M2R
EDP d'évolution

Université de Grenoble
2011/2012

Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Exercice 1 : Exemples de générateurs infinitésimaux
1) Soit $a > 0$. En appliquant le théorème de Hille-Yosida, montrer que l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + a\partial_x u(x,t) = -u(x,t) & x \geq 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

est bien posée sur $L^1(\mathbb{R}_+)$.
2) Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et soit $\gamma > 0$. En appliquant le théorème de Lumer-Phillips, montrer que l'équation des ondes amorties

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) + \gamma\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u_{|\partial\Omega}(t) \equiv 0 & t > 0 \\ (u, \partial_t u)(0) = (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

est bien posée sur $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Exercice 2 : Perturbation bornée Soit X un espace de Hilbert. Soit $A : D(A) \to X$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X et soit $B : D(B) \to X$ un opérateur vérifiant $D(A) \subset D(B)$. On dit que B est $A-$borné s'il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\forall x \in D(A)\ ,\quad \|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|\ . \tag{1}$$

1) Montrer que si B est dissipatif et $A-$borné avec une constante $\alpha < 1/2$, alors $A + B$ est générateur d'un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ de contractions (en fait on peut aller jusqu'à $\alpha < 1$ par une astuce, voir [Gustafson, *A perturbation Lemma*]).
2) On suppose que B est compact relativement à A, c'est-à-dire que B est $A-$borné et l'image de $\{x \in D(A), \|Ax\| + \|x\| \leq 1\}$ par B est relativement compacte dans X. Montrer que la constante α dans (1) peut être choisie aussi petite que voulu.
3) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On admet que Δ_D, le laplacien de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$, est inversible et que Δ_D^{-1} est borné de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$. Soit $v \in (L^p(\Omega))^3$ un champ de vecteurs vérifiant

$$\mathrm{div}(v) = 0 \qquad \text{et} \qquad v.\nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\ .$$

Donner une condition sur $p \geq 1$ pour que l'opérateur $\Delta_D + v.\nabla$ engendre un semi-groupe de contractions sur $L^2(\Omega)$.

Exercice 3 : Théorème de Stone

Démontrer le théorème de Stone : un semigroupe $S(t)$ sur un espace de Hilbert complexe H est unitaire si et seulement si son générateur infinitésimal est de la forme iA avec A un opérateur auto-adjoint.

Exercice 4 : Un exemple de semi-groupe analytique

Soit Δ_D le laplacien avec condition aux bords de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ avec Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On admettra que le spectre de Δ_D est inclus dans la demi-droite $]-\infty, 0[$. Montrer que $e^{\Delta_D t}$ est un semi-groupe analytique.