Institut Fourier
Université Grenoble I

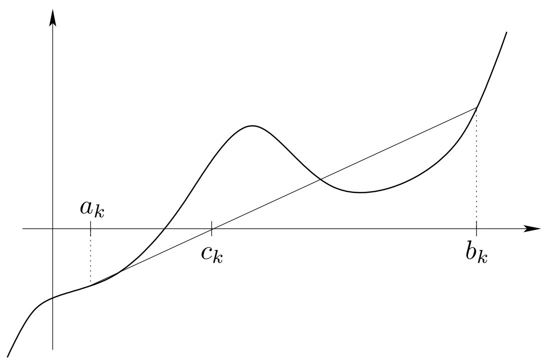
L3 Méthodes Numériques
$2^{\text{ème}}$ semestre 2007/2008

Correction du partiel

Exercice n°1 :
On considère pour simplifier les notations que $k = 0$ (le restant de l'algorithme étant identique à la première étape). On part de a et b tels que $f(a)f(b) < 0$. On pose

$$c_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b) = \frac{f(b)}{f(b)-f(a)} a + \left(1 - \frac{f(b)}{f(b)-f(a)}\right) b = \frac{f(b)}{f(b)-f(a)} a + \frac{f(a)}{f(a)-f(b)} b \, .$$

On sait que $f(b)f(a) < 0$. Supposons $f(b) > 0$ (le cas $f(b) < 0$ est symétrique). On a $f(a) < 0$ et donc $f(b) - f(a) > f(b) > 0$.



On en déduit que $1 > \frac{f(b)}{f(b)-f(a)} > 0$. Donc c_0 est barycentre à coefficients strictement positifs de a et b, c'est-à-dire que $c_0 \in]a, b[$. D'autre part, on a $\frac{f(b)}{f(b)-f(a)} f(a) + \frac{f(a)}{f(a)-f(b)} f(b) = 0$. Donc c_0 est exactement le point d'intersection entre la sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et l'axe horizontal. L'algorithme de la *regula falsi* consiste donc en un algorithme de dichotomie, sauf qu'au lieu de couper le segment $[a_k, b_k]$ en son milieu, on le coupe au point d'intersection entre la sécante et l'axe horizontal.

Exercice n°2 :
1) Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P'(0), P(1))$. Il s'agit clairement d'une application linéaire. Soit P tel que $\Phi(P) = 0$. Par le théorème de Rolle, P' a un zéro dans $]-1, 0[$ et un autre dans $]0, 1[$. Comme en outre $P'(0) = 0$, P' est un polynôme de degré au plus 2 qui a trois racines distinctes donc $P' \equiv 0$. Donc P est constant, mais comme $P(0) = 0$, P est le polynôme nul. On a donc montré que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$ donc que Φ est injective. Comme $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ ont même dimension, Φ est bijective, donc étant donnés quatres nombres $f(-1)$, $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(-1) = f(-1) \; , \quad P(0) = f(0) \; , \quad P'(0) = f'(0) \;\text{ et }\; P(1) = f(1) \; . \tag{1}$$

2) Supposons f paire et soit P le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant (1). Comme $f(x) = f(-x)$, le polynôme $Q(X) = P(-X)$ est un polynôme de degré au plus trois vérifiant aussi (1). Par unicité, il vient $Q = P$ c'est-à-dire que P est pair. Le raisonnement pour f impair est

le même.
3) Posons $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$. On constate que f_1 est déjà un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc par unicité, $P \equiv f_1$ est le seul polynôme de degré au plus 3 vérifiant (1).
Posons $f_2(x) = \cos(\pi x)$. On cherche un polynôme de degré au plus trois vérifiant $P(\pm 1) = -1$, $P(0) = 1$ et $P'(0) = 0$. Par parité, on sait que P est pair et donc que $P = \alpha X^2 + \beta$. Il vient de suite que $P = -2X^2 + 1$.

Exercice n°3 :

Une méthode exacte :
1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ supposée symétrique et définie positive. Montrons que $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2 \longmapsto \varphi(x, y) =< Ax|y >$ est un produit scalaire. Par bilinéarité de $< .|. >$ et linéarité de A, φ est bilinéaire. Par symétrie de A et du produit scalaire, $< Ax|y >=< y|Ax >=< Ay|x >$. Comme A est définie positive, on a par définition $< Ax|x >\geq 0$ et de plus $< Ax|x >= 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc φ est bien un produit scalaire. La norme associée est $x \mapsto \sqrt{< Ax|x >}$. Comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, il existe M et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad M\|x\|^2 \ \geq \ < Ax|x > \ \geq \ \eta \|x\|^2 \ . \tag{2}$$

2) Comme φ est un produit scalaire on peut explicitement construire une base orthonormale $(v_1, v_2, ..., v_d)$ associée en utilisant le procédé de Gram-Schmidt. Cette base répond à la question.
3) Soit $b \in \mathbb{R}^d$ et soit x_* l'unique solution de $Ax = b$. Comme $(v_1, v_2, ..., v_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$, il existe des coefficients c_i tels que $x_* = \sum_{i=1}^d c_i v_i$. On a donc $\sum_{i=1}^d c_i A v_i = b$. En faisant le produit scalaire avec v_k et en utilisant les propriétés de la base (v_i), on trouve $c_k =< b|v_k >$. Donc $x_* = \sum_{i=1}^d < b|v_i > v_i$.
4) Le problème de cette méthode est que le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est sensible aux erreurs d'arrondis. En effet, si une erreur intervient sur le premier calcul, elle se propage sur les autre calculs sans avoir de raison de s'atténuer.

Une méthode approchée :
1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} J(x+y) &= \frac{1}{2} < Ax|x > + < Ax|y > + \frac{1}{2} < Ay|y > - < b|x > - < b|y > \\ &= J(x) + < Ax - b|y > + < Ay|y > \ . \end{aligned}$$

Comme $< Ay|y >\leq M\|y\|^2$ d'après (2), on a $\overrightarrow{\nabla} J(x) = Ax - b$.
2) Soit x_* l'unique solution de $Ax = b$. Le calcul précédent montre que x_* est le seul point pour lequel $\overrightarrow{\nabla} J$ s'annule. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, (2) implique

$$J(x_* + y) = J(x_*) + < Ay|y > \ \geq \ J(x_*) + \eta \|y\|^2 > J(x_*) \ . \tag{3}$$

Donc J est minoré par $J(x_*)$ et x_* est le seul point où le minimum est atteint.
3) Montrons que la suite (x_n) est bien définie par récurrence. Par définition x_0 existe. Supposons que l'on connaisse x_n. D'après (3), J tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. Donc la fonction $f : s \in \mathbb{R} \mapsto J(x_n + s\overrightarrow{\nabla} J(x_n))$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Il existe donc un intervalle $[-M, M]$ tel que $f(s) \geq f(0)$ pour tout $s \notin [-M, M]$. Sur l'intervalle compact $[-M, M]$, f est minorée et atteint son minorant, c'est donc a fortiori aussi le cas sur tout $\mathbb{R}$. Il existe donc bien un point t tel que $J\left(x_n + t\overrightarrow{\nabla} J(x_n)\right) = \min_{s\in\mathbb{R}} J\left(x_n + s\overrightarrow{\nabla} J(x_n)\right)$. Sur un tel point, la dérivée de f doit s'annuler. Or

$$\begin{aligned} f'(s) &=< \overrightarrow{\nabla} J(x_n + s\overrightarrow{\nabla} J(x_n))|\overrightarrow{\nabla} J(x_n) > \\ &=< A(x_n + sy_n) + b|y_n >=< y_n + sAy_n|y_n > \quad \text{avec} \quad y_n = \overrightarrow{\nabla} J(x_n) = Ax_n + b \ . \end{aligned}$$

Il existe donc un unique réel t où f atteint son minimum et $t = -\|y_n\|^2/ < Ay_n|y_n >$. Donc x_{n+1} est bien défini et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >} y_n \quad \text{avec } y_n = Ax_n - b \ .$$

4) a) Par définition de la suite (x_n), $J(x_{n+1}) = \min_{s\in\mathbb{R}} J\left(x_n + s\overrightarrow{\nabla} J(x_n)\right) \leq J(x_n)$. Donc $(J(x_n))$ est une suite réelle décroissante et minorée par $J(x_*)$, elle converge donc.
b) On a

$$\begin{aligned} J(x_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left\langle A\left(x_n - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >}y_n\right)\middle| x_n - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >}y_n\right\rangle - \left\langle x_n - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >}y_n \middle| b\right\rangle \\ &= J(x_n) - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >} < Ax_n - b|y_n > + \frac{1}{2}\frac{\|y_n\|^4}{< Ay_n|y_n >^2} < Ay_n|y_n > \\ &= J(x_n) - \frac{1}{2}\frac{\|y_n\|^4}{< Ay_n|y_n >} \end{aligned}$$

Comme la suite $(J(x_n))$ converge, $J(x_{n+1}) - J(x_n) = -\frac{1}{2}\frac{\|y_n\|^4}{<Ay_n|y_n>}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or d'après (2), $\frac{\|y_n\|^4}{<Ay_n|y_n>} \geq \frac{1}{M}\|y_n\|^2$. Donc (y_n) converge vers 0. Comme A est inversible par hypothèse, on a $x_n - x_* = A^{-1}y_n$ et par continuité de A^{-1}, on trouve que (x_n) converge vers x_* ce qui justifie l'algorithme du gradient à pas optimal.