MAT252
DSDA site de Valence
2021-2022

Feuille d'exercices 3 : fonctions réelles

Exercice 1 : Limites
Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^5-1} \qquad \lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x) \qquad \lim_{x\to -2/3}(3x+2)\sin\frac{1}{3x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3})\ .$$

Exercice 2 : Comparaison exponentielle contre polynôme
Le but de cet exercice est de démontrer que « l'exponentielle l'emporte sur les polynômes » c'est-à-dire que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x}=0$ si $\lambda>0$. On s'interdira donc d'utiliser cette propriété ou toute propriété équivalente, mais on pourra utiliser les autres propriétés de l'exponentielle. Dans la suite, α et λ sont deux constantes strictement positives et pour $x\geq 0$, on pose $f(x)=x^\alpha e^{-\lambda x/2}$.

1. Faire un tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$ et montrer que f est minorée et tend vers une limite $\ell\geq 0$ quand x tend vers $+\infty$.
2. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x}=0$.
3. Si $\alpha>0$ et $\lambda>0$, que dire de $\lim_{x\to+\infty} e^{\lambda x}/x^\alpha$?

Exercice 3 : Comparaison logarithme contre polynôme
Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$. On s'interdira d'utiliser cette propriété mais on pourra utiliser toutes les autres propriétés connues du logarithme. On pose $f(x)=x\ln(x)$ pour tout $x>0$.

1. Faire un tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour $x\in\,]0,1/e]$, la fonction f est décroissante et négative et en déduire que f admet une limite finie $\ell\leq 0$ quand $x\to 0^+$.
3. En trouvant deux expressions de la limite de $f(2x)$ quand $x\to 0^+$, montrer que $\ell=0$.

★ **Exercice 4 : Une fonction étrange**
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $\forall x\neq 0, f(x)=xE(\frac{1}{x})$.

1. Donner l'allure de la fonction f sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est continue en zéro.
3. Soient a et b des réels positifs, déterminer $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a}E(\frac{b}{x})$.

Exercice 5 : Sommes de limites

Soient f et g deux fonctions réelles qui ont des limites finies quand $x \to 0$. Montrer que $f+g$ a aussi une limite finie et

$$\lim_{x\to 0} \big(f(x)+g(x)\big) \;=\; \lim_{x\to 0} f(x) \;+\; \lim_{x\to 0} g(x) \;.$$

Exercice 6 : Périodicité

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique à la fois pour la période 7 et pour la période 9, alors f est périodique de période 1.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ et si $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$, alors f est une fonction constante.

Exercice 7 : Injectivité et surjectivité

Montrer les propriétés suivantes à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur I.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$, alors f est surjective sur $\mathbb{R}$.

★ 3. Peut-on avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjective et continue mais sans que f n'ait de limite infinie en $\pm\infty$?

Exercice 8 : Intégrales de fonctions positives

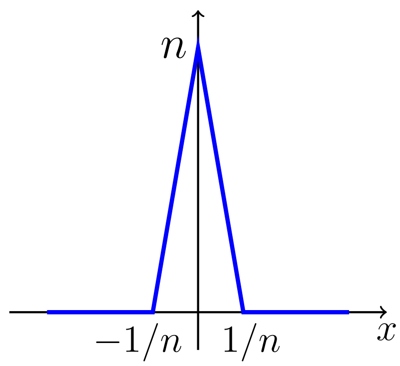
Le but de cet exercice est de montrer que si f est une fonction continue positive, alors son intégrale est nulle si et seulement si f est nulle.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ vérifie $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, alors f n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$.
2. Montrer que s'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ vérifie $f(x_0) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $f(x) > \alpha$ pour tout $x \in [x_0-\delta,x_0+\delta]$.
3. Conclure que s'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ vérifie $f(x_0) > 0$, alors $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Exercice 9 : Approximation du Dirac

Soit $n \geq 1$. On souhaite construire une fonction f_n affine par morceaux comme ci-contre. Compléter la formule explicite

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ \dots & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ \dots & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ \dots & \text{si } x > 1/n \end{cases}$$



Montrer que $\int_{-1}^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Exercice 10 : Point fixe de fonctions quasi-contractantes
Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tous $x \neq x'$ de $[a,b]$ on ait $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution x_* dans $[a,b]$.
3. Montrer que si $x < x_*$, on a $f(x) > x$ et si $x > x_*$, on a $f(x) < x$. En déduire que toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe x_*.

Exercice 11 : Un raccord
Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Tracer l'allure de la fonction obtenue.

Exercice 12 : Règle de L'Hôpital
Soient deux fonctions f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$h(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) \; - \; \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big) \; ,$$

montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \; .$$

En déduire la règle du marquis de L'Hôpital (1661-1704, France) : si deux fonctions sont continues et dérivables dans un voisinage de a avec $f(a) = g(a) = 0$ et que la limite de $f'(x)/g'(x)$ existe quand $x \to a$, alors la limite de $f(x)/g(x)$ existe aussi et

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \; = \; \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \; .$$

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{puis que} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \; .$$

Exercice 13 : Sinus cardinal
On rappelle que le sinus cardinal est la fonction

$$\operatorname{sinc}(x) \; = \; \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \; .$$

1. Rappeler pourquoi sinc est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de sinc pour $x \neq 0$ et montrer que $\operatorname{sinc}(x_*) = \cos(x_*)$ pour tout extremum local $x_* \neq 0$. En déduire que $\max_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x) = 1$.
3. Montrer que sinc est dérivable en $x = 0$ et donner sa dérivée (on pourra faire un calcul direct ou utiliser le théorème de limite de la dérivée et dans tous les cas utiliser la règle de L'Hôpital).

Exercice 14 : Dérivabilité en zéro

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Pour quels n la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$? Pour quels n est-elle dérivable sur tout $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f_2 est dérivable en 0 mais que f_2' n'est pas continue en 0.

Exercice 15 : Série harmonique

1. En appliquant le théorème des accroissements finis au logarithme sur $[x,x+1]$, montrer que
$$\forall x > 0 \ , \ \ \frac{1}{x+1} \ < \ \ln(x+1) - \ln x \ < \ \frac{1}{x} \ .$$
2. En déduire que les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ de la série harmonique tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Calculer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \ .$$

Exercice 16 : Multi-Rolle

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, n fois dérivable sur $]a,b[$ et s'annulant en $n+1$ points distincts de $]a,b[$. Montrer qu'il existe un zéro de $f^{(n)}$ dans $]a,b[$.

★ **Exercice 17 : Randonnée**

Un randonneur a monté 1 200 m de dénivelé en 3 heures, pas forcément avec un rythme régulier. Montrer qu'il existe malgré tout un intervalle d'une heure pendant lequel il a monté exactement 400 m.
Indication : si $h(t)$ est son altitude en mètres en fonction de t en heures, on pourra considérer la fonction $f(t) = h(t+1) - h(t)$ et remarquer que $f(0) + f(1) + f(2) = 1200$.

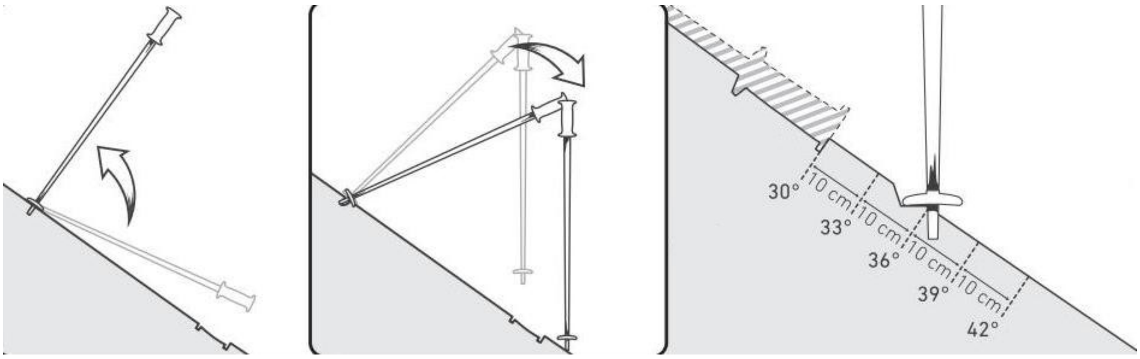
★ **Exercice 18 : Loi de l'offre et de la demande**

On considère une situation économique simplifiée où un bien est produit et vendu à des consommateurs. On note $p(x)$ la quantité de ce bien que des entrepreneurs sont prêts à produire et à proposer sur le marché si son prix de vente est x et $q(x)$ la quantité que des consommateurs sont prêts à en acheter à ce prix. On suppose que plus le bien est vendu cher, plus il y a de producteurs prêts à le vendre mais moins les consommateurs seront disposés à en acheter. En outre, sous un certain prix, il n'y aura plus de marge et personne ne voudra vendre à perte. Mais si le prix est vraiment trop grand, aucun consommateur n'aura l'argent pour l'acheter.

En construisant un modèle où toutes les variables sont continues, traduire tout le texte ci-dessus en propriétés mathématiques et montrer qu'il existe un unique prix x_* tel que l'offre est égal à la demande.

★ **Exercice 19 : Linéarisation et mesure de pentes**

Le déclenchement des avalanches en montagne dépend fortement de la pente. L'inclinaison de 30^o est en particulier critique. Pour estimer une pente à ski, les manuels suggère d'utiliser la *méthode du pendule* qui est décrite comme suit.



— *Placer un bâton sur le sol dans le sens de la pente en marquant son empreinte dans la neige*
— *Redresser ce premier bâton en le faisant pivoter au niveau du haut de l'empreinte,*
— *Avec le deuxième bâton, effectuer un mouvement de pendule pour le placer à la verticale, comme un fil à plomb,*
— *Si la pointe du deuxième bâton atteint l'extrémité basse de l'empreinte, la pente est de* 30^o *(triangle équilatéral),*
— *Pour chaque écart d'une paume* ($\simeq 10$ *cm), on ajoute ou soustrait* 3^o *à la pente.*

Si on pousse la méthode à son extrême, pour une pente verticale de 90^o, l'écart entre la pointe et l'extrémité de l'empreinte devrait être de $2\,\text{m}$ mais cela devrait aussi correspondre à la longueur du deuxième bâton. Alors que pour une pente horizontale de 0^o, l'écart entre la pointe et l'extrémité de l'empreinte devrait être de $1\,\text{m}$ mais cela devrait aussi correspondre à la longueur du premier bâton. La méthode proposée semble donc fausse.

Obtenir une formule pour l'écart entre la pointe et l'extrémité de l'empreinte et montrer que la méthode proposée est en fait une linéarisation de la vraie formule. Quelle est la longueur du bâton ?