Introduction aux EDP d'évolution

Notes basées sur un cours de M2R donné par Eric Dumas et Romain Joly à l'université de Grenoble.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

1.1 Définitions générales

1.1.1 Dérivées faibles et espaces de Sobolev

Définition 1.1.1 (dérivées faibles)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, u localement intégrable sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On appelle* dérivée faible *de u d'ordre α, et on note $D^\alpha u$, toute fonction v localement intégrable sur Ω telle que*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega u \partial^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx.$$

Définition 1.1.2 (espaces de Sobolev)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. On appelle* espace de Sobolev *(sur Ω, d'ordre k, basé sur L^p), et on note $W^{k,p}(\Omega)$, l'ensemble des applications $u \in L^p(\Omega)$ dont toutes les dérivées faibles d'ordre inférieur ou égal à k sont dans $L^p(\Omega)$. Lorsque $p = 2$, $W^{k,p}(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ est plutôt noté $H^k(\Omega)$. On munit $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad \textit{si } p < \infty \quad \textit{et} \quad \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \; .$$

Remarques :

1) Si $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $\alpha \leq k$, u admet sa dérivée usuelle $\partial^\alpha u$ comme dérivée faible d'ordre α (et toute autre dérivée faible d'ordre α de u est égale à $\partial^\alpha u$ presque partout).
2) On peut considérer u, localement intégrable sur Ω, comme une distribution sur Ω. Elle admet alors des dérivées (à tout ordre) au sens des distributions. Elle admet une dérivée faible d'ordre α si et seulement si sa dérivée distribution (d'ordre α) est localement intégrable sur Ω, et ces deux dérivées sont alors égales. En particulier, il y a unicité des dérivées faibles. De même, $u \in L^p(\Omega)$ appartient à $W^{k,p}(\Omega)$ si et seulement si toutes ses dérivées distribution d'ordre inférieur ou égal à k appartiennent à $L^p(\Omega)$.

3) u et ses dérivées sont définies modulo les ensembles de mesure nulle. Par exemple, il faut comprendre « u est continue » comme « la classe d'équivalence de u admet un représentant continu ».
4) On peut évidemment utiliser des normes équivalentes comme $\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^p}$.
5) On peut définir $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s \ge 0$ par interpolation ; voir le livre de Adams.
6) $W^{k,p}(\Omega)$ est un sous-espace de $L^p(\Omega)$, et même : $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega)$ si $k \ge l$, et lorsque Ω est borné, et $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ si $p \ge q$.

Exemples :
1) si $\overline{\Omega}$ est compact, $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$.
2) la fonction $x \longmapsto |x|$ est dans $W^{1,p}(]-1,1[)$ pour $p \in [1,\infty]$.
3) si Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^d$, alors $x \longmapsto 1/|x|^\alpha$ est dans $W^{k,p}(\Omega)$ si et seulement si $\alpha < d/p - k$. Ainsi $W^{1,p}(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $p < q$. Notons aussi que $1/|x| \in W^{1,1}(B^3)$.

Théorème 1.1.3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1,\infty]$, $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Soit (f_n) une suite de Cauchy de $W^{k,p}(\Omega)$. Pour tout multi-indice α avec $0 \le |\alpha| \le k$, $(D^\alpha f_n)$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ donc converge vers f^α dans $L^p(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi$$

et par convergence dans L^p,

$$\int_\Omega f^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^0 D^\alpha \varphi \ .$$

Donc $f^\alpha = D^\alpha f^0$ et (f_n) converge vers $f = f^0$ dans $W^{k,p}(\Omega)$. □

Corollaire 1.1.4. *$W^{k,p}(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^N$ (où N est le nombre de multi-indices de poids plus petit que k). En particulier, $W^{k,p}(\Omega)$ est séparable si $1 \le p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*

1.1.2 Fonctions du temps à valeurs dans un Banach

Lorsque B est un espace de Banach et $p \in [1,\infty[$, pour tout $T > 0$, on définit $L^p(]0,T[,B)$ comme le complété de $\mathcal{C}([0,T],B)$ pour la norme

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p dt\right)^{1/p} .$$

Si B est un espace de Sobolev sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, tout élément de $L^p(]0,T[,B)$ peut également être vu comme un élément de $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.

1.2 Cas de l'espace entier $\mathbb{R}^d$

1.2.1 Analyse de Fourier

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}$, on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f = \hat{f}$ par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

On obtient ainsi un isomorphisme (linéaire, continu) $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, dont l'inverse est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)d\xi.$$

On a également l'identité de Parseval,

$$\forall f, g \in \mathcal{S}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

si bien que $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (et $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$ est une isométrie).
De plus, $\mathcal{F}$ s'étend en un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ (par ${}_{\mathcal{S}'}< \hat{T}, f >_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}'}< T, \hat{f} >_{\mathcal{S}}$), et on a alors :

$$\begin{gathered}
\forall f \in \mathcal{S}, \forall T \in \mathcal{S}', \quad \widehat{f \star T} = \hat{f}\hat{T}, \quad \widehat{fT} = \hat{f} \star \hat{T}, \\
\big(\text{où } {}_{\mathcal{S}'}< f \star T, g >_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}'}< T, \check{f} \star g >_{\mathcal{S}}, \ \check{f}(x) = f(-x); \\
\text{alors } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \, \partial^\alpha(f \star T) = (\partial^\alpha f) \star T = f \star \partial^\alpha T\big) \\
\forall T \in \mathcal{S}', \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \widehat{x^\alpha T} = (-i\partial_\xi)^\alpha \hat{T}, \quad \widehat{\partial_x^\alpha T} = (i\xi)^\alpha \hat{T}.
\end{gathered}$$

1.2.2 Espaces fonctionnels

Définition 1.2.1 (espaces de Sobolev)**.** *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^d) \right) ,$$

et on le munit de la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} .$$

Remarques :

1) Dans le cas de $s \in \mathbb{N}$, cette définition coïncide avec la définition 1.1.2. On pourrait faire de même pour $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \|\mathcal{F}^{-1}\left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \right) \|_{L^p}.$$

2) $H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$ et $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s_1 \geq s_2$.

3) Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}$ est une fonction mesurable (même si, lorsque $s < 0$, u ne l'est pas forcément ; ainsi, la masse de Dirac est dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s < -d/2$).

Proposition 1.2.2. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert, et $\mathcal{F}$ réalise une isométrie entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2_s(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.*

Démonstration : La transformation de Fourier est une bijection de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur $L^2_s(\mathbb{R}^d)$. La définition de la norme de $H^s(\mathbb{R}^d)$ en fait une isométrie. On en déduit que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est lui aussi préhilbertien et complet. □

`Je note les produits scalaires` $(\cdot \mid \cdot)_H$.

Proposition 1.2.3 (densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$)**.** *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi := (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc il existe une suite $(\varphi_j)_j$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On a $\phi_j := (1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et avec $u_j := \mathcal{F}^{-1}\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u_j} = \varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{L^2} \hat{u}.$$

□

Proposition 1.2.4 (injection de Sobolev)**.** *Si $s > d/2$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (et même dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $s > k + d/2$). De plus, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est alors une algèbre de Banach :*

$$\exists C > 0, \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad uv \in H^s(\mathbb{R}^d) \ \text{ et } \ \|uv\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}.$$

`Preuve en TD, avec trace sur` $\mathbb{R}^{d-1}$.
Remarque : L'application de Fourier partielle ("en espace" seulement), bijection qui à $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$ associe $\hat{u} \in \mathcal{C}([0,T], L^2_s(\mathbb{R}^d))$ (avec $\hat{u}(t) = \widehat{u(t)}$), se prolonge pour tout $p \in [1, \infty[$ en une bijection de $L^p(]0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$ sur $L^p(]0,T[, L^2_s(\mathbb{R}^d))$.

1.2.3 Problème de Cauchy pour les équations d'évolution linéaires à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$

On définit souvent quelques classes générales d'EDP : les équations *elliptiques* (telles que l'équation de Laplace $\Delta u = 0$), *paraboliques* (comme l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$) et *hyperboliques* (comme l'équation des ondes $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$). Cette terminologie se justifie par la forme des polynômes apparaissant par application de la transformation de Fourier (en (t, x)).

Équation de transport

Lorsque $v \in \mathbb{R}^d$, on considère

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \partial_x u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Proposition 1.2.5. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ de (1.1). Elle est donnée explicitement par*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}, \quad u(t,x) = u_0(x - tv).$$

Preuve par Fourier ou par changement de variables.

Équation de la chaleur

Cas homogène :

Théorème 1.2.6. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^d))$ une unique solution (au sens distributions) u de*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Elle est donnée pour $t > 0$ par

$$u(t) = G(t, \cdot) \star u_0,$$

où le noyau *(ou* solution fondamentale*) de l'équation de la chaleur est*

$$G(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

De plus, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$ (et $u \in C^k(\mathbb{R}_+, H^{s-2k}(\mathbb{R}^d))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Remarque : On a aussi pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, H^\mu(\mathbb{R}^d))$, et pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot)$ est analytique.

Démonstration :
Unicité. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^d))$ sont solutions de (1.2), par transformation de Fourier partielle, $u := u_2 - u_1$ vérifie

$$\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}. \tag{1.3}$$

On a alors $\hat{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_{s-2}(\mathbb{R}^d))$. De plus, si χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, positive et à support compact, on a $\chi\hat{u}, |\xi|\chi\hat{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\|\chi\hat{u}\|_{L^2}^2 \right) = 2\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\chi\hat{u}} \partial_t (\chi\hat{u})\, d\xi = -2 \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\chi(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le 0,$$

donc $\|\chi\hat{u}\|_{L^2}$, initialement nulle, est nulle pour tout temps. Ainsi, $\chi\hat{u}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, et comme χ est quelconque, $\hat{u}$ elle-même est nulle (donc u aussi).
Existence. L'équation (1.3) suggère (en résolvant l'EDO "pour chaque ξ") qu'une solution de (1.2) est donnée par

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi). \tag{1.4}$$

Par convergence dominée, (1.4) définit $\hat{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2_s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_{s-2}(\mathbb{R}^d))$, vérifiant (1.3) et $\hat{u}(0) = \widehat{u_0}$. Cela définit bien une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^d))$ de (1.2).
De même, on obtient que pour tous $k,l \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+^\star, H^l(\mathbb{R}^d))$, par convergence dominée (pour $|(-|\xi|^2)^k\xi^\alpha \exp(-t|\xi|^2)(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_0(\xi)|^2$, lorsque $|\alpha| = k$). Grâce à l'injection de Sobolev, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$.
La régularité $u \in C^k(\mathbb{R}_+, H^{s-2k}(\mathbb{R}^d))$ s'obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par l'équation et par la continuité du laplacien Δ de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-2}(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, comme $\xi \mapsto \exp(-t|\xi|^2)$ est dans la classe de Schwartz, et $\widehat{u_0}$ est une distribution tempérée, par inversion de Fourier, (1.4) fournit la représentation

$$\forall t > 0, \quad u(t) = G(t,\cdot) \star u_0,$$

où l'expression de $G(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\cdot|^2}\right)$ est donnée par le

Lemme 1.2.7. *Pour tous $C > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{F}\left(e^{-C|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{C}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4C}.$$

(*cf.* séparation des variables, puis en dimension 1, fonction holomorphe de $\xi \in \mathbb{C}$, et calcul explicite pour $\xi = i\eta$.) □

Remarques :
1) Si on considère l'opérateur $\partial_t - D\Delta$ ($D > 0$), on remplace $G(t,x)$ par $G_D(t,x) = (4\pi Dt)^{-d/2}\exp(-|x|^2/4Dt)$.
2) Le fait que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$ traduit un *effet régularisant*, qui explique que l'on ne puisse pas résoudre pour $t < 0$ (*irréversibilité*) : cela nécessiterait en particulier $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Changeant t en $-t$, on voit ainsi que l'on ne peut pas résoudre le problème de Cauchy (à temps positif) associé à $\partial_t + \Delta$ pour des données initiales quelconques dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
3) On peut aussi montrer que pour tout $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ (on résout une vraie EDO, à ξ fixé) , et que pour tout $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ (existence par régularisation de u_0 ; unicité grâce à celle de $u \star \varphi$, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'identité) – dans les deux cas, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$.

Cas inhomogène :

Théorème 1.2.8. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$ et $f \in L^1(]0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$.*
(i) Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$ de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Elle est donnée pour $t \in]0, T]$ *par (la formule de Duhamel)*

$$u(t) = G(t, \cdot) \star u_0 + \int_0^T G(t - t', \cdot) \star f(t', \cdot) dt'.$$

(ii) Le problème de Cauchy est bien posé dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ *: l'application* $u_0 \mapsto u$ *est continue de* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *dans* $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$*. On a même, si* $u_0, u_0' \in H^s(\mathbb{R}^d)$*, et si* u, u' *sont les solutions associées :*

$$\|u - u'\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \leq \|u_0 - u_0'\|_{H^s}.$$

Démonstration : Reprendre celle du théorème 1.2.6. □

Proposition 1.2.9 (positivité – principe du maximum faible)**.** *Si* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *et* $f \in L^1((0, T), H^s(\mathbb{R}^d))$ *sont positives (au sens de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*, ou presque partout si* $s \geq 0$*), et si* u *est la solution de* (1.5) *donnée au théorème 1.2.8, alors pour tout* $t \in [0, T]$*,* $u(t)$ *est positive.*

Démonstration : Par positivité de $G(t, \cdot)$. □

Remarque : La stricte positivité de $G(t, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ permet aussi de concevoir que l'équation de la chaleur présente un phénomène de *vitesse infinie de propagation* : si u_0 est positive, non nulle, et disons à support compact, alors pour tout $t > 0$, $G(t, \cdot) \star u_0$ est strictement positive partout.

Proposition 1.2.10 (comportement en temps long dans le cas homogène)**.** *Pour tout* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$*, on a*

$$\|G(t, \cdot) \star u_0\|_{H^s} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$*,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (G(t, \cdot) \star u_0)(x) - (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) dy = o(|t|^{-d/2}) \quad \textit{lorsque } |t| \to \infty.$$

Démonstration : Par convergence dominée, sur la formulation en Fourier

$$\|G(t, \cdot) \star u_0\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi$$

pour la première estimation, sur la convolution

$$\left|\left(G(t,\cdot)\star u_0\right)(x)-(4\pi t)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}u_0(y)dy\right|\leq(4\pi t)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-|x-y|^2/4t}-1\right||u_0(y)|dy$$

pour la deuxième. □

Remarque : On a $\int_{\mathbb{R}^d}u_0(y)dy=\widehat{u_0}(0)$. Alors (pour $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$, disons ; idem si $\widehat{u_0}\in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour un $p\in[1,\infty]$), si $\widehat{u_0}$ s'annule sur la boule $B(0,\varepsilon)$ pour un $\varepsilon>0$, pour tout $\eta\in[0,1)$, il existe $C_\eta>0$ telle que

$$\forall t>0,\quad \|G(t,\cdot)\star u_0\|_{L^\infty}\leq C_\eta\|u_0\|_{L^2}t^{-d/4}e^{-\eta\varepsilon^2 t}.$$

Proposition 1.2.11 (dissipation). *Si $s\in\mathbb{R}$ et $u\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,H^s(\mathbb{R}^d))$ vérifie $\partial_t u-\Delta u=0$ (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}^d)$), alors $t\mapsto\|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2$ est une fonction décroissante (sur $\mathbb{R}_+$).*

Démonstration : Par estimation d'énergie ; comme dans la preuve du théorème 1.2.6, on calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\|\chi(1+|\cdot|^{s/2})\hat{u}\|_{L^2}^2\right)$ – ou bien sans χ, car $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star,H^{s+2}(\mathbb{R}^d))$. □

Remarque : On a même l'"égalité d'énergie"

$$\|u(t)\|_{H^s}^2=\|u(0)\|_{H^s}^2-\int_0^t\|\nabla u(t')\|_{H^s}^2dt'.$$

Proposition 1.2.12 (estimation L^q-L^p). *Soit $1\leq q\leq p\leq\infty$ et $u_0\in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors $u:t\mapsto G(t,\cdot)\star u_0$ vérifie*

$$u\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^q(\mathbb{R}^d))\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star,L^p(\mathbb{R}^d)),$$
$$\textit{et}\quad\|u(t)\|_{L^p}\leq(4\pi t)^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|u_0\|_{L^q},\quad\forall t>0.$$

Démonstration : La régularité est obtenue par convergence dominée. Pour l'estimation, on utilise l'inégalité de Young,

$$\|f\star g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^q}\|g\|_{L^r}\quad\text{si}\quad\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1,$$

et le fait que

$$\|G(t,\cdot)\|_{L^r}^r=(4\pi t)^{-dr/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-r|x|^2/4t}dx=(4\pi t)^{\frac{d}{2}(1-r)}r^{-d/2}\leq(4\pi t)^{\frac{d}{2}(1-r)}.$$

□

Équation des ondes ou de Klein-Gordon

Théorème 1.2.13. *Soit* $m \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *et* $f \in L^1(]0,1[, H^s(\mathbb{R}^d))$.
(i) Si $(u_0, u_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, *il existe dans* $\mathcal{C}([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$ *une unique solution (au sens distributions) u de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + mu = f, \\ u_{|t=0} = u_0, \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Elle est donnée par

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(t\sqrt{|\xi|^2+m})\widehat{u_0}(\xi) + \frac{\sin(t\sqrt{|\xi|^2+m})}{\sqrt{|\xi|^2+m}}\widehat{u_1}(\xi) + \int_0^t \frac{\sin((t-t')\sqrt{|\xi|^2+m})}{\sqrt{|\xi|^2+m}}\hat{f}(t',\xi)dt'.$$

(ii) Le problème de Cauchy bien posé : l'application $(u_0, u_1) \mapsto u$ *est continue de* $H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ *dans* $\mathcal{C}([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^d))$. *On a même, si* $(u_0, u_1), (u_0', u_1') \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, *et si* u, u' *sont les solutions associées :*

$$\|u - u'\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{s+1}) \cap C^1([0,T],H^s)} \leq \|u_0 - u_0'\|_{H^{s+1}} + \max\left(1, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\|u_1 - u_1'\|_{H^s} \quad si\ \ m > 0;$$
$$\|u - u'\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{s+1}) \cap C^1([0,T],H^s)} \leq \|u_0 - u_0'\|_{H^{s+1}} + (1+T)\|u_1 - u_1'\|_{H^s} \quad si\ \ m = 0.$$

Démonstration : Pour varier, preuve de l'alinea (i) par régularisation (pour l'existence ; l'unicité est obtenue, comme au théorème 1.2.6, par estimation d'énergie pour la différence de deux solutions).
Si $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, on résout pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^d$ l'EDO obtenue par transformation de Fourier partielle. On obtient un unique $\hat{u}(\cdot, \xi)$, donné par la formule énoncée dans le théorème. On vérifie alors que cette formule définit $u \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ (qui est alors bien solution du problème de Cauchy (1.6)) : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\hat{u}$ est continu en temps, à valeurs $\mathcal{C}^{|\beta|}$, et $\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}$ est borné ; idem pour $\partial_t \hat{u}$.
Reste à voir que l'application $(u_0, u_1, f) \mapsto u$ (qui est linéaire et à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^d)))$ se prolonge à $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times L^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, à partir de la partie dense $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)))$. L'image de (u_0, u_1, f) par cette application est alors limite d'une suite de solutions du problème de Cauchy, limite au sens de $\mathcal{C}([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$: cela assure la vérification des conditions initiales, et la limite au sens des distributions est encore solution de l'équation.
On obtient l'estimation d'énergie (qui fournit aussi l'alinea (ii)) à partir de la formule donnant $\hat{u}$: lorsque $m > 0$, on a $\frac{|\xi|^2+1}{|\xi|^2+m} \in]1, 1/m]$ si $m < 1$, et $\frac{|\xi|^2+1}{|\xi|^2+m} \in]1, 1/m]$ si $m > 1$; lorsque $m = 0$, on utilise $\sqrt{\frac{|\xi|^2+1}{|\xi|^2}}|\sin(t|\xi|)| \leq \left(1 + \frac{1}{|\xi|}\right)|\sin(t|\xi|)| \leq 1 + t$; cela donne

$$\|\hat{u}(t)\|_{H^{s+1}} \leq \|\widehat{u_0}\|_{H^{s+1}} + C(m,T)\left(\|\hat{u}_1\|_{H^s} + \|\hat{f}\|_{L^1((0,T),H^s)}\right),$$

avec $C(m,T) = \max(1, 1/\sqrt{m})$ si $m > 0$, $C(m,T) = 1+T$ si $m = 0$. Idem pour $\partial_t u$.
$\square$

Remarque : L'équation homogène ($f = 0$) est invariante par renversement du temps $t \mapsto -t$. Cela implique que la résolution est réversible en temps, et qu'on a, pour tout $(u_0, u_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{s+1}(\mathbb{R}^d))$.

Proposition 1.2.14 (propagation à vitesse finie)**.** *Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \geq 1$, $R, T > 0$ (avec $R - \alpha T \geq 0$) et $\bar{C}$ le cône*

$$\bar{C} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d} \mid 0 \leq t \leq T,\ |x - \underline{x}| \leq R - \alpha T\}.$$

Si $u \in C^2(\bar{C})$ vérifie $(\partial_t^2 - \Delta + m)u = 0$ sur $\bar{C}$, alors

$$E(t) := \int_{B_t} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + m|u|^2) dx \leq E(0), \quad \textit{pour tout } t \in [0,T],$$

où $B_t := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - \underline{x}| \leq R - \alpha t\}$.

Démonstration : Sans perte de généralité, il suffit de montrer l'inégalité pour $t = T$. Or, on a

$$\begin{aligned}
0 &= 2\mathrm{Re} \int_{\bar{C}} \partial_t \bar{u} (\partial_t^2 u - \Delta u + mu)\, dtdx \\
&= \int_{\bar{C}} \big(\partial_t(|\partial_t u|^2 + m|u|^2) - 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{div}(\partial_t \bar{u} \nabla u) - \partial_t \nabla \bar{u} \cdot \nabla u)\big)\, dtdx \\
&= \int_{\bar{C}} \big(\partial_t(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + m|u|^2) + \mathrm{div}_x(-2\mathrm{Re}(\partial_t \bar{u} \nabla u))\big)\, dtdx \\
&= \int_{\partial\bar{C}} \big(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + m|u|^2, -2\mathrm{Re}(\partial_t \bar{u} \nabla u)\big) \cdot \overrightarrow{n}\, dS,
\end{aligned}$$

où la normale sortante est $\overrightarrow{n} = (-1, 0)$ sur le bord inférieur ($t = 0$), $\overrightarrow{n} = (1,0)$ sur le bord supérieur ($t = T$), et $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\alpha, \frac{x - \underline{x}}{|x - \underline{x}|}\right)$ sur le bord latéral. On a ainsi

$$0 = E(T) - E(0) + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \int_0^T \int_{\partial B_t} \left(\alpha \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + m|u|^2\right) - 2\mathrm{Re}\left(\partial_t \bar{u} \frac{x - \underline{x}}{|x - \underline{x}|} \cdot \nabla u\right)\right) d\sigma dt.$$

Enfin, le dernier terme à intégrer est majoré par $|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2$, donc pour $\alpha \geq 1$, la quantité sous l'intégrale est positive. $\square$

Remarque : On a le même résultat pour $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta + m$, sous la condition $\alpha \geq c$. Cela exprime que la solution u ne se propage pas plus vite que la vitesse c : ses valeurs dans $\{T\} \times B_T$ ne dépendent que de celles dans $\bar{C}$.

De façon équivalente, si u_0 et u_1 sont à support compact, disons dans la boule $B(\underline{x}, R)$, alors pour tout $t \geq 0$, $u(t)$ est à support compact, dans la boule $B(\underline{x}, R+ct)$.

Remarque : On peut aussi décrire le comportement en temps long, mais c'est un peu plus élaboré que pour l'équation de la chaleur : on utilise la méthode de la phase stationnaire (*cf.* "stationary phase" dans le livre d'Evans).

Équation de Schrödinger

Théorème 1.2.15. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$ et $f \in L^1(]0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$.*
(i) Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, il existe dans $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$ une unique solution (au sens distributions) u de

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u = f, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Elle est donnée pour $t > 0$ par

$$u(t) = K(t, \cdot) \star u_0 - i \int_0^t K(t - t', \cdot) \star f(t', \cdot) dt',$$

où

$$K(t,x) = (4\pi|t|)^{-d/2} e^{-id\frac{\pi}{4}\mathrm{sign}(t)} e^{i|x|^2/4t}.$$

(ii) Le problème de Cauchy bien posé dans $H^s(\mathbb{R}^d)$: l'application $u_0 \mapsto u$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$. On a même, si $u_0, u_0' \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et si u, u' sont les solutions associées :

$$\|u - u'\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \leq \|u_0 - u_0'\|_{H^s}.$$

Démonstration : On procède comme pour les théorèmes 1.2.6, 1.2.8 et 1.2.13. On a simplement besoin du calcul de transformée de Fourier suivant (dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) :

Lemme 1.2.16. *Pour tous $C \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{F}\left(e^{iC|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{i\pi}{C}\right)^{d/2} e^{-i|\xi|^2/4C} = \left(\frac{\pi}{|C|}\right)^{d/2} e^{id\mathrm{sign}(C)\pi/4} e^{-i|\xi|^2/4C}.$$

Démonstration : Le cas de $C = i\alpha$ est déjà connu, pour $\alpha > 0$ (gaussienne du lemme 1.2.7). La formule se prolonge analytiquement à $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, et donne le résultat lorsque C est remplacé par $C + i\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Enfin, on passe à la limite $\varepsilon \to 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. $\square$

$\square$

Remarques :

1) L'équation homogène n'est pas réversible en temps (pas invariante par $t \mapsto -t$), mais admet toutefois une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$, donnée par la convolution avec K.
2) Comme pour l'équation de la chaleur, on a un noyau qui n'est pas à support compact, d'où une "vitesse infinie de propagation".

Lemme 1.2.17 (conservation de l'énergie)**.** *Si* $s \in \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ *vérifie* $i\partial_t u - \Delta u = 0$ *(dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$*), alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t,\cdot)\|_{H^s} = \|u(0,\cdot)\|_{H^s}.$$

Démonstration : Par estimation d'énergie immédiate sur un régularisé ($u(0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$), puis passage à la limite par densité. □

Lemme 1.2.18 (estimation $L^1 - L^\infty$)**.** *Soit* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$*. Alors, pour tout* $t \neq 0$, $K(t,\cdot) \star u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$*, et*

$$\|K(t,\cdot) \star u_0\|_{L^\infty} \le (4\pi|t|)^{-d/2}\|u_0\|_{L^1}.$$

Démonstration : Majoration brutale. □

Ces deux résultats (conservation de la norme L^2 et norme L^∞ qui tend vers zéro) traduisent un effet de *dispersion*, d'étalement du support de la solution. Par interpolation (théorème de Riesz-Thorin – voir par exemple le livre de Bergh et Löfström), on en déduit un gain d'intégrabilité en espace, avec un poids en temps ("*decay estimate*") – cet effet est moins fort que dans le cas de l'équation de la chaleur (les estimations $L^q - L^p$ donnent le même poids en temps si $q = p'$, mais sont valides pour tout $p \ge q$) :

Théorème 1.2.19 (estimation $L^{p'} - L^p$)**.** *Pour tous* $p \in [2,\infty]$ *et* $u_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$*,*

$$\forall t \neq 0, \quad \|K(t,\cdot) \star u_0\|_{L^p} \le (4\pi|t|)^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\|u_0\|_{L^{p'}}.$$

Enfin, on a :

Proposition 1.2.20 (comportement en temps long)**.** *Pour tout* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$*,*

$$\left\| K(t,\cdot) \star u_0 - \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4i\pi t)^{d/2}} \widehat{u_0}\left(\frac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2} \underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration :
Pour tout $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en développant $|x-y|^2$ dans la convolution, on obtient

$$(K(t,\cdot)\star u_0)(x) = \frac{e^{i|x|^2/4t}}{(4i\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{x}{2t}\cdot y} e^{i|y|^2/4t} u_0(y)\, dy = \frac{e^{i|x|^2/4t}}{(4i\pi t)^{d/2}} \mathcal{F}\left(u_0 e^{i|\cdot|^2/4t}\right)\left(\frac{x}{2t}\right),$$

formule qui se prolonge à $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\| K(t,\cdot) \star u_0 - \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4i\pi t)^{d/2}} \widehat{u_0}\left(\frac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2} &= \left\| \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4i\pi t)^{d/2}} \mathcal{F}\left(\left(1 - e^{i|\cdot|^2/4t}\right) u_0\right) \left(\frac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2} \\
&= C \left\| \mathcal{F}\left(\left(1 - e^{i|\cdot|^2/4t}\right) u_0\right) \right\|_{L^2} \\
&= C' \left\| \left(1 - e^{i|\cdot|^2/4t}\right) u_0 \right\|_{L^2},
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro (lorsque t tend vers l'infini) par convergence dominée.

□

1.3 Espaces de Sobolev sur un ouvert

On considère dans cette partie que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on pourrait aussi prendre une variété riemannienne compacte, un cylindre ou une perturbation compacte d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$).
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1,\infty]$, l'espace (de Banach) $W^{k,p}(\Omega)$ est alors donné par la définition 1.1.2.

1.3.1 Approximation et prolongement

On notera ici ρ une fonction positive de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans la boule unité telle que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\rho(\cdot/\varepsilon)$.

Proposition 1.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et soit ω un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est un compact de Ω. Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors, $\rho_\varepsilon * f \in W^{k,p}(\omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\omega)$ converge vers $f_{|\omega}$ dans $W^{k,p}(\omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Démonstration : Pour ε assez petit, le support de $\rho_\varepsilon(\cdot - y)$ est dans Ω pour tout $y \in \omega$. On a alors que $D^\alpha(\rho_\varepsilon * f) = \rho_\varepsilon * D^\alpha f$ sur ω. La proposition découle donc de l'approximation classique de l'identité dans L^p. □

Théorème 1.3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à bord $\mathcal{C}^\infty$. Les restrictions des fonctions $\mathcal{C}^\infty_(\mathbb{R}^d)$ à Ω sont denses dans $W^{k,p}(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$.*

Remarque : Ce n'est pas forcément vrai pour Ω quelconque : il faut que le bord soit relativement régulier (condition de cône extérieur). Exemple trivial : $\Omega =]-1,0[\cup]0,1[$ et une fonction constante par morceaux.

Démonstration :
• Cas $\mathbb{R}^d$: on multiplie $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ par une troncature $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi \equiv 1$ sur une boule suffisamment grande et on régularise.
• Cas $\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x_1 > 0\}$: on translate u vers la gauche, on tronque et on régularise. NB : la translation d'une fonction est continue dans L^p, par exemple en regardant une approximation par une fonction $\mathcal{C}_c^\infty$.
• Cas général : on utilise le théorème suivant.

Théorème 1.3.3 (Partition de l'unité)**.**
Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (pas forcément régulier). Il existe un ensemble Ψ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :
1) $0 \le \psi \le 1$ pour tout $\psi \in \Psi$,
2) sur tout compact de Ω, seul un nombre fini de $\psi \in \Psi$ sont non nulles,
3) pour tout $\psi \in \Psi$, il existe $\omega \in \mathcal{O}$ contenant le support de ψ,
4) pour tout $x \in \Omega$, $\sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$.

Utilisation :
1) on choisit une partition de l'unité liée au découpage en cartes de Ω,
2) on écrit $u = \sum_{i\ge 0} \psi_i u = \sum u_i$,
3) pour chaque u_i, dans la carte correspondante, on est ramené au cas $\mathbb{R}^d$ ou, après redressement du bord éventuel, au cas de $\mathbb{R}^d_+$.

□

Théorème 1.3.4 (Opérateur de prolongement)**.**
Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ régulier, il existe un opérateur linéaire continu $P : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ tel que $Pu_{|\Omega} = u$.

Démonstration : En utilisant une partition de l'unité, il suffit de savoir le faire pour $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. En outre, par densité, il suffit de savoir le faire pour $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d_+)$.
Soit $u \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d_+)$, on va chercher un opérateur d'extension de la forme

$$Pu = \tilde{u} = \sum_{i=0}^{k} c_i u(-\alpha_i x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{pour } x_1 < 0 \ .$$

On aura bien ainsi un opérateur linéaire continu. Pour raccorder, il faut et il suffit que

$$\forall 0 \le j \le k \ , \ \ \sum_{i=0}^{k} c_i (-\alpha_i)^j \partial_{x_1}^j u(0, x_2, \ldots) = \partial_{x_1}^j u(0, x_2, \ldots) \ ,$$

i.e. $\sum_{i=0}^{k} c_i(-\alpha_i)^j = 1$. On doit donc résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -\alpha_1 & \dots & -\alpha_k \\ (-\alpha_1)^2 & \dots & (-\alpha_k)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

C'est un système de Vandermonde ! Il suffit de prendre des facteurs α_i différents. $\square$

1.3.2 Injections de Sobolev

Lemme 1.3.5 (Hölder à n facteurs)**.**
Soit $d \geq 2$ et $f_1, \dots f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Pour $i = 1, \dots, d$, on pose

$$\tilde{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} .$$

Alors

$$f \ : \ x \longmapsto f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \dots f_d(\tilde{x}_d)$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_{L^1} \leq \prod_{i=1}^{d} \|f_i\|_{L^{d-1}}$.

Démonstration : par récurrence sur d et inégalité de Hölder, voir Brézis. $\square$

Théorème 1.3.6 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.**
(i) Soit $p < d$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$. De plus, il existe $C > 0$ tel que $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$ pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.
(ii) Soit Ω régulier. On suppose $kp < d$, alors $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout q tel que $p \leq q \leq p^* = \frac{dp}{d-kp}$.

Remarques :
1) On retient en général le cas $j = 0$ où $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q \in [p, p^*]$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.
2) On parle ici d'injections continues c'est-à-dire avec le contrôle des normes.
3) Pour l'estimation du (i), on peut voir que seul $q = p^*$ est possible par homogénéité. En effet, si $\|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$, alors $u_\lambda = u(\lambda\cdot)$ vérifie $\|u_\lambda\|_{L^q} \leq C\lambda^{1+d/q-d/p}\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}$.
4) Idée de l'intérêt : par exemple chercher $u \in H^2(\mathbb{R}^5)$ tel que $\Delta u = -u^5$ fait sens car Δu et u^5 sont dans $L^2(\mathbb{R}^5)$ puisque $H^2(\mathbb{R}^5) \hookrightarrow L^{10}(\mathbb{R}^5)$.

Démonstration : On peut supposer :
- $j = 0$,
- $k = 1$ par récurrence.,
- $\Omega = \mathbb{R}^d$ par prolongement,
- $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par densité,

• $q = p^*$ car, pour $p < q < p^*$, on interpole $\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}^{\alpha} \|u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha}$ avec $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$.
• qu'il suffit donc de montrer l'inégalité de (i) avec $p = 1$ en posant $v = u^{p\frac{d-1}{d-p}}$. En effet, $\|v\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq C\|\nabla v\|_{L^1}$ implique

$$
\begin{aligned}
\left(\int u^{p\frac{d}{d-p}}\right)^{\frac{d-1}{d}} &\leq C \int |u|^{p\frac{d-1}{d-p}-1} |\nabla u| \\
\|u\|_{L^{p^*}}^{\frac{d-1}{d}p^*} &\leq C \left(\int (|u|^{d\frac{p-1}{d-p}})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-1/p} \left(\int |\nabla u|^p\right)^{1/p} \\
\|u\|_{L^{p^*}}^{\frac{d-1}{d}p^*} &\leq C \|u\|_{L^{p^*}}^{p^*(1-1/p)} \|\nabla u\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

et on note que $\frac{d-1}{d}p^* - (1-1/p)p^* = 1$.
En conclusion, on suppose que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on veut montrer que $\|u\|_{L^{1-1/d}} \leq C\|\nabla u\|_{L^1}$.
Pour tout $i = 1, \ldots, d$, on a

$$
\begin{aligned}
|u(x)|^{1/(d-1)} &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{x_i} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_d) d\xi \right|^{1/(d-1)} \\
&\leq f_i(\tilde{x}_i) := \left(\int_{-\infty}^{x_i} |\partial_{x_i} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_d)| d\xi \right)^{1/(d-1)}
\end{aligned}
$$

Au total, on a donc $|u(x)|^{d/(d-1)} \leq f(x) := \prod_{i=1}^d f_i(\tilde{x}_i)$. Comme le gradient est dans L^1, chaque $f_i(\tilde{x}_i)$ est dans $L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Le lemme implique donc que $\|u\|_{L^{d/(d-1)}}^{1-1/d} \leq \prod_{i=1}^d \left(\int |\partial_{x_i} u|\right)^{1/(d-1)}$ et donc que $\|u\|_{L^{d/(d-1)}} \leq \prod_{i=1}^d \|\nabla u\|_{L^1}^{1/d} = \|\nabla u\|_{L^1}$. □

Théorème 1.3.7 (Cas limite).
Si $kp = d$, alors $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ pour tout $p \leq q < \infty$.

Démonstration : Voir Brézis. □

Théorème 1.3.8 (Morrey).
(i) Soit $p > d$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$ avec $\alpha = 1 - d/p$ et

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_L^p .$$

(ii) Soit $kp > d$ et soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq j < k - d/p$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{j,\alpha}(\Omega)$ (avec $\alpha \in]0, \min(1, k - d/p - j))$.

Démonstration : On montre le (ii) par itération de $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega)$ jusqu'à ce que $\frac{1}{p} - \frac{l}{d} < \frac{1}{d}$.
Pour montrer le (i), on choisit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (point technique : il faut remarquer que la suite régularisante approchant u dans $W^{1,p}(\Omega)$ est aussi une approximation

de u dans $\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$). Soit x et y dans $\mathbb{R}^d$. On pose $R = |x-y|$, $B_x = B(x,R)$, $B_y = B(y,R)$ et $B = B_x \cap B_y$. On intègre l'inégalité triangulaire $|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(z)| + |u(y)-u(z)|$ pour les $z \in B$:

$$\mathrm{vol}(B)|u(x)-u(y)| \leq \int_{B_x} |u(x)-u(z)| + \int_{B_y} |u(y)-u(z)| \ .$$

On a $|u(x)-u(z)| \leq \int_0^{|x-z|} |\nabla u(x+s\omega)|ds \leq \int_0^R |\nabla u(x+s\omega)|ds$ avec $\omega = \frac{z-x}{|z-x|}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_{B_x} |u(x)-u(z)|dz &\leq \int_0^R Cr^{d-1}dr \int_{|\omega|=1} \int_0^R |\nabla u(x+s\omega)|dsd\omega \\ &\leq CR^d \int_{|w|\leq R} |\nabla u(x+w)| \frac{dw}{|w|^{d-1}} \ .\end{aligned}$$

Si $p = +\infty$ on majore par $CR^{d+1}\|\nabla u\|_{L^\infty}$. Sinon, $1/|w|^{d-1}$ est localement dans $L^{p/(p-1)}$ car $(1-d)p/(p-1) > -d$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{B_x} |u(x)-u(z)|dz &\leq CR^d\|\nabla u\|_{L^p} \left(\int_{|w|\leq R} |w|^{(1-d)p/(p-1)}dw\right)^{1-1/p} \\ &\leq CR^d\|\nabla u\|_{L^p}R^{1-d/p}\end{aligned}$$

où la dernière estimation se trouve par homogénéité.
Au final, on a dans tous les cas $\int_{B_x} |u(x)-u(z)|dz \leq CR^{d+1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p}$. En regroupant le tout, on trouve

$$|u(x)-u(y)| \leq CR^{1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p} \ .$$

Pour montrer qu'en outre d'être continue, u est bornée, on intègre cette inégalité autour de y et on majore par la norme L^p. $\square$

Théorème 1.3.9 (Rellig-Kondrachov).
On suppose que Ω est régulier et borné.
(i) Si $p < d$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ de façon compacte pour $1 \leq q < p^*$.
(i) Si $p = d$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ de façon compacte pour $1 \leq q < \infty$.
(i) Si $p > d$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^0(\Omega)$ de façon compacte.

1.3.3 Trace

Soit u une fonction sur $\mathbb{R}^d$ et γ une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ de dimension strictement plus petite. On appelle trace de u sur γ la restriction de u à γ et on appelle « opérateur de trace » l'application Γ correspondante. Evidemment, Γ est bien défini, linéaire et continu sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, mais ne peut être prolongé sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ (au sens que l'image dépendrait du représentant de u choisit).

Proposition 1.3.10. *Soit $\Omega =]-1,1[^d$ et soit $\gamma = \{x \in \Omega, x_1 = 0\}$. L'opérateur de trace se prolonge en une application linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\gamma)$.*

Démonstration : Comme toujours, on prend $u \in W^{1,p}(\Omega)$ régulier. On pose

$$\varphi(u, x_1) = \int_{]-1,1[^{d-1}} |u(x_1, \xi)|^p d\xi$$

qui est bien définie et régulière par rapport à x_1. Par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $\sigma \in [-1, 1]$ tel que

$$\varphi(u, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(u, x_1) dx_1 = \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x)|^p dx \ .$$

En outre,

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1} \varphi(u, x_1)| &= \left| \int_{[-1,1]^{d-1}} (p-1) u^{p-1} \partial_{x_1} u(x_1, \xi) d\xi \right| \\ &\leq C \left(\int_{[-1,1]^{d-1}} |u(x_1, \xi)|^p d\xi + \int_{[-1,1]^{d-1}} |\partial_{x_1} u(x_1, \xi)|^p d\xi \right) \end{aligned}$$

car $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta) b$. Donc $\varphi(u, 0)$ est contrôlé par la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$. □

Corollaire 1.3.11. *Soit Ω un ouvert régulier, alors on peut définir un opérateur de trace linéaire continu $\Gamma \ : \ W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$.*

Démonstration : Par extension et utilisation d'une partition de l'unité. □

Remarque : Si on considère les espaces de Sobolev avec indice fractionnaire, alors on retiendra que Γ va de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\Omega)$ pour $s > 1/2$. Pour $p \neq 2$, c'est plus compliqué, mais en gros, on perd toujours $1/p$ dérivée. On note que l'on retrouve que $u(x)$ est bien défini pour $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ si $p > d$ en appliquant d fois la trace.

Applications :
- Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la condition de Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = 0$ est bien défini.
- Si $u \in W^{2,p}(\Omega)$, la condition de Neumann $\partial_\nu u = 0$ sur $\partial\Omega$ est bien défini.
- Pour $u \in (W^{1,1}(\Omega))^d$, la formule de la divergence est bien définie

$$\int_\Omega \text{div } u = \int_{\partial\Omega} u.\nu \ .$$

- Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, la formule de Green est bien définie

$$\int_\Omega v \Delta u = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v + \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u \ .$$

- Les opérateurs Δ_D et Δ_N sont bien définies et auto-adjoints.

1.4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4.1. *On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Remarque : $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace de $W^{1,p}(\Omega)$, éventuellement non strict dans le cas de $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Proposition 1.4.2.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega)\ ,\ \text{le prolongement de } u \text{ par 0 est dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\}\ .$$

Démonstration : Soit u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On approche u par des fonctions u_n de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que l'on prolonge par 0 en dehors de Ω. On obtient alors une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u sur Ω et 0 ailleurs.
En utilisant cartes et partition de l'unité, on se ramène au cas $\mathbb{R}_+^d$. Soit u se prolongeant par 0 dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, alors on régularise u par $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ et on translate u_ε à droite pour obtenir une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$. □

Corollaire 1.4.3. *Si Ω a un bord, alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est toujours différent de $W^{1,p}(\Omega)$ car une constante non nulle ne peut se prolonger par zéro (la dérivée est une distribution supporté sur une courbe).*

Proposition 1.4.4.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega)\ ,\ \text{la trace de } u \text{ sur } \partial\Omega \text{ est nulle}\}\ .$$

Démonstration : Voir Lions-Magenes, *Non homogeneous boundary value problems and applications*. Attention : il est important que le bord de Ω ait une certaine régularité, sinon on a différence entre ces deux définitions possibles de $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Applications :
1) Le domaine de définition de l'opérateur Laplacien avec condition au bord de Dirichlet est $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
2) La forme faible dans $H^1(\Omega)$ de l'équation $\Delta u = f$ avec $f \in L^2(\Omega)$ et u vérifiant les conditions aux bords de Dirichlet est

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\ ,\quad \int \nabla u \nabla \varphi = -\int f\varphi\ .$$

Théorème 1.4.5 (Inégalité de Poincaré)**.**
Soit Ω un ouvert régulier borné dans une direction. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ ,\quad \|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}\ .$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à $\|u\|_{W^{1,p}}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration : Sans perte de généralité, on suppose que Ω est inclus dans la bande $S = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x_1 \in [0, L]\}$. On note $x = (x_1, \tilde{x})$ et on suppose par densité que la fonction u est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et définie sur tout $\mathbb{R}^d$ par le prolongement par 0.
On a $u(x) = \int_0^{x_1} \partial_{x_1} u(\xi, \tilde{x}) d\xi$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^p dx &\leq \int_\Omega \left| \int_0^{x_1} \partial_{x_1} u(\xi, \tilde{x}) d\xi \right|^p dx \\
&\leq \int_\Omega L^{p-1} \int_0^L |\partial_{x_1} u(\xi, \tilde{x})|^p \, d\xi dx \\
&\leq L^p \int_S |\partial_{x_1} u(x)|^p \, dx \\
&\leq L^p \|\nabla u\|_{L^p} .
\end{aligned}$$

□

Remarque : L'inégalité de Poincaré est aussi vraie si Ω est de mesure finie.

Chapitre 2

Semi-groupes d'opérateurs linéaires

2.1 Definition

Définition 2.1.1. *Soit X un espace de Banach et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X. On dit que $S(t)$ est un* **semi-groupe $\mathcal{C}^0$** *(ou semi-groupe fortement continu) si :*
1) $S(0) = Id$
2) pour tout $t, s \geq 0$, $S(t+s) = S(t)S(s)$
3) pour tout $x \in X$, $t \longmapsto S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X.
On dit que $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un **groupe $\mathcal{C}^0$** *si ces propriétés s'étendent sur pour t et s négatifs. On parle de semi-groupe de contractions si $S(t)$ est une contraction pour tout $t \geq 0$ et de semi-groupe compact si $S(t)$ est compacte pour tout $t > 0$. On dit que le semi-groupe est uniformément continu si $S(t)$ tend vers Id dans $\mathcal{L}(X)$ quand t tend vers 0.*

Proposition 2.1.2. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe $\mathcal{C}^0$, il existe $M \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall t \geq 0 \ , \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\lambda t} \ .$$

Démonstration : Pour chaque $x \in X$, $(S(t)x)_{t\in[0,1]}$ est borné dans X. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $(S(t))_{t\in[0,1]}$ est bornée dans $\mathcal{L}(X)$ par $M \geq 1$. Pour tout $t \geq 0$, soit $n = \lfloor t \rfloor$, on a

$$\|S(t)\| = \|S(1)S(1)S(1)\ldots S(1)S(t-n)\| \leq M^{n+1} \leq MM^t = Me^{t\ln M} \ .$$

$\square$

Remarque : On peut remplacer la propriété 3) de la définition par $\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x$ en écrivant pour $h > 0$

$$S(t+h)x - S(t)x = S(t)(S(h)x - x) \quad \text{et} \quad S(t-h)x - S(t)x = S(t-h)(x - S(h)x) \ .$$

Exemple 1 : exponentielles de matrices
Soit A un opérateur linéaire continu sur X. On peut définir

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \quad S(t) = e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \ .$$

Les propriétés de l'exponentielle montrent que $S(t)$ est un groupe uniformément continu. En outre, $S(t)$ est différentiable et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \ .$$

Autrement dit, $S(t)$ est le flot correspondant à l'équation différentielle $u'(t) = Au(t)$.

Exemple 2 : semi-groupe de la chaleur
Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit Δ_D le Laplacien de Dirichlet sur Ω, défini de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On sait que Δ_D est auto-adjoint, négatif et inversible et que son inverse Δ_D^{-1} est auto-adjoint et compact sur $L^2(\Omega)$ (compacité de H^2 dans L^2). La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoint compact dit qu'il existe une base hilbertienne $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions propres de Δ_D^{-1} associée aux valeurs propres (μ_n) qui sont réelles, de multiplicité finie et vérifient $\mu_n \to 0$. On en déduit que (φ_n) est une base hilbertienne de fonctions propres de Δ_D correspondant aux valeurs propres $\lambda_n = 1/\mu_n < 0$ avec $\lambda_n \to -\infty$. Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on notera $c_n(u)$ le coefficient de φ_n dans la décomposition de u.
Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $t \geq 0$, on pose

$$u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n \geq 0} c_n(u_0) e^{\lambda_n t} \varphi_n \ .$$

On vérifie à la main qu'il s'agit d'un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ mais qu'il ne peut être prolongé en groupe car $S(t)$ n'est pas inversible pour $t > 0$. On note aussi que $S(t)$ est une contraction compacte pour $t > 0$ et que $S(t)$ n'est pas uniformément continu en $t = 0$. Enfin, $u(t)$ est solution (au moins formellement) de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_D u \qquad u(0) = u_0 \ .$$

On note formellement $S(t) = e^{\Delta_D t}$.

Exemple 3 : semi-groupe de l'équation de Schrödinger
On reprend les notations précédentes. On pose

$$u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n \geq 0} c_n(u_0) e^{-i\lambda_n t} \varphi_n \ .$$

On obtient un groupe $\mathcal{C}^0$ de contractions, mais $S(t)$ n'est pas compact. Au moins formellement, $u(t)$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_D u \qquad u(0) = u_0 \ .$$

On note formellement $S(t) = e^{-i\Delta_D t}$.

Exemple 4 : EDP linéaire homogène
On considère une EDP $\partial_t u = Au$ bien posée sur un espace X (par exemple $A = \Delta$ et $X = H^s(\mathbb{R}^d)$, voir chapitre 1). On note $S(t)$ l'opérateur qui envoie u_0 sur $u(t)$ et on suppose que les trajectoires $u(t)$ sont continues dans X. Alors $S(t)$ est un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ sur X.

2.2 Le générateur infinitésimal : définition et propriétés de base

Inspiré des exemples précédents, on essaye d'écrire (au moins formellement) tout semi-groupe comme exponentielle d'un opérateur.

Définition 2.2.1. *On appelle* **générateur infinitésimal** *d'un semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *l'opérateur linéaire (non-borné)* $A : D(A) \to X$ *défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X \ , \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \ \textit{existe dans } X \right\}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)u - u) \ .$$

Proposition 2.2.2. *Soit* $S(t)$ *un semi-groupe* $\mathcal{C}^0$ *de générateur infinitésimal* A*, alors*

1) Pour tout $u_0 \in X$*,* $\int_0^t S(s)u_0 \in D(A)$ *et*

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u_0 d\tau\right) = S(t)u_0 - u_0 \ .$$

2) Si $u_0 \in D(A)$*, alors* $S(t)u_0 \in D(A)$ *pour tout* $t \geq 0$*,* $S(t)u_0$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et*

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0 \ .$$

Démonstration : Soit $u_0 \in X$ et $t \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} \int_0^t S(\tau)u_0 d\tau &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (S(\tau+\varepsilon) - S(\tau))u_0 d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} S(\tau)u_0 d\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} S(\tau)u_0 d\tau \ .\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0^+, le membre de droite tend vers $S(t)u_0 - u_0$. Ceci démontre 1).
Soit $u_0 \in D(A)$ et $t \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} S(t)u_0 = S(t)\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} u_0 \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0^+]{} S(t)Au_0 \ .$$

Pour obtenir 2), il reste à utiliser que si $S(t)u_0$ est dérivable à droite et de dérivée continue, alors $S(t)u_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (petit lemme à démontrer : utiliser l'uniforme continuité du reste dans le taux de variation à droite). $\square$

Théorème 2.2.3. *Soit $S(t)$ un semi-groupe $\mathcal{C}^0$, alors son générateur infinitésimal A est fermé et son domaine $D(A)$ est dense dans X.*

Démonstration : Soit $u_0 \in X$. D'après la proposition précédente, $u_0^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon S(t)u_0 dt$ est dans $D(A)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et en outre u_0^ε tend vers u_0 quand ε tend vers 0. Donc $D(A)$ est dense dans X.
Soit $(u_n) \subset D(A)$ et $(v_n) \subset X$ tels que $Au_n = v_n$ et les deux suites convergent vers u et v dans X. D'après la proposition précdente, $S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(\tau)Au_n d\tau = \int_0^t S(\tau)v_n d\tau$. A la limite, on trouve que $S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)v d\tau$ et donc que $(S(t)u - u)/t$ tend vers v quand t tend vers 0. D'où $u \in D(A)$ et $Au = v$. $\square$

Théorème 2.2.4. *Si $S(t)$ et $T(t)$ sont deux semi-groupes de même générateur infinitésimal A, alors $S(t) = T(t)$. On notera souvent $S(t) = e^{At}$ l'unique semi-groupe associé à A.*

Démonstration : Soit $t > 0$. Pour $\tau \in [0, t]$ et $x \in D(A)$, on pose $f(\tau) = S(t - \tau)T(\tau)x$. D'après la proposition 2.2.2, on a

$$f'(\tau) = -S(t - \tau)AT(\tau)x + S(t - \tau)AT(\tau)x = 0$$

et donc $S(t)x = T(t)x$. On complète ensuite par densité de $D(A)$. $\square$

Théorème 2.2.5. *Le semi-groupe $S(t)$ est uniformément continu si et seulement si A est borné. Dans ce cas, on a $S(t) = e^{At}$ et $S(t)$ est prolongeable en groupe d'opérateurs.*

Démonstration : Si A est borné, on montre facilement que e^{At} est un semi-groupe uniformément continu et que A est son générateur.
Soit $S(t)$ un semi-groupe uniformément continu. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau$ est proche de l'identité et donc inversible. Donc $L = \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau$ est inversible. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(S(h) - Id) \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\varepsilon S(\tau + h)d\tau - \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)d\tau - \int_0^h S(\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

Donc
$$\frac{1}{h}(S(h)-Id) = \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)d\tau - \int_0^h S(\tau)d\tau\right) L^{-1}$$
et quand h tend vers 0, $\frac{1}{h}(S(h)-Id)$ tend fortement vers $(S(\varepsilon)-Id)L^{-1}$. □

2.3 Les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips

Théorème 2.3.1. Hille-Yosida
Un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$ sur X vérifiant $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement si
1) A est fermé et de domaine dense,
2) l'ensemble résolvant de A contient la demi-droite $]\omega,+\infty[$ et
$$\forall \lambda \in]\omega,+\infty[\ , \quad \|(A-\lambda Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda-\omega}\ .$$

Démonstration : On constate tout d'abord qu'en posant $\tilde{A} = A - \omega Id$, on se ramène au cas $\omega = 0$.

$\Rightarrow$ On sait déjà que A est fermé et de domaine dense. Pour $\lambda > 0$, on pose
$$R_\lambda = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt\ .$$
Comme $S(t)$ est un semi-groupe de contractions et $\lambda > 0$, R_λ est bien défini et $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda$. Pour tout $x \in X$,
$$\begin{aligned}\frac{S(h)-Id}{h} R_\lambda x &= -\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)-S(t))x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) x dt - \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} x - \lambda R_\lambda x\end{aligned}$$

Donc $R_\lambda x \in D(A)$ et $(A-\lambda Id)R_\lambda x = x$. Pour montrer que $R_\lambda = (A-\lambda Id)^{-1}$, il suffit de voir que A et R_λ commutent, ce qui est clair car A et $S(t)$ commutent.

$\Leftarrow$ L'idée de la preuve repose sur l'introduction de l'*approximation de Yosida* de A. On pose $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$ qui est un opérateur borné car $A_\lambda = \lambda^2(\lambda-A)^{-1} - \lambda Id$. En conséquence, A_λ engendre un groupe d'opérateurs uniformément continu $e^{A_\lambda t}$. En outre, il s'agit de contractions car
$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t(\lambda^2(\lambda-A)^{-1}-\lambda Id)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|(\lambda-A)^{-1}\|} \leq 1\ .$$

Pour tout $x \in D(A)$, on a $A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax$ qui tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ d'après 2). Par densité de $D(A)$, cette convergence ponctuelle est vraie partout. Donc pour $x \in D(A)$,

$$A_\lambda x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax = (Id + A(\lambda - A)^{-1})Ax \xrightarrow[\lambda \longrightarrow +\infty]{} Ax \ .$$

Comme A_λ et A_μ commutent,

$$e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x = \int_0^1 \frac{d}{ds} e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} x ds = \int_0^1 e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} t(A_\lambda - A_\mu) x ds$$

d'où

$$\|e^{A_\lambda t} - e^{A_\mu t}\| \leq t\|A_\lambda - A_\mu\| \ .$$

On en déduit que pour tout $x \in D(A)$, $e^{A_\lambda t}x$ converge vers un point $S(t)x$ uniformément en t dans un intervalle. Ce résultat s'étend sur X par densité car $e^{A_\lambda t}$ sont des contractions. On obtient facilement que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions. Il reste à voir que le générateur infinitésimal de $S(t)$ est A. Pour cela, on utilise la formule

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t S(s)Ax ds \ .$$

Cela montre que le générateur infinitésimal B de $S(t)$ a un domaine inclus dans celui de A et vaut A dessus. Comme $B - Id$ est inversible (condition 2) appliquée à $S(t)$), $(B - Id)D(A) = (A - Id)D(A) = X$ implique que $D(B) = (B - Id)^{-1}X$ est égal à $D(A)$. □

Proposition 2.3.2. *Dans le théorème précédent, on peut remplacer* $]\omega, +\infty[$ *par le demi-plan* $\{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\}$.

Démonstration : Il suffit de voir que R_λ est bien défini sur le demi-plan. □

Il existe une façon plus simple de vérifier les hypothèses du théorème de Hille-Yosida. Cette formulation, dîte théorème de Lumer-Phillips, est surtout particulièrement pratique pour des opérateurs anti-adjoint. On va l'énoncer dans le cadre général d'un espace de Banach X mais on fera les démonstration dans le cadre d'un espace de Hilbert pour lequel le dual d'un point est trivial.

Définition 2.3.3. *Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A) \subset X$, il existe $x^* \in X^*$ tel que $\langle x | x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$ et*

$$\mathrm{Re}\langle Ax | x^* \rangle \leq 0 \ .$$

Proposition 2.3.4. *Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si*

$$\forall \lambda > 0 \ , \ \forall x \in D(A) \ , \quad \|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda \|x\| \ .$$

Démonstration : On restera dans le cadre hilbertien, voir [Pazy] pour le cadre général. Soit A dissipatif, $x \in X$, $\lambda > 0$ et soit x^* comme dans la définition 2.3.3, i.e. $x^* = x$. On a

$$\|(\lambda Id - A)x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Réciproquement, si $\|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda\|x\|$ alors

$$\|(\lambda Id - A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\lambda\mathrm{Re}\langle Ax|x\rangle \geq \lambda^2\|x\|^2 .$$

Quand λ tend vers $+\infty$, on voit que $\mathrm{Re}\langle Ax|x\rangle \leq 0$. □

Théorème 2.3.5. Lumer-Phillips
Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans X.

1) Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 Id - A$ est surjectif, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.

2) Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors $\lambda Id - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif.

Démonstration : On restera dans le cadre hilbertien, voir [Pazy] pour le cadre général. Si A engendre un semi-groupe de contractions, le théorème de Hille-Yosida implique que $\lambda Id - A$ est inversible pour tout $\lambda > 0$ avec l'estimation de la proposition 2.3.4 et donc que A est dissipatif.
Soit A dissipatif et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 Id - A$ est surjectif. La proposition 2.3.4 montre que $\lambda_0 Id - A$ est inversible et donc fermé. Il s'en suit que A est fermé. Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il reste à montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\lambda Id - A$ est surjective, ce qui équivaut à inversible et d'inverse borné par $1/\lambda$ d'après la proposition 2.3.4. L'ensemble $\Lambda = \{\lambda > 0, \lambda Id - A \text{ est surjective}\}$ est ouvert car l'ensemble des applications inversible est un ouvert. Soit $\lambda_n \in \Lambda$ convergeant vers $\lambda_\infty > 0$ et soit $y \in D(A)$. Soit x_n tel que $\lambda_n x_n - Ax_n = y$. On sait que $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1}\|y\|$ et en outre

$$\lambda_m\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\| .$$

Donc (x_n) est de Cauchy et converge vers x. Comme $Ax_n = \lambda_n x_n - y$ et que A est fermé, on a que $x \in D(A)$ et $\lambda_\infty x - Ax = y$. Donc $\lambda_\infty \in \Lambda$. Au final, Λ est ouvert et fermé non vide et donc $\Lambda = \mathbb{R}_+^*$. □

2.4 Un mot sur les semi-groupes analytiques

Soit $\theta \in]0, \pi[$, on note Δ_θ le secteur

$$\Delta_\theta = \{\ z \in \mathbb{C}^* \ ,\ \ |\arg(z)| < \theta\ \} .$$

Définition 2.4.1. *Soit* $\theta \in]0, \pi/2[$, *on dit que l'application* $S : \Delta_\theta \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ *est un semi-groupe analytique si*

1) $S(0) = Id$,

2) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ *pour tout* z_1, z_2 *dans* Δ_θ,

3) Pour tout $x \in X$, $S(z)x$ *est continue en* 0,

4) L'application $z \longmapsto S(z)$ *est analytique dans* Δ_θ.

On définit le générateur infinitésimal de $S(z)$ comme celui de $S(t)$ avec $t \in \mathbb{R}_+$. Un semi-groupe analytique est régularisant dans le sens suivant.

Proposition 2.4.2. *Soit* $S(z)$ *un semi-groupe analytique de générateur infinitésimal* A. *Pour tout* $z \in \Delta_\theta$ *et tout* $n \geq 1$, $S(z)X \subset D(A^n)$ *et* $S^{(n)}(z)x = A^n S(z)$.

Théorème 2.4.3. *Soit* A *un opérateur fermé de domaine dense et soit* $\theta \in]0, \pi/2[$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) L'opérateur A *est le générateur d'un semi-groupe analytique* $S : \Delta_\theta \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ *uniformément borné sur tout secteur* $\Delta_{\theta-\varepsilon}$,

2) L'ensemble résolvant de A *contient le secteur* $\Delta_{\pi/2+\theta}$ *et pour tout* $\varepsilon \in]0, \theta[$, *il existe* M *tel que*

$$\forall \lambda \in \Delta_{\pi/2+\theta-\varepsilon} \ , \quad \|(A - \lambda Id)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \ .$$

Chapitre 3

Équations d'évolution semi-linéaires

Dans ce chapitre, on considère une équation d'évolution du type

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) & t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{3.1}$$

où X est un espace de Banach, A un opérateur (non borné) sur X qui engendre un semi-groupe continu e^{At} et f une fonction de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X.
On va chercher à définir des solutions à (3.1). Pour cela, plusieurs concepts sont envisageables (attention : vocabulaire non universel !) :

- u est une solution **classique au sens des EDPs** de (3.1) si elle est suffisamment régulière pour que chaque terme de l'équation soit défini ponctuellement et continu en temps et en espace et que l'équation est vérifiée ponctuellement.
- u est une solution **faible** ou **généralisée** de (3.1) si elle vérifie l'équation au sens des distributions.
- u est une solution **classique au sens des semi-groupes** de (3.1) si $u \in \mathcal{C}^0([0, T[, X) \cap \mathcal{C}^1(]0, T[, X) \cap \mathcal{C}^0(]0, T[, D(A))$ vérifie (3.1) au sens de l'égalité dans X.
- u est une solution **intégrale** de (3.1) (*mild solution* en anglais) si $u \in \mathcal{C}^0([0, T[, X)$ et si
$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds \ .$$

On dira que le problème de Cauchy d'une EDP est (localement ou globalement) **bien posé** s'il existe une unique solution (locale ou globale, dans le sens que l'on a choisi) et si cette solution dépend continuement des données du problème (données initiales, éventuellement données aux bords, non-linéarité etc.). On parlera de solution **globale** si $T = +\infty$.
Dans la suite, on va s'intéresser aux solutions intégrales et classiques (c'est le point de vue des semi-groupes ou des systèmes dynamiques sur un espace X). On munira $D(A)$ de la norme $\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_X$ qui fait de $D(A)$ un espace de Banach (car A est fermé).

3.1 Equations linéaires avec second membre

On considère ici le cas particulier de l'équation linéaire avec second membre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = Au(t) + f(t) \qquad t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f \in L^1(]0, T[, X)$.

Proposition 3.1.1. *Si $f \in L^1(]0, T[, X)$ alors*

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\ ds \tag{3.3}$$

est l'unique solution intégrale de (3.2)*. Elle dépend de façon continue de u_0 et f.*

Démonstration : Par définition d'une solution intégrale, (3.3) définit bien la seule solution intégrale possible. Il suffit ensuite de vérifier que tous les termes sont continus par rapport au temps et donc que u est continue. □

Les relations entre solutions intégrale et classique sont données par le résultat suivant.

Théorème 3.1.2. *Soit $f \in L^1(]0, T[, X)$. Si en outre,*

1) $f \in \mathcal{C}^0(]0, T[, X)$, alors pour tout $u_0 \in X$, l'équation (3.2) *possède au plus une solution classique et si elle existe, c'est la solution intégrale.*

2) $f \in W^{1,1}(]0, T[, X)$ ou bien si $f \in \mathcal{C}^0(]0, T[, X) \cap L^1(]0, T[, D(A))$ alors pour tout $u_0 \in D(A)$, l'équation (3.2) *possède une unique solution classique qui est la solution intégrale.*

Démonstration : Démontrons le point 1). Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0, T[, X)$ intégrable et soit $u(t)$ une solution classique de (3.2). Pour $t \in]0, T[$ donné, on pose $h(s) = e^{A(t-s)}u(s)$. Comme $u \in \mathcal{C}^1(]0, T[, X) \cap \mathcal{C}^0(]0, T[, D(A))$, $h(s)$ est dérivable et $h'(s) = e^{A(t-s)}(u'(s) - Au(s)) = e^{A(t-s)}f(s)$. Par hypothèse f est continue et intégrable, donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h(t) = h(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$ i.e. $u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$. Pour le point 2), il suffit de montrer que la solution intégrale est aussi une solution classique. Si $u_0 \in D(A)$, on sait déjà que le terme $e^{At}u_0$ a la régularité voulue. Il suffit donc de montrer que $h(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$ est dans $\mathcal{C}^1(]0, T[, X) \cap \mathcal{C}^0(]0, T[, D(A))$. Si $f \in \mathcal{C}^0(]0, T[, X) \cap L^1(]0, T[, D(A))$, la régularité tombe directement de l'expression de h. Si $f \in W^{1,1}(]0, T[, X)$ alors on écrit $h(t) = \int_0^t e^{As}f(t-s)ds$. Il devient clair que $h(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans X. Il reste à voir que h est continue dans $D(A)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{A\varepsilon} - Id}{\varepsilon} h(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t e^{A(s+\varepsilon)} f(t-s)ds - \int_0^t e^{As} f(t-s)ds\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} e^{As} f(t-s+\varepsilon)ds - \int_0^t e^{As} f(t-s)ds\right) \\ &= \frac{h(t+\varepsilon) - h(t)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{As} f(t-s+\varepsilon)ds \end{aligned}$$

qui tend vers $h'(t) - f(t)$ quand ε tend vers 0. Donc $h(t)$ est bien dans le domaine de A et $Ah(t) = h'(t) - f(t)$ est continue par rapport à t. □

Corollaire 3.1.3. *Si X est réflexif et que f est lipschitzienne de $[0,T]$ dans X, alors pour tout $u_0 \in D(A)$ la solution intégrale de (3.2) est l'unique solution classique.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si f est lipschitzienne, alors $f \in W^{1,\infty} \subset W^{1,1}$, voir [Cazenave-Haraux]. □

3.2 Le problème de Cauchy semi-linéaire

On supposera dans toute cette partie que f est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times X, X)$ et lipschitzienne sur les bornés de X, uniformément sur les compacts en temps. C'est-à-dire que

$$\forall R > 0,\ \forall T > 0,\ \exists K(R,T) > 0,\ \forall u, v \in B_X(0,R),\ \forall t \in [0,T],\ \ \|f(t,u) - f(t,v)\| \leq K(R,T)\|u - v\| .$$

On notera que le paragraphe précédent implique que toute solution classique est aussi une solution intégrale. Un outil important de cette partie sera le Lemme de Gronwall.

Lemme 3.2.1. Gronwall *Soit $T > 0$ et soient φ et v dans $L^1(]0,T[,\mathbb{R}_+)$ telles que le produit φv soit aussi dans $L^1(]0,T[,\mathbb{R}_+)$. S'il existe C_1 et C_2 deux constantes strictement positives telles que*

$$v(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \varphi(s)v(s)ds\ ,$$

alors

$$v(t) \leq C_1 e^{C_2 \int_0^t \varphi(s)ds}\ .$$

Démonstration : La fonction $w(t) = C_1 + C_2 \int_0^t \varphi(s)v(s)ds$ est dérivable presque partout et $w'(t) = C_2\varphi(t)v(t) \leq C_2\varphi(t)w(t)$. Donc $w(t) \leq C_1 e^{C_2 \int_0^t \varphi(s)ds}$ car $w(0) = C_1$. □

Le théorème central de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.2.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times X, X)$ et lipschitzienne sur les bornés de X uniformément sur les compacts en temps.*
(i) Pour tout $u_0 \in X$, il existe $T(u_0) > 0$ tel que l'équation d'évolution semi-linéaire (3.1) possède une unique solution intégrale u sur l'intervalle $[0, T(u_0)[$. En outre, si $T(u_0) < +\infty$, alors $\|u(t)\| \to +\infty$ quand $t \to T(u_0)$.
(ii) Pour tout $r > 0$, il existe $\tilde{T}(r) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in B_X(0,r)$, $T(u_0) \geq \tilde{T}(r)$.

(iii) La solution dépend continuement de la donnée initiale dans le sens où, pour tout $u_0 \in X$ et pour tout $T \in]0, T(u_0)[$, il existe $\delta > 0$ et $K > 0$ tels que, pour toute solution intégrale $v(t)$ de donnée initiale v_0 telle que $\|u_0 - v_0\| < \delta$, on a $T(v_0) > T$ et

$$\forall t \in [0, T] \ , \quad \|v(t) - u(t)\| \leq K\|v_0 - u_0\| \ .$$

Démonstration : La stratégie de démonstration est la même que dans le cas des équations différentielles.
Soit $r > 0$ donné et soit T à fixer plus tard. Soit $u_0 \in B_X(0, r)$ donné, on pose

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0, T], X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0, T], X) \\ u & \longmapsto & \Phi(u)(t) = e^{At}u_0 + \int_0^T e^{A(t-s)} f(s, u(s)) \ ds \end{array} \right)$$

où $Y = \mathcal{C}^0([0, T], X)$ est muni de la norme $\|u\|_Y = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$ qui en fait un espace de Banach. On note $K(\rho, T)$ la constante de lipschitz de f sur la boule $B_X(0, \rho)$, $M(T) = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|$ et $M'(T) = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t, 0)\|$. On a

$$\|\Phi(u)\| \leq M(T)r + TM(T)(K(\|u\|_Y)\|u\|_Y + M'(T))$$

et

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq TM(T)K(\max(\|u\|_Y, \|v\|_Y))\|u - v\|_Y \ .$$

On pose $\rho = M(1)r + 2$. On peut choisir $T \leq 1$ tel que

$$M(1)r + TM(1)(K(\rho, 1)\rho + M'(1)) \leq M(1)r + 1 < \rho \quad \text{et} \quad TM(T)K(\rho, 1) \leq \frac{1}{2} \ .$$

On vérifie alors que Φ est une $1/2-$contraction sur la boule fermée $B(0, \rho)$ de Y et qu'on peut donc appliquer le théorème de point fixe pour obtenir une unique solution dans cette boule.
Pour obtenir l'unicité locale et la dépendance lipschitzienne en u_0, on constate que si u et v sont deux solutions sur $[0, T]$ avec pour données initiales u_0 et v_0, le lemme de Gronwall implique qu'elles restent dans une boule $B_X(0, r)$ sur un certain intervalle de temps $[0, T]$. On a alors

$$u - v = e^{At}(u_0 - v_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}(f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \ ds \ .$$

Soit M tel que $\|e^{At}\| \leq M$ sur $[0, T]$. Le lemme de Gronwall montre que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M\|u_0 - v_0\|e^{MK(\rho,T)t} \ .$$

Si $u_0 = v_0$ on obtient l'unicité de la solution intégrale et si u_0 et v_0 sont proches, on obtient la dépendence lipschitzienne par rapport à la donnée initiale.
Le temps maximal d'existence s'obtient en répétant les arguments ci-dessus. On constate que ce temps est semi-continu supérieurement en effectuant le processus d'extension dans un voisinage de la donnée initiale. Les arguments sont les mêmes que ceux utilisés dans le cadre des équations différentielles. □

Théorème 3.2.3. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times X, X)$ et lipschitzienne sur les bornés de X uniformément sur les compacts en temps. Soient $T > 0$, soit $u_0 \in D(A)$ et soit $u \in \mathcal{C}^0([0,T], X)$ l'unique solution intégrale de* (3.1). *On suppose soit que f est lipschitzienne en temps et que X est réflexif, soit que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times X, X)$. Alors u appartient à $\mathcal{C}^1([0,T], X) \cap \mathcal{C}^0([0,T], D(A))$ et est solution classique de* (3.1).

Démonstration : On note d'abord que u est dans une boule $B(0,R)$ de X. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que f est globalement lipschitzienne de constante K aussi bien en temps qu'en espace. On notera aussi $M = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|$ et $M' = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t,0)\|$. On a

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) = (e^{A(t+h)} - e^{At})u_0 + \int_0^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s,u(s))ds \\ - \int_0^t e^{A(t-s)} f(s,u(s))ds \\ = e^{At}(e^{Ah} - Id)u_0 + \int_0^h e^{A(t+h-s)} f(s,u(s))ds \\ + \int_0^t e^{A(t-s)}(f(s+h, u(s+h)) - f(s,u(s)))ds \end{aligned}$$

Or $(e^{Ah} - Id)u_0 = \int_0^h e^{As} A u_0 ds$, donc

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq hM\|Au_0\| + M(KR+M')h + \int_0^t MK(|h| + \|u(s+h) - u(s)\|)\, ds\ .$$

Il suffit d'appliquer le lemme de Gronwall pour avoir que u est lipschitzienne en temps. Si X est réflexif, on peut directement appliquer le Corollaire 3.1.3.
On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}^1(X)$. Pour appliquer le théorème 3.1.2, il suffit de montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on constate que l'équation

$$\frac{dv}{dt} = Av + f'_t(t,u) + f'_u(t,u)v \qquad v(0) = v_0 = Au_0 + f(0,u_0)$$

est bien posée sur X et définit une unique solution intégrale $v(t)$. Il reste à montrer que $v = u'$, on pose donc $w_h = \frac{(u(h+\cdot)-u)}{h} - v$. On a

$$\begin{aligned} w_h(t) = e^{At}\left(\frac{e^{Ah}u_0 - u_0}{h} - Au_0\right) + \left(\frac{1}{h}\int_0^h e^{A(t+h-s)} f(s,u(s))ds - e^{At} f(0,u_0)\right) \\ + \int_0^t e^{A(t-s)}\left(\frac{f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))}{h} - f'_t(s,u(s)) - f'_u(s,u(s))v(s)\right) ds \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, on obtient

$$w_h(t) = o(h) + \int_0^t e^{A(t-s)} f'(s,u(s)) w_h(s) ds$$

et il suffit d'appliquer le lemme de Gronwall pour avoir que w_h tend vers 0. Comme $u(t)$ est donc dérivable à droite et par ailleurs continue, u est dérivable sur $[0, T]$. On conclut grâce au théorème 3.1.2. $\square$