Université Joseph Fourier — L3
Méthodes Numériques — $2^{\text{ème}}$ semestre 2008/2009

Feuille d'exercices n° 3

Résolution de systèmes linéaires.

Méthodes directes

Exercice 1 : Donner l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires pour calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$ grâce aux formules

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A)\ .$$

Même question mais en utilisant la décomposition $A = LU$ (méthode de Gauss).
Un ordinateur standard effectue de l'ordre de 10^{10} opérations par secondes (10 gigaflops).
Comparer les temps nécessaires dans le cas d'une matrice 100×100.

Exercice 2 : Soit $E_{ij}(\lambda)$ la matrice égale à l'identité sauf pour le coefficient (i, j) qui vaut λ. Soit A une matrice quelconque. Comment la multiplication à droite et à gauche par $E_{ij}(\lambda)$ agit-elle sur A ?

Exercice 3 : Donner une décomposition LU des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Exercice 4 : Décomposition QR.
On munit $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien canonique $< x|y >= \sum x_i \overline{y}_i$.
1) Soient $a_1, ..., a_n$ des vecteurs formant une base de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $q_1, ..., q_n$ et des nombres complexes r_{ij} $(i \leq j)$ tels que r_{ii} est un réel positif pour tout i et

$$\begin{cases} a_1 = r_{11} q_1 \\ a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2 \\ \quad \vdots \\ a_n = r_{1n} q_1 + \ldots + r_{nn} q_n \end{cases}$$

2) En déduire que toute matrice inversible A peut s'écrire $A = QR$ où Q est unitaire et R est triangulaire supérieure à éléments diagonaux réels et positifs et que cette décomposition est unique.
3) Comment utiliser cette décomposition pour résoudre facilement le système $Ax = b$?
4) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que ${}^t\overline{A}A$ est hermitienne définie positive. Quel est le lien entre la décomposition de Choleski et la décomposition QR ?

Exercice 5 : Décomposition de Choleski.
Soit A une matrice hermitienne définie positive. On rappelle qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure L qui a des éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = L^t\overline{L}$ (décomposition de Choleski).
1) Donner l'algorithme qui permet de calculer L. L'appliquer à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Cet algorithme est-il appliquable à des matrices non hermitiennes ?
2) Expliquer comment utiliser la décomposition de Choleski pour résoudre le système $Ax = b$ et donner le nombre d'opérations.
3) Une matrice $A = (a_{ij})$ est appelée $p-$bande si $a_{ij} = 0$ dès que $|i - j| \geq p$.
  a) Donner des exemples de matrices $p-$bandes.
  b) Montrer que si A est une matrice hermitienne définie positive $p-$bande, alors L est aussi $p-$bande.

Méthodes indirectes

Exercice 6 : On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple associée. Montrer que

$$|||A|||_\infty \equiv \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Donner une condition suffisante sur A pour que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $A^k x \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow 0$. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 7 : Matrices à diagonale dominante.
On appelle matrice à diagonale dominante une matrice $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour $i = 1, ..., n$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \; .$$

1) Donner un exemple de matrice à diagonale dominante.
2) Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.
3) On souhaite appliquer la méthode de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$ où A est à diagonale dominante. On pose

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = - \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

La méthode de Jacobi consiste à rechercher le point fixe de quelle fonction ? Montrer que la méthode de Jacobi converge toujours si A est à diagonale dominante.

Conditionnement

Pour résoudre le système $Ax = b$, il faut connaître b. En général, celui-ci n'est pas connu avec une précision infinie car il peut y avoir des erreurs de mesures et car la précision des instruments et de l'ordinateur n'est pas infinie. On s'intéresse donc à l'erreur qui peut être commise sur x à cause des imprécisions sur b. La valeur pertinente est l'erreur relative $\|\delta x\|/\|x\|$.

Exercice 8 : On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} .$$

1) Donner les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2) Expliciter la résolution de l'équation $Ax = b$ en fonction des éléments propres.
3) Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = (1, 1)$. On a en fait une petite erreur sur b qui est donné par δb avec $\|\delta b\|/\|b\|$ de l'ordre de $0,01$. On a donc une erreur δx sur x donnée par $A(x + \delta x) = b + \delta b$. L'erreur relative $\|\delta x\|/\|x\|$ est-elle grande ?

Exercice 9 : On considère le système $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les données A et b sont imprécises. On a donc en réalité le système linéaire

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \ .$$

Etant donnée une norme matricielle, on définit le conditionnement de la matrice A par $\kappa(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$.
1) Montrer que si $\frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \leq \frac{1}{\kappa(A)}$, on a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{|||\delta A|||}{|||A|||}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \right)$$

2) Montrer que le conditionnement de A est minoré par le rapport $|\lambda_n/\lambda_1|$, où λ_n et λ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre en module. Expliquer l'exercice précédent du point de vue du conditionnement.

TP Scilab

Exercice 10 : Ecrire un programme donnant la décomposition QR d'une matrice. Le transformer en un programme calculant l'inverse d'une matrice.

Exercice 11 : Programmer la méthode de Jacobi.