M1 — Université de Grenoble
Analyse fonctionnelle — 2014/2015

TD n°5 : Application ouverte et graphe fermé

Exercice 1 : Séries à la limite de la convergence
On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$. Soit (c_n) une suite de coefficients strictement positifs qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et soit T l'application de X dans X définie par $Tx = T(x_n) = (c_n x_n)$.
1) Montrer que T est bien définie et injective.
2) Montrer que T ne peut admettre d'inverse borné et en déduire que T n'est pas surjective.
3) Montrer que pour toute suite positive (c_n) qui tend vers 0, il existe une suite positive (u_n) telle que $(\sum c_n u_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

Exercice 2 : Injection duale
Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach tels que $Y \subset X$ est dense dans $(X, \|\cdot\|_X)$ et $Y \neq X, \emptyset$. On suppose que l'injection $I : y \in Y \mapsto y \in X$ est continue, c'est-à-dire, qu'il existe $c > 0$ tel que $\|y\|_X \leq c\|y\|_Y$ pour tout $y \in Y$. On notera que les normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ ne peuvent pas être équivalentes (car cela impliquerait $Y = X$).

1) Montrer que, par exemple, $X = L^1(]0,1[)$ et $Y = L^2(]0,1[)$ répondent à ces conditions.
2) Montrer que l'application linéaire duale I^* de I associe à toute forme linéaire bornée f sur X sa restriction $f|_Y$ à Y. On rappelle que l'application duale I^* est définie de X' sur Y' par $I^*(f) = f \circ I$.
3) Montrer que I^* est injective.
4) Montrer que I^* n'est pas surjective. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et montrer à l'aide du théorème de l'application ouverte et de la caractérisation* $\|y\|_Y = \sup_{\{f\in Y', \|f\|_{Y'}\leq 1\}} f(y)$, *que si* I^* *est une bijection, alors les normes* $\|\cdot\|_X$ *et* $\|\cdot\|_Y$ *sont équivalentes.*
5) Soit $f \in Y'$. Montrer que si $f \in I^*(X')$, alors il existe $C > 0$ tel que $|f(y)| \leq C\|y\|_X$ pour tout $y \in Y$.
6) On considère le cas $X = L^1(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1}$) et

$$Y = \{h \in X; \|h\|_Y < \infty\} \quad \text{où} \quad \|h\|_Y = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)|h(t)|\, dt \,.$$

Montrer que l'on se trouve bien dans les hypothèses de départ. Donner un exemple de forme linéaire $f \in Y'$ qui n'est pas dans $I^*(X')$.

Exercice 3 : Non-surjectivité de la transformée de Fourier
Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ le cercle unité. On considère l'application $\mathcal{F}$, de $L^1(\mathbb{T})$ dans

$$\ell_0^\infty = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \ , \ \lim_{n\to\pm\infty} u_n = 0\}$$

muni de $\|\cdot\|_\infty$, définie par

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} \quad \text{avec} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \ .$$

On rappelle que cette application est bien définie, continue et injective.
1) Montrer que si $\mathcal{F}$ est surjective, alors il existe $c > 0$ tel que $\|f\|_{L^1} \leq c\|\hat{f}\|_\infty$ pour tout f.
2) On considère le noyau de Dirichlet $D^K(t) = \sum_{k=-K}^{K} e^{ikt}$. Montrer que

$$D^K(t) = \frac{\sin((K+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

et est bien dans $L^1(\mathbb{T})$. Quelle est sa série de Fourier ?
3) Montrer que, sur $[-\pi,\pi]$, $|D^K(t)| \geq (2K+1)|\mathrm{sinc}((K+1/2)t)|$ où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est le sinus cardinal. En déduire que $\|D_K\|_{L^1}$ tend vers $+\infty$ quand K tend vers $+\infty$.
4) Conclure que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{T})$ dans ℓ_0^∞.

Exercice 4 : Bijection induite
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continu. On suppose qu'on a les décompositions

$$X = \mathrm{Ker}(T) \oplus \tilde{X} \qquad Y = \mathrm{Im}(T) \oplus \tilde{Y}$$

où tous les sous-espaces sont fermés (et donc que les projections associées à ces décompositions sont continues). Montrer que T induit une bijection $\tilde{T}$, d'inverse continu, de $\tilde{X}$ sur $\mathrm{Im}(T)$.

Supposons que T soit injectif. Montrer qu'il admet un inverse à gauche R, c'est-à-dire une application linéaire continue de Y dans X telle que, pour tout $x \in X$, $RT(x) = x$.

Montrer que si T est surjectif, il admet un inverse à droite S.

Exercice 5 : Un critère de continuité
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, pas forcément continu. Montrer à l'aide du théorème du graphe fermé l'équivalence entre « T est continu » et « pour tout $f \in Y'$, $f \circ T$ est dans X' ».

Exercice 6 : Le théorème de Hellinger-Toeplitz
Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire qui est symétrique, c'est-à-dire que $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$. Montrer que T est continu.

Indication : on vérifiera que le graphe de T est fermé en utilisant que si pour tout $y \in H$ $\langle x|y\rangle = \langle x'|y\rangle$, alors $x = x'$.