Feuille d'exercices n° 6

Intégration numérique.

Exercice 1 : Polynômes orthogonaux.
Soit ρ une fonction positive et continue sur un intervalle $[a,b]$.
1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $< f|g >_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$ soit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b])$.
2) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- P_n est de degré n et unitaire.
- P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire $< .|. >_\rho$.
3) Montrer que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2 \ , \quad P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2} \ ,$$

où $\lambda_n = < XP_{n-1}|P_{n-1} >_\rho / \|P_{n-1}\|_\rho^2$ et $\mu_n = \|P_{n-1}\|_\rho^2 / \|P_{n-2}\|_\rho^2$.
4) Montrer que P_n a exactement n racines distinctes toutes comprises dans $]a,b[$.
5) Pour $[a,b] = [-1,1]$ et $\rho \equiv 1$, les polynômes P_n sont appelés les polynômes de Legendre. Donner les trois premiers polynômes de Legendre. Montrer que le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre est donné par

$$P_n = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \ .$$

6) Pour $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ et $]a,b[=]-1,1[$, montrer que les polynômes P_n sont les polynômes de Tchebychev.

Exercice 2 : Méthodes de Gauss.
Soient $-1 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ des points de $]-1,1[$ et ω_i des poids. On considère la formule d'intégration

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \ . \tag{1}$$

1) Montrer que si la formule d'intégration (1) est vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$, alors les points x_i sont forcément les n racines de P_n, le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre (indication : considérer les polynômes de la forme $Q(X)P_n(X)$).
2) Montrer que si la formule d'intégration (1) est vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors forcément $\omega_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx$, où L_i est le polynôme élémentaire de Lagrange donné par $L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.
3) Montrer que si x_i et ω_i sont comme ci-dessus, alors la formule d'intégration (1) est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n-1$. On appelle méthode

de Gauss la méthode d'intégration associée.
4) Montrer que (1) ne peut être exacte pour les polynômes de degré $2n$.
5) Donner les paramètres des méthodes de Gauss à un et à deux points. Quels sont les ordres de ces méthodes ?
6) Calculer le noyau de Péano pour la méthode de Gauss à deux points.

Remarque : on peut bien sûr généraliser cet exercice au calcul numérique d'une intégrale avec poids $\int f(x)\rho(x)dx$ en remplaçant les polynômes de Legendre par les polynômes orthogonaux correspondants au poids ρ.

Exercice 3 : intégration numérique et fonctions périodiques.
On appelle polynôme trigonométrique de degré n et de coefficients réels a_0, a_1, ..., a_n et b_1, ..., b_n la fonction

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \ .$$

Soit f une fonction $2\pi-$périodique. On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$.
1) Montrer que, pour le calcul de I, la méthode des rectangles à gauche ou à droite et la méthodes des trapèzes sont toutes équivalentes.
2) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $p \notin n\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = 0 \ .$$

En déduire que la méthode des rectangles avec un pas $h = \frac{2\pi}{n}$ est exacte si f est un polynôme trigonométrique de degré $n-1$.
3) Montrer que s'il existe un polynôme trigonométrique P_{n-1} de degré $n-1$ et une constante $\varepsilon > 0$ tels que $|f(x) - P_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, alors la méthode des rectangles avec un pas $h = \frac{2\pi}{n}$ donne I avec une erreur $4\pi\varepsilon$.
4) Application : soit $f(x) = e^{\sin(x)}$ et soit n fixé. Montrer que l'on peut approcher f par un polynôme trigonométrique de degré $n-1$ avec une erreur d'au plus $e/n!$. En déduire l'erreur commise si on approche I à l'aide d'une méthode des trapèzes de pas $h = \frac{2\pi}{n}$.

TP Scilab :

Faire un programme qui calcule l'intégrale d'une fonction donnée à l'aide de la méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson et de Gauss à deux points. Tracer le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de h. Observer les courbes pour :
- une fonction $\mathcal{C}^\infty$, par exemple $\int_0^1 e^x dx$
- une fonction $\mathcal{C}^0$, par exemple $\int_{-1}^1 \sin|x| dx$
- une fonction périodique et $\mathcal{C}^\infty$, par exemple $\int_0^{2\pi} e^{\sin x} dx$.

N.B. : si l'erreur ε est trop petite, on risque de prendre le logarithme de 0, ce qui est génant. L'astuce consiste à regarder plutôt $\ln(\varepsilon + 10^{-15})$.
N.B. 2 : pour avoir la valeur exacte de l'intégrale, on pourra prendre la valeur la plus précise calculée.