TD n°3 : Théorèmes de séparations

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On appelle *hyperplan affine* un ensemble H de la forme

$$H = H_{f,\alpha} = \{x \in X \ , \ f(x) = \alpha\} \quad \text{avec } f \text{ forme linéaire non nulle et } \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

On rappelle qu'un hyperplan affine est fermé si et seulement si la forme linéaire f est continue.

On dit que deux sous-ensembles A et B de X sont *séparés au sens large par l'hyperplan* $H_{f,a}$ si et seulement si

$$\forall a \in A \ , \ \forall b \in B \ , \quad f(a) \leq \alpha \leq f(b) \qquad \text{(ou inversement).}$$

On dit que deux sous-ensembles A et B de X sont *séparés au sens strict par l'hyperplan* $H_{f,a}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall a \in A \ , \ \forall b \in B \ , \quad f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \qquad \text{(ou inversement).}$$

Exercice 1 : Echauffement dans $\mathbb{R}^2$
On se place dans $X = \mathbb{R}^2$.
1) Donner deux ensembles convexes fermés disjoints qui ne peuvent être séparés au sens strict.
2) Montrer qu'un convexe compact et un convexe fermé disjoints peuvent toujours être séparés au sens strict.

Exercice 2 : Jauge d'un convexe
Soit $C \subset X$ un convexe ouvert contenant 0 et soit p définie par

$$p \ : \ x \in X \ \longmapsto \ \inf \left\{ r > 0 \ , \ \frac{1}{r} x \in C \right\} \in \mathbb{R} \ .$$

1) Montrer que p est bien définie et qu'il existe M tel que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$.
2) Montrer que $C = \{x \in X, \ p(x) < 1\}$.
3) Montrer que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et $x \in X$ et que

$$\forall x, y \in X \ , \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ .$$

Indication : considérer, pour $\varepsilon > 0$, le segment $[x/(p(x)+\varepsilon), y/(p(y)+\varepsilon)]$ et montrer que le point $(x+y)/(p(x)+p(y)+2\varepsilon)$ y appartient.
4) Que faut-il supposer de plus sur C pour que p soit une norme ?

Exercice 3 : Séparation d'un convexe ouvert et d'un point
Soit C un convexe ouvert non vide et $x_0 \in X \setminus C$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $0 \in C$ et introduire la jauge p de C.
1) Montrer qu'il existe une forme linéaire f telle que $f(x_0) = 1$ et $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in X$.
2) En déduire que $\{x_0\}$ et C sont séparés au sens large par un hyperplan fermé.

Exercice 4 : Séparation de deux convexes dont un ouvert
Soient A et B deux convexes disjoints et non vides de X et supposons que A est ouvert. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens large (indication : on pourra chercher à séparer $\{0\}$ et $C = A - B$).

Exercice 5 : Séparation de deux convexes fermés dont un compact
Soient A et B deux convexes disjoints et non vides de X et supposons que A est fermé et B compact. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens strict (indication : on pourra chercher à séparer $A + B(0, \varepsilon)$ et $B + B(0, \varepsilon)$).

Exercice 6 : Application à la densité d'un s.e.v.
Soit E un sous-espace vectoriel de X. Montrer que E est dense si et seulement si, pour tout f forme linéaire continue, $f \equiv 0$ sur E implique $f \equiv 0$ sur X (on pourra chercher à séparer $x_0 \notin \overline{E}$ et $\overline{E}$ et remarquer qu'une forme linéaire majorée ou minorée sur un sous-espace vectoriel est forcément nulle dessus).

Exercice 7 : Un premier contre-exemple de séparation
Supposons X de dimension infinie et soit H un sous-espace vectoriel strict dense dans X. Soit $x_0 \notin H$, montrer que $\{x_0\}$ et H sont des convexes qui ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

En déduire un contre-exemple concret de deux convexes qui ne peuvent être séparés au sens large.

Exercice 8 : Un contre-exemple de séparation de deux convexes fermés
On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle. On considère les convexes fermés

$$A = \left\{ (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \ , \ u_n \geq \frac{1}{n^2} \right\} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R}.\left(\frac{1}{n^3}\right) \ .$$

Soit f une forme linéaire continue telle que $f(A - B) \geq 0$ et soit $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$. Montrer que la suite

$$v_n^\lambda = \begin{cases} u_n & \text{si } n^3 \|u_n\|_\infty + n \leq \lambda \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

est dans $A - B$ (car $(v_n^\lambda + \lambda/n^3) \in A$) et vérifie que $(v_n^\lambda) \to (u_n)$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire que $f \equiv 0$ sur X et donc que A et B ne peuvent être séparés.