Feuille d'exercices n° 2

Résolution d'équations non-linéaires.

Exercice 1 : On utilise la méthode de dichotomie pour résoudre une équation $f(x) = 0$ avec $x \in [a, b]$. On veut une approximation d'une solution à $\varepsilon > 0$ près. Montrer qu'on aura besoin d'au plus $\left\lceil \frac{\ln((b-a)/2)-\ln\varepsilon}{\ln 2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor$ itérations de l'algorithme, où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur à x et le plus petit entier supérieur à x.

Exercice 2 : Deux personnes jouent au jeu suivant : l'une pense à un objet ou à une personne, un animal, un lieu etc. et l'autre doit le deviner en posant des questions n'admettant que "oui" ou "non" comme réponse. En sachant qu'une grande encyclopédie de la langue française compte environ 200 000 mots (nom propres compris), montrer que l'on peut trouver le mot en moins de 18 questions.

Rappel : soit (x_n) une suite de points convergeant vers un point x.
• On dit que la suite converge avec une *vitesse d'ordre au moins* p s'il existe $C > 0$ tel que $|x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^p$ à partir d'un certain rang.
• On dit que la suite (x_n) converge avec une *vitesse d'ordre exactement* p s'il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{C}|x_n - x|^p \leq |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^p$ à partir d'un certain rang.
• Une méthode d'approximation par itérations est dite d'*ordre au moins* p (ou simplement d'ordre p) si toutes les suites produites par cette méthode convergent avec une vitesse d'ordre au moins p. Pour $p = 1$ on parle de convergence (au moins) linéaire, pour $p = 2$, de convergence (au moins) quadratique etc.

Exercice 3 : Soit (x_n) une suite convergeant vers x. On note N_n le plus grand entier tel que les N_n premières décimales de x_n soient correctes.
1) On suppose la convergence est exactement linéaire, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $N_n \leq C(1 + n)$.
2) On suppose la convergence est au moins quadratique, montrer que $\liminf_{n\to+\infty} N_{n+1}/N_n \geq 2$, c'est-à-dire qu'asymptotiquement, on multiplie au moins par deux le nombre de décimales exactes à chaque itération.

Exercice 4 : Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. On utilise une méthode itérative de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour trouver un point fixe de g. On suppose que (x_n) converge vers un point fixe x_* de g. On suppose en outre que g est de classe $\mathcal{C}^p$ au voisinage de x_*, que $g'(x_*) = g''(x_*) = ... = g^{(p-1)}(x_*) = 0$ et que $g^{(p)}(x_*) \neq 0$. Montrer que la suite (x_n) à une vitesse de convergence d'ordre exactement p.

Exercice 5 : Soit P un polynôme de degré n ayant n racines réelles distinctes $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Montrer que pour tout $x_0 > \alpha_n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la suite récurrente $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$ est bien définie, vérifie $x_k > \alpha_n$ et est décroissante. En déduire qu'elle converge vers α_n.

Exercice 6 : Méthode de Newton dans $\mathbb{R}^d$
On considère une fonction $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuement dérivable au sens suivant. Il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une application linéaire $DF(x)$, dépendant continuement de x, et une fonction $\varepsilon(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telles que

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \quad F(x+h) = F(x) + DF(x)h + \varepsilon(x,h), \text{ avec } \forall h \in \mathbb{R}^d, \ \|\varepsilon(x,h)\| \le K\|h\|^2 \ . \quad (1)$$

NB : on a alors $DF(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le d}$.
On suppose que F s'annule en $x_* \in \mathbb{R}^d$ où $DF(x_*)$ est inversible.
1) Montrer qu'il existe $R > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in B(x_*, R)$, $DF(x)$ est inversible et $\|DF(x)^{-1}\| \le M$.
2) Proposer un algorithme de Newton pour approcher x_* et montrer qu'il existe un rayon R' tel que pour tout point de départ dans la boule $B(x_*, R')$, la suite des itérés de l'algorithme converge vers x_* (indication : on pourra utiliser (1) pour estimer $\|x_{n+1} - x_*\|$ en fonction de $\|x_n - x_*\|$).

Exercice 7 : Méthode de Newton modifiée
On dit qu'une fonction f a une racine x_* de multiplicité ou d'ordre p s'il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(x) = (x - x_*)^p h(x)$ avec $h(x_*) \ne 0$.
1) On suppose que x_* est une racine simple de f, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ?
2) On suppose que x_* est une racine d'ordre p avec $p \ge 2$.
 a) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_* tel que $f'(x) \ne 0$ sur $\mathcal{V} - \{x_*\}$. Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ?
 b) On utilise cette fois-ci la méthode de Newton modifiée : on considère la suite

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Quel est l'ordre de convergence ?

<u>TP Scilab</u>

Ecrire un programme itérant la méthode de dichotomie et la méthode de Newton. L'utiliser pour calculer $\sqrt{2}$. Tracer le nombre de décimales exactes en fonction du nombre d'itérations.
On appliquera ensuite la méthode de Newton à la fonction $x \mapsto \sin \pi x$ et on tracera le dixième itéré de la suite en fonction du point de départ de l'algorithme. Qu'observez-vous ?