Feuille d'exercices 4 : développements limités

Exercice 1 : Gestion des termes négligeables : théorie
En revenant à la définition des « petits o », montrer que, quand x tend vers 0,

$o(x) + o(x) = o(x)$ $\quad 2o(x^2) - 3o(x^3) = o(x^2)$ $\quad \frac{o(x)}{x} = o(1)$

$x^2 = o(x)$ $\quad o(4x) = o(x)$ $\quad x \times o(x) = o(x^2)$

$o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$ $\quad o(x^2) \times o(x^3) = o(x^5)$ $\quad o(x^2 + 2x^3) = o(x^2)$

Exercice 2 : Gestion des termes négligeables : calculs
On se place pour x proche de 0 et tous les termes négligeables sont à comprendre « quand x tend vers 0 ».

Simplifier les expressions suivantes en gardant le maximum d'informations utiles.

$$a(x) = x + 2x^2 - 3x^3 + o(x) \qquad b(x) = (1 + x - x^2)(2 - x + 3x^2) + o(x^2)$$
$$c(x) = (1 - x + x^2 + o(x^2))^2 \qquad d(x) = (x + x^3 + o(x^3))(1 - 2x + o(x)) \ .$$

Simplifier les expressions suivantes pour ne garder que l'ordre d'approximation $o(x^2)$.

$$e(x) = (1 + x)(1 - x^2 + 3x^3 + x^5) \qquad f(x) = (x + 2x^2 + o(x^2))^2$$
$$g(x) = (1 + x + o(x))(2x + 3x^2 + o(x^2)) \qquad h(x) = (1 + x + x^2 + o(x^2))^3 \ .$$

Exercice 3 : Calcul de e
Appliquer le théorème de Taylor-Lagrange en $x = 0$ à la fonction exponentielle et montrer que

$$\forall x > 0 \ , \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et que

$$\forall x < 0 \ , \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que $e = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \dots \frac{1}{n!})$. À quel rang n suffit-il de s'arrêter pour que

$$e \simeq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \ \text{ à } 10^{-3} \text{ près ?}$$

★ Exercice 4 : Calcul de $\ln 2$

On souhaite calculer $\ln 2$ à 10^{-2} près. Nous allons suivre la méthode utilisée par Henry Briggs en 1624 pour obtenir la première table précise des logarithmes.

1. Montrer qu'il suffit de savoir calculer $\ln(2^{1/n})$ à $\frac{1}{n}10^{-2}$ près.
2. Appliquer le théorème de Taylor-Lagrange en $x = 0$ pour obtenir l'estimation

$$\forall x \geq 0\ ,\ \ \big|\ln(1+x) - x\big| \leq \frac{x^2}{2}\ .$$

3. Montrer que $n = 64$ vérifie $\ln 2 \simeq n \times (2^{1/n} - 1)$ à 10^{-2} près. Combien d'extraction de racine carrée doit-on faire ? (Briggs avait enchaîné 54 extractions de racines carrées avec 18 chiffres significatifs à la main, mais vous pouvez utiliser votre calculette si vous voulez.)

Exercice 5 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On introduit les *cosinus* et *sinus hyperboliques*

$$\mathrm{ch}\ :\ x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\ :\ x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$$

1. Donner l'allure de leurs graphes.
2. Calculer la dérivée de chacune.
3. Donner leur développement limité en 0 à l'ordre 6.

Exercice 6 : Entrainement au calcul

Calculer les développements limités suivant quand $x \to 0$ à l'ordre 4.

1. $x \mapsto \cos x \ln(1+x)$
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, x - x}{x^3}$
3. $x \mapsto \big(\ln(1+x)\big)^2$
4. $x \mapsto \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{sh}(3x)$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$
6. $x \mapsto e^{\cos x}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{(\cos x)^3}$
9. $x \mapsto \big(\cos(x + x^2)\big)^2$
10. $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$
11. $x \mapsto \dfrac{e^x}{(\cos x)^2}$
12. $x \mapsto \ln\big(\dfrac{\sin x}{x}\big)$
13. $x \mapsto (\cos x)^{1+\sin x}$
14. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
15. $x \mapsto \sqrt{1 + \tan x}$
16. $x \mapsto \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$

Exercice 7 : Tangentes
Pour chaque fonction de l'exercice précédent, donner si possible la tangente et l'allure de la courbe de la fonction proche de 0.

Exercice 8 : À la recherche d'un terme non nul
Trouver un équivalent simple de

$$f \ : \ x \longmapsto \sin x - \cos x + \frac{1}{1+x}$$

quand x tend vers 0.

Exercice 9 : Développements ailleurs qu'en zéro
Calculer les développements limités suivant.

1. $e^{\sqrt{x}}$ quand $x \to 1$ à l'ordre 3.
2. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ quand $x \to 1$ à l'ordre 4.
3. $\ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)$ quand $x \to 1$ à l'ordre 4.
4. $\ln(\sin x)$ quand $x \to \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Exercice 10 : Limites
Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\big(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\big)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\big(e^x - \cos x - \sin x\big)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x^{1/x}}{(x-1)^2}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + x^4 \ln\big(\cos(\frac{1}{x})\big)\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$

Exercice 11 : Asymptotes
Déterminer les asymptotes du graphe de chacune des fonctions suivantes en $\pm\infty$ (si définie) et étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

$$h(x) = \ln(e^x - 1) \qquad k(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$$

★ **Exercice 12 : Intégration de développements limités**

Donner les développements limités en 0 à l'ordre 10 de

$$x \mapsto \int_0^x \cos\left(t^2\right) \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}dt := F(x^2) - F(x)$$

où F est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

★ **Exercice 13 : Un contre-exemple**

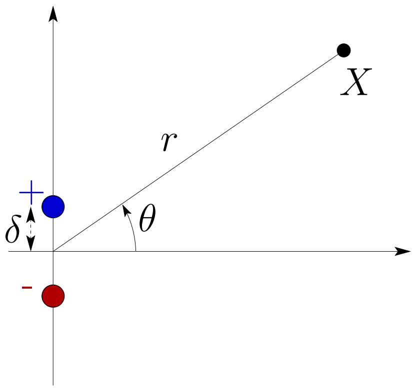
On sait par le principe de linéarisation qu'une fonction f est dérivable une fois en 0 si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x + x^2 + x^3 \cos\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0$$

admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $x = 0$, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

★ **Exercice 14 : Potentiel du dipole**

On considère un dipole électrique, c'est-à-dire deux charges $\pm q$ placées proches l'une de l'autre. On veut connaître le potentiel électrostatique de ce dipole en un point X de coordonnées polaires (r,θ) relativement loin. Chaque charge $\pm q$ engendre un potentiel électrostatique de la forme $\pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$ où ε_0 est une constante physique et d la distance entre le point X et la charge. En utilisant le théorème d'Al-Kashi (ou « Pythagore généralisé » ou encore « loi des cosinus »), on trouve



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + r^2 - 2\delta r \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + r^2 + 2\delta r \sin\theta}}\right)$$

Montrer que dans l'approximation $\delta \ll r$, on trouve

$$V \simeq \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \times \frac{\delta}{r} \sin\theta \ .$$

Quel est l'ordre de l'erreur commise par cette approximation : $(\delta/r)^2$, $(\delta/r)^3 \ldots$?