Chapitre 1 : La droite réelle

Le but de ce chapitre est d'introduire la *topologie* de la droite réelle, c'est-à-dire un point de vue d'analyste sur les nombres réels. Ces derniers n'ont pas échappés à la refondation des mathématiques du XIXème siècle et en toute logique, il faudrait commencer par définir proprement ce qu'est un nombre… mais ce serait laborieux et on peut retenir simplement que *la construction des nombres réels ne cache aucune surprise et ceux que vous connaissez déjà sont bien les nombres que l'on construit rigoureusement.* Nous ferons une parenthèse à la fin du chapitre pour en parler.

1 Une rapide histoire des nombres

À part pour les entiers naturels, l'idée de nombre s'est construite avec les civilisations et l'écriture, c'est-à-dire très récemment à l'échelle de l'histoire de l'humanité.

- $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}_+^*$: les entiers naturels et les fractions positives sont utilisés depuis le début des temps historiques (premiers écrits). Toutes les cultures du monde ont des noms pour les premiers nombres entiers et des façons de les représenter. Les écritures des nombres ont été très diverses et plus ou moins pratiques. Il faut noter qu'il existe encore des peuples de chasseurs-cueilleurs qui n'ont pas de mot (et donc de représentation mentale) pour les nombres au-dessus de quelques unités (les Pirahãs comptent « un, deux, beaucoup »). Les grands nombres et le calcul sont donc des affaires de civilisations.

- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})_+$: on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel depuis les pythagoriciens (vers 500 avant J.C). Les grecs de l'Antiquité avaient la vision des nombres comme des longueurs et donc se plaçant sur une ligne droite. Dans ce sens, on peut dire qu'ils voyaient les nombres positifs comme un continuum et donc incluaient les irrationnels.

- $\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$: les nombres négatifs sont utilisés en Chine et en Inde deux siècles avant notre ère. Cela consiste à noter avec des couleurs différentes les dettes et de connaître les règles d'opération sur les signes. Ils ne seront utilisés que bien plus tard chez les arabes et en occident.

- L'écriture décimale et le chiffre zéro apparaissent en Inde vers le Vème siècle avant d'être adoptés par la civilisation arabe. D'ailleurs, ceux que nous appelons « chiffres arabes » étaient qualifiés d'« indiens » par al-Khwārizmī (IXème siècle, Perse). Ce dernier rédige un manuel d'utilisation de l'écriture décimale qui sera traduit et participera à l'essor de cette écriture en occident pendant la renaissance. Ceci explique que « chiffre » se dit « algarismo » en portugais (une autre partie de l'œuvre d'al-Khwārizmī fera que son nom donnera aussi le mot « algorithme » et le titre d'un de ces livres notre mot « algèbre »).

- 0 : le nombre zéro n'apparaît que vers 500 en Inde. Il ne faut pas le confondre avec le chiffre zéro qui ne sert qu'à indiquer une position vide dans une écriture positionnelle (parfois un espace blanc ou un dessin ont joué le même rôle que le chiffre zéro).
- $\mathbb{C}$: pendant la renaissance italienne, Tartaglia, Cardan et Ferrari développent la résolution des équations de degré 3 et 4. Leurs formules peuvent conduire à des calculs du type $\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$. A priori, cela n'a pas de sens, mais si on admet $\sqrt{-1}$ comme un nombre « imaginaire », alors le calcul donne 0 et on obtient la solution qu'on sait exister. Il s'agit donc au début d'une astuce pour faire un calcul mais pas de « vrais » nombres. C'est Raphaël Bombelli (1526-1572, Italie) puis Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) qui feront de ces nombres de vrais nombres, bien que « complexes ».

2 Topologie de la droite réelle

Pour faire de l'analyse sur les réels, il nous faut définir une notion de distance, de proximité, de voisinage de l'infini... Ce qui suit n'est pas vraiment à considérer comme des définitions. Mais dans tout ce cours, il sera important d'avoir à l'esprit une interprétation intuitive des notions ci-dessous. Ainsi la phrase mathématique « $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \ldots$ » ce comprendra « il existe x aussi proche que souhaité de x_0 tel que... ». Il sera très difficile de comprendre les définitions des chapitres suivants sans ce dictionnaire.

La **distance** entre deux réels x et y est $|x - y|$.

Un **voisinage d'un point** $x \in \mathbb{R}$ est un petit intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ autour de x avec $\varepsilon > 0$. Il s'agit de tous les réels à distance au plus ε de x, c'est donc la boule de centre x et de rayon ε. Plus généralement, on appelle aussi *voisinage* de x tout ensemble qui contient une boule $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

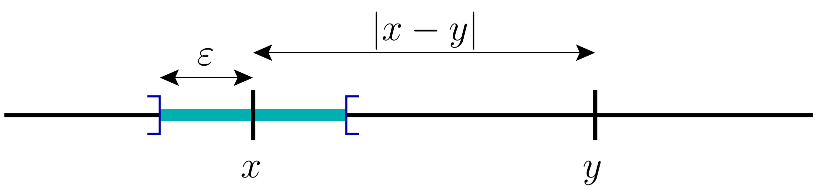


FIGURE 1.1 – *la distance $|x-y|$ entre deux nombres réels correspond bien à la notion usuelle. Un voisinage de x contient un petit intervalle autour de x.*

Les infinis $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels, même si on peut les conceptualiser. Dans ce cours, **il faut comprendre l'infini comme une notation** et non un nombre pouvant intervenir dans des calculs. Un **voisinage de** $+\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]M,+\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ (pensé comme grand). Un **voisinage de** $-\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]-\infty,M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ (pensé comme très négatif).

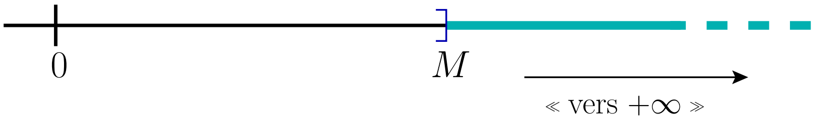


FIGURE 1.2 – *un voisinage de l'infini.*

Comme on l'a vu, la valeur absolue est une fonction primordiale pour faire de l'analyse sur $\mathbb{R}$.
Voici quelques rappels concernant la valeur absolue :

- si $x \geq 0$, $|x| = x$ et si $x \leq 0$, $|x| = -x$. En particulier, $|x| = |-x|$.
- $|x| \leq a$ est équivalent à $-a \leq x \leq a$. En particulier, les boules sur $\mathbb{R}$ sont des intervalles car $\{y \in \mathbb{R},\, |x-y| < \varepsilon\} =]x-\varepsilon\,, x+\varepsilon[$.
- $|x| \geq a$ est équivalent à ($x \leq -a$ ou $x \geq a$).
- $|x \times y| = |x| \times |y|$

Une des propriétés fondamentales de la valeur absolue est la suivante.

Proposition 1.1

L'**inégalité triangulaire** s'énonce

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Il y a égalité si et seulement a et b ont même signe.

Pour $b = -c$, on obtient une majoration pour une différence $|a-c| \leq |a| + |c|$. C'est une inégalité triangulaire sur les distances si on l'écrit sous la forme

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

Il est aussi important de connaître une deuxième version de l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.2

Pour tous réels a et b

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \quad \text{et} \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a-b| \ .$$

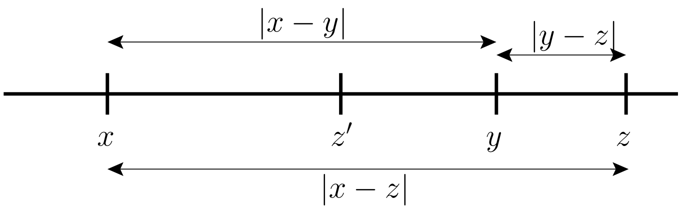


FIGURE 1.3 – *L'inégalité triangulaire équivaut à dire que la distance entre x et z est toujours plus petite que celle entre x et y ajoutée à celle entre y et z. Dans cette figure, il y a égalité si on prend z à droite de y, mais la distance de x à z' est plus strictement courte directement que si on passe par y.*

Démonstration : On utilise la première version de l'inégalité triangulaire

$$|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b|$$

et donc $|a+b| \geq |a| - |b|$. Mais les rôles de a et b sont symétriques, donc on trouve aussi $|a+b| \geq |b| - |a|$ (quitte à refaire l'argument en changeant les rôles de a et b). Pour la deuxième inégalité, il suffit de changer b en $-b$. $\square$

3 Rationnels et irrationnels

Plusieurs civilisations ne savaient écrire les nombres que sous forme d'entiers ou de fractions. Le problème est que dès l'Antiquité, on savait que certains nombres ne pouvaient s'écrire sous forme de fraction.

Proposition 1.3 (irrationalité de $\sqrt{2}$)

Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme a/b avec a et b entiers. En particulier, la diagonale d'un carré n'est pas commensurable à son côté.

Démonstration : Commençons par rappeler que le carré d'un nombre pair est pair car $(2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$ et que le carré d'un nombre impair est impair car $(2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.
Supposons qu'il existe deux entiers positifs a et b tels que $\sqrt{2} = a/b$. On a alors $2b^2 = a^2$, et donc a^2 est pair. Comme le carré d'un impair est impair, ceci implique que a est pair et s'écrit $a = 2a'$ avec a' entier. Mais alors $2b^2 = a^2 = 4a'^2$ et donc $b^2 = 2a'^2$ est pair. On en déduit que b est pair et s'écrit $b = 2b'$ avec b' entier. On a donc aussi que $\sqrt{2} = a'/b'$.
Mais on pourrait de nouveau appliquer l'argument et diviser par deux chacun des nombres de la fraction et ainsi de suite une infinité de fois. Comme aucun entier ne peut être divisé une infinité de fois par 2 (on finit par obtenir des nombres non entiers, ne serait que parce qu'ils sont plus petits que 1), c'est absurde. Donc notre hypothèse de départ est fausse et $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous

forme d'une fraction a/b avec a et b entiers. $\square$

On peut donc classer les réels en deux catégories.

Définition 1.4

Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est dit **rationnel** si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Si $x \in \mathbb{R}$ n'est pas rationnel, il est dit **irrationnel**.

Exemples :

- tous les nombres décimaux (et donc les nombres utilisés par les ordinateurs) sont rationnels.
- on vient de voir que $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est aussi le cas du nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$.
- le nombre $1{,}1010010001000010\ldots$ est irrationnel. De manière général, un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.
- e est irrationnel (1737, Leonhard Euler)
- π est irrationnel (1768, Jean-Henri Lambert)

La notion suivante de densité est une notion importante de topologie, mais nous n'allons l'utiliser que pour les rationnels et les irrationnels.

Définition 1.5

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit **dense** s'il vérifie une des caractérisations équivalentes suivantes :

i) chaque voisinage d'un point x de $\mathbb{R}$ contient un point de A

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ \forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists a \in A\ ,\ \ a \in \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

ii) A rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \ x < y \implies (\exists a \in A\ ,\ \ x < a < y)\,.$$

iii) tout réel peut être approché par une suite de A (cf chapitre suivant)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\ ,\ \ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Proposition 1.6

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous les deux denses dans $\mathbb{R}$.

Cela implique par exemple que :

- Tout réel peut être approché aussi près que l'on veut par un rationnel.
- Entre deux réels, il y a une infinité de rationnels mais aussi une infinité d'irrationnels.

4 Bornes supérieure et inférieure

Les notions de *maximum* ou de *borne* sont des notions courantes. Comme dans tout ce cours, il nous faut maintenant les préciser avec une définition formelle pour être sûr qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans le vocabulaire.

Définition 1.7

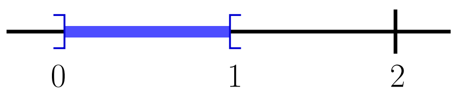
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des nombres réels.
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **un majorant** de A si

$$\forall a \in A, , \quad a \leq M .$$

On dit que A est **majoré** s'il existe un réel M qui majore A.
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, si c'est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire que c'est un majorant et que tout nombre plus petit n'est plus un majorant.
Si $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A et que M appartient à A, alors on dit que M est **le maximum** de A et on le note $\max(A)$.

Exemples :

- Le segment $]0,1[$ est majoré par 2. Sa borne supérieure est 1 car d'une part tout $x \in]0,1[$ est plus petit que 1 et, d'autre part, tout nombre $1-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ n'est pas majorant car $x = \max(1-\varepsilon/2, 1/2)$ est dans $]0,1[$ et est plus grand que $1-\varepsilon$. Par contre 1 n'appartient pas à $]0,1[$ donc 1 n'est pas le maximum de $]0,1[$ et écrire $\max(]0,1[)$ n'a pas de sens.



- $\{x \in \mathbb{Q},\, x \leq 2\}$ a 2 pour maximum.
- $\{x \in \mathbb{Q},\, x^2 \leq 2\}$ a $\sqrt{2}$ pour borne supérieure mais n'a pas de maximum.

Si $A = \emptyset$ est vide, alors A est majoré par tous les réels car une proposition concernant tous les éléments de $\emptyset$ est trivialement vérifiée (il n'y a aucun élément à considérer !). L'ensemble des majorants de l'ensemble vide est donc $\mathbb{R}$ tout entier et il n'y a pas de plus petit majorant. Donc $A = \emptyset$ n'a pas de borne supérieure. De même, un ensemble non majorée n'a aucun majorant et donc pas de borne supérieure. Mais pour simplifier les notations, il peut être agréable de quand même faire un abus de notation utilisant les infinis.

Définition 1.8

Si $A = \emptyset$ est vide, on pose $\sup(A) = -\infty$.
Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.

! Attention : il ne s'agit que d'une notation. C'est commode pour énoncer des propositions sans avoir à faire plusieurs cas, mais il faut se méfier si on veut utiliser ces définitions comme des nombres concrets puisque des calculs comme $\infty - \infty$ n'ont pas de sens.

On procède de même pour la borne inférieure.

Définition 1.9

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des nombres réels.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **un minorant** de A si

$$\forall a \in A, \, , \quad m \leq a \ .$$

On dit que A est **minoré** s'il existe un réel m qui minore A.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, si c'est le plus grand minorant de A, c'est-à-dire que c'est un minorant et que tout nombre plus grand n'est plus un minorant.
Si $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A et que m appartient à A, alors on dit que m est **le minimum** de A et on le note $\min(A)$.

De nouveau, pour simplifier les notations, on peut écrire

Définition 1.10

Si $A = \emptyset$ est vide, on pose $\inf(A) = +\infty$.
Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.

Et naturellement

Définition 1.11

Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Exemples :

- Remarquons que, par définition, l'ensemble vide est borné.
- Un intervalle du type $]a,b]$ est borné. Il admet un maximum qui est b et une borne inférieure qui est a mais n'a pas de minimum.
- Un intervalle du type $[a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré, il n'est donc pas borné et n'admet pas de borne supérieur (ni de maximum). Il admet a comme minimum (et donc aussi comme borne inférieure).

- Supposons que $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble pour lequel on a trouvé une borne $M > 0$ telle que pour tout $a \in A$, $|a| \leq M$. Alors A est borné et contenu dans $[-M,M]$.

- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1\}$ est borné (c'est le segment $[-1,1]$). Mais l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ 1 \leq x^2\}$ n'est ni majoré, ni minoré (il est égal à $]-\infty,1] \cup [1,+\infty[$). Attention donc à bien décrypter ce qu'est l'ensemble avant de décider s'il est majoré ou minoré (ne pas se fier juste aux sens des inégalités le définissant).

Une des propriétés fondamentales des réels est l'existence d'une borne supérieure.

Théorème 1.12 (existence de la borne supérieure)

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure.
Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

Exemples :

- Prenons $a < b$. Le segment $[a,b]$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure b qui est aussi un maximum. Le segment $[a,b[$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure b mais pas de maximum.

- L'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ \ x^5 - 3x - 1 \leq 0\}$$
est majoré (car $x^5 - 3x - 1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$) et contient $x = 0$. Il admet donc une borne supérieure, mais qu'on ne peut pas écrire à l'aide des fonctions usuelles. C'est donc le théorème 12 qui me donne l'existence de cette borne supérieure même si je ne peux pas écrire ce qu'elle vaut exactement.

Même si elle peut paraître naturelle, il s'agit d'une propriété *topologique* fondamentale de $\mathbb{R}$. Prenons l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q},\ r^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ qui est un ensemble de rationnels dont la définition n'a utilisé que des rationnels. Clairement, A est non vide car $0 \in A$ et A est majoré car si $x \in A$ alors $x \leq 2$ et pourtant A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Mais si on étend notre vue à tous les réels, c'est-à-dire qu'on regarde A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure qu'on note $\sqrt{2}$. Donc le théorème 12 n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ et c'est la prise en compte de tous les réels qui permet d'obtenir toutes les bornes supérieures.

5 La construction des réels

Au cours du XIXème siècle, les mathématiciens ont remis à plat les mathématiques pour les refonder sur des bases logiques solides. Ils se sont alors demandé comment définir proprement un nombre, et en particulier un nombre réel.

L'écriture décimale

Notre intuition des réels repose surtout sur l'écriture décimale d'un nombre. Pour les nombres *décimaux*, c'est-à-dire qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres, c'est assez convenable. C'est plus compliqué quand un nombre comme π a une infinité de décimale sans régularité apparente. Par ailleurs, l'écriture décimale *propre* interdit les séquences de chiffres se terminant par une infinité de 9 pour éviter que 1 puisse s'écrire aussi 0,99999 . . .. Ceci rend la définition rigoureuse des opérations assez laborieuse. Enfin, cette écriture décimale est liée au choix de la base 10 qui est arbitraire : les mésopotamiens de l'Antiquité comptaient en base 60 (d'où nos 60 minutes dans une heure ou les 360 degrés découpant le cercle) et certains peuples comptent en base 20 (c'était le cas des gaulois, d'où notre « quatre-vingt » ou notre « soixante-douze »). Les mathématiciens n'aiment pas qu'une construction repose sur des choix culturels.

Les coupures de Dedekind

L'idée de Dedekind est de représenter un nombre par une coupure (A,B) de $\mathbb{Q}$, i.e. deux ensembles complémentaires non vides A et B tels que pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a \leq b$. Il faut vraiment voir la coupure comme un trait coupant $\mathbb{Q}$ en deux parties : A à gauche et B à droite. Ces coupures peuvent déjà représenter les rationnels en posant qu'un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ est représenté par

$$A_q = \{r \in \mathbb{Q}, r < q\} \text{ et } B_q = \{r \in \mathbb{Q}, q \leq r\} .$$

Richard Dedekind
1831-1916
Allemagne

Ainsi, une coupure (A,B) telle que B admet un minimum $q \in \mathbb{Q}$ représente le rationnel q. Mais on peut aussi regarder la coupure

$$A = \{r \in \mathbb{Q}, r^2 < 2 \text{ ou } r \leq 0\} \text{ et } B = \{r \in \mathbb{Q}, 2 < r^2 \text{ et } 0 \leq r\}$$

qui est une coupure admise, entièrement décrite par des rationnels, mais qui n'est pas de la forme (A_q,B_q) avec $q \in \mathbb{Q}$ puisque B n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. C'est donc un nouveau nombre, qui va correspondre à $\sqrt{2}$. Pour vraiment construire la théorie, il faut retrouver toutes les propriétés de $\mathbb{R}$, bien définir ce qu'est la somme de deux coupures, leur produit etc. Par exemple, $(A,B) \leq (A',B')$ peut être défini par $A \subset A'$. De même, on peut définir l'addition de coupures par $(A,B) + (A',B') = (A+A',B+B')$. On montre ainsi qu'on obtient une bonne représentation de ce qu'on appelle « nombre réel ».

Les suites de Cauchy

Louis Augustin Cauchy a eu lui l'idée d'introduire une notion de suite qui assurerait la convergence sans pour autant introduire la limite elle-même. Une suite $(u_n) \subset \mathbb{Q}$ est dite « de Cauchy » si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n,m \geq n_0 \ , \ \ |u_n - u_m| \leq \varepsilon \ .$$

Notons que cette définition n'utilise que des nombres rationnels (la définition plus standard des suites numériques de Cauchy sera donnée dans le chapitre suivant).

Une suite convergente dans $\mathbb{Q}$ est de Cauchy mais certaines suites sont de Cauchy sans converger dans $\mathbb{Q}$ car leur potentielle limite n'y est pas. On définit alors les réels comme toutes les limites possibles de suite de Cauchy de rationnels. Le procédé est plus compliqué à formaliser mais il a l'avantage d'être utilisable dans beaucoup d'autres situations mathématiques où il faut « compléter » un espace où certaines suites de Cauchy ne convergent pas.

Louis Augustin Cauchy
1789-1857, France

De toute ces constructions, on obtient des propriétés fondamentales de la droite réelle comme l'existence d'une borne supérieure énoncée plus haut dans le théorème 12. On obtient aussi que toute suite de Cauchy est convergente (voir chapitre suivant). On pourra aussi retenir une propriété évidente mais qui est importante, c'est que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Théorème 1.13 ($\mathbb{R}$ est archimédien)

Pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

En particulier, on en déduit une propriété qu'il est important de saisir pour les définitions des chapitres suivants.

Proposition 1.14

La borne inférieure de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est 0. Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad |x| < \varepsilon$$

alors $x = 0$.

À connaître :

- Notion de rationnel/irrationnel, savoir les manipuler.
- Connaître la valeur absolue, les inégalités triangulaires et savoir les manipuler.
- Connaître les définitions majorant/minorant, borne sup/inf, max/min etc.

Utile pour la suite :

- Se forger l'intuition du concept de voisinage, de distance entre réels
- Le théorème d'existence de la borne sup