M2R
EDP d'évolution

Université de Grenoble
2011/2012

Deux exemples fondamentaux d'EDP sur le segment

On pourra utiliser ce qui a été vu dans l'exercice sur la définition de $H_0^s(0,1)$ par les séries de Fourier.

Exercice 1 : L'équation de la chaleur.
On considère l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,1[\end{cases} \tag{1}$$

On appelle solution forte de (1) sur $\mathbb{R}_+$ une fonction

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(]0,1[)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, L^2(]0,1[))$$

vérifiant (1) au sens des distributions.
1) Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(]0,1[)$, il existe une unique solution forte u de (1) qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k(u_0) e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x) \ . \tag{2}$$

2) Montrer que cette solution u est dans $\mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbb{R}_+^*)$ (on dit que l'équation de la chaleur régularise ses solutions en temps fini).
3) Montrer que u tend exponentiellement vite vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : L'équation des ondes.
On regarde une corde vibrante fixée aux bouts. Les petits déplacements de la corde sont régis par l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & x \in]0,1[\end{cases} \tag{3}$$

On note par la suite $U(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ et $U_0 = (u_0, u_1)$. On introduit les coefficients $c_k(u_0)$ et $c_k(u_1)$ donnés par les décompositions dans $L^2(]0,1[)$.

$$u_0 = \sum_{k\geq 1} c_k(u_0)\sin(k\pi .) \qquad u_1 = \sum_{k\geq 1} c_k(u_1)\sin(k\pi .)\ . \tag{4}$$

1) Montrer que pour tout $U_0 \in H_0^1(]0,1[) \times L^2(]0,1[)$, il existe une solution $U(t)$ de (3) au sens des distributions dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H_0^1(]0,1[) \times L^2(]0,1[))$ et celle-ci est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left(c_k(u_0)\cos(k\pi t) + \frac{c_k(u_1)}{k\pi}\sin(k\pi t) \right) \sin(k\pi x)\ . \tag{5}$$

2) Montrer formellement l'unicité de cette solution en introduisant une énergie convenable. Peut-on rendre la démonstration rigoureuse ?
3) Montrer que $U(t)$ est 2-périodique et sa norme est constante au cours temps. A-t-on un phénomène de régularisation ?
4) Que se passe-t-il si on ajoute un terme d'amortissement, c'est-à-dire que l'on considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{tt}^2 u(x,t) + \gamma \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & x \in]0,1[\end{array} \right. \tag{6}$$

avec $\gamma > 0$?