TD n°6 : Quelques spectres

Exercice 1 : Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et soit C l'opérateur de multiplication défini sur X par $C(x_n) = (c_n x_n)$. Quel est le spectre de C ? A-t-il un spectre résiduel ? Quel est son spectre ponctuel et quel est son spectre continu ?

Exercice 2 : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et soit Φ l'application multiplication définie de $X = L^\infty(]0,1[)$ dans X par $\Phi(f) = \varphi f$.
1) Montrer que $|||\Phi||| = \max|\varphi|$.
2) Montrer que le spectre de Φ est l'ensemble des valeurs prises par φ.
3) A quelle condition Φ peut-elle avoir du spectre ponctuel ? A part du spectre ponctuel, quel genre de spectre peut avoir Φ ?

Exercice 3 : Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de son produit scalaire usuel et soient $S_\pm$ les opérateurs de shift définis par

$$S_-(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3 \ldots) \quad \text{et} \quad S_+(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots) \ .$$

1) Montrer que S_- et S_+ sont de norme 1 et adjoints l'un de l'autre.
2) Trouver le spectre ponctuel des opérateurs $S_\pm$.
3) Déterminer le spectre des opérateurs $S_\pm$ et sa décomposition en spectre ponctuel, continu et résiduel.

Exercice 4 : Soit X un espace de Banach et soit U un opérateur unitaire sur X, c'est-à-dire un opérateur qui conserve la norme et qui a une image dense.
1) Montrer que le spectre de U est contenu dans le disque unité.
2) Montrer que U est inversible et que le spectre de U^{-1} est égal à l'inverse de celui de U.
3) En déduire que le spectre de U est sur le cercle unité.

Exercice 5 : Soit X un espace de Hilbert (différent de $\mathbb{R}$) et soit A un opérateur auto-adjoint. On considère l'image spectrale $\mathfrak{I}$ de A

$$\mathfrak{I} = \{\, \langle x|Ax\rangle \, , \, \|x\| = 1 \,\} \ .$$

1) Montrer que $\mathfrak{I}$ est un segment contenu dans $\big[-|||A||| \, , \, |||A||| \,\big]$.
2) Montrer que, pour tout x et y dans X,

$$\mathrm{Re}\big(\langle y|Ax\rangle\big) \;=\; \frac{1}{4}\big(\langle x+y|A(x+y)\rangle - \langle x-y|A(x-y)\rangle\big) \ .$$

3) Soit $K = \sup|\mathfrak{I}| = \sup_{\|x\|=1}|\langle x|Ax\rangle|$. Montrer que K est égal à $|||A|||$.
4) Montrer que si $\sup\mathfrak{I}$ (resp. $\inf\mathfrak{I}$) est atteint, alors il s'agit d'une valeur propre de A.
5) Montrer que si A est compact, alors $\mathfrak{I}$ est fermé et donc $\sup\mathfrak{I}$ et $\inf\mathfrak{I}$ sont atteints.
6) Donner un exemple où $\mathfrak{I}$ ne contient ni $|||A|||$, ni $-|||A|||$.