M2R
EDP d'évolution

Université de Grenoble
2011/2012

Espaces de Sobolev

Exercice 1 : Un contre-exemple pour l'injection critique.

Soit $p \geq 2$, soit $d = p$ et soit $\alpha \in]0, 1 - 1/d[$. Soit B la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon 1. Montrer que la fonction

$$f \ : \ x \longmapsto \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^\alpha$$

est dans $W^{1,p}(B)$ mais pas dans $L^\infty(B)$. On notera en particulier que $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2 : Etude de l'espace $W^{1,p}(0,1)$.

1) Soit $f \in L^1_{loc}(0,1)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_0(0,1) \ , \quad \int_0^1 f \varphi' = 0 \ .$$

Montrer que f est constante (modulo un ensemble de mesure nulle).
Indication : soit $\psi \in \mathcal{C}^0_0(0,1)$ telle que $\int \psi = 1$, considérer φ définie par $\varphi' = \omega - \psi \int \omega$ où ω est une fonction test dans $\mathcal{C}^0_0(0,1)$.
2) Soit $f \in L^1_{loc}(0,1)$ et soit $x_0 \in]0,1[$. Montrer que

$$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est une fonction continue dont la dérivée au sens des distributions est f.
3) Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $u \in W^{1,p}(0,1)$. Montrer que u est continue et que pour tout $x_0 \in]0,1[$,

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t) \ dt \ .$$

4) En déduire que si $p > 1$, alors $u \in W^{1,p}(0,1)$ est une fonction Hölder continue et qu'elle se prolonge en 0 et 1.
5) Montrer que $u \in W^{1,1}(0,1)$ est uniformément continue et se prolonge en 0 et 1.

6) Montrer que $W_0^{1,p}(0,1)$ est exactement l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}(0,1)$ qui s'annulent en 0 et 1.

Exercice 3 : Définition de $H_0^s(0,1)$ par les séries de Fourier.

1) Montrer que la famille $(\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Dans la suite, pour toute fonction $f \in L^2(]0,1[)$, on note $c_k(f)$ les coefficients tels que

$$f \;=\; \sum_{k\geq 1} c_k(f)\sin(k\pi.)$$

(on omet les facteurs $\sqrt{2}$ pour alléger, cela ne changera pas notre propos que la base soit normalisée ou pas). Pour tout $s \geq 0$, on pose

$$\mathbb{H}_D^s = \{\ f \in L^2(]0,1[)\ ,\ \sum_{k\geq 1} k^{2s}|c_k(f)|^2 < \infty\ \}$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{\mathbb{H}_D^s} = \sum_{k\geq 1} k^{2s} c_k(f)\bar{c}_k(g)\ .$$

2) Montrer que $\mathbb{H}_D^s(]0,1[)$ est un espace de Hilbert.
3) Montrer que si $s > s'$, alors $\mathbb{H}_D^s$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbb{H}_D^{s'}$.
4) Montrer que pour tout $s > 1/2$, $\mathbb{H}_D^s$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. En outre, pour tout $f \in \mathbb{H}_D^s$, $f(0) = f(1) = 0$.
5) Soit $s \geq 1$ et soit $f \in \mathbb{H}_D^s$. Montrer que f est dérivable au sens des distributions et que sa dérivée f' appartient à $L^2(0,1)$ et est donnée par

$$f'(x) = \sum_{k\geq 1} k\pi c_k(f)\cos(k\pi x)\ .$$

6) Montrer que $\mathbb{H}_D^1 = H_0^1(0,1)$ et que $\mathbb{H}_D^2 = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Que dire de $\mathbb{H}_D^3$?

Exercice 4 : L'espace $H^s(\mathbb{T}^2)$.

On considère le tore $\mathbb{T}^2$. En s'inspirant de l'exercice précédent, définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ pour pour $s \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $H^s(\mathbb{T}^2)$ s'injecte dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si $s > 1$.