va donc être déséquilibré. Mais si on fait un demi-tour, c'est l'inverse. La proposition plus haut nous dit juste qu'il existe donc une orientation où nos deux pieds seront à la même altitude et donc où on sera stable. C'est évident sur un terrain type plan incliné (on se met en face de la pente par exemple) mais moins clair si le terrain est bosselé.

Il existe d'autres généralisations à des dimensions plus grandes ou à des formes géométriques plus complexes que le cercle. Certaines ont des applications importantes en théorie des jeux (et donc en maths financières) ou en géométrie. Une généralisation du résultat précédent, appelée théorème de Borsuk-Ulam, nous dit par exemple que si on a deux fonctions continues sur une sphère, il existe deux points diamétralement opposés où les deux fonctions ont même valeurs. Ainsi, il existe toujours sur Terre deux endroits aux antipodes l'un de l'autre où il règne la même température et la même pression.

5.3 Cylindre de contrôle pour les équations différentielles

La technique du cylindre de contrôle est très utile pour montrer que les solutions d'une équation différentielle restent dans une zone donnée. Prenons l'exemple d'une équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ modélisant un phénomène pour lequel $x(t)$ est censé rester positif (une concentration chimique par exemple). On part donc de $x(0) > 0$, mais est-ce que la solution engendrée par l'équation différentielle reste toujours positive ensuite ? Supposons que l'on ait $f(0) > 0$. Comme $x(t)$ est dérivable, elle est continue. La technique du cylindre que l'on a vu plus haut nous dit que $x(t)$ reste positif pour $t > 0$ petit (définition de la continuité) et que si $x(t)$ devient négatif à un moment, il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$ (propriété des valeurs intermédiaires). Prenons t_0 comme le premier temps où cela arrive (à cet endroit, on triche un peu car on admet son existence, mais il est possible de faire cela plus proprement). Pour ce t_0, on a $x'(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) > 0$. Le lien entre dérivée et variations nous dit que $x(t)$ est donc strictement croissante près de t_0 et donc que $x(t) < 0$ pour $t < t_0$ proche de t_0. Mais alors c'est que $x(t)$ avait déjà quitté le cylindre $x \geq 0$ avant t_0, ce qui est contradictoire avec notre choix de t_0. On vient donc de justifier que $x(t)$ reste strictement positif pour tout $t > 0$, sans même avoir de formule pour cette solution.

5.4 Partage d'un gâteau - première version

On partage une bûche de longueur unité en la coupant à la position x. Autrement, pour $x \in [0,1]$, on coupe deux parts : la part $[0,x]$ et la part $[x,1]$ (la tranche pile sur x étant d'épaisseur nulle, ce n'est pas important de la compter dans les deux parts). On souhaite partager le gâteau entre deux personnes A et B de façon à ce qu'il n'y ait aucun jaloux. Le souci est que la bûche n'est pas homogène et que les préférences de A et B ne sont pas les mêmes (l'un peut vouloir la part avec le plus de chocolat, l'autre juste la plus grosse etc.). Pour chaque $x \in [0,1]$, on demande à A et B de noter le partage « A reçoit la part $[0,x]$ et B reçoit la part $[x,1]$ ». Soit $f(x)$ la note que A donne à la situation et $g(x)$ la note de B. On suppose que les deux notes sont continues et normalisées de façon à ce que $f(x) > 0$ veut dire que A préfère bien la part reçue et $f(x) < 0$ veut dire que A préférerait recevoir l'autre part (et idem pour g). Quand x vaut 0, il est clair que $f(0) < 0$ et que $g(0) > 0$ car chacun va préférer avoir tout le gâteau plutôt que rien. Inversement $f(1) > 0$ et $g(1) < 0$. On pose $h = g - f$ qui est une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une position de découpe $x \in [0,1]$ telle que $h(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) = g(x) \geq 0$ alors les deux personnes préfèrent la part qu'on leur propose. Si $f(x) = g(x) < 0$ alors aucun des deux n'aime la répartition des parts proposée et il suffit d'inverser les parts pour que tout le monde soit content.

Pour la culture, il existe un théorème similaire avec autant de convives que voulu, mais il faut passer à une sorte de généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à des dimensions plus grandes. Énoncer comme ceci, ce résultat paraît anodin, surtout si on le classe dans la branche des mathématiques appelée *théorie des jeux*. Mais il faut remplacer un partage de gâteau par des opérations boursières et les jeux ludiques par le jeu en bourse pour comprendre que ce type de résultat intervient en mathématiques financières (dans des versions plus développées).

5.5 Partage d'un gâteau - deuxième version

Nous voulons partager un cake à la confiture entre deux personnes, qui contient une masse a de pâte et b de confiture. Le problème est que la confiture n'est pas équitablement répartie dans le cake et qu'on souhaite vraiment que les deux personnes aient la même quantité de pâte et de confiture. Imaginons de nouveau que l'on tranche transversalement le gâteau et que l'on note la position $x \in [0,1]$ comme pour l'exemple précédent. Si la répartition entre pâte et confiture n'est pas équitable, il sera impossible de trancher transversalement le gâteau en deux avec une répartition parfaite. Mais on peut le faire en utilisant deux coupes (et donc trois parts).

On commence par remarquer qu'il existe une position $x_m \in]0{,}1[$ telle que la masse du morceau $[0{,}x_m]$ du cake soit la même que la masse du morceau $[x_m{,}1]$. Ces masses sont donc égales à $m = (a+b)/2$, qui est celle d'un demi-gâteau. Pour tout $x \in [0{,}x_m]$, on note $y(x)$ l'endroit de la deuxième coupe telle que le morceau $[x{,}y(x)]$ a pour masse m. On note $p(x)$ la masse de pâte dans le morceau $[x{,}y(x)]$, qui contiendra donc aussi $m - p(x)$ masse de confiture. Enfin, on admet que $y(x)$ et $p(x)$ dépendent continûment de x, ce qui est raisonnable physiquement.

Notre but étant la répartition équitable des masses, on veut trouver x tel que $p(x) = a/2$ (répartition égale de la pâte), ce qui impliquera alors que $m - p(x) = b/2$ (répartition égale de la confiture). Si $x = 0$ convient, il n'y a rien à faire. Sinon, cela veut dire que $p(0)$ est au-dessus ou en-dessous de la masse moitié $a/2$. Mais l'autre part correspond à la position $x = x_m$ et donc $p(x_m)$ est de l'autre côté de la masse moitié $a/2$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe une position $x_* \in [0{,}x_m]$ telle que la part $[x_*{,}y(x_*)]$ contient exactement la même quantité de pâte et de confiture que les parts $[0{,}x_*] \cup [y(x_*){,}1]$.

Indispensable à maîtriser avant même ce chapitre :

- Savoir manipuler les limites de fonctions
- Savoir calculer des dérivées et faire des tableaux de variation

À connaître en priorité :

- Les définitions « epsilon-delta » des limites et de la continuité.
- Les différents critères de continuité et leur utilisation aux prolongements et raccords.
- Définition de la tangente et la linéarisation du théorème 3.38.
- Les quatres résultats fondamentaux : théorèmes des valeurs intermédiaires, des valeurs extrêmes, des accroissements finis et les inégalités des accroissements finis.

Utile pour la suite :

- La règle de L'Hôpital ou le théorème de la limite de la dérivée, les propositions 3.45 et 3.46, sont parfois incluses comme des résultats de cours. Elles peuvent être très utiles et c'est donc bien de les connaître même si ce ne sont pas les résultats les plus fondamentaux de ce chapitre.
- Les autres exemples d'application ne sont pas du cours à connaître par cœur, mais peuvent être étudiés comme illustrations des méthodes et des théorèmes. Certains, comme l'existence du point fixe (théorème 3.29) ou le point fixe contractant (proposition 3.47) sont très classiques et il peut être utile de se rappeler les techniques utilisées dans leurs démonstrations.

Chapitre 4 : Les développements limités

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une fonction dérivable peut être approchée par une droite (sa tangente) dans le sens où

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \quad \text{avec } r(x) \text{ négligeable devant } (x - x_0) \text{ quand } x \to x_0 \, .$$

Par exemple, le polynôme $P(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^4$ peut être approché par la droite $1 + 2x$ près de 0. Mais il est logique d'aller plus loin dans le développement si besoin et d'approcher $P(x)$ par $1 + 2x - 3x^2$, ce qui donne une meilleure approximation. On peut procéder de même pour une fonction et écrire que

$$f(x) = a + bx + cx^2 + r(x) \quad \text{avec } r(x) \text{ négligeable devant } x^2 \text{ quand } x \to 0$$

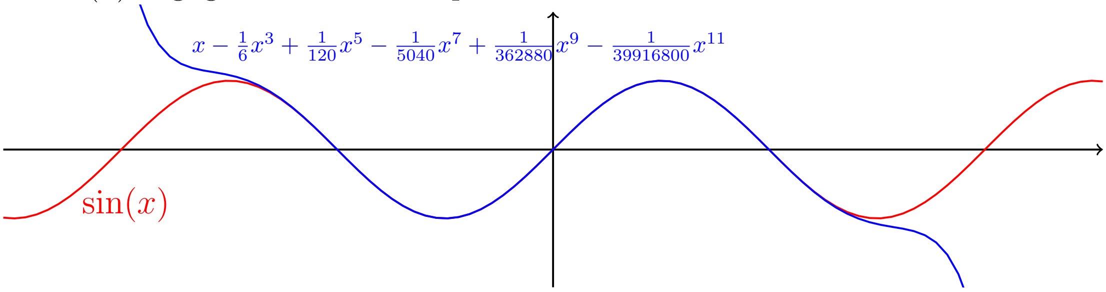
ce qui veut dire que f est approchée par un polynôme d'ordre 2 en négligeant des termes d'ordre plus petit près de 0.

Cette logique existait dès le début du calcul infinitésimal. Newton écrivait sous la forme $(x + o)^3 = x^3 + 3ox^2 + 3o^2x + o^3$ et disait par exemple que le terme o^3 était négligeable pour o petit. Leibniz utilisait la notation $\mathrm{d}x$ et négligeait les termes du type $\mathrm{dd}x$ devant $\mathrm{d}x$. L'idée d'approcher une fonction par un polynôme est très naturelle et importante. En effet, c'est le seul moyen de calculer les valeurs d'une fonction puisque les additions et multiplications sont les seuls calculs que l'on peut vraiment faire, à la main ou par une machine. Ainsi, toutes les courbes que l'on calcule et dessine ne sont que des polynômes. La police de caractères dans laquelle est écrite ce cours est elle aussi composée de courbes codées à l'aide de polynômes.

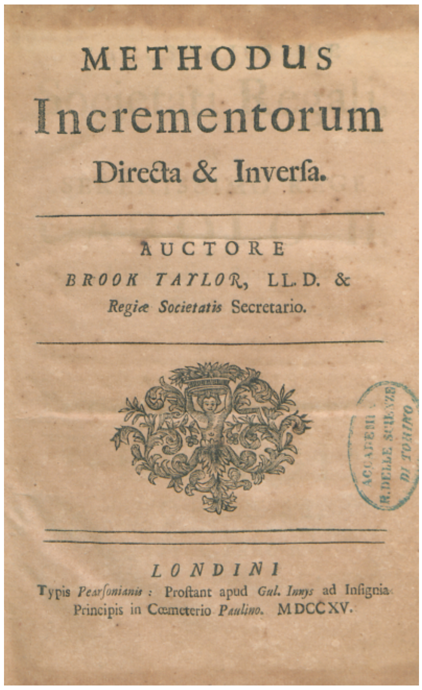
Nous verrons par exemple l'approximation pour x proche de 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + r(x)$$

avec $r(x)$ négligeable devant x^{11} près de 0.



Écrite ainsi, cette approximation semble tombée du ciel. Le but de ce chapitre est de comprendre d'où elle vient et comment obtenir de telles approximations.



METHODUS
Incrementorum
Directa & Inversa.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL. D. &
Regiæ Societatis Secretario.

LONDINI
Typis Pearsonianis : Prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Cœmeterio Paulino. MDCCXV.

Brook Taylor (1685-1731, Angleterre) est le nom qui est resté associé aux développements limités. Mais bien d'autres mathématiciens ont été de l'aventure : Newton, Leibniz ou Lagrange que nous avons déjà vus, ainsi que Pierre Fermat, William Hery Young ou John Machin par exemple. Comme on peut le voir sur son portrait, Taylor a aussi étudié la géométrie projective et son utilisation en peinture, ainsi que les liens entre mathématiques et musique.

1 Équivalence et termes négligeables

En mathématique, les symboles $\simeq$ ou $\gg$ n'ont pas de sens. En fait, même en physique, il faut préciser leur sens (selon quel ordre d'approximation). Dans cette partie, nous allons introduire les notions plus rigoureuses qui sont utilisées en mathématiques.

Définition 4.1

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions définies près de x_0. On dit que **f est équivalente à g près de x_0** (ou « en x_0 » ou « quand $x \to x_0$ ») et on note $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$ si $f(x)/g(x) \to 1$ quand $x \to x_0$ (ou plus simplement $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ ou même $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas ambiguïté).

! Par définition, on ne peut être équivalent à 0.

! Dans la définition précédente et toutes celles de ce chapitre, l'endroit x_0 que l'on considère est important car les définitions dépendent du point considéré. Il faut toujours que ce x_0 soit bien précisé, au minimum au début d'un calcul ou d'un exercice.

Proposition 4.2

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Quand $x \to x_0$, la relation « $\sim_{x_0}$ » est une relation d'équivalence :

1. réflexivité : $f(x) \sim f(x)$,
2. symétrie : $f(x) \sim g(x)$ si et seulement si $g(x) \sim f(x)$,
3. transitivé : si $f(x) \sim g(x)$ et si $g(x) \sim h(x)$ alors $f(x) \sim h(x)$.

Démonstration : Par définition, la réflexivité est claire puisque $f(x)/f(x) = 1 \to 1$. Si $f(x) \sim g(x)$ alors $f(x)/g(x) \to 1$ mais alors $g(x)/f(x) \to 1/1 = 1$ et donc $g(x) \sim f(x)$. Enfin, si $f(x) \sim g(x)$ et si $g(x) \sim h(x)$, alors $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \to 1$ et donc $f(x) \sim h(x)$. $\square$

Les règles de manipulation des équivalents sont les suivantes.

Proposition 4.3

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On a $f(x) \sim_{x \to x_0} a$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Démonstration : Par définition, $f(x) \sim a$ est équivalent à $f(x)/a \to 1$ et donc à $\lim f(x) = a$. $\square$

Proposition 4.4

Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $g(x)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand $x \to x_0$, alors $f(x)$ a la même limite en x_0.

Démonstration : On a $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)$ et comme $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ par définition, il suffit de faire le produit des limites. $\square$

Proposition 4.5

Quand $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on a $f(x) \sim g(x)$ si et seulement si $1/f(x) \sim 1/g(x)$.

Démonstration : En revenant aux définitions, cela correspond juste à $\frac{1/f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{f(x)}$ et donc à $g(x) \sim f(x)$. $\square$

Proposition 4.6

Quand $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et si $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$.

Démonstration : C'est encore une fois clair en revenant aux définitions. En effet, on a $\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \times \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$. $\square$

Proposition 4.7

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = y_0$ et que $f(y) \sim g(y)$ quand $y \to y_0$. Alors $f(\phi(x)) \sim g(\phi(x))$ quand $x \to x_0$.

Démonstration : Encore une fois, il suffit de revenir à la définition et d'utiliser les règles sur les limites (ici la composition de limites). $\square$

La conclusion de toutes ces règles, c'est que les équivalences fonctionnent bien pour gérer des produits et des fractions et pour obtenir des limites.

! On ne peut pas sommer des équivalents en général. Par exemple si $f(x) = x + \sqrt{x}$ et $g(x) = x$, on a $f(x) \sim g(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$. Mais $f(x) - g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas équivalent à 0 (d'ailleurs rien n'est équivalent à 0). On peut retenir que les équivalents donnent le terme principal (le premier ordre de grandeur) mais que si deux termes principaux s'annulent lors d'une somme, alors on ne peut prédire ce qu'il reste (il faudrait connaître les ordres suivants).

Exemples :

- Par définition, si f est dérivable en x_0, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ quand $x \to x_0$. Donc si $f'(x_0)$ est non nul, alors $(f(x) - f(x_0)) \sim_{x_0} f'(x_0)(x - x_0)$. On trouve en particulier :

$$\text{quand } x \to 0\ , \quad \sin(x) \sim x \quad \text{et} \quad \ln(1 + x) \sim x\ .$$

- On a $\frac{x+x^2}{x} = 1 + x \to 1$ quand $x \to 0$. Donc $x + x^2 \sim x$ quand $x \to 0$.

- On veut calculer la limite de $\frac{(x+x^2)^3 \ln(1+2x)}{\sin^2(x^2)}$ quand $x \to 0$. Il s'agit d'une forme indéterminée, mais d'après les calculs précédents et les propositions :

$$\frac{(x + x^2)^3 \ln(1 + 2x)}{\sin^2(x^2)} \sim \frac{x^3.2x}{(x^2)^2} = 2 \to 2 \qquad \text{quand } x \to 0\ .$$

On obtient donc que $\frac{(x+x^2)^3 \ln(1+2x)}{\sin^2(x^2)} \to 2$ quand $x \to 0$.

Les équivalents sont pratiques pour des calculs « au premier ordre » mais il faut les voir comme une simple notationet et on fera très attention en les manipulant. En particulier, on ne peut faire des calculs avec des égalités en les utilisant car il s'agit seulement de limites. Les deux notions suivantes sont beaucoup plus commodes pour des calculs généraux.

Définition 4.8

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions définies près de x_0. On dit que f **est négligeable devant** g **près de** x_0 (ou « f est un petit o de g ») et on note $f(x) = o(g(x))$ si $f(x)/g(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Définition 4.9

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions définies près de x_0. On dit que f **est dominé par** g **quand** $x \to x_0$ (ou « f est un grand $\mathcal{O}$ de g ») et on note $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ si $|f(x)/g(x)|$ est borné dans un voisinage de x_0.

! On fera bien une différence d'écriture entre le « petit o » et le « grand $\mathcal{O}$ ». Outre la taille, il est d'usage que le « petit o » soit juste un rond alors que le « grand $\mathcal{O}$ » soit calligraphié et peut-être pourvu d'une boucle.

On peut comprendre l'équivalence comme une égalité au sens des comportements asymptotiques (ou des limites). Le fait d'être négligeable serait alors un « strictement inférieur » alors que la domination serait une sorte d'« inférieur ou égal ». C'est très important d'avoir cela en tête pour comprendre comment fonctionnent les différents résultats mathématiques et les calculs. Mais attention qu'il ne s'agit que d'une représentation grossière qui ne sera jamais une preuve.

! En mathématique, $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \to x_0$ veut dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (intuitivement « inférieur ou égal » en terme de comportement). Mais en informatique, l'usage est parfois qu'il existe $M > 0$ tel que $\frac{1}{M}|g(x)| \leq |f(x)| \leq M|g(x)|$ (intuitivement « du même ordre de grandeur » en terme de comportement).

Les propositions suivantes permettent de faire des calculs impliquant des « petits o ». Pour ce chapitre, le plus important sera l'application des propositions qui suivent dans pour les puissances de x comme énoncée à la partie 3. Dans toutes les propositions suivantes, x_0 est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ c'est-à-dire un réel ou $\pm\infty$ et f et g sont deux fonctions définies et non nulles près de x_0. Tous les équivalents et comparaisons sont sous-entendues avoir lieu quand $x \to x_0$.

Proposition 4.10

Si $\lambda \neq 0$ alors $o(\lambda f(x))$ et $\lambda o(f(x))$ sont aussi des termes $o(f(x))$. Un terme $o(f(x)) + o(f(x))$ est aussi un terme $o(f(x))$.

Démonstration : Si $h(x)$ est tel que $h(x) = o(\lambda f(x))$, alors $\frac{h(x)}{f(x)} = \lambda \frac{h(x)}{\lambda f(x)} \to 0$. Les autres propositions se démontrent de la même façon. $\square$

On notera bien le principe de la démonstration : $o(\lambda f(x))$ n'est qu'une notation pour un terme $h(x)$. Il faut introduire ce terme pour le manipuler autrement que sous sa caractéristique $o(\lambda f(x))$. Toutes les démonstrations suivantes reposent sur la même idée et des calculs triviaux.

Proposition 4.11

Un terme $o(f(x))o(g(x))$ est aussi un terme $o(f(x)g(x))$. En particulier, un terme $(o(f(x)))^k$ est un terme $o(f(x)^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration : Soient u et v telles que $u(x) = o(f(x))$ et $v(x) = o(g(x))$. On a $\frac{u(x)v(x)}{f(x)g(x)} = \frac{u(x)}{f(x)} \cdot \frac{v(x)}{g(x)} \to 0$. $\square$

Proposition 4.12

Un terme $o(o(f(x)))$ est aussi un terme $o(f(x))$.

Démonstration : Soit u telle que $u = o(o(f(x)))$, c'est-à-dire qu'il existe v telle que $u(x) = o(v(x))$ et $v(x) = o(f(x))$. On a alors $\frac{u(x)}{f(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{v(x)}{f(x)} \to 0$. $\square$

Proposition 4.13

On a $f(x) = g(x) + o(g(x))$ quand $x \to x_0$ si et seulement si $f(x) \sim g(x)$ en x_0.

Démonstration : Par définition, si $f(x) = g(x) + o(g(x))$, on a $f(x)/g(x) = 1 + o(g(x))/g(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. Réciproquement, si $f(x) \sim g(x)$ en x_0, on pose $\varepsilon(x) = f(x)/g(x) - 1$ qui tend vers 0 quand $x \to x_0$. On a bien $f(x) = g(x) + g(x)\varepsilon(x)$ et $g(x)\varepsilon(x) = o(g(x))$. $\square$

Proposition 4.14

Si $f(x) \sim g(x)$ près de x_0 alors $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \to x_0$.

Démonstration : Comme $|f(x)/g(x)|$ tend vers 1, cette quantité est bornée dans un voisinage de x_0 par un majorant $M > 0$. On a alors que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ près de x_0. $\square$

Proposition 4.15

Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ près de x_0 alors un terme $o(f(x))$ est aussi un terme $o(g(x))$. En particulier, si $f(x) \sim g(x)$ près de x_0 les notations $o(f(x))$ et $o(g(x))$ sont interchangeables.

Démonstration : Si on a $|f(x)| \leq M|g(x)|$ près de x_0 et si $h(x) = o(f(x))$, alors $\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{h(x)}{f(x)}\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| \to 0$. □

Il faut bien compredre que les « petits o » sont un raccourci pour noter un terme qu'on n'a pas envie de détailler. Comme il s'agit d'un vrai terme, on peut faire avec tous les calculs que l'on veut avec des égalités selon les règles usuelles :

- ce terme « petit o » ne peut être négligé et retiré d'une égalité sans raison sous peine de perdre l'égalité. Par exemple $e^x = 1 + x + o(x)$ près de 0 est vrai mais $e^x = 1 + x$ est faux.

- le calcul sera toujours correct du moment que l'on garde tous les termes. Par exemple, près de 0, $(1 + o(x))^2 = 1 + 2o(x) + (o(x))^2$ est vrai, même si à cette étape, on n'utilise pas que $2o(x)$ peut s'écrire simplement $o(x)$ ni que $(o(x))^2$ s'écrit plus simplement $o(x^2)$.

- on peut utiliser les simplifications ci-dessous comme dire que $o(x) + o(x^2) = o(x)$ quand $x \to 0$. Dans ce cas, on n'a pas éliminé $o(x^2)$: on a juste dit que la somme $o(x) + o(x^2)$ est elle-même négligeable devant x. Mais les deux termes $o(x)$ et $o(x^2)$ sont toujours présents dans le regroupement $o(x)$ et il y a bien égalité.

En général, on se ramène à un calcul proche de $x = 0$. Dans ce cas là, les règles précédentes deviennent comme suit. Il est exactement le même pour les termes $\mathcal{O}(x^n)$.

Formulaire quand x tend vers 0

- si $m > n$, $x^m = o(x^n)$ et $o(x^m) = o(x^n)$.
- si $m \geq n$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n + x^m) = o(x^n)$.
- si $\lambda \neq 0$, $\lambda o(x^n) = o(\lambda x^n) = o(x^n)$
- $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $\big(o(x^n)\big)^m = o(x^{nm})$
- $f(x) = \lambda x^n + o(x^n)$ si et seulement si $f(x) \sim \lambda x^n$.

Tous les calculs peuvent se faire de façon habituelle avec les termes $o(x^n)$ puisqu'il s'agit de vrais termes que l'on note juste d'une façon raccourcie en ne gardant que la seule propriété de comparaison qui nous intéresse.

Exemple :

On veut développer un terme $(1+x+o(x))^2$ le plus précisément possible quand $x \to 0$. Le calcul standard du développement du carré donne

$$(1+x+o(x))^2 = 1 + x^2 + (o(x))^2 + 2x + 2o(x) + 2xo(x) \ .$$

En utilisant les règles ci-dessus, on obtient

$$(1+x+o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2) + 2x + o(x) + o(x^2) \ .$$

Puis on avise que le premier terme négligé est un $o(x)$. Cela ne sert à rien de mettre des précisions plus grandes du type x^2 ou $o(x^2)$ car elles n'ajoutent aucune information puisque $o(x) + x^2 = o(x) = o(x) + 42x^3 = o(x) + 7o(x^2) = \ldots$. Les règles ci-dessus donnent finalement

$$(1+x+o(x))^2 = 1 + 2x + o(x) \ .$$

On notera qu'il s'agit depuis le début d'égalités. Toutes les écritures sont donc correctes. Mais la dernière est celle qui nous donne de façon la plus simple l'information voulue.
Avec l'habitude, on ne prendra même pas la peine de marquer ni même de calculer les termes inutiles si on sait d'avance que tout ce qui est négligeable devant x sera négligé.

2 Les développements limités

Définition 4.16

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie près de x_0. On appelle **développement limité de f à l'ordre n en x_0** un développement du type

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

c'est-à-dire une approximation polynomiale d'ordre n de f près de x_0.

Dans la définition ci-dessus, le terme $o((x-x_0)^n)$ est bien à comprendre « négligeable quand $x \to x_0$ » puisque toute l'idée est d'approcher la fonction près de x_0. On peut parler <u>du</u> développement limité d'une fonction, car il est unique.

Proposition 4.17 (unicité du développement limité)

Soit $m \geq n$. Si

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \\ &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots + b_m(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m) \end{aligned}$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k \leq n$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde. Supposons que $a_k \neq b_k$ pour un $k \leq n$ et prenons le plus petit k vérifiant cela. En éliminant les termes égaux et en utilisant les règles de manipulations des « petits o » (voir la partie 3 par exemple), on obtient que $0 = f(x) - f(x) = (a_k - b_k)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$ et donc, en divisant par $(a_k - b_k) \neq 0$, que $(x-x_0)^k = o((x-x_0)^k)$ ce qui est absurde. □

Notons que la proposition 4.17 nous dit aussi comment tronquer un développement limité que l'on aurait poussé trop loin. En effet, si on a un développement limité à l'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

alors les propriétés des « petits o » nous disent que si $k \leq n$, on peut tronquer le développement précédent en

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k) \ .$$

On obtient donc un développement à l'ordre k et l'unicité de ce développement assure qu'il s'agit *du* développement à l'ordre k.

On pourrait ensuite lister les manipulations des développements limités (le développement d'une somme est la somme des développements etc.). Mais il est plus simple de retenir comment fonctionnent les calculs concrètement et nous renvoyons à la partie 3.

Le théorème 3.38 énonce que f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 et en prime, celui-ci est $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$. L'équivalence est plus subtile si on regarde des ordres plus élevés. Mais les résultats suivants vont nous donner l'existence des développements limités pour les fonctions qui sont suffisamment dérivables (sans l'implication réciproque).

Le premier résultat de développement donne une première formule qui nous sera utile pour le théorème qui suit mais n'est pas la plus importante à retenir. La deuxième expression est celle qui sera appliquée dans les développements pratiques. Notez qu'elle donne un développement à l'ordre n en précisant que le terme négligé est d'ordre $n+1$.

Théorème 4.18 (développement de Taylor-Lagrange)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $n \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in I$, il existe ω_x entre x et x_0 tel que

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\omega_x)\ .$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + &\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathcal{O}\big((x-x_0)^{n+1}\big)\ . \end{aligned}$$

Démonstration : Si $x = x_0$, c'est évident. Supposons maintenant $x \neq x_0$. Pour tout t entre $x \neq x_0$ et x_0, on pose

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K(x-t)^{n+1} \\ &= f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2} f''(t) - \ldots \\ &\quad - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - K(x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

avec K le nombre qui assure $g(x_0) = 0$ (K est uniquement déterminé par cette équation car $(x-x_0) \neq 0$). Par ailleurs, on a $g(x) = f(x) - f(x) = 0$ et $t \mapsto g(t)$ est dérivable car son expression ne fait intervenir que des dérivées au plus $n-$ième de f qui est supposée de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g et il existe ω_x entre x et x_0 tel que $g'(\omega_x) = 0$. En utilisant les règles de dérivation et une simplification en cascade, le calcul donne

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t) + f'(t) - (x-t)f''(t) + (x-t)f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + K(n+1)(x-t)^n \\ &= (x-t)^n \left(\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) + K(n+1) \right) \end{aligned}$$

On en déduit qu'au point ω_x qui annule la dérivée, on a

$$K = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\omega_x)\ .$$

Il reste encore à revenir au fait que K vérifie aussi $g(x_0) = 0$ pour obtenir la première formule de l'énoncé.

Concernant la deuxième partie, il suffit de voir que, comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est bornée près de x_0. On peut donc majorer le dernier terme par

$$\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\omega_x)\right| \leq M|x-x_0|^{n+1} .$$

□

Le deuxième théorème de développement est légèrement différent. On demande à f d'être de classe $\mathcal{C}^n$ à la place de $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui est plus naturel car seules des dérivées d'ordre au plus n apparaissent dans le développement. Mais on paye cela en ayant un terme en $o((x-x_0)^n)$ à la place de $\mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$.

Théorème 4.19 (développement de Taylor-Young)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $n \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + &\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) . \end{aligned}$$

Démonstration : On applique le théorème 4.18 à l'ordre $n-1$: il existe ω_x entre x_0 et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{(n)!}f^{(n)}(\omega_x) .$$

On pose maintenant

$$\varepsilon(x) = f^{(n)}(\omega_x) - f^{(n)}(x_0) .$$

Comme ω_x est coincé entre x et x_0, on a que $\omega_x \to x_0$ quand $x \to x_0$. Comme $f^{(n)}$ est supposée continue, on a donc $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{(n)!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{(n)!}\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) . \end{aligned}$$

□

Pour être complet, nous donnons cette troisième forme qui est la seule qui donne un reste exact. Pour les calculs concrets des exercices de ce cours, elle ne donne aucune précision supplémentaire mais elle sera utile les années suivantes.

Théorème 4.20 (développement avec reste intégral de Laplace)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $n \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

Démonstration : On part du cas connu pour $n = 0$ qui dit simplement que

$$f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \big(f(x) - f(x_0)\big) = f(x) \ .$$

On fait ensuite une récurrence sur n. Grâce à une intégration par parties, on transforme le reste du rang $n-1$ en

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

En ce qui concerne ce cours, ces théorèmes vont surtout nous servir à obtenir les développements limités classiques qu'il faudra retenir par cœur. Par exemple, si on considère $f : x \mapsto e^x$, c'est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $n-$ième est $f^{(n)}(x) = e^x$. Le théorème 4.18 nous donne donc le développement à l'ordre n comme ci-dessous.

Quand $x \longrightarrow 0$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \mathcal{O}\big(x^{2p+2}\big)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \mathcal{O}\big(x^{2p+3}\big)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$$

Dans le cadre ci-dessus, nous précisons que le reste est de l'ordre de la puissance suivante du développement (notons le cas des sinus et cosinus où on gagne même un ordre puisque le développement ne contient qu'une puissance sur deux). Mais si on demande un développement à l'ordre n en zéro, il suffit par définition de mettre un reste $o(x^n)$. Un reste du type $\mathcal{O}(x^{n+1})$ est plus précis, mais cette précision n'est pas forcément exigée.

Certains cas particuliers des puissances de $(1+x)^\alpha$ sont très utilisés : $\alpha = -1$ et $\alpha = 1/2$ (les puissances $\alpha \in \mathbb{N}$ sont aussi utiles… mais ce sont carrément des polynômes et on préfère faire le calcul comme un développement classique d'une puissance). Il est donc bien de les connaître individuellement, même s'ils sont déjà inclus dans la formule générale.

Quand $x \longrightarrow 0$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big)$$

On notera les points ci-dessous. Ils se déduisent facilement des développements de Taylor même s'ils sont en fait plus généraux et valables même pour des fonctions qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^n$. S'il est important de les remarquer, c'est qu'ils sont souvent utiles pour retenir les formules ci-dessus ou bien pour repérer rapidement des erreurs dans un calcul.

- *Parité :* le développement limité d'une fonction paire (respectivement impaire) en $x = 0$ ne contient que des puissances paires (respectivement impaires). On ne peut donc pas confondre les développements du sinus et du cosinus.

- *dérivation et intégration :* si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et de développement $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de développement le « dérivé » de celui de f, c'est-à-dire $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = +o(x^{n-1})$. Attention : cela n'est pas obtenu en dérivant vraiment le développement car on ne sait rien dire sur la dérivation du terme $o(x^n)$. C'est juste une application du théorème 4.19. Inversement, une primitive F de f a un développement obtenu par une primitive du développement de f (attention à la valeur de la constante !) $F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$. On s'aperçoit donc qu'on peut obtenir le développement du logarithme à partir de celui de $1/(1+x)$ par intégration et qu'il n'est pas indispensable de le connaître par cœur si on sait le retrouver ainsi rapidement. On peut aussi noter que l'exponentielle a comme développement le seul qui vaut 1 en $x = 0$ et qui est invariant par dérivation ou intégration, puisque la dérivée de $x^n/n!$ est $x^{n-1}/(n-1)!$.

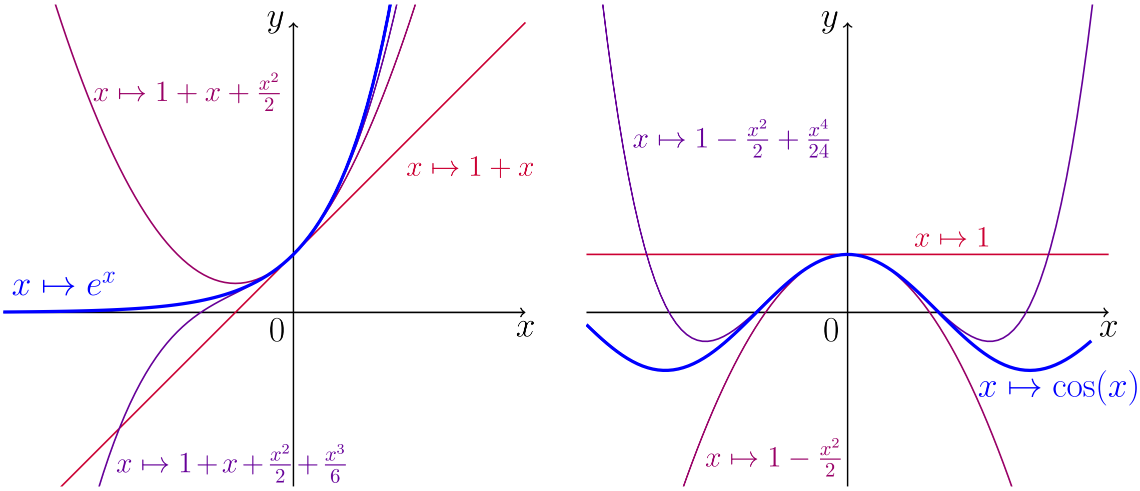


FIGURE 4.1 – *Les courbes de l'exponentielle et du cosinus, ainsi que les courbes correspondants aux premiers développements limités en $x = 0$. En rouge, on voit la droite tangente. Suit le développement contenant le premier terme non linéaire qui donne la position de la courbe par rapport à sa tangente. Le développement suivant augmente la précision mais n'apporte pas un grand changement qualitatif. On remarque qu'augmenter l'ordre du développement augmente bien la précision et la zone sur laquelle l'approximation polynomiale est correcte. Mais il ne s'agit que d'une approximation locale et le développement limité en $x = 0$ devient vite mauvais quand on s'éloigne de ce point.*

3 Techniques pour les calculs concrets

Le principe de base est comme souvent :

1. se ramener aux développements usuels près de 0 donnés plus haut
2. utiliser les règles de calculs de la partie 1
3. simplifier tous les termes inutiles

Voici quelques techniques et astuces qu'on utilisera.

- *Ordre des développements intermédiaires :* si on souhaite un développement à l'ordre n d'une expression, la question se pose de savoir à quel ordre on développe les fonctions intervenant dans l'expression. Il n'y a en fait pas de règle car des simplifications ou des multiplications par des puissances peuvent changer l'ordre nécessaire. Le plus important est de retenir qu'aucun calcul n'est faux. On peut soit avoir obtenu un résultat pas assez précis, et donc on recommence avec plus de précision (et en ayant déjà fait le calcul, on peut anticiper laquelle est la bonne), soit on a un résultat trop précis et donc il suffit de le tronquer (on a fait des calculs inutiles mais tant pis, ça a au moins servit à s'entraîner). Par exemple, on veut un développement de sinc à l'ordre

2 près de 0. Si on développe le sinus simplement à l'ordre 2, on a

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x) \ .$$

Ce résultat n'est pas faux, mais il n'est pas à la précision demandée. On voit que c'est dû à une division par x qui diminue l'ordre. On reprend donc le calcul en prenant l'ordre 3 pour le sinus

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

ce qui est ce qu'on voulait.

- *Gestion des termes inutiles :* lors des calculs, on obtient souvent des termes d'ordre plus petit que le reste négligé. Leur précision est inutile et on peut les retirer. Par exemple, dans le calcul fait plus haut

$$\begin{aligned}(1 + x + o(x))^2 &= 1 + x^2 + (o(x))^2 + 2x + 2o(x) + 2xo(x) \\ &= 1 + 2x + o(x) + x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + 2x + o(x)\end{aligned}$$

on a calculé x^2 avant de l'inclure dans le reste $o(x)$. Ce calcul est parfaitement correct, mais on a calculé des termes avant de les supprimer : c'est inutile. Si on anticipe que le reste sera en $o(x)$, il suffit de calculer les termes non négligeables et de ne pas perdre de temps avec les autres. Avec l'habitude, on commencera par regarder le terme de reste, ici c'est $o(x)$ qui vient de la multiplication $1 \times o(x)$. Puis on évalue chaque terme du développement en se posant la question de son ordre par rapport à $o(x)$. Si le terme est négligeable, on ne cherche pas à le calculer précisément et ce n'est même pas la peine de l'écrire. Ainsi seuls les termes 1×1 et $2 \times 1 \times x$ du développement du carré ne sont pas négligeables par rapport à x. On n'a même pas à préciser les autres et le calcul plus haut devient directement

$$(1 + x + o(x))^2 = 1 + 2x + o(x)$$

C'est avec l'entraînement qu'on progresse sur cette technique. Mais il est important de rappeler que le calcul avec tous les termes marqués est correct quand même. Tant qu'on n'est pas à l'aise, on peut se contenter de marquer tous les termes puis les éliminer dans un deuxième temps.

- *Méthode pour développer un quotient :* pour développer une fonction du type f/g près de $x = 0$, on voit le quotient comme le produit de f par $1/g$. On doit alors développer f, ce qui est supposé faisable, mais que faire de $1/g$? L'idée est d'utiliser le développement de $1/(1 \pm u)$ pour u proche de 0. On développe g et on factorise par le terme dominant. On obtient alors un terme du type $\alpha x^k \frac{1}{1+ax+bx^2+\ldots}$ et on développe la fraction comme $1/(1 + u)$ avec $u = ax + bx^2 + \ldots$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Voici un exemple pour mieux comprendre. Mettons qu'on veuille développer $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{\sin x}$ à l'ordre 2 près de $x = 0$. On écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-1}{\sin x} &= \frac{\big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\big)-1}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{-\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \\
&= \Big(-\frac{x}{2}+o(x^2)\Big)\cdot\frac{1}{1-\big(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\big)} \\
&= \Big(-\frac{x}{2}+o(x^2)\Big)\cdot\Big(1+\big(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\big)+o\big(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\big)\Big) \\
&= \Big(-\frac{x}{2}+o(x^2)\Big)\cdot\Big(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\Big) \\
&= -\frac{x}{2}+o(x^2)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le développement de $1/(1-u)$ avec $u = \big(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\big)$. On notera d'une part qu'on a anticipé la simplification des puissances en développant à l'ordre 3 les fonctions trigos. D'autre part on a utilisé de la gestion de reste comme $o(u) = o\Big(\big(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\big)^2\Big) = o(x^4)$ et on n'a pas calculé dans la dernière ligne les termes qui étaient du type $o(x^2)$. Par exemple, c'est inutile de calculer $-\frac{x}{2}\times\frac{x^2}{6}$ car c'est une puissance d'ordre 3 (on aurait donc pu simplifier les calculs si on avait anticipé cela).

- *Développement en un point $x \neq 0$:* les développements limités à apprendre par cœur ne sont que pour x près de 0. Si on souhaite un développement pour x proche d'une autre valeur x_*, le plus simple est de faire un changement de variable $x = x_* + h$ et on se ramène à un développement pour h proche de 0. Quand on n'arrive pas à se ramener à des développements standards, alors on peut être contraint de revenir aux théorèmes de développements de Taylor mais c'est à éviter en général. Par exemple, si on veut développer $\sin(x)$ à l'ordre 2 pour x proche de $\pi/4$, on pose $x = \pi/4 + h$ et on a quand $x \to \pi/4$ (i.e. quand $h \to 0$),

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\big(\frac{\pi}{4}+h\big) = \sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\cos(h)+\sin(h)\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos(h)+\sin(h)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1-\frac{h^2}{2}+h+o(h^2)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\big(x-\frac{\pi}{4}\big)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\big(x-\frac{\pi}{4}\big)^2+o\Big(\big(x-\frac{\pi}{4}\big)^2\Big)
\end{aligned}$$

Exemples autour du développement de la tangente : le développement de la tangente n'a pas une régularité qui lui permet de rentrer dans la liste des développements usuels. Mais il est classique de le calculer. Il y a plusieurs façon de faire et pour donner des exemples de calcul, nous allons en voir plusieurs pour trouver le développement de $\tan x$ à l'ordre 5 pour x proche de 0.

- *Par les formules de Taylor :* c'est peut-être le premier qui vient à l'esprit mais ce n'est pas en général une bonne idée car il faut calculer les cinq premières dérivées de la tangente et c'est rapidement fastidieux, la cinquième dérivée étant par exemple

$$\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}\tan x = 120\tan^6(x) + 240\tan^4 x + 136\tan^2 x + 16 \ .$$

Comme cela n'illustrera pas les techniques usuelles, nous laissons le calcul complet au lecteur courageux qui se convaincra qu'il ne s'agit pas de la façon la plus rapide.

- *Par le développement du quotient :* la technique la plus standard est de simplement revenir à la définition de la tangente.

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= \Big[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big] \cdot \Big[1 + \big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\big) + \big(\frac{x^2}{2}\big)^2 + o(x^4)\Big] \\
&= \Big[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big] \cdot \Big[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\Big] \\
&= x\big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4\big) - \frac{x^3}{6}\big(1 + \frac{x^2}{2}\big) + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\
&= x + \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\big)x^3 + \big(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\big)x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

- *Par intégration :* comme la tangente est infiniment dérivable là où elle est définie, les formules de Taylor nous donne le lien entre son développement et celui de sa dérivée. On va donc commencer par développer à l'ordre 4 près de 0 la dérivée $\tan'(x) = 1/\cos^2(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2(x)} &= \frac{1}{\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^2} = \frac{1}{1 + \big(-\frac{x^2}{2}\big)^2 - 2\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= \frac{1}{1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = 1 + \big(x^2 - \frac{1}{3}x^4\big) + \big(x^2 - \frac{1}{3}x^4\big)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Puis, on intègre ce développement en faisant attention à la constante… qui vaut 0 puisque $\tan(0) = 0$. On obtient donc que, près de 0,

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \ .$$

- *Par dérivation :* on utilise le même principe que ci-dessus, mais sous la forme $(\ln(\cos x))' = -\tan x$. On a

$$\begin{aligned}-\ln(\cos x) &= -\ln\big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\big)\\ &= -\Big[\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!}\big) - \frac{1}{2}\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\big)^2 + \frac{1}{3}\big(-\frac{x^2}{2}\big)^3 + o(x^6)\Big]\\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{16}{6!}x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

Donc on sait que $\tan x$ qui est la dérivée de $-\ln(\cos x)$ a pour développement

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\ .$$

On fera attention à la nuance suivante. Nous n'avons pas formellement dérivé le premier développement pour obtenir le second car on ne sait rien dire sur la dérivée du terme $o(x^6)$ (qui pourrait même ne pas être dérivable). Mais on sait que les fonctions sont suffisamment régulières pour appliquer le théorème 4.19 (Taylor-Young) et celui-ci nous donne le lien entre les deux développements.

- *Par une équation différentielle :* grâce au théorème 4.19, on sait que la tangente admet un développement limité d'ordre 5 en $x = 0$. Par ailleurs, comme la tangente est impaire, on sait que ce développement n'a que des puissances impaires. Donc il existe a, b et c tels que $\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ près de 0. Par ailleurs, le théorème 4.19 nous dit aussi que la dérivée de la tangente a le développement $\tan' x = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4)$. Comme $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, on a donc

$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4) = 1 + (ax + bx^3 + o(x^4))^2 = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^4)\ .$$

Par identification des développements (cf proposition 4.17), on a donc $a = 1$, $3b = a^2$ et $5c = 2ab$. On trouve donc $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

4 Applications

4.1 Calcul de limites

Pour lever une forme indéterminée dans une limite, la question est de savoir quelle partie de l'expression l'emporte sur l'autre. On peut souvent s'en sortir avec des équivalents, mais il y a des cas où les termes principaux que sont les équivalents se compensent et disparaissent. Dans ce cas, on n'a pas forcément assez de précision pour conclure. Quand on procède par développement limité, cela signifie simplement qu'il faut pousser le développement plus loin jusqu'à avoir suffisamment de termes pour lever l'indétermination.

Exemples :

- On cherche la limite quand x tend vers 0 de $f(x) = \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$. C'est une forme indéterminée du type « 0/0 ». En utilisant les équivalents en haut, on obtient juste que $e^x - \cos x - \sin x = 1 + o(1) - 1 + o(1) - x + o(x) = o(1)$. Si on connaît plus d'équivalents, on peut aller jusqu'à $e^x - \cos x - \sin x = (e^x - 1) - (\cos x - 1) - \sin x = o(x)$, ce qui ne conclut toujours pas. On est amené à pousser le développement jusqu'aux termes en x^2 qui correspondent au x^2 en dénominateur.

$$\begin{aligned} e^x - \cos x - \sin x &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + o(x^2)) \\ &= x^2 + o(x^2) \ . \end{aligned}$$

On conclut donc que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

- On cherche la limite quand x tend vers $+\infty$ de $g(x) = x^2\big(e^{1/x} - e^{1/(1+x)}\big)$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ». En utilisant l'équivalent de $e^u - 1$ quand $u \to 0$ (si connu), on peut écrire

$$g(x) = x^2\Big((e^{\frac{1}{x}} - 1) - (e^{\frac{1}{1+x}} - 1)\Big) = x^2\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = o(x)$$

mais cela ne permet pas de conclure car ce terme $o(x)$ peut aussi bien tendre vers $+\infty$ comme $\ln x$ que tendre vers 0 ou même ne pas avoir de limite. Pour y voir plus clair, il faut faire le développement

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}} &= \Big(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big) - \Big(1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + o\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + o\big(\frac{1}{x^2}\big) = \frac{1}{x(1+x)} + o\big(\frac{1}{x^2}\big) \end{aligned}$$

et conclure que

$$g(x) = \frac{x^2}{x(1+x)} + o(1) \quad \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 1 \ .$$

4.2 Position par rapport à la tangente

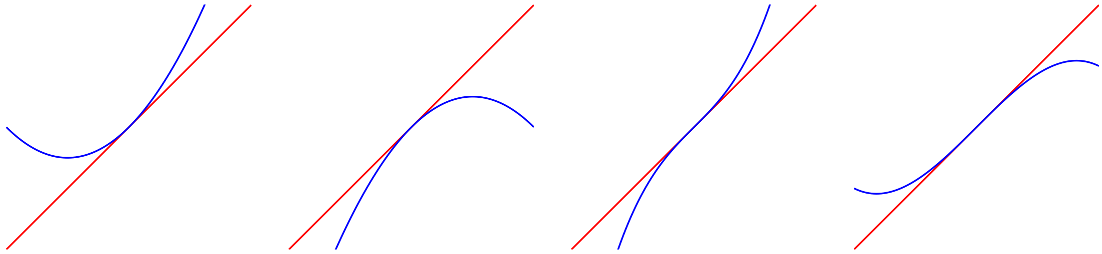
On sait déjà que la tangente à la courbe d'une fonction f dérivable en un point x_0 est donnée par le développement

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{quand } x \longrightarrow x_0 \ .$$

Pour trouver la position de la fonction f par rapport à la tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, il faut savoir le signe du reste $o(x - x_0)$ pour x proche de x_0. Pour cela, on va chercher le terme suivant non nul du développement sous la forme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + ch^k + o\big(h^k\big) \quad \text{quand } h \longrightarrow 0 \ .$$

Suivant le signe de c et suivant que h^k soit une puissance paire ou impaire, on obtient la position de la courbe.



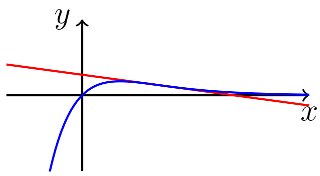
Cas $c > 0$ et k pair — *Cas $c < 0$ et k pair* — *Cas $c > 0$ et k impair* — *Cas $c < 0$ et k impair*

Exemple :

On veut connaître à quoi ressemble la fonction $f : x \mapsto xe^{-2x}$ près de $x_0 = 1$. On pose $h = x - 1$, on a

$$\begin{aligned} xe^{-2x} &= (1+h)e^{-2(1+h)} = e^{-2}(1+h)e^{-2h} \\ &= e^{-2}(1+h)\big(1 - 2h + 2h^2 - \frac{4}{3}h^3 + o(h^3)\big) \\ &= e^{-2}\big(1 - h + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\big) \end{aligned}$$

Bien entendu, on aura a priori utiliser un développement à l'ordre 2 de l'exponentielle mais on s'aperçoit alors que les termes d'ordres 2 s'annulent. On doit donc pousser le développement à l'ordre 3. On trouve que la fonction f a pour tangente en $x = 1$ la droite d'équation $y = e^{-2}(1-(x-1)) = (2-x)/e^2$. Près de 1, elle est sous cette tangente pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$: il s'agit d'un point d'inflexion de la courbe.



4.3 Asymptotes

Les développements limités peuvent servir à obtenir des développements suivant des puissances de x à tout endroit, y compris $\pm\infty$. Non seulement on obtient le premier terme du développement, ce qui correspond à l'équivalent, mais on peut aussi obtenir suffisamment de termes pour avoir une bonne idée du comportement. Un cas assez fréquent est celui de la recherche d'asymptotes. On cherche à développer une fonction f près de $\pm\infty$ sous la forme

$$f(x) = ax + b + c\frac{1}{x^k} + o\big(\frac{1}{x^k}\big)$$

avec $k > 0$ quand $x \to \pm\infty$. Cela montre que quand $x \to \pm\infty$, $|f(x) - (ax+b)| \to 0$ et donc que le graphe de f se rapproche de la droite $y = ax + b$. On dit que cette droite est *asymptote* à f en $\pm\infty$. Si besoin, le terme suivant c/x^k du développement nous donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exemples :

- On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2 + x + x^2}$. Pour pouvoir utiliser le développement de la racine carrée que l'on a appris, il nous faut un terme du type $\sqrt{1+u}$ avec $u \to 0$. L'astuce habituelle consiste à factoriser par le terme dominant

$$\sqrt{2+x+x^2} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = |x|\Big(1+\frac{1}{2}\big(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\big)-\frac{1}{8x^2}+o\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big)$$
$$= |x| + \frac{1}{2}\frac{|x|}{x} + \frac{7}{8|x|} + o\big(\frac{1}{|x|}\big)$$

On notera bien que le développement se fait par rapport à $u = \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ qui tend vers 0 quand $x \to \pm\infty$ et que les termes de reste sont petits car x est grand. On trouve deux asymptotes

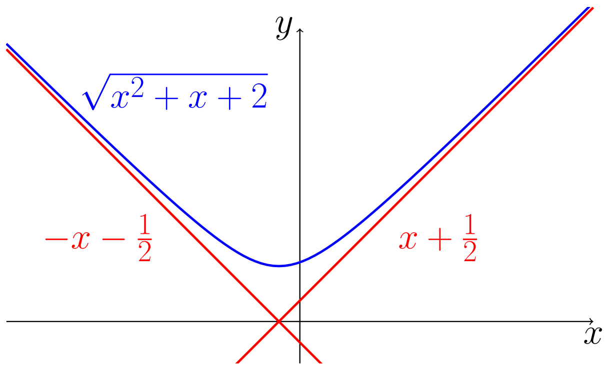
$$f(x) = x+\frac{1}{2}+o(1) \text{ quand } x \to +\infty \quad \text{et} \quad f(x) = -x-\frac{1}{2}+o(1) \text{ quand } x \to -\infty$$

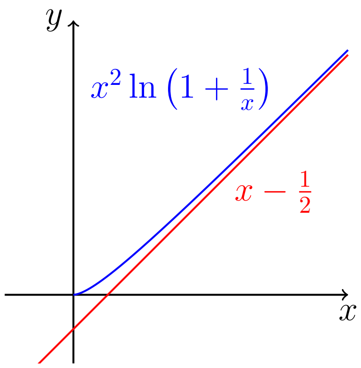
Le terme suivant $\frac{7}{8|x|}$ du développement étant toujours positif, on sait que la courbe est au-dessus de son asymptote pour $|x|$ grand.

- On regarde la fonction $g(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On effectue le développement du logarithme $\ln(1+u)$ pour $u = 1/x \to 0$ quand $x \to +\infty$. On obtient

$$x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x^2\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\big(\frac{1}{x^3}\big)\Big)$$
$$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\big(\frac{1}{x}\big)$$

La fonction g admet donc une asymptote d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ en $+\infty$. En outre, elle arrive au-dessus de son asymptote.





5 Autres exemples d'applications

• Approximation de fonctions

Comme nous avons dit dans l'introduction, remplacer une fonction par un polynôme est ce qui permet de calculer réellement les valeurs de la fonction. On pense que c'est ainsi que les mathématiciens indiens ont obtenu leurs très bonnes tables trigonométriques au Moyen Âge. C'est aussi comme cela qu'ont été calculées les premières valeurs du logarithme, la nouvelle fonction introduite par John Napier en 1614. Ce dernier utilise l'approximation $\ln(1-\varepsilon) \simeq \varepsilon$ (convention inverse de l'actuelle) pour obtenir une valeur de référence pour ε très petit puis les propriétés du logarithme pour calculer le reste de sa table.

Il est important de se rappeler que le développement limité est une bonne approximation seulement proche du point sur lequel le développement est effectué. Ainsi l'approximation

$$\sin(x) \simeq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

est correcte à environ $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ près pour $x \in [-\pi/2{,}\pi/2]$, mais elle devient rapidement mauvaise en dehors. Heureusement, on peut utiliser la périodicité et les symétries de la fonction sinus pour se ramener à l'intervalle $[-\pi/2{,}\pi/2]$.

L'approximation polynomiale est bien la méthode utilisée dans les calculettes et ordinateurs pour calculer les valeurs des fonctions comme le sinus. Mais l'approximation par développement limité a le défaut de ne pas bien répartir l'erreur. Par exemple, pour la fonction sinus, elle est nulle en zéro et maximale en $\pi/2$. On peut trouver d'autres polynômes qui ont une erreur plus répartie et pour lesquels l'erreur maximale commise est moins grande. Ces polynômes ne peuvent pas se trouver par une formule mais on a pu les calculer par ordinateur pour les intégrer dans les logiciels de calcul.

On pourrait naïvement penser qu'il est toujours possible d'approcher une fonction par son développement limité poussé suffisamment loin. En fait, c'est faux. Par exemple, le développement de $\ln(1+x)$ se rapproche des vraies valeurs de la fonction pour $x \in \,]-1{,}1]$ mais ne converge pas si $x > 1$. On peut donc utiliser l'approximation pour $x = 1$

$$\ln 2 \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots$$

mais pour $x = 2$,

$$\ln 3 \not\simeq 1 - \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{2^3}{5} + \frac{2^4}{6} \dots$$

Cette question d'approximation (ou non) par le développement limité est maintenant bien compris mathématiquement et la théorie en sera faite dans les prochaines années d'études.

• Masse relativiste et énergie cinétique

Dans la théorie de la relativité, un objet de masse au repos m_0 qui se déplace à vitesse v a une *masse relativiste* de

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où c est la vitesse de la lumière. Son énergie totale est alors $E = mc^2$. Quand v est petit par rapport à c, on utilise le développement limité

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

pour avoir

$$E = mc^2 = m_0c^2\Big(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+o\big(\frac{v^4}{c^4}\big)\Big) = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0v^2\frac{v^2}{c^2}+o+o\big(\frac{v^4}{c^2}\big)\ .$$

On obtient donc que pour des vitesses non relativistes, le gain d'énergie dû au mouvement est principalement $\frac{1}{2}m_0v^2$ et on retrouve bien l'énergie cinétique classique. Pour des vitesses un peu plus grandes, cette énergie cinétique sous-estime la vraie énergie et il y a une correction positive d'énergie à ajouter à l'énergie classique.

• Coût d'un prêt

On emprunte une somme d'argent S au taux x pendant n années. Cela signifie que l'on doit rembourser à échéance la somme $S(1+x)^n$. En général, x est petit (de l'ordre du pourcent donc du centième) mais n peut être grand. Si on effectue une approximation du type

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

on n'est pas certain que le terme $o(x^2)$ soit vraiment petit. Même les termes précédents ne sont pas spécialement petits si nx n'est pas négligeable. En fait, nx est souvent entre 0,5 et 1 donc du même ordre de grandeur que 1. Il est plus judicieux de supposer que $nx = a$ et de regarder le développement

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= (1+x)^{a/x} = e^{\frac{a}{x}\ln(1+x)}\\ &= e^{\frac{a}{x}(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))} = e^{a(1-\frac{x}{2}+o(x))}\\ &= e^a e^{-\frac{ax}{2}+o(x)} = e^a\big(1-\frac{ax}{2}+o(x)\big)\end{aligned}$$

C'est un point important à retenir : si la variable du développement (ici x) apparaît à la fois dans l'exposant et sous l'exposant, alors il faut passer à l'exponentielle pour faire les développements et les limites voulues. Le deuxième développement s'effectue bien avec x seul (non multiplié par n) donc les termes sont bien rapidement négligeable. On trouve par exemple la règle suivante : si le produit a du taux et du nombre d'année vaut environ 0,7 (emprunt à 2 % sur 35 ans par exemple, ou à 7 % sur 10 ans), alors on doit rembourser environ $e^a = 2$ fois le crédit. Le terme correctif qui suit nous indique qu'à $a = nx$ constant, il faut mieux avoir x grand, c'est-à-dire emprunter sur un temps court, quitte à avoir un plus grand taux d'intérêt.

• Approximation paraxiale d'une onde sphérique

On considère une onde sphérique émise depuis l'origine, elle est de la forme $\psi(x,y) = \frac{1}{r}e^{ikr}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Quitte à changer les coordonnées, on suppose que l'on se trouve proche de l'axe des abscisses avec $x > 0$ et y/x est petit. On peut utiliser l'approximation du premier ordre $r \simeq x$ pour l'amplitude. Mais la phase est multipliée par le nombre d'onde k qui peut être grand, on préfère donc utiliser pour elle une approximation plus précise. On a

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |x|\big(1+\frac{y^2}{x^2}\big)^{1/2} = x\big(1+\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}+\mathcal{O}(\frac{y^4}{x^4})\big)\ .$$

On trouve alors ce qu'on appelle l'approximation paraxiale de l'onde :

$$\psi(x,y) \simeq \frac{1}{x}e^{ikx}e^{\frac{iky^2}{2x}} \ .$$

Elle est utilisée pour approchée une onde dans une petite zone loin de son origine, par exemple pour la lumière d'une lampe loin d'une lentille dont on veut calculer l'effet.

À connaître en priorité :

- Savoir manipuler les termes « petits o »
- Les développements limités en 0 des fonctions classiques
- Se muscler en manipulant de nombreux développements limités
- Connaître les principes des applications de bases de la partie 4
- Savoir faire une démonstration du type de celles de la partie 1

Utile pour la suite :

- Les théorèmes de développement de la partie 2 dans toute leur généralité

Chapitre 5 : Les fonctions usuelles

On appelle *fonctions usuelles* les fonctions qui sont suffisamment utilisées pour qu'on leur donne un nom et qu'on connaisse par cœur leurs propriétés élémentaires. La liste des fonctions usuelles dépend donc de l'usage qu'en fait la personne et donc du domaine des sciences considéré. La liste qui suit est à comprendre au sens de l'analyse élémentaire en première année post-bac. Nous faisons le choix de ne pas y inclure les fonction trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques. Elles seront quand même vues pendant les TD.

Notons qu'il est évidemment impossible de donner un nom à toutes les fonctions. Il est même impossible d'avoir une liste de fonctions usuelles qui s'auto-satisfait à elle-même dans le sens où quelle que soit cette liste, on pourra toujours les combiner pour écrire une formule dont aucune primitive ne pourra s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles de cette liste.

Il y aura quelques informations nouvelles dans ce chapitre, mais son but est aussi de lister des propriétés connues pour obtenir un formulaire plus ou moins condensé. Il y a quelques informations culturelles superflues qui ne sont évidemment pas à connaître par cœur. Le plus important est de connaître l'allure du graphe et avec lui les valeurs particulières et les limites de la fonction. Ensuite, il faut connaître les dérivées et les primitives (sauf celle du logarithme qui est mentionnée mais sera mieux revue plus tard). À cela s'ajoutent les développements limités qui étaient déjà dans le chapitre précédent. Pour finir, la technique de construction de la réciproque est à bien comprendre et permet en particulier de retrouver les fonctions trigonométriques réciproques sans trop d'efforts.

1 Polynômes réels

$$P : x \in \mathbb{R} \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i. Si on a bien $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré du polynôme P. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Histoire :

Depuis les débuts de l'écriture il y a 5.000 ans, les humains savent poser les calculs comme les additions ou les multiplications. Les polynômes sont donc utilisés depuis toujours. Les seuls calculs que l'on peut faire de façon exacte sont les quotients de polynômes, ce qui explique pourquoi ceux-ci sont omniprésents et pourquoi on cherche à approcher les autres fonctions par des polynômes. Par exemple, la police de caractère dans laquelle est écrit ce polycopié est codée à l'aide de polynômes.

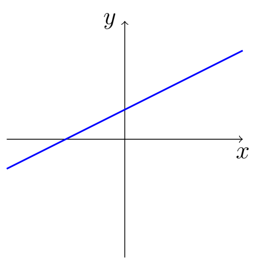
Dérivée :

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$$

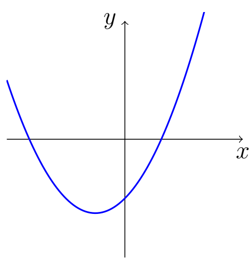
Primitive :

$$\int^x P(s)\,\mathrm{d}s = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + \mathrm{cte}$$

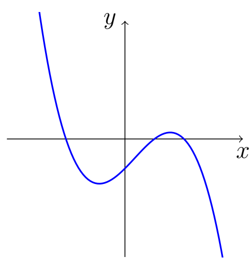
Le théorème fondamental de l'algèbre nous garantit qu'un polynôme de degré n n'a pas plus que n racines réelles en comptant leur multiplicité. Cela signifie par dérivation qu'un polynôme de degré n change au plus $n-1$ fois de sens de variation.



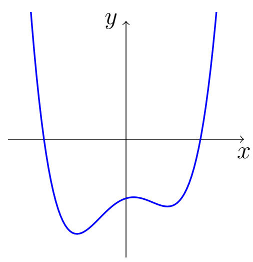
Un polynôme de degré 1



Un polynôme de degré 2



Un polynôme de degré 3



Un polynôme de degré 4

2 Construire des fonctions réciproques

Si f est une fonction bijective d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f$ est l'identité sur E et $f \circ g$ est l'identité sur F. On a alors

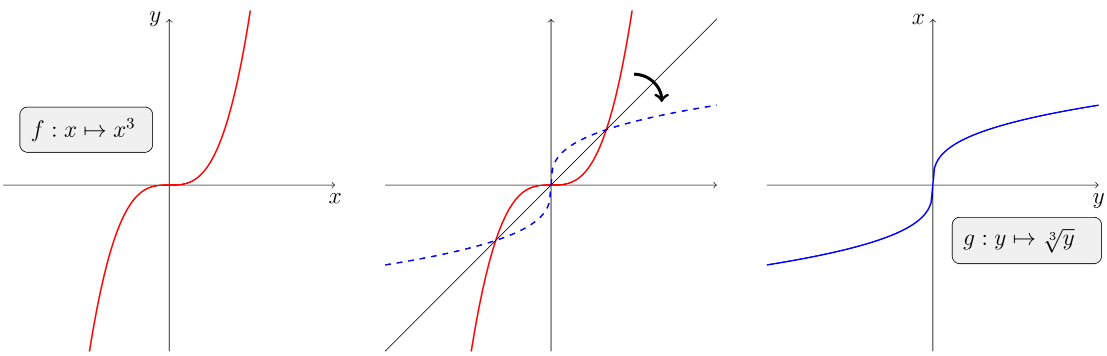
$$\forall x \in E \ , \ \ \forall y \in F \ , \ \ f(x) = y \ \Leftrightarrow \ g(y) = x \tag{5.1}$$

ce qui permet de faire le lien entre les valeurs de f et celles de g, entre le graphe de f et celui de g, d'étudier la continuité ou la dérivabilité de g etc. Quand la fonction f est bijective, c'est donc assez simple. Mais il arrive souvent qu'on cherche à construire la réciproque d'une fonction qui n'est pas bijective. Pour comprendre les mécanismes en jeu, nous allons regarder deux exemples concrets.

Exemple d'un cas simple : construction de la racine cubique
On cherche une réciproque à la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$. On peut facilement montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (f est strictement croissante et les limites en $\pm\infty$ ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires assurent que f est surjective). On peut donc introduire une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on note $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ et qu'on appelle *racine cubique*. Celle-ci vérifie donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \ \sqrt[3]{x^3} = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \ , \ \ \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y \ .$$

Notons qu'il n'est pas forcément évident de calculer les valeurs $g(y)$ (on peut utiliser la méthode de dichotomie sur l'équation $g(y)^3 = y$ mais on aura juste une valeur approchée). Par contre, il est facile de trouver le graphe de g, et donc ses limites, ses valeurs particulières etc. En effet, la symétrie (5.1) nous dit que le graphe de g se déduit de celui de f en échangeant les rôles de x et y, donc en faisant une symétrie par rapport à la première bissectrice.



La continuité d'une réciproque peut être un peu subtile, mais ce n'est pas le cas si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$: la racine cubique ainsi construite est bien continue. Pour la dérivabilité, on utilise le théorème 3.36 : g est dérivable pour $y \neq 0$ (seul point où $f'(y) = 0$) et

$$\forall y \neq 0 \ , \ \ g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{3g(y)^2} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \ .$$

Dans cet exemple, nous avons bien pris garde de séparer deux copies de $\mathbb{R}$: E (variable x) et F (variable y). Mais dans la pratique, on fait rarement aussi bien la distinction, ce qui peut amener à des confusions.

Exemple d'un cas plus complexe : construction de la racine carrée
On cherche à construire une réciproque au carré $f \ : \ x \in \mathbb{R} \ \longmapsto \ x^2 \in \mathbb{R}$. C'est très naturel, mais cette fois-ci il y a un gros problème : f n'est pas une bijection ! Non seulement elle n'est pas surjective car elle n'atteint aucun $y < 0$, mais elle n'est pas injective non plus car tout $y > 0$ admet deux antécédents. L'étape clef est donc la sélection d'une branche $\tilde{f} \ : \ x \in E \subset \mathbb{R} \ \longrightarrow \ x^2 \in F \subset \mathbb{R}$ de la fonction f telle que $\tilde{f}$ soit une bijection de E dans F. Pour cette étape, plusieurs choix sont possibles. Mais on cherche d'une part à prendre la branche la plus grande et d'autre part une branche utile et agréable à manier. Ici, nous avons principalement le choix entre la branche $x \in \,]-\infty,0] \mapsto x^2 \in [0,+\infty[$ et la branche $x \in [0,-\infty[\mapsto x^2 \in [0,+\infty[$. Naturellement, les scientifiques passés ont choisi la branche positive (ne serait-ce que parce que la racine carrée était déjà utilisée pendant la Haute Antiquité, à une époque où les nombres négatifs n'existaient pas encore). On définit donc $g : y \in \mathbb{R}_+ \to \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$ comme la réciproque de la fonction $\tilde{f} \ : \ x \in \mathbb{R}_+ \ \longrightarrow \ x^2 \in \mathbb{R}_+$ mais attention *ce n'est pas la réciproque de la fonction* $f \ : \ x \in \mathbb{R} \ \longmapsto \ x^2 \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par exemple par le fait que si on a bien

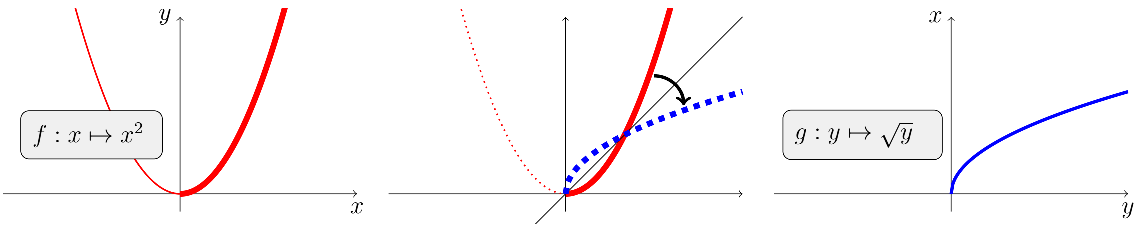
$$\forall y \geq 0 \ , \ \left(\sqrt{y}\right)^2 = y \qquad \text{et} \qquad \forall x \geq 0 \ , \ \sqrt{x^2} = x \ ,$$

il est faux de dire que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, même si l'expression $\sqrt{x^2}$ a bien un sens. C'est la symétrie de f qui permet ensuite d'obtenir que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \sqrt{x^2} = |x| \ .$$

Mais en général, on n'aura pas forcément un lien entre g et les branches non utilisées de f.

La construction du graphe et donc des limites et valeurs particulières se fait comme pour la racine cubique. Mais il faut bien faire attention à la branche $\tilde{f}$ de f qui est utilisée.



Pour finir, on peut encore utiliser le théorème 3.36 : g est dérivable pour $y > 0$ et on a

$$\forall y \neq 0 \ , \ g'(y) = \frac{1}{\tilde{f}'(g(y))} = \frac{1}{2g(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \ .$$

3 Fonctions puissances

$$f \;:\; x \in \,]0, +\infty[\;\longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, x^α est bien défini pour $x > 0$. Si $\alpha \geq 0$, on peut prolonger la fonction par continuité en zéro en posant $0^\alpha = 0$. La définition $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est la seule possible si α est un réel quelconque. Si α est entier, il s'agit d'un polynôme ou de l'inverse d'un polynôme et on peut définir la fonction pour $x < 0$. Si α est rationnel, on retrouve les racines construites comme réciproque des puissances entières et on peut parfois définir $x \mapsto x^\alpha$ sur tout $\mathbb{R}$ (voir le paragraphe précédent).

Histoire :

La racine carrée était déjà connue au début de l'écriture par les mésopotamiens et les égyptiens. La définition quand α n'est pas rationnel n'a été comprise qu'autour du milieu du 18ème siècle avec la formalisation de l'exponentielle.

Dérivée :

Si $x > 0$ $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

(formule parfois prolongeable en 0 *ou sur* $\mathbb{R}$ *suivant les valeurs de* α*)*

Primitive :

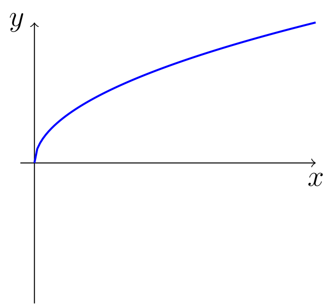
$$\int^x s^\alpha \,\mathrm{ds} = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \text{cte si } \alpha \neq -1$$
$$\int^x s^{-1} \,\mathrm{ds} = \ln|x| + \text{cte}$$

Développement limité :

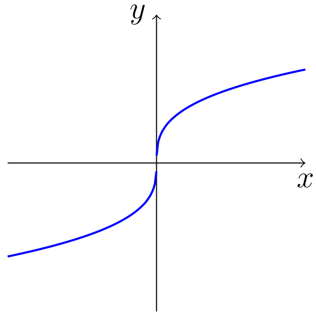
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Formules :

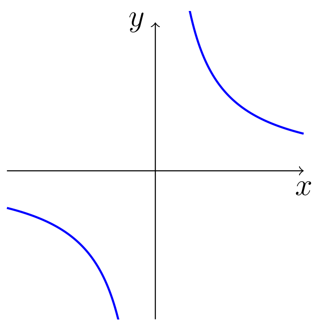
$x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$ $\qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $\qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$



$x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$



$x \mapsto x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$



$x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$

4 Le logarithme

$$x \in \,]0, +\infty[\; \longmapsto \; \ln x$$

Histoire :

Au début du 17ème siècle, les astronomes comme Tycho Brahé et Johannes Képler font des calculs littéralement astronomiques pour comprendre les trajectoires des planètes. Pour simplifier les calculs, John Napier (1550-1617, Écosse) introduit la notion de logarithme qui transforme via sa formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ les multiplications en simples additions, beaucoup plus rapides à effectuer. L'idée, publiée en 1614, sera très rapidement reprise par Képler et Briggs et la théorie du logarithme sera complétée en quelques années.

Dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$$

Primitive :

$$\int^x \ln s \,\mathrm{d}s = x \ln x - x + \mathrm{cte}$$

Développement limité :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Valeurs particulières :

$\ln 1 = 0$

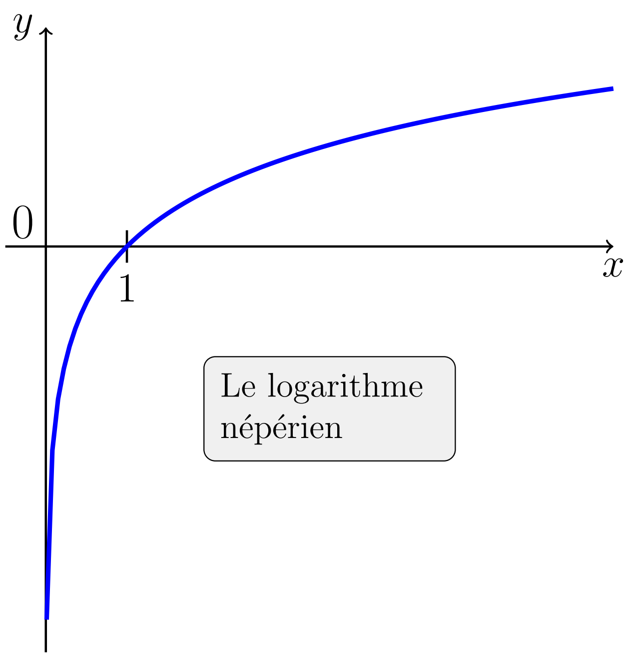
$\ln e = 1$

Formules :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^k) = k \ln a$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$



5 L'exponentielle

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$$

Histoire :

Les exponentielles sont des interpolations pour x non entier (ou rationnel) de $x \mapsto a^x$. Sous cette forme, elles existent depuis très longtemps. L'introduction du nombre e comme l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$ et son étude datent de Leibniz et Euler, vers 1700. La compréhension de l'importance de l'exponentielle $x \mapsto e^x$ dans l'analyse demandera encore un siècle de maturation.

Dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$$

Primitive :

$$\int^x e^s \,\mathrm{d}s = e^x + \mathrm{cte}$$

Développement limité :

$$e^x = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Valeurs particulières :

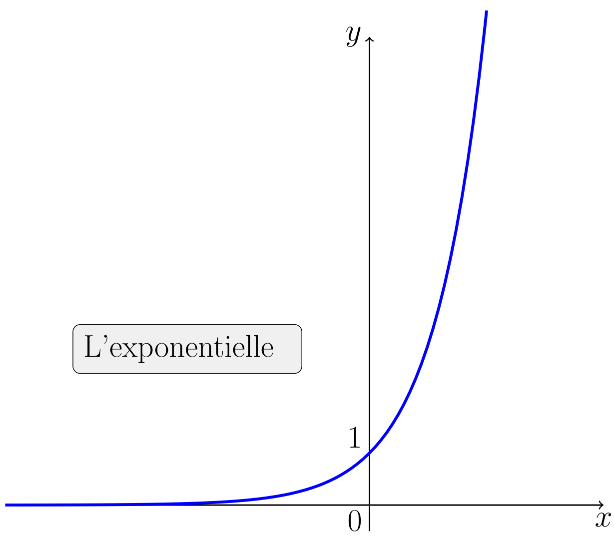
$e^0 = 1$

Formules :

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{ka} = (e^a)^k$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$



6 Les fonctions trigonométriques

$$\sin x \qquad \cos x \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente n'est pas définie en $x = \frac{\pi}{2}[\pi]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ailleurs. En mathématique, l'angle x est en radian et on fera attention que les dérivées et primitives connues sont valables dans ce cadre. Si x est mesuré en degré, on se ramènera à $\sin(\frac{\pi}{180}x)$ pour retrouver les calculs mathématiques usuels.

Histoire :

La trigonométrie est l'art de déduire toutes les mesures d'un triangle, angles et longueurs, quand on n'en connaît qu'une partie. Elle est très importante pour la géométrie et les relevés topographiques et astronomiques. De ce fait, elle est étudiée depuis l'Antiquité. Les fonctions trigonométriques telles qu'on les connaît aujourd'hui ont été introduites en Inde vers 500 après J.C., avant d'être reprises et étudiées par les scientifiques arabes et perses. Elles sont arrivées en Europe au Moyen Âge.

Dérivées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Primitives :

$$\int^x \sin s \,\mathrm{d}s = -\cos x + \mathrm{cte}$$
$$\int^x \cos s \,\mathrm{d}s = \sin x + \mathrm{cte}$$
$$\int^x \tan s \,\mathrm{d}s = -\ln(|\cos x|) + \mathrm{cte}$$

Développements limités :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$
$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Symétries :

Le cosinus et le sinus sont $2\pi-$périodiques et la tangente est $\pi-$périodique.

Le cosinus est pair alors que le sinus et la tangente sont impaires.

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

Valeurs particulières :

$\cos(0) = 1$ $\quad\sin(0) = 0$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

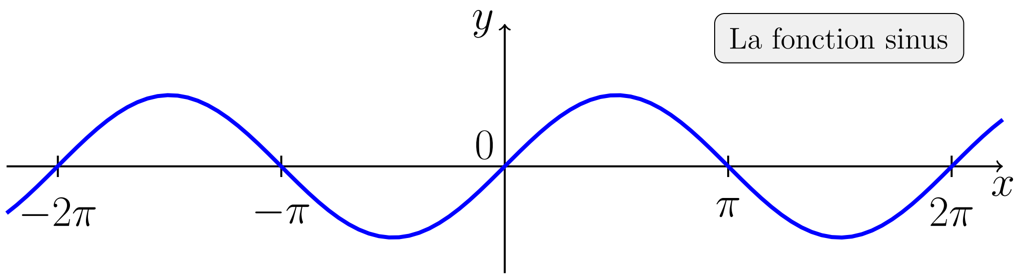
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

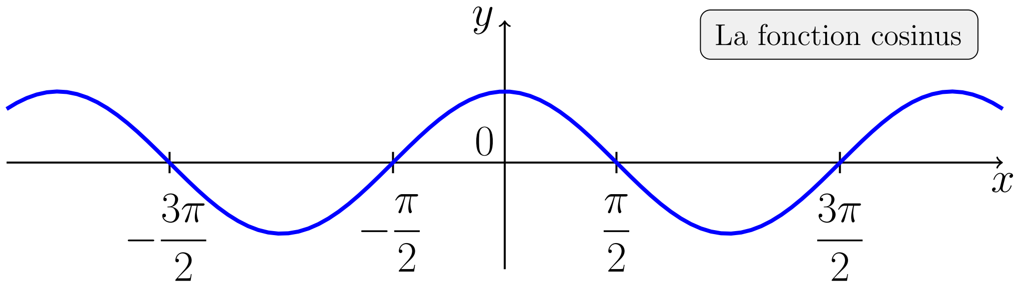
$\tan(0) = 0$ $\quad\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

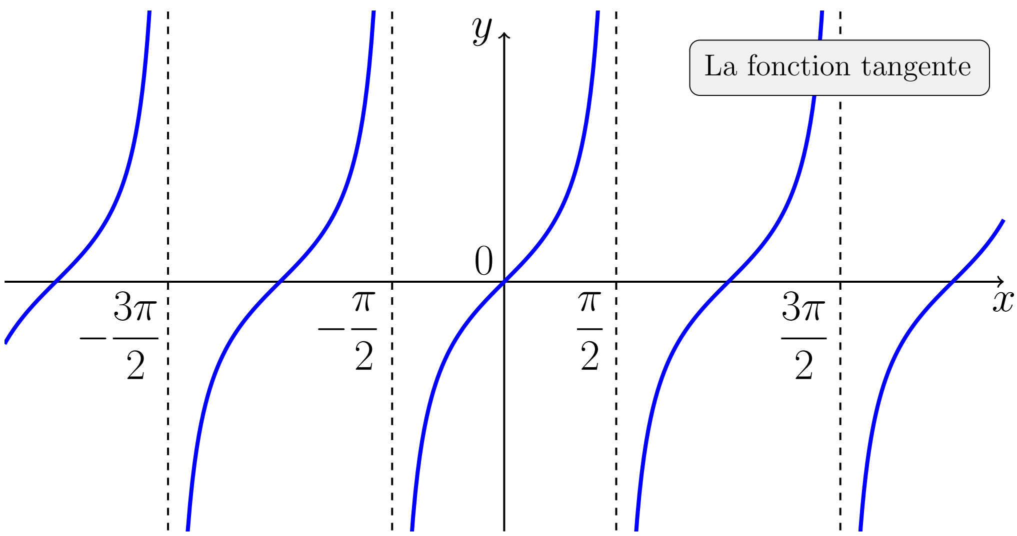
Formules :

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ $\quad\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\quad\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\quad\sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$





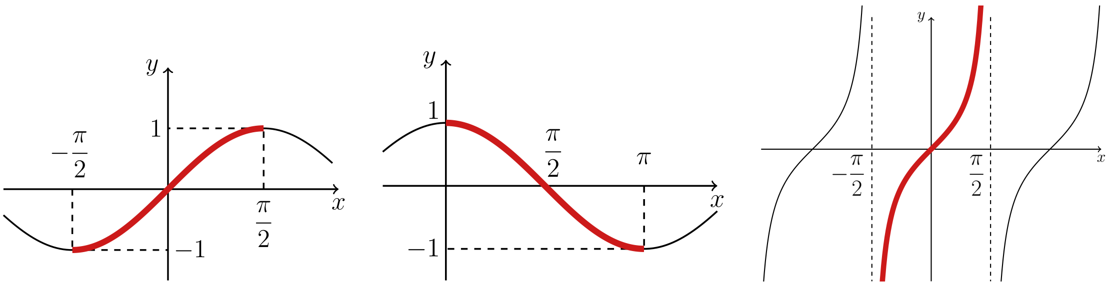


7 Les fonctions trigonométriques réciproques

$\arcsin x \qquad \arccos x \qquad \arctan x$

Il est naturel de vouloir introduire des réciproques aux fonctions trigonométriques, mais celles-ci ne sont pas des bijections. Il faut donc en choisir des branches particulières. Le plus naturel est de considérer un intervalle contenant 0 et, s'il faut choisir, l'intervalle du côté des nombres positifs. Ainsi :

- la fonction arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\pi/2,\pi/2] \subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in [-\pi/2,\pi/2] \mapsto \sin x \in [-1,1]$ du sinus.
- la fonction arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in [0,\pi] \mapsto \cos x \in [-1,1]$ du cosinus.
- la fonction arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2,\pi/2[\subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in]-\pi/2,\pi/2[\mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ de la tangente.



! Il est important de saisir la conséquence de ce choix de branches : comme il est faux que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout réel x, il est aussi faux que $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, $\arcsin(y)$ est l'angle <u>entre $-\pi/2$ et $\pi/2$</u> dont le sinus vaut y. Donc $\arcsin(\sin x) = x$ est vrai seulement si $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Pour les autres cas, on utilisera les symétries du sinus. Par exemple, si $x = 7$, alors $\sin 7 = \sin(7 - 2\pi)$. Comme $(7 - 2\pi) \in [-\pi/2,\pi/2]$, on a

$$\arcsin(\sin 7) = \arcsin(\sin(7 - 2\pi)) = 7 - 2\pi \ .$$

Le nom complet de ces fonctions est naturellement *arcsinus*, *arccosinus* et *arctangente*. Pour comprendre d'où viennent ces noms, il faut visualiser le cercle trigonométrique : comme le cercle est de rayon 1, l'angle θ en radian est égal à la longueur de l'arc de cercle associé à cet angle. Donc $\arcsin\theta$ est « l'arc dont le sinus est θ ».

Histoire :

Jusqu'au 18ème siècle, les sinus, cosinus et tangente ne sont pas vues comme des fonctions mais comme des valeurs permettant les calculs de trigonométrie. Dès le 6ème siècle, des savants indiens, perses et arabes ont calculé des valeurs approchées des fonctions trigonométriques et ont publié des tables permettant aux autres savants de les utiliser pour leurs calculs géométriques. Ces tables disposent ainsi côte à côte les angles et les valeurs du sinus. Il était donc facile de retrouver à partir des valeurs du sinus l'angle associé en lisant la ligne dans l'autre sens. L'inversion des fonctions trigonométriques étaient très naturelle et n'a été formalisée comme une inversion de fonction qu'avec les débuts de l'analyse.

Les dérivées de ces fonctions réciproques se trouvent par la proposition 3.36. Pour l'arctangente, on utilise la forme $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ et donc $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$. Puis on fait bien attention que $\tan(\arctan x) = x$ correspond au sens où l'inversion est toujours vraie : par définition, $\arctan x$ est un arc dont la tangente vaut x.

Pour arcsinus et arccosinus, il faut comprendre ce que vaut une expression comme $\cos(\arcsin x)$. Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a que $\cos(\arcsin x)^2 + x^2 = 1$. On utilise ensuite que $\arcsin x$ appartient à $[-\pi/2,\pi/2]$, zone où le cosinus est positif. Au final, on obtient que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Dérivées :

$$\forall\ x \in\ ]-1,1[,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Parmi les trois dérivées ci-dessus, c'est celle de l'arctangente qu'il faut vraiment retenir. En effet, elle apparaît quand on intègre des quotients de polynômes et est donc utile pour certaines intégrales qui n'avaient a priori rien à voir avec la trigonométrie. Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\ .$$

Il est possible de trouver des formules pour des primitives des fonctions trigonométriques réciproques, mais elles ne sont pas souvent utiles donc nous n'allons pas les mettre ici.

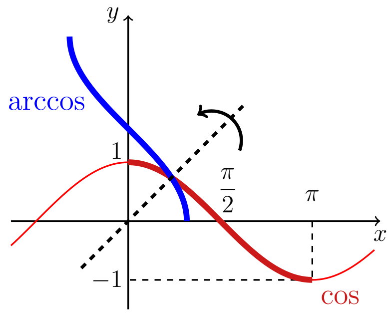
Les développements limités pour $x \mapsto 0$ ne sont pas non plus essentiels à apprendre par cœur. On peut juste se rappeler qu'ils se déduisent par intégration du développement de la dérivée. Par exemple, le développement de $1/(1+u)$ donne que

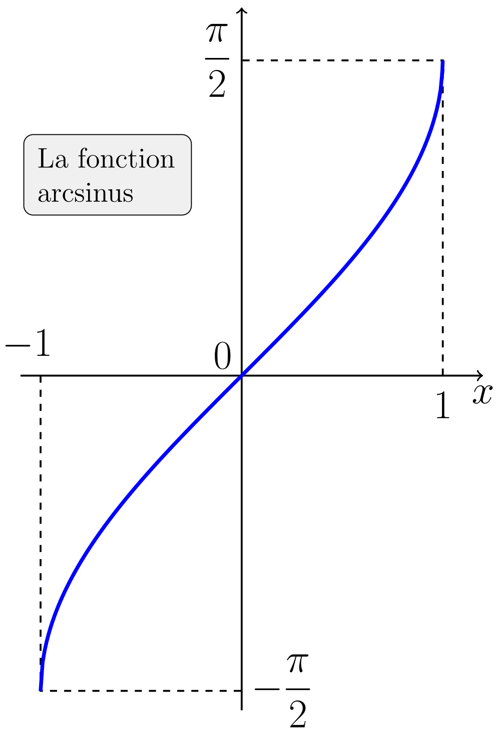
$$\frac{1}{1+x^2} \;=\; 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2p} + o(x^{2p+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

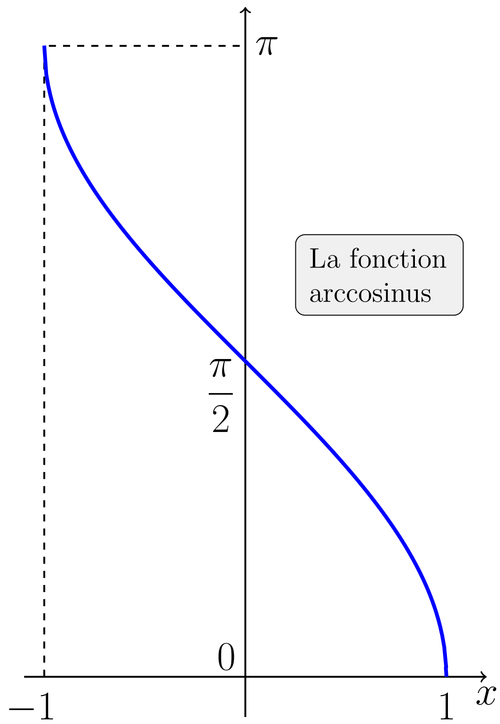
et donc

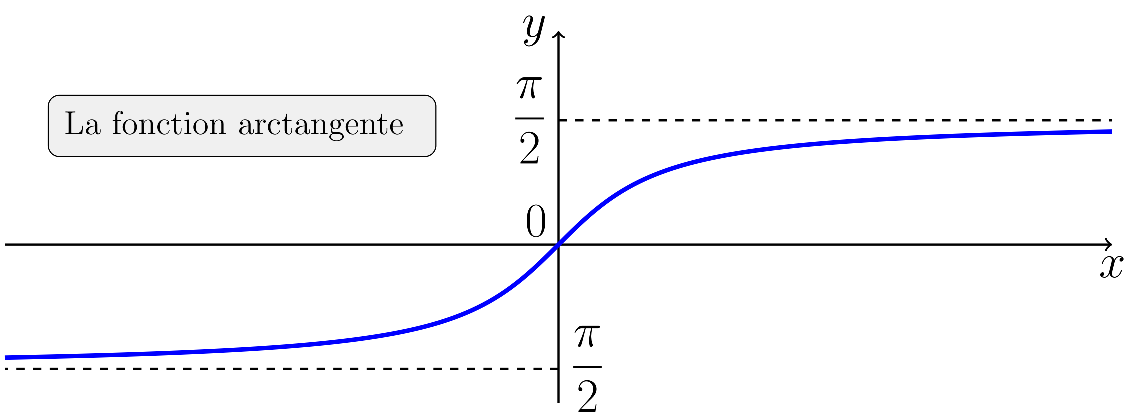
$$\arctan x \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0\ .$$

Pour obtenir les graphes ainsi que les valeurs particulières et les limites des fonctions, il suffit d'utiliser le procédé de la symétrie par rapport à la première bissectrice. À chaque fois, on refera bien attention à la branche de la fonction qui est concernée.









Les valeurs particulières, symétries et les formules se déduisent rapidement des valeurs particulières et des formules des fonctions trigonométriques.

Symétries :

Les fonctions arcsinus et arctangente sont impaires.
Les fonctions arcsinus et arccosinus sont reliées par $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Exemples de valeurs particulières :

$\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} \qquad \arccos(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2} \qquad \arctan(0) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

Formules :

$$\forall x \in [-1,1] \ , \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{et} \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Chapitre 6 : Notion d'intégrale de Riemann

1 Uniforme continuité

On appelle *intervalle compact* de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné du type $[a,b]$ avec $a \leq b$ deux réels. Le mot « compact » fait référence à la propriété de Bolzano-Weierstrass vue au premier chapitre. Dans ce chapitre, nous allons utiliser cette propriété topologique de compacité pour obtenir de la continuité uniforme.

Définition 6.1

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est **uniformément continue sur I** si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x,y \in I \ , \ \ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

! Attention de ne pas confondre l'uniforme continuité avec la continuité tout court. Cette dernière s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \forall x \in I \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall y \in I \ , \ \ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

Donc pour la continuité, la marge δ ne donnant pas une erreur plus grande que ε pour les images peut dépendre de x. Ce n'est pas le cas quand on demande que la continuité soit uniforme. Une fonction uniformément continue est donc forcément continue, mais la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue sans être uniformément continue.

Le théorème suivant est attribué à Eduard Heine (1821-1881, Allemagne).

Théorème 6.2

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est aussi uniformément continue.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que f soit continue mais pas uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n, il existe x_n et y_n avec $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de la suite (x_n) qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. Par continuité, on a $f(x_{\varphi(n)})$ qui tend vers $f(\ell)$. Mais on a aussi $y_{\varphi(n)}$ qui tend vers ℓ donc $f(y_{\varphi(n)})$ tend aussi vers $f(\ell)$. Mais alors en passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, on aurait $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc f est forcément uniformément continue. □

2 Définition de l'intégrale de Riemann

Nous allons définir l'intégrale d'une fonction comme l'aire entre l'axe horizontal et sa courbe comptée algébriquement (positivement si la courbe est au-dessus de l'axe et négativement en-dessous). Le problème revient à définir proprement ce qu'est une aire d'une forme géométrique. Par définition, on peut supposer que l'aire des rectangles vaut longueur fois largeur. Puis par découpages et recollages, on peut définir l'aire des triangles et de tout polygone. Comment faire dans le cas d'une courbe ? Nous allons essayer d'encadrer la courbe avec des aires de polygones et voir si on peut obtenir une aire limite en faisant en encadrement de plus en plus précis. C'est déjà ainsi que les anciens ont calculé l'aire du disque et donc π : Archimède (IIIème siècle avant J.C., Syracuse) donne $\pi \simeq 3{,}14$ par des polygones à 96 côtés, Liu Hui (IIIème siècle après J.C., Chine) trouve une méthode itérative plus rapide et avec aussi 96 côtés donne $\pi \simeq 3{,}1416$. Deux siècles plus tard, Zu Chongzhi reprend l'algorithme pour obtenir π au millionième près avec l'équivalent d'un polygone a 12 288 côtés.

L'histoire de l'intégration d'un point de vue plus analyste remonte à Bonaventura Cavalieri (1598-1647, Italie) puis à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne). Bernhard Riemann (1826-1866, Allemagne) est un des premiers à formaliser proprement la théorie. Il existe plusieurs façons de définir et construire l'intégrale de Riemann. Elles sont toutes grosso-modo équivalentes. Nous allons voir ici une présentation allégée proche de celle de Gaston Darboux (1842-1917, France).

Définition 6.3

Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite **en escalier** ou **constante par morceaux** sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que f est constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Les points x_i forment une *subdivision* de I.

Pour les fonctions en escalier, le calcul de l'aire sous la courbe est réduit à une addition ou soustraction d'aires de rectangles. On peut donc la définir sans aucun souci.

ht

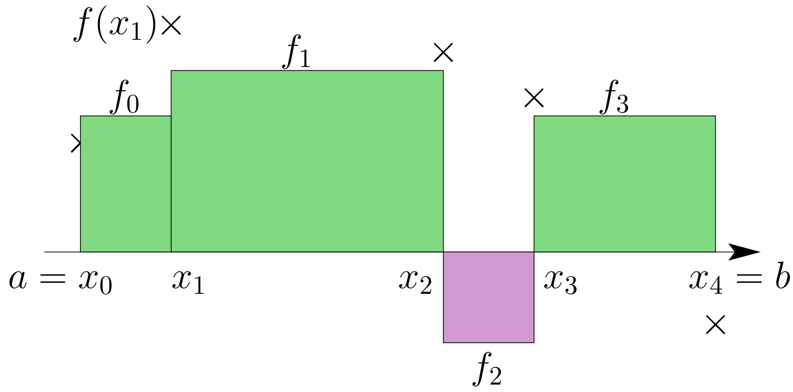


FIGURE 6.1 – *Un exemple de fonction en escalier. On notera qu'il n'y a pas de contrainte sur les valeurs aux points x_i, qui peuvent être différentes des valeurs des « marches » de l'escalier. L'intégrale sous la courbe est obtenue naturellement par la formule d'aire des rectangles.*

Définition 6.4

Soit f une fonction en escalier sur un intervalle $[a,b]$ qui est constante égale à f_i sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ d'une subdivision $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$. Alors on appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1} - x_i) \times f_i \ .$$

Par exemple, on a que

$$\int_0^3 E(x)\mathrm{d}x \;=\; (1-0)\times 0 + (2-1)\times 1 + (3-2)\times 2 \;=\; 3\ .$$

Pour définir l'intégrale dans un cas plus complexe, nous allons introduire des fonctions en escalier encadrant la valeur de l'intégrale.

Définition 6.5

Soit $[a,b]$ une intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\underline{f_\varepsilon}$ et $\overline{f_\varepsilon}$ telles que

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \ \underline{f_\varepsilon}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_\varepsilon}(x)$$

et

$$\left| \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \right| \;\leq\; \varepsilon\ .$$

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

Le papier original de Riemann de 1867 (posthume mais présentant des travaux de 1854). Son but principal est de commenter les écrits de Joseph Fourier. Il a déjà écrit une quinzaine d'intégrales dans l'article en question, quand il pose soudainement la question « Qu'entend-on par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$? ». Cela fait pourtant 250 ans que les gens écrivent pour des intégrales !

Le point clef de la théorie est de montrer que cette approximation par des fonctions en escalier est robuste : si la fonction est intégrable, peu importe la façon dont on fait l'approximation, on obtient toujours la même valeur de l'intégrale à la limite.

Proposition 6.6

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout choix des familles de fonctions $(\underline{f_\varepsilon})$ et $(\overline{f_\varepsilon})$, on a existence et égalités des limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \ .$$

En outre, cette limite est indépendante du choix des familles de fonctions en escalier. Cette limite est appelée *intégrale de f sur $[a,b]$ au sens de Riemann* et est notée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

Démonstration : On ne va pas détailler la preuve complète, mais l'argument principal est le suivant. On considère $\underline{f_\varepsilon}$ et $\underline{f_{\varepsilon'}}$ deux fonctions en escalier sous f. On a forcément $\underline{f_{\varepsilon'}} \leq f \leq \overline{f_\varepsilon}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \ &= \ \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \ \leq \ \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Mais avec l'argument symétrique, on a

$$\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x \ \leq \ \varepsilon' \ .$$

Donc

$$\left| \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x \right| \ \leq \ \max(\varepsilon,\varepsilon') \ .$$

Ceci montre par exemple que les familles d'intégrales des fonctions en escalier vérifie le critère de Cauchy et donc converge. En prenant deux fonctions qui marchent pour le même ε, c'est aussi ainsi que l'on voit que l'écart entre les deux valeurs obtenues pour approcher l'intégrale devient négligeable. □

Exemple :

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon. Une fonction constante par morceaux sous f sera forcément négative et une fonction constante par morceaux au-dessus de f sera forcément plus grande que 1. L'écart entre les intégrales sera donc au moins 1 et f n'est pas intégrable au sens de Riemann : ce n'est pas la bonne méthode pour donner un sens à l'intégrale de cette fonction.

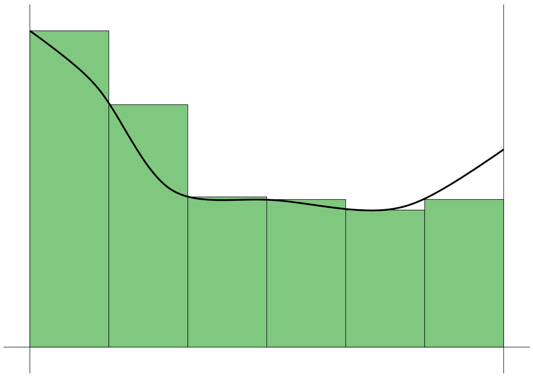
Après avoir vu un contre-exemple, voyons notre principal exemple qui marche : les fonctions continues.

Théorème 6.7

Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue. Alors f est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

La dernière partie montre que l'intégrale peut s'approcher par la méthode des rectangles à gauche en pratiquant une subdivision régulière.



On découpe $[a,b]$ en n intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$. La somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$$

est appelée **somme de Riemann** et correspond à l'aire des rectangles verts dont la hauteur est prise comme la valeur de f à gauche de l'intervalle.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Divisons $[a,b]$ en n intervalles, posons $h = (b-a)/n$ le pas de la subdivision et notons $x_i = a + i \times h$ la subdivision avec $i = 0,\ldots,n$. On définit $\underline{f}$ et $\overline{f}$ comme des fonctions en escaliers qui sont constantes sur chaque $[x_i,x_{i+1}[$ et vérifient

$$\forall x \in [x_i,x_{i+1}[\ ,\ \ \underline{f}(x) = \min_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi) \quad \text{et} \quad \overline{f}(x) = \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi) \ .$$

On rappelle que les minimums et maximums sont bien définis car f est continue sur $[x_i,x_{i+1}]$. On décide aussi que $\underline{f}(b) = \overline{f}(b) = f(b)$. Par construction, $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien des fonctions continues par morceaux qui encadrent f. Par ailleurs, leur différence est au pire de l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$ pour x et y dans le même intervalle $[x_i,x_{i+1}]$. Par continuité uniforme, on peut trouver h assez petit tel que cet écart est plus petit que $\varepsilon/(b-a)$. On a alors que

$$\left|\int_a^b \underline{f}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f}(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sum (x_{i+1} - x_i)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \ .$$

Ceci montre que f est bien Riemann-intégrable. La convergence de la somme de Riemann découle simplement du fait que cette somme est encadrée par les deux intégrales de $\underline{f}$ et $\overline{f}$. □

Exemples :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En utilisant la formule $\sum_{k=0}^{n-1} a^n = \frac{1-a^n}{1-a}$ pour $a = e^{1/n} \neq 1$, on obtient en outre que, quand $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n} . \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \;=\; \frac{1-e}{n(1-1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \;=\; \frac{e-1}{1+o(1)} \; .$$

Donc, on faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1 \; .$$

- La fonction $x \mapsto x+1$ est continue donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En outre,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}(\frac{k}{n}+1) = 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

où on a utilisé la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ que l'on peut démontrer par récurrence. On note que le résultat obtenu pour l'aire sous la courbe de $x \mapsto x+1$ est bien cohérent avec la formule d'aire d'un trapèze de hauteur 1 et de petite et grande bases 1 et 2.

Faisons un petit point sur les notations. La convergence

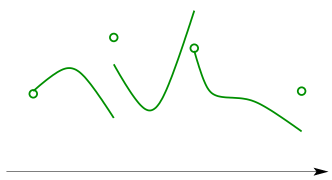
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \; .$$

donne une correspondance entre les éléments de la somme de Riemann (méthode des rectangles) et l'écriture intégrale. On peut commencer par remarquer que le symbole $\int$ est un « $\mathcal{S}$ » allongé. Il a été introduit par Leibniz et fait donc bien référence à l'intégrale comme une sorte de somme. L'autre point à remarquer, c'est que l'élément d'intégration dx correspond à la limite de la petite distance $h = \frac{b-a}{n}$ (symbole qu'on retrouve logiquement dans la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par passage à la limite de la pente de la corde). C'est donc un élément qui fait partie de la somme de l'intégrale et non un symbole servant juste à fermer l'intégrale (ce sera clair au moment des changements de variables).

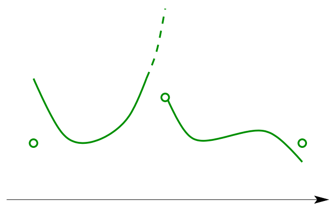
En recollant plusieurs intervalles où on applique le résultat précédent, on peut généraliser ce théorème aux fonctions continues par morceaux.

Définition 6.8

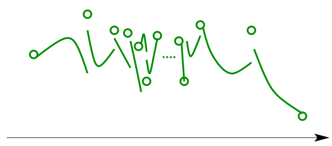
Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que f est continue sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ et que les limites à droite et à gauche de chaque intervalle existent et sont finies. L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur $[a,b]$ est noté $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$.



une fonction continue par morceaux



une fonction non continue par morceaux car la limite à gauche n'existe pas au point central



une fonction non continue par morceaux car il y a un nombre infini de discontinuités

Théorème 6.9

Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. Alors f est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

De plus, les valeurs de f aux points de discontinuités ne change pas la valeur de l'intégrale.

Démonstration : Il suffit de recoller les arguments de la démonstration précédente appliquée sur chaque morceau. Pour la convergence de la somme de Riemann, l'argument est aussi le même. Il y a juste le problème des valeurs aux points de discontinuités mais celles-ci sont en nombre fini et leur influence disparaît au fur et à mesure que n tend vers $+\infty$. $\square$

On peut aussi facilement gérer les fonctions à valeurs complexes.

Définition 6.10

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann si ses parties réelle et imaginaire le sont. On pose alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x \ + \ i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x \ .$$

Nous allons admettre toutes les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann, même si elles se démontrent assez facilement en partant de la définition.

Proposition 6.11 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable au sens de Riemann et

$$\int_a^b (f + \lambda g)(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \;.$$

Proposition 6.12 (Monotonie)

Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. Si pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \;.$$

On note que la valeur en un nombre fini de points n'influence pas la valeur de l'intégrale, donc on peut aussi supposer que $f(x) \leq g(x)$ sauf en un nombre fini de points.

Proposition 6.13 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$ et soit $b \in]a,c[$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \;.$$

Cette relation nous pousse à prendre comme convention que

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;.$$

Notons que la première convention est aussi cohérente avec la limite $b \to a$.

Proposition 6.14 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \;.$$

Proposition 6.15 (Stricte positivité)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ une fonction continue et positive. Alors s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;>\; 0\;.$$

En conséquent, si f est positive continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

3 Lien avec la dérivation

Ce qui est appelé pompeusement « théorème fondamental de l'analyse » est le lien a priori inattendu entre l'intégration et la dérivation.

Théorème 6.16

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{C})$ un fonction continue par morceaux. Alors

$$\xi \in [a,b] \;\longmapsto\; \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

est une fonction continue de x.
Si en outre $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ est de plus continue sur $[a,b]$ alors

$$\xi \in [a,b] \;\longmapsto\; \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

est une fonction dérivable et sa dérivée vaut

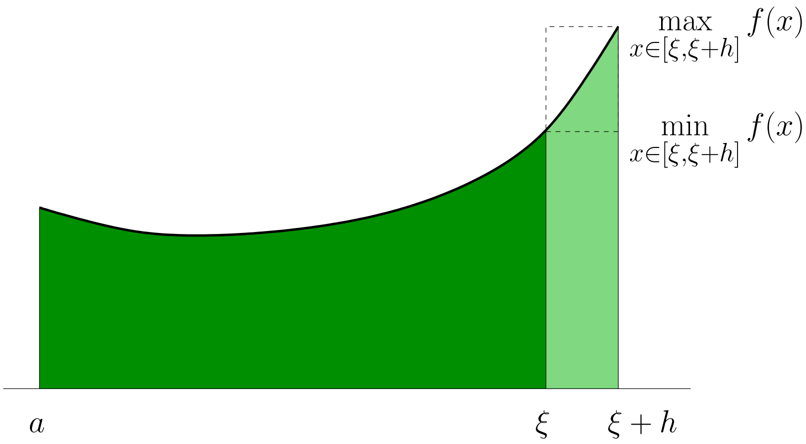
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\;.$$

En conséquence, $\xi \in [a,b] \;\longmapsto\; \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$ est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.

Démonstration : Par la relation de Chasles, on a

$$\int_a^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x\;.$$

Si f est continue par morceaux, alors elle est bornée et l'aire sous la courbe entre ξ et $\xi+h$ est bornée par un rectangle de largeur h et de hauteur constante. Donc quand h tend vers 0, on obtient bien la continuité de l'intégrale par rapport à sa borne.



Affinons les choses en supposant que f est continue. Par monotonie de l'intégrale, on a

$$h \min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x) \ \leq \ \int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x \ \leq \ h \max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x) \ .$$

Or, par continuité, $\min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ comme $\max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ tendent vers $f(\xi)$ quand h tend vers 0. On obtient donc par encadrement que

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f(\xi)$$

ce qui donne par définition la dérivée recherchée. La dernière assertion vient de l'unicité de la primitive modulo les constantes. □

Le théorème montre aussi que toute fonction continue admet une primitive (et donc une infinité en y ajoutant une constante). Si la fonction f est seulement continue par morceaux, on peut obtenir une sorte de primitive mais qui ne sera dérivable qu'à droite et à gauche aux points de discontinuité de f.

Corollaire 6.17

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $F \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ = \ F(b) - F(a) \ := [F(x)]_a^b \, .$$

Démonstration : On pose $\tilde{F}(\xi) = \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$. On sait que $F = \tilde{F} + C$ avec C une constante. On a alors

$$F(b) - F(a) = (\tilde{F}(b) + C) - (\tilde{F}(a) + C) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0 \ .$$

□