M2R
EDP d'évolution

Université de Grenoble
2011/2012

Problème de Cauchy pour une équation d'évolution semi-linéaire

Exercice 1 : Soit X un espace de Banach et soit A le générateur d'un semi-groupe continu e^{At} sur X. On suppose que f est une fonction globalement lipschitzienne sur X. Montrer que les solutions $u(t)$ de l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u)$$

existent globalement et ne croissent pas plus vite qu'une exponentielle en temps.

Exercice 2 : On considère un ouvert Ω borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit Δ le laplacien de Dirichlet sur cet ouvert et soit $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Soit $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation des ondes amorties

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x,t) + \gamma(x)u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x, u(x,t)) & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ (u, u_t)(.,0) = (u_0, u_1) \in X \end{array} \right. \qquad (1)$$

1) Montrer que si $d = 1$, le problème de Cauchy pour l'équation (1) est localement bien posé.
2) Pour $d \geq 2$, trouver les $p \geq 1$ tels que si

$$\forall u \in \mathbb{R} \ , \quad |f(u)| \leq C(1 + |u|)^p \quad \text{ et } \quad |f'(u)| \leq C(1 + |u|)^{p-1}$$

alors le problème de Cauchy pour l'équation (1) est localement bien posé.
3) On suppose maintenant que $f(x, u)u \leq 0$ pour tout $|u| \geq R$ et $x \in \Omega$. Montrer que les solutions de l'équation des ondes sont globales.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $f(0) = 0$. On considère l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} \ .$$

On admettra que le laplacien engendre un semi-groupe continu sur tous les espaces $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Montrer que pour p assez grand, le problème de Cauchy local est bien posé sur $X = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.