

Feuille d'exercices n° 1

Représentation des nombres, approximations et erreurs.

Sauf mention du contraire, on se fixera les conventions suivantes pour les nombres à virgule flottante : les nombres sont en base 10, ils ont 10 chiffres significatifs et le plus grand représentable est $9,999999999 \times 10^{99}$. Autrement dit, un nombre est du type $\pm a_0, a_1 \dots a_9 \times 10^n$ avec a_i entier entre 0 et 9 et n entier entre -99 et 99.

Exercice 1 : Ecrire les nombres suivants selon la représentation machine avec virgule flottante.

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1000}{3}, \quad 899 \times 100^2.$$

Exercice 2 : Donner la valeur réelle de chaque expression suivante.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad (10^{20} + 1) - 10^{20}, \quad C_2^{1000} = \frac{1000!}{2(998!)}.$$

On donne ces calculs à faire à une machine. Sa réponse correspondra-t-elle à l'expression exacte ?

Exercice 3 : Les nombres A et B suivants peuvent se calculer selon deux manières proposées. Quelle est l'expression la plus judicieuse pour le calcul par ordinateur ?

$$A = \sum_{n=1}^{10^{20}} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{10^{20}-1} \frac{1}{10^{20}-n}.$$

$$B = e^{-10} \approx \sum_{n=0}^{30} \frac{(-10)^n}{n!} \quad \text{mais aussi} \quad B = \frac{1}{e^{10}} \approx \left(\sum_{n=0}^{30} \frac{10^n}{n!} \right)^{-1}$$

Exercice 4 : On considère l'application suivante

$$f : \left(\begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & [0, 1[\\ x & \longmapsto & 10x \bmod 1 = 10x - \lfloor 10x \rfloor \end{array} \right) .$$

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) = 0$.
- 2) On simule maintenant les itérations de f sur une machine. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le calcul machine donne $f^n(x) = 0$.

Exercice 5 : Durant la première guerre du Golfe, une batterie anti-missile Patriot a raté l'interception d'un missile Scud qui causa la mort de 28 personnes. Nous allons essayer de comprendre pourquoi.

L'ordinateur de la batterie Patriot représente les nombres par des nombres à virgule fixe en base 2 avec une précision de 23 chiffres après la virgule. L'horloge de la batterie compte le temps en dixième de seconde. Pour obtenir le temps en seconde, le programme divise le temps donné par l'horloge par dix.

- 1) Sachant que l'écriture en base 2 de $1/10$ est $0,0001100110011001100110011\dots$, donner une estimation de l'erreur d'approximation de $1/10$ par la représentation des nombres de la batterie Patriot.
- 2) La batterie fonctionne pendant 100 heures. Donner une estimation de l'erreur introduite dans le temps en secondes.
- 3) Sachant qu'un missile Scud voyage à 1676 mètres par seconde, donner l'erreur de distance commise par la batterie anti-missile.