MAT252
DSDA site de Valence
2021-2022

Feuille d'exercices 1 : la droite réelle

Exercice 1 : Autour de la valeur absolue
On note $\max(x,y)$ (resp. $\min(x,y)$) le maximum (resp. le minimum) de deux réels x et y.

1. Montrer que $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.
2. En déduire que $\max(x+x',y+y') \leq \max(x,y)+\max(x',y')$. Quelle formule similaire obtient-on pour le minimum de deux sommes ?
3. Trouvez une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 2 : Opérations sur les rationnels et irrationnels
Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si r et s sont rationnels alors $r+s$ est rationnel.
2. Si r et s sont rationnels alors rs est rationnel.
3. Si r est rationnel et x est irrationnel, alors $r+x$ est irrationnel.
4. Si r est rationnel et x est irrationnel alors rx est irrationnel (attention au cas particulier $r=0$!).
5. Si x et y sont irrationnels alors $x+y$ est irrationnel.
6. Si x et y sont irrationnels alors xy est irrationnel.

Exercice 3 : Rationnels et développements décimaux
Nous allons comprendre sur deux exemples pourquoi le résultat suivant est vrai : *un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

1. Montrer que le développement décimal de $3/7$ est périodique à partir d'un certain rang. Pour quelle raison est-ce vrai ? Cela peut-il se généraliser à toutes les fractions ?
2. Soit $x = 0{,}001001001\ldots$ (aussi noté $x = 0{,}\overline{001}$). Remarquer que $1000x = 1+x$ et en déduire que x est un nombre rationnel dont on donnera une écriture en fraction. En déduire que le nombre $2{,}127127127\ldots$ est un nombre rationnel.
3. Ecrire $a = 0{,}361$, $b = 0{,}55555\ldots$ et $c = 3{,}141414\ldots$ sous forme de fractions.

Exercice 4 : Quelques irrationnels

1. Montrer que p^2 est un multiple de 3 si et seulement si p l'est aussi. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
2. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que le nombre $0{,}101001000100001\ldots$ est irrationnel. Construire un autre irrationnel avec cette méthode.
3. Le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a une place particulière dans notre culture (architecture, mysticisme, livres...). Il a aussi de nombreuses propriétés mathématiques, comme le fait que $1/\phi = \phi - 1$. Supposons que ϕ soit une fraction a/b, montrer que l'on a aussi $\phi = b/(a-b)$ et que les nombres de cette fraction sont plus petits que ceux de la fraction initiale. En déduire que ϕ est irrationnel.

★ 4. Soit p une fonction polynôme définie par $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_i x^i$ avec a_i entiers.

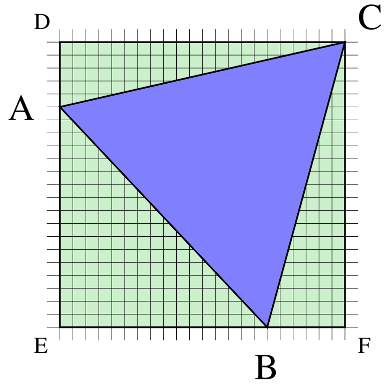
(a) Montrer que si p a une racine rationnelle irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.

(b) On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

★ Exercice 5 : Triangles équilatéraux et grilles

Supposons que l'on ait un triangle équilatéral ABC dont les sommets sont placés sur une grille carrée, c'est-à-dire que les coordonnées des sommets sont entières dans le repère orthonormal canonique de la grille.

1. Montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Justifier que la longueur du côté AB du triangle placé sur la grille est tel que AB^2 soit entier. En déduire que l'aire du triangle ABC est irrationnelle.
2. On a inscrit le triangle dans le rectangle $CDEF$ basé sur la grille. En considérant les aires de $CDEF$, CDA, ABE et BCF, montrer que l'aire du triangle ABC est rationnelle.
3. Conclure.



Exercice 6 : Majorant et minorant

Etant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A.
2. m est un minorant de A.
3. P n'est pas un majorant de A.
4. A est majoré.
5. A n'est pas minoré.
6. A est borné.
7. A n'est pas borné.

★ Exercice 7 : Propriétés des bornes sup et inf

Soient A et B deux sous-ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Si une proposition est fausse, proposer une rectification.

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$
3. $A \cup B$ et $A \cap B$ sont bornés et non vides
4. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
5. $\sup -A = -\sup A$
6. $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$

★ Exercice 8 : Densité

Montrer que $A = \sqrt{2}\mathbb{Q} := \{r\sqrt{2},\, r \in \mathbb{Q}\}$ et $B = \{r^3,\, r \in \mathbb{Q}\}$ sont deux ensembles denses dans $\mathbb{R}$. On admettra que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.