

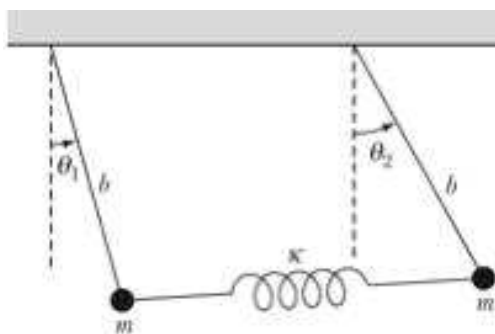
Feuille d'exercices n° 7

TP : les pendules

Deux pendules couplés

On souhaite simuler le comportement de deux pendules identiques couplés par un ressort de rigidité α (ou par les vibrations du support). Soient θ_1 et θ_2 les angles que font les pendules avec la verticale. Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) + \sin \theta_1(t) - \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) + \sin \theta_2(t) + \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \end{cases}$$



Mettre les équations sous forme d'une équation différentielle d'ordre 1. On prend comme paramètres :

$$\alpha = 0.2 \quad , \quad \theta_1(0) = 1 \quad , \quad \theta_2(0) = \frac{d}{dt}\theta_1(0) = \frac{d}{dt}\theta_2(0) = 0 \quad .$$

Simuler le comportement des pendules avec la méthode d'Euler et avec la méthode RK4. Observer pour chacune des méthodes la conservation de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{d}{dt}\theta_1(t) \right|^2 + \left| \frac{d}{dt}\theta_2(t) \right|^2 \right) + (1 - \cos \theta_1(t)) + (1 - \cos \theta_2(t)) + \frac{\alpha}{2} |\theta_2(t) - \theta_1(t)|^2 \quad .$$

Un pendule forcé :

On accroche un pendule de longueur l_2 à une roue de rayon l_1 . La roue tourne à une vitesse angulaire ω . On note θ l'angle formé par le pendule et la verticale. L'accélération de θ suit l'équation différentielle

$$\theta''(t) = -\frac{l_1}{l_2}\omega^2 \sin(\theta(t) - \omega t) - \frac{g}{l_2} \sin(\theta(t)) \quad .$$

Observer l'apparition de mouvements chaotiques pour, par exemple, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$ et $\omega = 3\sqrt{2}$.

