# TD n°1 : l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$

Dans tout ce qui suit, pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|^p$ est fini et on pose

$$\|u_n\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{1/p} .$$

Pour $p = \infty$, on note $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sup |u_n|$ est fini et on pose

$$\|u_n\|_\infty = \sup |u_n| .$$

**Exercice 1 : Pourquoi $\ell^\infty$ ?**
Soit $(u_n)$ appartenant à $\cap_{p\geq p_0} \ell^p(\mathbb{N})$ avec $p_0 < \infty$ (on verra ci-dessous qu'il suffit en fait que $(u_n) \in \ell^{p_0}(\mathbb{N})$). Montrer que $\|u_n\|_p \to \|u_n\|_\infty$ quand $p \to +\infty$.

**Exercice 2 : Inégalité de Hölder**
1) Montrer que si $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et $(v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, alors

$$\|u_n v_n\|_1 \leq \|u_n\|_1 \|v_n\|_\infty .$$

A partir de maintenant, on considère $p$ et $q$ dans $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
2) Montrer que pour tous $x$ et $y$ réels, on a $|xy| \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q$ (indication : le log est concave).
3) Soient $(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ et $(v_n) \in \ell^q(\mathbb{N})$ tels que $\|u_n\|_p = \|v_n\|_q = 1$, montrer que $\|u_n v_n\|_1 \leq 1$.
4) En déduire que pour tout $(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ et $(v_n) \in \ell^q(\mathbb{N})$, on a

$$\|u_n v_n\|_1 \leq \|u_n\|_p \|v_n\|_q .$$

**Exercice 3 : Applications de l'inégalité de Hölder**
1) Soit $(u_n) \in \ell^3(\mathbb{N})$, donner une condition suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $(\frac{1}{n^\alpha} u_n)$ soit dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
2) Soient $1 \leq p \leq r \leq q$ et soit $(u_n)$ dans $\ell^p(\mathbb{N}) \cap \ell^q(\mathbb{N})$. Montrer que $(u_n)$ est dans $\ell^r(\mathbb{N})$ et qu'il existe $\theta$ et $\theta'$ (indépendants de $(u_n)$) tels que $\|u_n\|_r \leq \|u_n\|_p^\theta \|u_n\|_q^{\theta'}$.

**Exercice 4 : $\| \cdot \|_p$ est une norme**
Montrer l'inégalité de Minkowski : soient $p \in [1, +\infty]$ et soient $(u_n)$ et $(v_n)$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$, alors on a
$$\|u_n + v_n\|_p \;\leq\; \|u_n\|_p \;+\; \|v_n\|_p \;.$$
Indication : on pourra appliquer l'inégalité d'Hölder à
$$\|u_n + v_n\|_p^p \;\leq\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,|u_n + v_n|^{p-1} \;+\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|\,|u_n + v_n|^{p-1} \;.$$

**Exercice 5 : Espace de Banach**
Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$.

**Exercice 6 : Injections**
Montrer que si $1 \leq q < p \leq +\infty$, alors $\ell^q(\mathbb{N})$ s'injecte continuement dans $\ell^q(\mathbb{N})$.

**Exercice 7 : Stricte convexité**
Soit $p \in ]1, +\infty[$, montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est strictement convexe, c'est-à-dire que pour tout $x$, $y$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$, si $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ et si $x \neq y$, alors $\|\theta x + (1-\theta)y\|_p < 1$ pour tout $\theta \in ]0, 1[$. Que se passe-t-il si $p = 1$ ou $p = \infty$ ?

**Exercice 8 : A propos des compacts**
1) Montrer que la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$ n'est pas compacte.
2) Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout $(b_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, l'ensemble
$$K \;=\; \{(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \mid |u_n| \leq |b_n|\}$$
est un compact de $\ell^p(\mathbb{N})$.

**Exercice 9 : Suites vides**
On appelle « suite vide » une suite $(u_n)$ qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On note $E$ l'espace des suites vides que l'on munit de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
1) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui n'est pas fermé. L'espace $E$ est-il complet ?
2) Quel est le complété de $E$ ?