TD n^{o}6 : Minimisations et projections dans les espaces de Hilbert

Exercice 1 : Régression linéaire
On mesure une variable $x(t)$ sur une suite de temps t_1, ..., t_n, avec n assez grand, et on trouve des valeurs x_1, ..., x_n . On sait que, en théorie, $x(t)$ est une droite $at + b$ et on aimerait retrouver a et b à partir des mesures. Comme il y a des erreurs et imprécisions sur les mesures, les points (t_n, x_n) ne sont pas vraiment sous la forme d'une droite. On aimerait trouver « la meilleure droite possible approchant les points (t_n, x_n) », mais il faudrait savoir ce qu'on entend par là : la droite $at + b$ minimisant le plus grand écart entre $at_i + b$ et x_i ? Celle minimisant l'écart moyen entre les $at_i + b$ et x_i ?
1) Pourquoi utilise-t-on le critère *des moindres carrées*, c'est-à-dire pourquoi cherche-t-on à minimiser

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - (at_i + b)|^2 \quad ?$$

2) On note $\overline{t} = \frac{1}{n}\sum_i t_i$ et $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$ les moyennes des (t_i) et des (x_i). Retrouver les formules classiques de la régression linéaire donnant les coefficients de la droite des moindres carrés :

$$a = \frac{\sum_i (t_i - \overline{t})(x_i - \overline{x})}{\sum_i (t_i - \overline{t})^2} \qquad b = \overline{x} - a\overline{t}$$

Exercice 2 : Graphe de ressorts
On considère un ensemble de masses $(m_i)_{i=0...n}$ dont on notera $(x_i)_{i=0...n}$ la position. Les masses sont reliées par des ressorts dont on notera la raideur $k_{ij} \geq 0$ (avec $k_{ij} = 0$ s'il n'y a pas de ressort entre les masses m_i et m_j). On suppose que l'on peut négliger la pesanteur (ou que les masses sont posées sur un plan horizontal) et que la masse m_0 est fixée sur un support qu'on prendra comme point de référence, c'est-à-dire que $x_0 = 0$. L'énergie du système est donnée par

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{i,j = 0 \ldots n \\ i \neq j}} k_{ij} |x_i - x_j|^2 \ .$$

On supposera par ailleurs que le graphe formé par les ressorts (avec $k_{ij} > 0$) est connexe et qu'éventuellement d'autres masses sont fixées (x_i est donné). Interpréter cette situation en terme d'espace de Hilbert et montrer qu'il existe une unique position d'équilibre qui minimise l'énergie E.

Exercice 3 : Point fixe de Félix Browder et Arthur Kirk
On considère un espace de Hilbert H et K un convexe fermé borné de H. Soit $f : K \to K$ une fonction $1-$lipschitzienne. Le théorème de Browder dit que f a forcément un point fixe dans K. Le but de cet exercice est d'en faire la démonstration.
On commence par supposer sans perte de généralité que $0 \in K$. On définit la fonction $g : H \to H$ par $g = Id - f \circ P$, où P est la projection orthogonale sur K.
1) Montrer qu'il existe une suite $(x_n) \subset K$ telle que $(1 - \frac{1}{n})f(x_n) = x_n$.
2) Justifier que $g(x_n) \to 0$ fortement et que l'on peut supposer que $x_n \rightharpoonup x \in K$ faiblement (on notera qu'on ne sait pas encore si $g(x) = 0$ ou pas).
3) Montrer que, pour tout $(y, z) \in H^2$, $\langle g(y) - g(z)|y - z\rangle \geq 0$.
4) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $h \in H$, on a $\langle g(x + \varepsilon h)|h\rangle \geq 0$.
5) Conclure.

Exercice 4 : Théorème de Krein-Milman
Soit H un espace de Hilbert et K un compact convexe de E. On appelle *point extrémal* de K un point $x \in K$ tel que s'il existe $\theta \in]0, 1[$ et $a, b \in K$ tels que $x = \theta a + (1 - \theta)b$ alors $a = b = x$. On note $\mathcal{E}xt(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K.
1) En cherchant le maximum de la fonction $x \in K \mapsto \|x\|$, montrer que $\mathcal{E}xt(K)$ est non vide.
2) Justifier que $\tilde{K} = \overline{\text{conv}(\mathcal{E}xt(K))}$ est un convexe compact inclus dans K.
3) Supposons qu'il existe $c \in K \setminus \tilde{K}$. Montrer qu'il existerait alors une forme linéaire f telle que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \in \tilde{K}$. Soit $\gamma = \max_K f$, montrer que $f^{-1}(\gamma) \cap K$ serait un compact convexe non vide disjoint de $\tilde{K}$.
4) En déduire que K est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Exercice 5 : Résolution de l'équation de Laplace par minimisation
On considère un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^d$. On rappelle que l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, d,\ \exists u'_i \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u'_i \varphi = - \int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \\ \text{et } u_{|\partial\Omega} \equiv 0\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla f(x) \nabla g(x) + f(x)g(x)\ dx$$

est un espace de Hilbert. Soit $h \in L^2(\Omega)$, on souhaite trouver une solution faible à l'équation de Laplace

$$\Delta u - u = h \qquad u_{|\partial\Omega \equiv 0} \tag{1}$$

c'est-à-dire une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on ait

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi = - \int_\Omega h\varphi\ .$$

1) Soit E l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2\, dx \;-\; \int_\Omega h(x)u(x)dx\ .$$

Montrer que E est minorée et que $E(u)$ tend vers $+\infty$ quand $\|u\|_{H^1}$ tend vers $+\infty$.
2) Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisante de E. Montrer que l'on peut supposer que (u_n) tend faiblement vers une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.
3) Montrer que u minimise l'énergie E.
4) En déduire que u est solution faible de (1).
5) Montrer qu'on peut trouver une solution faible de (1) par le théorème de représentation de Riesz (mais la méthode précédente est plus robuste, par exemple elle est applicable pour des situations non linéaires).

Exercice 6 : Théorème de Stampacchia
Soit H un espace de Hilbert et K un convexe de H. Soit a une forme bilinéaire symétrique continue qui est coercive, c'est-à-dire qu'il existe α et β strictement positifs tels que

$$\forall x \in H\ ,\quad \alpha\|x\|^2 \le a(x,x) \le \beta\|x\|^2\ .$$

Soit L une forme linéaire continue sur H et soit E l'énergie $E(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$.
1) Montrer que a est un produit scalaire sur H et en déduire qu'il existe $v \in H$ tel que $L(x) = a(x,v)$ pour tout $x \in H$.
2) Soit u la projection orthogonale de v sur K pour le produit scalaire a. Montrer que u est l'unique vecteur minimisant E sur K.

Exercice 7 : Application n°1 du théorème de Stampacchia
On reprend l'exercice , mais en supposant que les masses sont soumises à la gravité. Certaines masses sont fixées à des points en hauteur et le reste du réseau est laissé libre mais peut éventuellement toucher le sol supposé horizontal. Interpréter ce problème dans le formalisme du théorème de Stampacchia.

Exercice 8 : Application n°2 du théorème de Stampacchia
Une toile carrée est fixée au sol sur ses bords. Une forme géométrique est cachée sous la toile et cette dernière est tendue en appui dessus. On formalise le problème comme suit. On considère le domaine $\Omega =]0,1[^2$ et on note $h(x) \ge 0$ la hauteur de la forme cachée au point x, et $u(x) \ge h(x)$ l'élévation de la toile. On se place dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire H^1 rappelé ci-dessus L'énergie de la toile est donnée par

$$E(u) = k\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \;-\; mg\int_\Omega u(x)dx\ ,$$

où $k > 0$ est un coefficient d'élasticité, $m > 0$ un poids surfacique et g la constante de la gravité.

Interpréter le problème comme application du théorème de Stampacchia. Montrer que, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Ω où la toile ne touche pas la forme cachée, alors u vérifie $\Delta u = \frac{mg}{2k}$ sur $\mathcal{O}$.

Exercice 9 : Soit H un espace de Hilbert et soit $J \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ une fonctionnelle dont l'on souhaite trouver le minimum.
1) Donner une définition du vecteur gradient $\nabla J(x)$ généralisant celle dans $H = \mathbb{R}^d$.

On suppose dans la suite que :
- ∇J est globalement lipschitzien c'est-à-dire qu'il existe C tel que

$$\forall x, y \in H \ , \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq C\|x - y\| \ ,$$

- J est strictement convexe c'est-à-dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in H \ , \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(y) | x - y \rangle \ \geq \ \eta \|x - y\|^2 \ .$$

2) Etablir que pour tous $x, h \in H$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J(x + th) &= J(x) + \int_0^t \langle \nabla J(x + sh) | h \rangle ds \\ &\geq \frac{\eta}{2} t^2 \|h\|^2 + t \langle \nabla J(x) | h \rangle + J(x) \ . \end{aligned}$$

Donner une interprétation géométrique de l'inégalité précédente justifiant l'appellation « strictement convexe » pour une telle fonction.

On va maintenant implémenter la méthode du gradient à pas constant pour trouver le minimum de J. Soit $\tau > 0$ un petit pas à choisir. On part de $x_0 \in H$ quelconque et on pose

$$x_{n+1} = x_n - \tau \nabla J(x_n) \ .$$

3) Montrer que si le pas $\tau > 0$ est choisi assez petit, alors pour tout x_0, la suite (x_n) donnée par la méthode du gradient à pas constant converge vers un point x_* tel que $\nabla J(x_*) = 0$.
4) Montrer que x_* réalise le minimum de J.