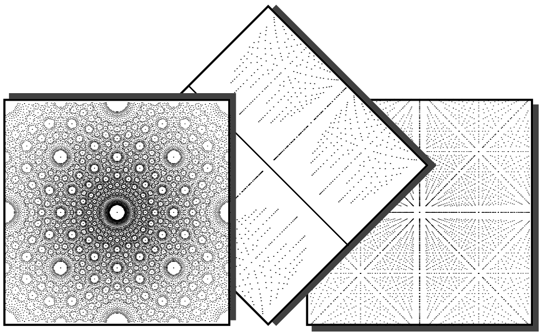
Recherches et travaux

E. Peyre



Institut Fourier

E. Peyre
Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France.
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
E-mail : `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. L'objet de ce texte est de donner une évaluation du nombre de points de V qui ne sont pas situés sur les diviseurs exceptionnels et dont la hauteur est bornée par un nombre réel B. Comme le laissait prévoir un résultat obtenu par Manin, on obtient que ce nombre est équivalent à $CB\ln^3 B$ où C est une constante. Celle-ci peut s'exprimer en termes des densités locales de V, de la fonction L du groupe de Picard de V et du volume d'un domaine fondamental. Les méthodes utilisées donnent également des indications pour obtenir un résultat analogue sur un corps de nombres quelconque.

Soit V une variété de Fano. On peut construire sur V une hauteur correspondant à l'opposé du faisceau canonique. Pour tout ouvert U de V, on note $n_U(B)$ le cardinal des points rationnels de U de hauteur inférieure à B. Manin a conjecturé que, pour un ouvert U convenable, il existe une constante C telle que

$$n_U(B) \sim CB\log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

avec $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V)$. Ce texte donne tout d'abord une expression conjecturale de la constante C en termes du volume de l'espace adélique associé à V pour une mesure de Tamagawa dépendant du choix de la hauteur. Cette

expression est compatible avec les résultats de la méthode du cercle et redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. La conjecture ainsi raffinée est ensuite vérifiée pour diverses variétés toriques obtenues en éclatant des sous-espaces de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$.

Soient V une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs d'Arakelov définissant un accouplement entre le groupe de Picard $\operatorname{Pic} V$ et les points rationnels de V à valeur dans $\mathbf{R}$. Soit $\zeta_{\mathbf{H}}$ la fonction zêta associée sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin et Tschinkel ont conjecturé que cette fonction est holomorphe sur un cône de sommet le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Il est en outre possible de donner une expression conjecturale du terme principal de cette fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ au voisinage de ce sommet. Le but de ce texte est de montrer comment cette expression conjecturale peut s'écrire naturellement en passant aux torseurs universels au-dessus de V.

Ce texte décrit les premières étapes d'une généralisation de la méthode du cercle au cas d'une hypersurface lisse dans une variété presque de Fano.

En effet, sous certaines conditions, il est possible d'exprimer dans ce cas les deux membres d'une version raffinée de la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée de l'hypersurface en termes du torseur universel de la variété ambiante qui joue, dans ce cadre, le rôle de l'espace affine.

Une version raffinée d'une conjecture de Manin sur le comportement asymptotique des points de hauteur bornée sur les variétés de Fano a été proposée par Batyrev et les auteurs. Nous testons numériquement cette conjecture pour diverses surfaces cubiques.

Nous considérons les surfaces cubiques diagonales d'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

On peut trouver numériquement tous ses points rationnels de hauteur plus petite que B lorsque B est inférieur à 10^5, gràce à un programme de D. J. Bernstein. D'un autre côté, il existe une conjecture, due à Manin, Batyrev et les auteurs, qui prédit exactement quel doit être le comportement asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur cette surface. En changeant les coefficients, on peut obtenir des surfaces cubiques dont le groupe de Picard a un rang qui varie de 1 à 4. Nous vérifions que les données numériques sont compatibles avec les conjectures précédentes. Dans un texte antérieur, nous considérions les surfaces cubiques dont le groupe de Picard est de rang un, avec éventuellement une obstruction ade Brauer-Manin à l'approximation faible. Ici, nous vérifions les conjectures pour les surfaces cubiques diagonales avec des groupes de Picard de rang supérieur à 2.

Le but de cet article est d'appliquer les travaux de Morris sur les séries d'Eisentein en caractéristique non nulle à l'étude asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur une variété de drapeaux généralisée obtenue comme quotient d'un groupe algébrique semi-simple au-dessus d'un corps global de caractéristique non nulle par un sous-groupe parabolique réduit. La formule obtenue pour le résidu de la fonction zêta des hauteurs a une interprétation analogue à celle connue pour un corps de nombres.

Si V est une variété algébrique ayant une infinité de points rationnels sur un corps de nombres, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points rationnels de hauteur bornée sur V. Les conjectures énoncées par Manin vers 1989 proposent une interprétation géométrique de ce comportement asymptotique où le fibré anticanonique et le cône engendré par les diviseurs effectifs dans le groupe de Néron-Severi jouent un rôle crucial. Le but de cet exposé est un survol des travaux suscités par ces conjectures.

Si V est une variété algébrique projective sur un corps de nombres F dont les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski, tout plongement ϕ de V dans $\mathbf{P}_F^N$ induit une hauteur exponentielle $H : V(F) \to \mathbf{R}$. Il est alors naturel d'étudier pour tout ouvert U de V le comportement asymptotique de

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B\}$$

lorsque le nombre réel B tend vers $+\infty$. Dans les cas connus de l'auteur, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, et $b \geqslant 1$. Vers 1989, Manin a proposé une interprétation géométrique de a et b qui dépend uniquement de la classe de $\phi^*(\mathscr{O}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi de V, de la classe du fibré canonique ω_V dans ce groupe et du cône engendré par les classes de diviseurs effectifs. Par la suite, l'auteur puis Batyrev et Tschinkel, dans un cadre plus général, ont suggéré une formule empirique pour la constante C, qui, dans le cas où $\phi^*(\mathscr{O}(1)) = \omega_V^{-1}$, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique associé à V. L'objectif de ce texte est de faire un survol de ces conjectures et des travaux qu'elles ont suscités.

Vers 1989, Manin initia un programme en vue de comprendre le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés de Fano. Ce programme amena à la recherche de nouvelles méthodes pour estimer le nombre de points de hauteur bornée sur différentes classes de variétés. Les méthodes basées sur l'analyse harmonique s'appliquent avec succès pour les compactifications d'espaces homogènes. Cependant, elles ne s'appliquent pas à d'autres types de variétés. Les torseurs universels, introduits par Colliot-Thélène et Sansuc en relation avec le principe de Hasse et l'approximation faible se sont révélés utiles pour l'étude d'autres variétés. L'objet de cet article est de décrire l'utilisation de ces torseurs pour divers exemples représentatifs.

Rational points and curves on flag varieties
EMMANUEL PEYRE 439

L'un des meilleur outils pour l'étude du comportement asymptotique des points de hauteur bornée sur les variétés projectives sur un corps de nombres K est la fonction zêta des hauteurs définie par la série complexe

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

où $V(K)$ désigne l'ensemble des points rationnels de V et $H : V(K) \to \mathbf{R}$ une hauteur sur V. Si V est une variété de drapeau, Franke, Manin et Tschinkel ont démontré que l'on peut normaliser la hauteur de sorte que la fonction zêta des hauteurs soit une série d'Eisenstein. Il est alors possible d'appliquer les travaux de Langlands pour montrer des propriétés de méromorphie de cette fonction. Cette méthode s'applique aussi aux corps globaux de caractéristique finie pour lesquels les séries d'Eisenstein ont été étudiées par Morris.

Dans un travail en cours avec Antoine Chambert-Loir, nous étendons cette étude aux fonctions zêta des hauteurs motiviques, en utilisant des résultats de Kapranov. Cette généralisation souligne les liens profonds existant entre le comportement symptotique des points de hauteur bornée et les espaces de modules de courbes sur ces variétés.

On Manin's conjecturefor a family of Châtelet surfaces
RÉGIS DE LA BRETÈCHE, TIM BROWNING & EMMANUEL PEYRE 447

Nous démontrons la conjecture de Manin pour les surfaces de Châtelet sur $\mathbf{Q}$ obtenues comme modèle minimal propre et lisse de la surface affine d'équation

$$Y^2 + Z^2 = f(X)$$

où $f \in \mathbf{Z}[X]$ est un polynôme scindé à racines distinctes. Ces surfaces ne satisfont pas l'approximation faible.

Liberté et accumulation
EMMANUEL PEYRE 501

Le principe de Batyrev et Manin et ses variantes donne une interprétation conjecturale précise pour le terme dominant du nombre de points de hauteur bornée d'une variété algébrique dont l'opposé du faisceau canonique est suffisamment positif. Comme l'a clairement montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel la mise en œuvre de ce principe nécessite

l'exclusion de domaines d'accumulation qui sont le plus souvent déterminés en procédant par récurrence sur la dimension de la variété. Cette méthode ne donne cependant pas de critère direct permettant de dire si un point rationnel donné doit être exclu ou pas. L'ambition de cet article est de définir une mesure de la liberté d'un point rationnel de sorte que les points d'une liberté suffisante se répartissent effectivement de manière uniforme sur la variété, c'est-à-dire qu'ils soient distribués sur l'espace adélique associé à la variété conformément à la mesure de distribution adélique introduite dans un article antérieur de l'auteur. De ce point de vue, les points assez libres devraient être ceux qui respectent le principe de Batyrev et Manin.

La distribution des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés algébriques est loin d'être uniforme les points peuvent s'accumuler sur l'image de variétés formant un ensemble mince. La difficulté est de pouvoir caractériser les points de ces ensembles accumulateurs. Les pentes de la géométrie d'Arakelov forment un outil utile pour attaquer cette problématique. Ces notes présenteront différents exemples où cette approche est efficace. On évoquera également la question des sous-variétés localement accumulatrices qui apparaissent lorsqu'on considère les points de hauteur bornée au voisinage d'un point rationnel.

L'objectif de ce texte est de construire des corps de fonctions unirationels K sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 dont la cohomologie non ramifiée $H^i_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes i})$ est non nulle pour $i = 2$, 3 ou 4 et p un nombre premier. Cela implique que le corps K n'est pas stablement rationnel. Dans ce but, nous donnons une condition suffisante pour qu'un élément de $H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$ ne soit pas ramifié. Cette condition repose sur un critère utilisant l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{F}_p$

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ n variétés de Severi-Brauer sur un corps k, Soit $k(Y_1 \times \cdots \times Y_n)$ le corps de fonctions de leur produit. En utilisant un résultat récent de Bruno Kahn, nous montrons que le quotient du noyau de l'application de restriction

$$H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y_1 \times \cdots \times Y_n), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

par le sous-groupe engendré par les cup-produits des classes de $Y_1, \ldots, Y_n$ dans $\mathrm{Br}\, k$ est isomorphe à $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_n)_{\mathrm{tors}}$. Nous appliquons ce résultat au produit de deux coniques en utilisant le fait que dans ce cas $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times Y_2)_{\mathrm{tors}}$ est trivial. Nous construisons ensuite des exemples de produits de trois coniques pour lequel ce quotient n'est pas trivial.

Soit V une variété de drapeaux généralisée sur un corps k. Il existe alors des extensions finies k_i de k pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments α_i du groupe de Brauer de k_i et une suite exacte naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

où $H^i(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne à valeur dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tordu deux fois et $\mathrm{CH}^2(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension deux modulo l'équivalence rationnelle.

Le résultat central de ce texte est la généralisation suivante d'un résultat de l'auteur sur les produits de variétés de Severi-Brauer. Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur un corps k. Soit V une variété de drapeaux généralisée sous G. Alors il existe des extensions finies k_i de k pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments α_i de $\mathrm{Br}\, k_i$ et une suite exacte naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Après avoir donné une description plus explicite du deuxième morphisme dans une cas particulier, nous utilisons ce résultat pour construire des classes dans $H^3(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ qui sont k-négligeables pour tout corps k de caractéristique différente de 2 et contenant une racine quatrième de l'unité,

pour un groupe Q qui est extension centrale d'un $\mathbf{F}_2$ espace vectoriel par un autre.

Le complexe de Lichtenbaum fournit un lien entre la cohomologie galoisienne et les groupes de $\mathscr{K}$-cohomologie Dans ce texte nous considérons les premiers termes de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'hypercohomologie de ces complexes, qui a été développée par Bruno Kahn, dans le cas du quotient d'un ouvert d'une variété cellulaire dont le complémentaire est de codimension assez grande. Dans le cas particulier d'une représentation fidèle W d'un groupe G sur un corps algébriquement clos k, cela implique que le groupe des classes négligeables dans le groupe de cohomologie $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est canoniquement isomorphe au second groupe de Chow équivariant du point. Cela implique également que les classes non ramifiées dans le groupe de cohomologie $H^3(k(W)^G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$ proviennent de la cohomologie de G, ce qui avait été démontré par Saltman quand k est le corps des complexes.

Si un système d'équations polynomiales à coefficients entiers admet une solution dans $\mathbf{Q}^n$, il en admet sur tout complété p-adique ou réel de $\mathbf{Q}$. La réciproque a été démontrée par Hasse pour les quadriques, mais elle est fausse en général. Une grande partie des contre-exemples connus peuvent être expliqués à l'aide de l'obstruction de Brauer-Manin, basée sur la théorie du corps de classe. Il est donc naturel de se demander si, pour certaines classes de variétés, cette obstruction est la seule. Le but de cet exposé est de présenter un survol des techniques développées pour répondre à ce type de questions.

Nous factorisons le polynôme de Poincaré virtuel de tout espaces homogène G/H, où G est un groupe algébrique linéaire et H un sous-groupe algébrique en $t^{2u}(t^2-1)^r Q_{G/H}(t^2)$ pour un polynôme $Q_{G/H}$ avec des coefficients positifs. Nous montrons de plus que $Q_{G/H}(t^2)$ divise le polynôme

de Poincaré virtuel de tout plongement régulier de G/H si G et H sont connexes.

Soit X une variété algébrique sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ homogène sous un groupe algébrique linéaire. Nous démontrons que le nombre de points rationnels de X sur $\mathbf{F}_{q^n}$ est une fonction périodiquement polynomiale en q^n avec des coefficients entiers. De plus, les polynômes obtenus en remplaçant formellement q^n par $q^n + 1$ sont à coefficients positifs.

C. Voisin a inventé une nouvelle méthode pour prouver que des classes de variétés ne sont pas stablement rationnelles, c'est-à-dire que leur produit avec un espace affine n'est pas rationnel. Cette méthode repose sur la décomposition de la diagonale dans le groupe de Chow et sur des propriétés de spécialisation de cette décomposition. Parmi ces nouvelles familles, mentionnons les revêtements doubles de l'espace projectif de dimension trois ou quatre ramifiés le long d'une hypersurface quartique très générale et les solides quartiques très généraux. Ces méthodes permettent également de démontrer que la rationalité ne se conserve pas par déformation, même au sein d'une famille de variétés lisses de dimension quatre.

We say that a smooth algebraic group G over a field k is very special if for any field extension K/k, every G_K-homogeneous K-variety has a K-rational point. It is known that every split solvable linear algebraic group is very special. In this note, we show that the converse holds, and discuss its relationship with the birational classification of algebraic group actions.

Ce texte, réalisé pour mon habilitation, fait une synthèse de mes realisations et de mes projets de recherche en 1997.

ABSTRACTS

Let V be the Del Pezzo surface obtained by blowing up three points in general position on $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. The aim of this text is to estimate the number of points on V of bounded height which do not lie on exceptional divisors. Manin had proven that this number should be equivalent to $CB \ln^3 B$ for a constant C. Here we give an expression for C in terms of local densities of V, of the L-function of the Picard group of V and the volume of some fundamental domain. Parts of the proof generalize to an arbitrary number field.

Let V be a Fano variety and let h be a height on V corresponding to the inverse of the canonical sheaf. For any open set U of V, let $n_U(B)$ denote the number of rational points in U whose height is bounded by B. Manin conjectured that for a small enough U, there exists a constant C such that

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B$$

where $t = \operatorname{rk} \operatorname{Pic} V$. The first aim of this paper is to give a conjectural expression for the constant C in terms of the adelic volume of V for a Tamagawa measure corresponding to the chosen height. This expression agrees with the constants computed by Schanuel for projective spaces and by Franke, Manin and Tschinkel for generalized flag varieties under quasi-split groups and is compatible with the results of the circle method. We

then check the conjecture thus refined for toric varieties obtained as the blowing-up of particular subspaces in $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$.

Let V be a Fano variety and $\mathbf{H}$ a system of Arakelov's heights which defines a pairing between the Picard group $\operatorname{Pic} V$ and the set of rational points of V with values in $\mathbf{R}$. Let $\zeta_{\mathbf{H}}$ be the corresponding zeta function on $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin and Tschinkel conjectured that this function is holomorphic on a cone with apex at the anticanonical sheaf ω_V^{-1}. Moreover it is possible to give a conjectural formula for the principal term of this function in a neighbourhood of this point. The aim of this paper is to give new evidence for this formula by lifting it to the universal torsors over V.

This paper presents the first steps of a generalization of the circle method for smooth hypersurfaces in almost Fano varieties.

Indeed it is possible, under some conditions, to express both sides of a refined version of Manin's conjecture on the asymptotic behavior of the number of points with bounded height on the hypersurface in terms of the universal torsor of the variety, which plays here the rôle of the affine space.

A refined version of Manin's conjecture about the asymptotics of points of bounded height on Fano varieties has been developped by Batyrev and the authors. We test numerically this refined conjecture for some diagonal cubic surfaces.

We consider diagonal cubic surfaces defined by an equation of the form

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Numerically, one can find all rational points of height $\leqslant B$ for B in the range of up to 10^5, thanks to a program due to D. J. Bernstein. On the other hand, there are precise conjectures concerning the constants in the

asymptotics of rational points of bounded height due to Manin, Batyrev and the authors. Changing the coefficients one can obtain cubic surfaces with rank of the Picard group varying between 1 and 4. We check that numerical data are compatible with the above conjectures. In a previous paper we considered cubic surfaces with Picard groups of rank one with or without Brauer-Manin obstruction to weak approximation. In this paper, we test the conjectures for diagonal cubic surfaces with Picard groups of higher rank.

The aim of this paper is to apply the work of Morris on Eisenstein series over global function fields to the study of the asymptotic behavior of the points of bounded height on a generalized flag variety defined as the quotient of a semi-simple algebraic group by a reduced parabolic subgroup over such a field. The formula obtained for the height zeta function has an interpretation similar to the one known over a number field.

If V is an algebraic variety over a number field with infinitely many rational points, it is natural to construct heights on V and to study the asymptotic behavior of the points of bounded height on V. The conjectures made by Manin around 1989 propose a geometrical interpretation of this behavior in which the canonical line bundle and the cone of effective divisors in the Néron-Severi group play a central rôle. This talk is a survey of the works stimulated by these conjectures.

Let V be a projective algebraic variety over a number field F such that the rational points are Zariski dense. Any embedding $\phi : V \to \mathbf{P}^N_F$ induces an exponential height $H : V(F) \to \mathbf{R}$. It is then natural to study for any open subset U of V the asymptotic behavior of

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B\}$$

when the real number B goes to $+\infty$. In all known cases, this asymptotic behavior takes the form

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

with $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, and $b \geqslant 1$. Around 1989, Manin gave a conjectural interpretation of a and b which depends only on the class of $\phi^*(\mathscr{O}(1))$ in the Néron-Severi group of V, on the class of the canonical line bundle ω_V, and on the cone of effective divisors in this group. Afterwards the author, and later Batyrev and Tschinkel in a more general setting, gave an empiric formula for the value of the constant C, which, in the case $\phi^*(\mathscr{O}(1)) = \omega_V^{-1}$, is given in terms of a Tamagawa measure on the adelic space of V. The aim of this text is to make a survey of these conjectures and of the work they generated.

Around 1989, Manin initiated a program to understand the asymptotic behaviour of rational points of bounded height on Fano varieties. This program led to the search of new methods to estimate the number of points of bounded height on various classes of varieties. Methods based on harmonic analysis were successful for compactifications of homogeneous spaces. However, they do not apply to other types of varieties. Universal torsors, introduced by Colliot-Thélène and Sansuc in connection with the Hasse principle and weak approximation, turned out to be a useful tool in the treatment of other varieties. The aim of this short survey is to describe the use of torsors in various representative examples.

One of the main tool to study the asymptotic behaviour of points of bounded height on projective varieties over a number field K is the height zeta function defined by the series

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

where $V(K)$ denotes the set of rational points of V and $H : V(K) \to \mathbf{R}$ is a height on V. If V is a flag variety, Franke, Manin and Tschinkel proved that one may normalize the height so that the height zeta function

is an Eisenstein series. One may then apply Langland's work to ascertain the meromorphic properties of this function. This method apply also over global fields of positive characteristic where Eisenstein series have been studied by Morris.

In a joint work with Antoine Chambert-Loir, we are extending this framework to motivic height zeta functions, using results of Kapranov. This generalization makes explicit strong links existing between the asymptotics of points of bounded height and the moduli spaces of curves on the considered varieties.

The Manin conjecture is established for Châtelet surfaces over $\mathbf{Q}$ arising as minimal proper smooth models of the surface

$$Y^2 + Z^2 = f(X)$$

in $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$, where $f \in \mathbf{Z}[X]$ is a totally reducible polynomial of degree 3 without repeated roots. These surfaces do not satisfy weak approximation.

The principle of Batyrev and Manin and its variants give a precise conjectural interpretation for the dominant term for the number of points of bounded height on an algebraic variety for which the opposite of the canonical line bundle is sufficiently positive. As was clearly shown by the counter-example of Batyrev and Tschinkel, the implementation of this principle requires the exclusion of accumulating domains which, up to now, are found using an induction procedure on the dimension of the variety. However this method does not yield a direct caracterisation of the points to be excluded. The aim of this paper is to propose a measure of freedom for rational points so that the points with sufficiently positive freedon are randomly distributed on the variety according to a probability measure on the adelic space introduced by the author in a previous paper. From that point of view the rational points which are sufficiently free ought be the ones which respect the principle of Batyrev and Manin.

The distribution of rational points of bounded height on algebraic varieties is far from uniform. Indeed the points tend to accumulate on thin subsets which are images of non-trivial finite morphisms. The problem is to find a way to characterise the points in these thin subsets. The slopes introduced by Jean-Benoît Bost are a useful tool for this problem. These notes will present several cases in which this approach is fruitful. We shall also describe the notion of locally accumulating subvarieties which arises when one considers rational points of bounded height near a fixed rational point.

The aim of this paper is to construct unirational function fields K over an algebraically closed field of characteristic 0 such that the unramified cohomology group $H^i_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes i})$ is not trivial for $i = 2$, 3 or 4 and p a prime number. This implies that the field K is not stably rational. For this purpose, we give a sufficient condition for an element to be unramified in $H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$. This condition relies on computations in the exterior algebra of a vector space of finite dimension over the finite field $\mathbf{F}_p$.

Let $Y_1, \dots, Y_n$ be n Severi-Brauer varieties over a field k. Let $k(Y_1 \times \cdots \times Y_n)$ be the function field of their product. Using a recent result of Kahn we show that the quotient of the kernel of the restriction map

$$H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y_1 \times \cdots \times Y_n), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

by the subgroup generated by the cup-products with the classes of $Y_1, \dots, Y_n$ in $\mathrm{Br}\, k$ is isomorphic to $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_n)_{\mathrm{tors}}$. We first apply this result to the product of two conics, using the fact that in this case $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times Y_2)_{\mathrm{tors}}$ is trivial. Then we construct examples with three conics where this quotient is not trivial. We also show how, in the case of one conic, the restriction map fits into a longer exact sequence.

Let V be a generalized flag variety over a field k. Then there exist finite field extensions k_i of k for $1 \leqslant i \leqslant m$, elements α_i of the Brauer group of

k_i and a natural exact sequence

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \operatorname{Ker}\Big(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0$$

where the groups $H^j(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ are the Galois cohomology groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ twisted twice and $\mathrm{CH}^2(V)$ the Chow group of cycles of codimension two modulo rational equivalence.

The central result of this paper is the following generalization of a result of the author on products of Severi-Brauer varieties. Let G be a semi-simple linear algebraic group over a field k. Let V be a generalized flag variety under G. Then there exist finite extensions k_i of k for $1 \leqslant i \leqslant m$, elements α_i in $\mathrm{Br}\, k_i$ and a natural exact sequence

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \operatorname{Ker}\Big(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

After giving a more explicit expression of the second morphism in a particular case, we apply this result to get classes in $H^3(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, which are k-negligible for any field k of characteristic different from 2 which contains a fourth root of unity, for a group Q which is a central extension of an $\mathbf{F}_2$ vector space by another.

Lichtenbaum's complex enables one to relate Galois cohomology to $\mathscr{K}$-cohomology groups. In this paper, we consider the first terms of the Hochschild-Serre spectral sequence for the cohomology of these complexes, which was developed by Kahn, in the case of quotients of "big" open sets in cellular varieties. In the particular case of a faithful representation W of a finite group G over an algebraically closed field k, this yields that the group of negligible classes in the cohomology group $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ is canonically isomorphic to the second equivariant Chow group of a point. It also implies that the unramified classes in the cohomology group $H^3(k(W)^G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$ come from the cohomology of G, which had been proved by Saltman when k is the field of complex numbers.

Using the motivic complexes of Voevodsky, we then prove similar results in degrees four and five.

If a system of polynomial equations with integral coefficients has a solution in $\mathbf{Q}^n$, then it has one over any p-adic or real completion of $\mathbf{Q}$. The converse was proven by Hasse for quadrics but does not hold in general. Most counter-examples could be explained using Brauer-Manin obstruction. Thus it is natural to ask whether this obstruction is the only one for various classes of varieties. The aim of this talk is to present a short survey of the methods introduced to explore such questions.

We factor the virtual Poincaré polynomial of every homogeneous space G/H, where G is a complex linear algebraic group and H is an algebraic subgroup, as $t^{2u}(t^2-1)^r Q_{G/H}(t^2)$ for a polynomial $Q_{G/H}$ with non-negative integer coefficients. Moreover, we show that $Q_{G/H}(t^2)$ divides the virtual Poincaré polynomial of every regular embedding of G/H, if G and H are connected.

Let X be an algebraic variety over a finite field $\mathbf{F}_q$, homogeneous under a linear algebraic group. We show that there exists an integer N such that for any positive integer n in a fixed residue class mod N, the number of rational points of X over $\mathbf{F}_{q^n}$ is a polynomial function of q^n with integer coefficients. Moreover, the shifted polynomials, where q^n is formally replaced with $q^n + 1$, have non-negative coefficients.

C. Voisin has invented a new method to prove that members of families of varieties are not stably rational, that is their product with an affine space is not rationnal. This method is based upon the decomposition of

the diagonal in the Chow group and the specialisation properties of this decomposition. Among the new families concerned by this method are the double covers of the projective space of dimension three or four ramified along a very general quartic hypersurface and quartic threefolds. These methods also allow to construct a family of smooth varieties of dimension four for which the locus of rationality is neither open nor closed.

Nous disons qu'un groupe algébrique lisse G sur un corps k est très spécial si pour toute extension de corps K/k, toute K-variété homogène sous G_K a un point K-rationnel. On sait que tout groupe linéaire résoluble scindé est très spécial. Dans cette note, nous obtenons la réciproque et nous discutons ses relations avec la classification birationnelle des actions de groupes algébriques.

This text, which was written for my "habilitation à diriger des recherches", is a survey of my results and projects in 1997.

PARTIE A

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR UNE SURFACE DE DEL PEZZO

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. L'objet de ce texte est de donner une évaluation du nombre de points de V qui ne sont pas situés sur les diviseurs exceptionnels et dont la hauteur est bornée par un nombre réel B. Comme le laissait prévoir un résultat obtenu par Manin, on obtient que ce nombre est équivalent à $CB\ln^3 B$ où C est une constante. Celle-ci peut s'exprimer en termes des densités locales de V, de la fonction L du groupe de Picard de V et du volume d'un domaine fondamental. Les méthodes utilisées donnent également des indications pour obtenir un résultat analogue sur un corps de nombres quelconque.

Abstract. — Let V be the Del Pezzo surface obtained by blowing up three points in general position on $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. The aim of this text is to estimate the number of points on V of bounded height which do not lie on exceptional divisors. Manin had proven that this number should be equivalent to $CB\ln^3 B$ for a constant C. Here we give an expression for C in terms of local densities of V, of the L-function of the Picard group of V and the volume of some fundamental domain. Parts of the proof generalize to an arbitrary number field.

Table des matières

1. Une conjecture de Manin et le théorème de Schanuel

Notation . — Pour tout corps F, on note $\overline{F}$ une clôture algébrique de F.

Pour tout corps de nombres k, $\mathscr{O}_k$ désigne son anneau des entiers et U_k le groupe des unités de k. On notera M_k l'ensemble des places de k, $M_{f,k} \subset M_k$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathscr{O}_k$ et $M_{\infty,k}$ l'ensemble des places à l'infini de k. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_k$, on note $k_\mathfrak{p}$ le corps local correspondant et $|\,.\,|_\mathfrak{p}$ la norme associée à $\mathfrak{p}$ définie par (cf. [**Se**], page 9) :

$$\forall x \in k \; |\, x\,|_\mathfrak{p} = |\, N_{k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p}(x)\,|_p$$

où $p \in M_\mathbf{Q}$ est l'unique place telle que $\mathfrak{p} \mid p$ et $|\,.\,|_p$ la norme usuelle. En particulier cette norme n'est pas invariante par extension de corps. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, on désigne par $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel. Pour tout $v \in M_{\infty,k}$, on note $N_v = [k_v : \mathbf{R}]$

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \#\{\mathfrak{p} \in M_{\infty,k} \mid N_v = 1\} \\ r_{2,k} &= \#\{\mathfrak{p} \in M_{\infty,k} \mid N_v = 2\} \\ r_k &= r_{1,k} + r_{2,k} - 1 \\ N_k &= r_{1,k} + 2r_{2,k}. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in M_{\infty,k}$ tel que $k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, on fixe un tel isomorphisme.

L'entier w_k désigne le nombre de racines de l'unité dans k, d_k la valeur absolue du discriminant de k et R_k le régulateur de k. On note $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$ le monoïde des idéaux non nuls de $\mathscr{O}_k$, $\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)$ le sous-monoïde des idéaux principaux non nuls et $h_k = \#\,\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)$ le nombre de classes d'idéaux. Lorsque $k = \mathbf{Q}$, il nous arrivera d'identifier $\mathscr{I}(\mathscr{O}_\mathbf{Q})$ à $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$. Si S est un sous-ensemble fini de M_k, on note $\mathscr{O}_S$, l'anneau des S-entiers.

Si V est une surface de Del Pezzo définie sur k et scindée par une extension $\mathbf{K}$ de k, si S est une partie finie de M_k contenant les places de mauvaises réductions, et en particulier les places ramifiées pour l' extension $\mathbf{K}/k$ ou qui en divisent le degré $[\mathbf{K} : k]$, alors V se relève en un schéma projectif et lisse $\mathscr{V}$ au-dessus de $\mathscr{O}_S$. Pour toute algèbre A sur $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{V}_A = \mathscr{V} \underset{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S}{\times} \operatorname{Spec} A$. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S$, je note $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ le morphisme de Frobenius défini sur $\operatorname{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}}$. Le terme local de la

fonction L associée à $\operatorname{Pic} V = \operatorname{NS} V$ est alors défini par :

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} V) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \mid \operatorname{Pic} \mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L_S globale est donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \operatorname{Pic} V) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_k - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} V)$$

qui converge absolument pour $s > 1$. Par ailleurs la densité locale en $\mathfrak{p} \in M_{f,k} - S$ est définie comme :

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\# V(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{N(\mathfrak{p})^{\dim(V)}}.$$

Le plus souvent nous omettrons k dans ces notations quand le corps de nombres est clairement indiqué par le contexte.

Soient k un corps de nombres, V une surface de Del Pezzo sur k et ω_V le faisceau canonique. On choisit K un diviseur canonique sur V et $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système de coordonnées pour $\mid -K \mid$. Comme V est de Del Pezzo, on a un plongement :

$$\Phi : V \to \mathbf{P}_k(\Gamma(V, \omega_V^{-1})).$$

Définition 1.1. — On définit alors la *hauteur* de $P \in V$ par

$$H_{-K}(P) = \prod_{v \in M_k} \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} \mid y_i \mid_v$$

où $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$.

Par la formule du produit, cette hauteur est indépendante du choix des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$. Elle dépend par contre du corps de base k et du système de coordonnées $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Soient $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ les diviseurs exceptionnels de V et $U = V - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} L_i$. On suppose que U est défini sur k. On note alors

$$N_U(B) = \# \{P \in U(k) \mid H_{-K}(P) \leqslant B\}$$

qui est un nombre fini. Manin énonce alors la conjecture suivante (cf. en particulier [**FMT**]) :

Conjecture 1. — *On a l'équivalence suivante,*

$$N_U(B) \sim C B \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$.

Le but de ce texte est de vérifier cette conjecture en donnant une valeur explicite de la constante C dans des cas simples. Il faut noter que cette valeur C dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Le cas le plus simple est celui de $\mathbf{P}^2_k$. Dans ce cas, on a $\omega_V = \mathcal{O}(-3)$ et $U = V = \mathbf{P}^2_k$. Le résultat est dû à Schanuel et s'écrit, en remarquant que la hauteur utilisée ici est le cube de celle utilisée dans [**Sc**] :

Théorème 2 **(Schanuel** [**Sc**]**).** — *Pour le plan projectif, on a*

$$N_U(B) \sim CB \text{ quand } B \to +\infty$$

où C est la constante donnée par

$$C = \frac{h}{\zeta_k(3)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^3 3^{r_1+r_2-1} \frac{R}{w}$$

Grâce à la formule de Dirichlet, on peut réécrire C sous la forme :

$$C = \left(\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_k(s) \right) \frac{1}{\zeta_k(3)} \frac{2^{2r_1}(2\pi)^{2r_2} 3^{r_1+r_2-1}}{d}.$$

Mais, par définition de la fonction ζ_k, on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k(3)} &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3}\right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la métrique à l'infini correspondant à notre choix de la hauteur est donnée de la manière suivante : pour tout $v \in M_\infty$, tout $f \in \Gamma(\mathbf{P}^2_{k_v}, \mathcal{O}(3))$ correspondant à un polynôme F homogène de degré trois et tout $P = (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{P}^2_{k_v}$,

$$|f(P)|_v = \inf_{1\leqslant i\leqslant 3} \left| \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{x_i^3} \right|_v$$

En conséquence, le volume correspondant de $\mathbf{P}^2_{k_v}$ est, dans le cas où $k_v = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v}) &= \int_{\mathbf{R}^2} \inf(1, \frac{1}{|x_1|_v^3}, \frac{1}{|x_2|_v^3}) dx_1\, dx_2 \\
&= 4\left(1 + 2\int_1^{+\infty} dx_1 \int_0^{x_1} \frac{1}{x_1^3} dx_2\right) \\
&= 4\left(1 + 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x_1^2}\, dx_1\right) \\
&= 2^2 \times 3
\end{aligned}$$

et, dans le cas où $k_v = \mathbf{C}$, en remarquant que, avec nos notations, $|\,.\,|_v = |\,.\,|^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v}) &= \int_{\substack{0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi \text{ et } 0\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r_1 \text{ et } 0\leqslant r_2}} \inf\left(1, \frac{1}{r_1^6}, \frac{1}{r_2^6}\right) r_1 r_2\, dr_1\, dr_2\, d\theta_1\, d\theta_2 \\
&= (2\pi)^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 r_1 r_2\, dr_1\, dr_2 + 2\int_1^{+\infty} dr_1 \int_0^{r_1} \frac{r_1 r_2}{r_1^6} dr_2\right) \\
&= (2\pi)^2 \left(\frac{1}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{r_1^3} dr_1\right) \\
&= 3\pi^2.
\end{aligned}$$

De plus on a la relation :

$$\frac{\sqrt{d}}{2^{r_2}} = \mathrm{Vol}(\prod_{v\in M_\infty} k_v/\mathscr{O}_k)$$

où $\mathscr{O}_k$ est considéré de manière canonique comme un réseau de $\prod_{v\in M_\infty} k_v$ et où l'on prend la mesure quotient de la mesure de Lebesgues. En définitive la constante C s'écrit :

$$C = \frac{1}{3} \frac{\prod_{v\in M_\infty} \mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v})}{\mathrm{Vol}\left(\left(\prod_{v\in M_\infty} k_v\right) \Big/ \mathscr{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s\to 1} (s-1)^t L(s, \mathrm{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p}\in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic} V)}.$$

L'utilisation de termes correctifs sous la forme de facteurs locaux de la fonction L pour faire converger le produit des densités locales est analogue à celle faite par Bloch dans [**Bl**].

Mon but est de démontrer une formule similaire dans le cas où V est obtenue en éclatant trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Dans ce cas particulier, Manin avait obtenu le résultat suivant :

***Théorème 3* (Manin [MT]). —** *Si $k = \mathbf{Q}$ et si U désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels sur V, alors*

$$N_U(B) = \exp(O(1))B\log^3 B \text{ quand } B \to +\infty.$$

2. Enoncé du résultat

Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0) \text{ et } P_3 = (0:0:1)$$

sur $\mathbf{P}^2_k$. On note $\pi : V \to \mathbf{P}^2_k$ l'application canonique. Soient L_1, L_2 et L_3 les diviseurs de V au-dessus de P_1,P_2 et P_3 respectivement. Soient $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ et $L_{3,1}$ les diviseurs au-dessus des droites (P_1P_2), (P_2P_3) et (P_3P_1) respectivement. L_1, L_2, L_3, $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ et $L_{3,1}$ sont les seuls diviseurs exceptionnels de V. On pose donc

$$U = V - L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3 \bigcup L_{1,2} \bigcup L_{2,3} \bigcup L_{3,1}.$$

Par ailleurs un diviseur canonique K peut être défini par

$$-K = 3\Lambda - L_1 - L_2 - L_3$$

où Λ est l'image réciproque par π d'un hyperplan ne contenant aucun des points P_1, P_2, P_3. Notons (X_1, X_2, X_3) le système de coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^2_k$. Les sections de l'opposé du faisceau canonique sont données par les polynômes homogènes de degré trois sans composante de la forme aX_i^3 pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Autrement dit, on peut choisir comme base de $\Gamma(V, \omega_V)$ les sections associées aux monômes :

$$\begin{array}{lllllllll} Y_1 & = & X_1^2X_2, & Y_2 & = & X_1X_2^2, & Y_3 & = & X_2^2X_3, \\ Y_4 & = & X_2X_3^2, & Y_5 & = & X_3^2X_1, & Y_6 & = & X_3X_1^2, \\ Y_7 & = & X_1X_2X_3. & & & & & & \end{array}$$

Je pose donc

$$\begin{aligned} H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 7} | Y_i(x_1, x_2, x_3) |_{\mathfrak{p}} \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} | Y_i(x_1, x_2, x_3) |_{\mathfrak{p}} . \end{aligned}$$

et comme ci-dessus on note :

$$N_U(B) = \#\{P \in U(k)/H_{-K}(P) \leqslant B\}.$$

Théorème 4. — *Si $k = \mathbf{Q}$ alors*

$$N_U(B) \sim C' B \log^3 B \text{ quand } B \to +\infty$$

où

$$C' = \frac{1}{3} \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)}$$

Je donne en outre au cours de la démonstration des éléments suggérant la validité de la formule suivante sur un corps de nombres quelconque :

$$C' = \frac{1}{3 \times 4!} \frac{\prod_{v \in M_\infty} \operatorname{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}_v})}{\operatorname{Vol}\left(\left(\prod_{v \in M_\infty} \mathbf{k}_v\right) \Big/ \mathscr{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s \to 1} (s-1)^4 L(s, \operatorname{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)}.$$

Cette formule coïncide avec celle du théorème dans le cas $k = \mathbf{Q}$.

3. Domaine fondamental pour l'action des unités

La méthode utilisée ici s'inspire directement de celle utilisée dans [**Sc**].

Jusqu'à la section 8, on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. On veut donc déterminer

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des triplets $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathscr{O}_k^3/U_k$ possédant un représentant (x_1, x_2, x_3) qui vérifie :

(1) $$(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

(2) $$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) \leqslant B$$

(3) $$x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3$$

Soit $\log_H$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \log_H : \left(\prod_{v \in M_\infty} k_v^*\right)^3 & \to & \mathbf{R}^{r_1 + r_2} \\ (u_{i,v})_{\substack{v \in M_\infty \\ 1 \leqslant i \leqslant 3}} & \mapsto & \left(\log\left(\sup_{1 \leqslant j \leqslant 6} \left(Y_j(|u_{1,v}|^{N_v}, |u_{2,v}|^{N_v}, |u_{3,v}|^{N_v})\right)\right)\right)_{v \in M_\infty} \end{array}.$$

Par le théorème des unités, la composée

$$U_k \to \prod_{v\in M_\infty} k_v^* \xrightarrow{\text{Diag}} \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3 \xrightarrow{\log_H} \mathbf{R}^{r_1+r_2}$$

est un homomorphisme dont le noyau est le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et l'image est un réseau L de rang r_1+r_2-1 dans l'hyperplan P défini par $\sum_{v\in M_\infty} y_v = 0$. Ce réseau est l'image du réseau classique par 3Id et donc $\operatorname{Det} L = 3^r R$. En outre, l'application $\log_H$ est compatible avec l'action de U_k. On projette alors $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ sur P selon le vecteur $(1_v)_{v\in M_\infty}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pr} : \mathbf{R}^{r_1+r_2} & \to & P \\ (y_v)_{v\in M_\infty} & \mapsto & \left(y_v - \dfrac{1}{r_1+r_2}\displaystyle\sum_{v'\in M_\infty} y_{v'}\right)_{v\in M_\infty} \end{array}$$

On choisit $u_1,\dots,u_r$ une base de l'image de U_k. On note τ_j la base duale. On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leqslant \tau_j(\mathrm{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta = \log_H^{-1}(F) \subset \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3$$

***Lemme 1* (Schanuel [Sc]).** — *L'ensemble Δ vérifie :*

(i) *Δ est stable sous $\mu_\infty(k)$,*

(ii) *$\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta \bigcap \Delta = \varnothing$,*

(iii) $\displaystyle\bigcup_{u\in U_k} u\Delta = \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3$

On en déduit comme dans [**Sc**] le lemme suivant :

Lemme 2. — *En notant $j : k^* \to \prod_{v\in M_\infty} k_v^*$ l'injection canonique, on a*

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des $(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ vérifiant les conditions (1), (2) *et* (3) *ci-dessus, ainsi que*

$$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \tag{4}$$

4. Paramétrisation des points de l'ouvert U

Notons, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ et tout $\mathfrak{p} \in M_k$
$$H_\mathfrak{p}(x_1, x_2, x_3) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} |\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_\mathfrak{p}$$
et
$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) = \prod_{v \in M_\infty} H_v(x_1, x_2, x_3).$$
On a alors
$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6))}.$$
Mais l'idéal $(Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6)$ peut également s'écrire
$$(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_4).$$
En résumé, l'ensemble $\mathcal{N}'_\mathfrak{a}$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ qui vérifient les conditions (1),(3) et (4) ci-dessus ainsi que

$$(2') \qquad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN((x_1, x_2))N((x_2, x_3))N((x_3, x_1))$$

Ceci nous amène à introduire la paramétrisation suivante : soit
$$\mathcal{H}_\mathfrak{a} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3\}$$
Soit $\mathcal{H}'_\mathfrak{a}$ l'ensemble des sextuplets $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ de $(\mathcal{I}(\mathcal{O}_k))^6$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ on ait :
$$(C_\mathfrak{p}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_j)) & = & 0 \text{ si } i \neq j \\ \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_j)) & = & 0 \text{ si } i \neq j \\ \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_i)) & = & 0 \end{array} \right.$$
et tels que les idéaux $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_l \mathfrak{a}$ soient principaux pour tout triplet $\{i, j, l\}$ tel que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Lemme 3. — *Soit $\rho : \mathcal{H}_\mathfrak{a} \to \mathcal{H}'_\mathfrak{a}$ l'application définie de la manière suivante : pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}_\mathfrak{a}$*
$$\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$$
avec
$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{a}_i & = & (x_j, x_l)\mathfrak{a}^{-1} & si\ \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \\ \mathfrak{b}_i & = & (x_i).(\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{a}_l)^{-1}\mathfrak{a}^{-1} & si\ \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}. \end{array}$$
L'application ρ est une bijection.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que ρ est bien définie. Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ et

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) = \rho(x_1, x_2, x_3).$$

Soient $\mathfrak{a}'_i = (x_j, x_l)$ si $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. On a les relations :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a}'_i + \mathfrak{a}'_j & = & \mathfrak{a} \text{ si } i \neq j \\ \mathfrak{a}_i & = & \mathfrak{a}'_i \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_i & = & (x_i)(\mathfrak{a}'_j \bigcap \mathfrak{a}'_l)^{-1} \text{ si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \end{array}$$

Des deux premières formules, on déduit que $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = \mathscr{O}_k$ si $i \neq j$ et donc, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, $\inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_j)) = 0$ si $i \neq j$. Soient $\mathfrak{p} \in M_f$ et i, j, l tels que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Par définition, on a $\mathfrak{a}'_l = (x_i, x_j)$ et donc $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) = \inf(v_\mathfrak{p}(x_i), v_p(x_j))$. Supposons $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_j$ alors $\mathfrak{p} \mid x_i \mathfrak{a}'^{-1}_l$ et $\mathfrak{p} \mid x_j \mathfrak{a}'^{-1}_l$ donc $v_\mathfrak{p}(x_i) \geqslant v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) + 1$ et $v_\mathfrak{p}(x_j) \geqslant v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) + 1$ ce qui est contradictoire. Supposons maintenant que $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_i$. Alors, par définition de $\mathfrak{a}_i$, on a $\mathfrak{p} \mid x_i \mathfrak{a}^{-1}$. Par définition de $\mathfrak{b}_i$, on a $\mathfrak{p} \mid x_j \mathfrak{a}^{-1}$ et $\mathfrak{p} \mid x_l \mathfrak{a}^{-1}$. Mais cela contredit $\mathfrak{a} = (x_1, x_2, x_3)$. Donc $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ vérifie la condition $(C_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$. Par ailleurs, pour tout i, j, l tel que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$, la relation

$$(\mathfrak{a}'_i \bigcap \mathfrak{a}'_j)(\mathfrak{a}'_i + \mathfrak{a}'_j) = \mathfrak{a}'_i \mathfrak{a}'_j$$

entraîne $\mathfrak{a}'_i \cap \mathfrak{a}'_j = \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{a}$ et donc $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_l \mathfrak{a} = (x_l)$.

Montrons que l'application τ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{H}'_\mathfrak{a} & \rightarrow & \mathscr{H}_\mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) & \mapsto & (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3) \end{array}$$

est la réciproque de ρ.

Cette application τ est également bien définie. En effet, si l'élément $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ de $\mathscr{H}'_\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{p} \in M_f$ vérifient

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3$$

alors

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2 \text{ et } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3$$

ce qui contredit la condition $(C_\mathfrak{p})$. Donc

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3.$$

De plus le calcul ci-dessus montre que $\tau \circ \rho = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}}$ On vérifie comme ci-dessus que si $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) \in \mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ et si $\mathfrak{p} \in M_f$ alors $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2) = 0$. On en déduit que

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_3$$

ainsi que les relations analogues obtenues par permutation de $\{1, 2, 3\}$. Par conséquent, on obtient que $\rho \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}}$ □

En conclusion, on obtient que

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathscr{N}''_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathscr{N}''_{\mathfrak{a}}(B)$ est l'ensemble des $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$ vérifiant la condition $(C_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ ainsi que la condition

$$(*) \qquad \exists (x_1, x_2, x_3), \begin{cases} & (x_i) = \mathfrak{a}_j\mathfrak{a}_l\mathfrak{b}_i\mathfrak{a} \text{ si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \\ (2') & H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^3) \\ (4) & (j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \end{cases}$$

5. Estimations pour le corps des rationnels

Pour déterminer ce dernier cardinal, nous allons tout d'abord chercher pour tout $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3)$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3$ une estimation du cardinal $m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}(B)$ de l'ensemble des (x_1, x_2, x_3) appartenant à $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ tels que :

$$(2'') \qquad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B$$

$$(3) \qquad x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3$$

$$(4) \qquad (j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta$$

(5)

Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \left(\prod_{v \in M_\infty} K_v\right) \tilde{\to} \mathbf{R}^{3N}$, on pose :

$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) = \prod_{v \in M_\infty} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} (|\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_v)$$

où $|.|_v = |.|^{N_v}$ et

$$\mathscr{D}_B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Delta \text{ et } H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B\}$$

Lemme 4. — *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a pour tout $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{N}^{+3}$ les inégalités :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)}{c_1c_2c_3} - C_1\left(\frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_2c_3} + \frac{1}{c_3c_1}\right)B^{2/3} \leqslant m_{c_1,c_2,c_3}(B) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)}{c_1c_2c_3}$$

où C_1 est une constante indépendante de B, c_1, c_2 et c_3.

Remarque 5.1. — la difficulté pour généraliser le résultat principal aux autres corps de nombres réside dans la démonstration de ce lemme ainsi que dans celle du lemme suivant. Il faudrait en particulier pouvoir majorer de manière suffisamment fine

$$\left| m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}(B) - \frac{\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B}{\mathrm{Det}(\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3)} \right|$$

où $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ est considéré comme un réseau de $\prod_{v \in M_\infty} k_v$ et donc

$$\mathrm{Det}(\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3) = \frac{N(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)\sqrt{d}^3}{2^{3r_2}}$$

Démonstration. — Fixons $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{N}^{+3}$. Majorons tout d'abord $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$:

$$\begin{aligned} m_{c_1,c_2,c_3}(B) &= 8\#\left\{(x_1,x_2,x_3) \in (c_1)\times(c_2)\times(c_2) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x_i > 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{D}_B \end{array} \right.\right\} \\ &= 8\#\{(n_1,n_2,n_3) \in \mathbf{N}^{+3} \mid H_\infty(c_1n_1, c_2n_2, c_3n_3) \leqslant B\} \\ &= \frac{8}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^{+3} \,\middle|\, \left(c_iE\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant 3} \in \mathscr{D}_B\right\} \end{aligned}$$

Or $H_\infty(x_1, x_2, x_3)$ est croissante en les variable x_1, x_2 et x_3. Donc

$$\left(c_iE\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant 3} \in \mathscr{D}_B \Rightarrow (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3} \in \mathscr{D}_B$$

Par conséquent on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} m_{c_1,c_2,c_3}(B) &\leqslant \frac{8}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^{+3} \mid (x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{D}_B\} \\ &\leqslant \frac{1}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B). \end{aligned}$$

Minorons maintenant $\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B) &= 8\,\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+3}\mid(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{D}_B\}\\
&\leqslant 8\,\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+3}\;\middle|\;\begin{cases}\left(c_iE\left(\frac{x_i}{c_i}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{D}_B\\ E\left(\frac{x_i}{c_i}\right)\geqslant 1\end{cases}\right\}\\
&\qquad +8\,\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+3}\;\middle|\;\begin{cases}\exists i\in\{1,2,3\}/0\leqslant x_i\leqslant c_i\\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{D}_B\end{cases}\right\}\\
&\leqslant c_1c_2c_3m_{c_1,c_2,c_3}(B)\\
&\qquad +8(c_1+c_2+c_3)\mathrm{Vol}\{(x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+2}\mid\sup(x_2^2x_3,x_3^2x_2)\leqslant B\}.
\end{aligned}$$

Un calcul donne alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2}\mid\sup(x_1^2x_2,x_2^2x_1)\leqslant B\}\\
&\qquad\qquad = 2B^{2/3}\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2}\mid x_1^2x_2\leqslant 1 \text{ et } x_2<x_1\}\\
&\qquad\qquad = 3B^{2/3}.\quad\square
\end{aligned}$$

Lemme 5. — *Si* $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{N}^{+3}$ *vérifie* $c_1\geqslant B^{1/3}$, *alors*

$$m_{c_1,c_2,c_3}(B)\leqslant C_2\frac{B^2}{c_1^4c_2c_3}$$

où C_2 *est indépendante de* c_1, c_2, c_3 *et* B.

Démonstration. — Le cardinal $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$ est nul si $c_1>\sqrt{B}$. Dans le cas contraire, on a :

$$\begin{aligned}
&m_{c_1,c_2,c_3}(B)\\
&= 8\#\left\{(x_1,x_2,x_3)\in(c_1)\times(c_2)\times(c_3)\;\middle|\;\begin{cases}x_i>0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B\end{cases}\right\}\\
&\leqslant \frac{16}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\;\middle|\;\begin{cases}x_1\geqslant c_1\\ x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ x_1^2x_2\leqslant B\end{cases}\right\}\\
&\quad +\frac{16}{c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+2}\;\middle|\;\begin{cases}x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ c_1^2x_2\leqslant B\end{cases}\right\}
\end{aligned}$$

Et le calcul des volumes donne :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x_1\geqslant c_1\\ x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ x_1^2x_2\leqslant B\end{array}\right.\right\}\\
&=\int_{c_1}^{+\infty}dx_1\int_0^{\frac{B}{x_1^2}}x_2\,dx_2\\
&=\frac{1}{2}\int_{c_1}^{+\infty}\frac{B^2}{x_1^4}dx_1\\
&=\frac{1}{6}\frac{B^2}{c_1^3}.
\end{aligned}$$

De même on calcule que :

$$\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2}\mid x_2\geqslant x_3, c_1^2x_2\leqslant B\}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{c_1^4}.\quad\square$$

6. Volume du domaine fondamental

Nous allons déterminer, dans le cas général le volume de $\mathscr{D}_B$. Or $(x_1,x_2,x_3)\in\Delta$, $t\in\mathbf{R}^*$ implique $(tx_1,tx_2,tx_3)\in\Delta$, puisque la projection pr se fait suivant $(1_v)_{v\in M_\infty}$ ([**Sc**], page 438) et

$$H_\infty(tx_1,tx_2,tx_3)=t^{3N}H_\infty(x_1,x_2,x_3).$$

Par conséquent, $\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)=B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$

Lemme 6. — *Avec les notations qui précèdent,*

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)=\frac{1}{3}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}R$$

Démonstration. — Cette démonstration suit le calcul fait dans [**Sc**]. En utilisant des coordonnées polaires, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)=2^{3r_1}\int_{\mathscr{V}_1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}}\rho_{i,v}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ v\in M_\infty}}d\rho_{i,v}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}}d\theta_{i,v}$$

où $\mathscr{V}_1$ est l'ensemble des

$$((\rho_{i,v})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ v\in M\infty}},(\theta_{i,v})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}})\in\mathbf{R}^{r_1+r_2}\times\mathbf{R}^{r_2}$$

vérifiant les conditions :

$$\rho_{i,v} \geqslant 0 \tag{6}$$

$$0 \leqslant \theta_{i,v} \leqslant 2\pi \tag{7}$$

$$\prod_{v \in M_\infty} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} (Y_i(\rho_{1,v}^{N_v}, \rho_{2,v}^{N_v}, \rho_{3,v}^{N_v})) \leqslant 1 \tag{8}$$

$$\left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} (\log Y_i((\rho_{j,v})_{1 \leqslant j \leqslant 3})) \right)_{v \in M_\infty} \in F \tag{9}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) = 2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2} \int_{\mathscr{V}_2} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \{v | N_v = 2\}}} \rho_{i,v} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} d\rho_{i,v}$$

où $\mathscr{V}_2$ désigne l'ensemble des

$$(\rho_{i,v})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} \in \mathbf{R}^{r_1 + r_2}$$

tels que les conditions (6),(7) et (8) ci-dessus soient vérifiées. On découpe alors le domaine d'intégration suivant l'ordre des $\rho_{i,v}$. Par symétrie, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) = 6^{r_1 + r_2} 2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2} \int_{\mathscr{V}_3} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \{v | N_v = 2\}}} \rho_{i,v} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} d\rho_{i,v}$$

où l'on note $\mathscr{V}_3$ l'ensemble des

$$(\rho_{i,v})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} \in \mathbf{R}^{r_1 + r_2}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

$$\forall v \in M_\infty, \rho_{1,v} \geqslant \rho_{2,v} \geqslant \rho_{3,v} \geqslant 0 \tag{6'}$$

$$\prod_{v \in M_\infty} \rho_{1,v}^{2N_v} \rho_{2,v}^{N_v} \leqslant 1 \tag{7'}$$

$$(\log \rho_{1,v}^{2N_v} \rho_{2,v}^{N_v})_{v \in M_\infty} \in F \tag{8'}$$

□

En faisant le changement de variables $t_{i,\nu} = \rho_{i,\nu}^{N_\nu}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 6^{r_1+r_2}2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2}\frac{1}{2^{3r_2}} \int_{\substack{t_{1,\nu}\geqslant t_{2,\nu}\geqslant t_{3,\nu}\geqslant 0\\ (\log t_{1,\nu}^2 t_{2,\nu})_{\nu\in M_\infty}\in F\\ \prod_{\nu\in M_\infty} t_{1,\nu}^2 t_{2,\nu}\leqslant 1}} \prod_{\substack{i\in\{1,2,3\}\\ \nu\in M_\infty}} dt_{i,\nu}\\
&= 6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2} \int_{\substack{t_{1,\nu}\geqslant t_{2,\nu}\geqslant 0\\ (\log t_{1,\nu}^2 t_{2,\nu})_{\nu\in M_\infty}\in F\\ \prod_{\nu\in M_\infty} t_{1,\nu}^2 t_{2,\nu}\leqslant 1}} \prod_{\nu\in M_\infty} t_{2,\nu} \prod_{\substack{i\in\{1,2\}\\ \nu\in M_\infty}} dt_{i,\nu}.
\end{aligned}$$

Nous faisons ensuite le changement de variable :

$$y_\nu = t_{2,\nu} \text{ et } x_\nu = t_{1,\nu}^2 t_{2,\nu}.$$

On a

$$dx_\nu\, dy_\nu = 2t_{1,\nu}t_{2,\nu}dt_{1,\nu}\, dt_{2,\nu} = 2\left(\frac{x_\nu}{y_\nu}\right)^{1/2} y_\nu dt_{1,\nu}\, dt_{2,\nu}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 3^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2} \int_{\substack{\left(\frac{x_\nu}{y_\nu}\right)^{1/2}\geqslant y_\nu\geqslant 0\\ (\log x_\nu)_{\nu\in M_\infty}\in F\\ \prod_{\nu\in M_\infty} x_\nu\leqslant 1}} \prod_{\nu\in M_\infty} \frac{y_\nu^{1/2}}{x_\nu^{1/2}}\, dx_\nu\, dy_\nu\\
&= 3^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{r_1+r_2} \int_{\substack{(\log x_\nu)_{\nu\in M_\infty}\in F\\ \prod_{\nu\in M_\infty} x_\nu\leqslant 1}} \prod_{\nu\in M_\infty} dx_\nu.
\end{aligned}$$

Enfin on fait le changement de variable

$$u = \prod_{\nu\in M_\infty} x_\nu \text{ et } v_j = \tau_j(pr((\log x_\nu)_{\nu\in M_\infty})) \text{ pour } 1\leqslant j\leqslant r.$$

Comme dans [**Sc**], page 444, on montre que le jacobien vaut $\det L$ où L est le réseau défini dans la partie 3 et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 2^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}3^{r_1+r_2-1}R\int_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v_j\leqslant 1}} du\prod_{j=1}^{r_1+r_2-1} dv_j\\ &= \frac{1}{3}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}R.\end{aligned}$$

7. Sommation sur les idéaux

Nous allons maintenant étudier le cardinal

$$P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0} = \#\mathscr{P}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$$

où $\mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$ désigne l'ensemble des sextuplets

$$(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$$

vérifiant la condition $(*)$ de la partie 4 ainsi que la condition :

$$\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{a}_i^0 \text{ et } \mathfrak{b}_i\subset\mathfrak{b}_i^0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{10}$$

Comme on le verra dans la partie suivante, le cardinal de $\mathscr{N}''_{\mathfrak{a}}(B)$ s'exprime en fonction de $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$. Jusqu'à la fin de cette partie, on omettra $\mathfrak{a}$ dans cette notation. Pour commencer, exprimons en général ce dernier nombre en termes des nombres $m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}$ définis au début de la partie 5.

Lemme 7. — *Soient* $(\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$. *Posons, pour tout i, j, l tels que* $\{i,j,l\}=\{1,2,3\}$,

$$\mathfrak{c}_i^0=\mathfrak{a}_j^0\mathfrak{a}_l^0\mathfrak{b}_i^0\mathfrak{a}$$

Alors on a l'égalité :

$$P_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)=\sum_{(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3} m_{\mathfrak{c}_1^0\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3,\mathfrak{c}_2^0\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{c}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2}(BN(\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3))$$

Démonstration. — Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, je note $\bigsqcup_{i\in I}A_i$ leur union disjointe. Soient $\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0$ des idéaux de $\mathscr{O}_k$ que l'on fixe jusqu'à la fin de la démonstration. Pour tout triplet $(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3$, je note

$\mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3}$ l'ensemble des

$$(x_1,x_2,x_3)\in \mathfrak{c}_1^0\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3\times \mathfrak{c}_2^0\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}'_1\times \mathfrak{c}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$$

vérifiant :

$$(2^{(3)})\qquad H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant BN(\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}^3)$$

$$(4)\qquad (j(x_1),j(x_2),j(x_3))\in\Delta$$

On définit alors des applications :

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3} & \to & \mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)\\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}'_1,\,\mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}'_2,\,\mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_3,\,\mathfrak{b}_1(x_1,x_2,x_3),\,\mathfrak{b}_2(x_1,x_2,x_3),\,\mathfrak{b}_3(x_1,x_2,x_3)).\end{array}$$

où pour tout i,j,l tel que $\{i,j,l\}=\{1,2,3\}$

$$\mathfrak{b}_i(x_1,x_2,x_3)=(x_i)(\mathfrak{a}_j^0\mathfrak{a}_l^0\mathfrak{a}'_j\mathfrak{a}'_l\mathfrak{a})^{-1}$$

L'application induite

$$\bigsqcup_{(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3}\mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3}\to\mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$$

est une bijection. □

Dans la suite on désignera par $(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}')$ un sextuplet $(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3,\mathfrak{b}'_1,\mathfrak{b}'_2,\mathfrak{b}'_3)$ Nous allons maintenant déduire du lemme précédent une estimation de $P_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$ dans le cas où $k=\mathbf{Q}$.

Lemme 8. — *Dans le cas où $k=\mathbf{Q}$, on pose $\mathfrak{a}=\mathbf{Z}$ et on obtient*

$$P_{a,b}(B)\sim C''\frac{B\log^3 B}{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}\quad\text{quand } B\to+\infty$$

où la constante C'' est donnée par la formule :

$$C''=\frac{1}{24}\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1\lim_{s\to1}(s-1)^3\zeta_{\mathbf{Q}}^3(s)=\frac{2}{3}.$$

De plus, on a la majoration :

$$P_{a,b}(B)\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1\frac{B(\log B+C_3)^3}{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}$$

où C_3 est une constante indépendante de a et de b.

Remarque 7.1. — Ce lemme repose sur les lemmes 4 et 5 et n'est donc valable que pour **Q**. Si les lemmes 4 et 5 se généralisaient au cas du corps de nombres quelconque, alors on obtiendrait un lemme analogue avec une constante C'' de la forme :

$$\begin{aligned} C'' &= \frac{1}{24}\frac{2^{3r_2}}{\sqrt{d}^3}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\lim_{s\to 1}(s-1)^3\zeta_k^3(s) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2}\frac{1}{d^{3/2}}R\lim_{s\to 1}(s-1)^3\zeta_k^3(s) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\frac{w}{h}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s) \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le lemme 4, on sait que :

$$m_{c_1,c_2,c_3}(B') = \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B'}{c_1c_2c_3} + R(c_1,c_2,c_3,B')$$

avec

$$-C_1\left(\frac{1}{c_1c_2}+\frac{1}{c_2c_3}+\frac{1}{c_3c_1}\right)B'^{2/3} \leqslant R(c_1,c_2,c_3,B') \leqslant 0.$$

On fixe $(a_1^0,a_2^0,a_3^0,b_1^0,b_3^0)$ dans $\mathbf{N}^{+6}$ et B dans $\mathbf{R}$. Posons pour tout i,j,l tels que $\{i,j,l\}=\{1,2,3\}$

$$c_i^0 = a_j^0a_l^0b_i^0$$

Soit $B_0 = Ba_1^0a_2^0a_3^0$ et $h_0 = \log B_0$. On note $\mathscr{P}_B$ l'ensemble des $(a_1,a_2,a_3)\in \mathbf{N}^{+3}/$ tels que

$$(**) \qquad \begin{cases} a_i \geqslant 1 \\ c_i^0a_ja_l \leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3} \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\} \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{N}^{+3}} m_{c_1^0a_2a_3,c_2^0a_3a_1,c_3^0a_1a_2}(h_0a_1a_2a_3) \\ &= A_1+A_2+A_3 \end{aligned}$$

où :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod_{i=1}^3 a_i^0 b_i^0} \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B} \frac{1}{a_1a_2a_3}\\
A_2 &= \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B} R(c_1^0a_2a_3, c_2^0a_3a_1, c_3^0a_1a_2, B_0a_1a_2a_3)\\
A_3 &= \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\notin\mathscr{P}_B} m_{c_1^0a_2a_3, c_2^0a_3a_1, c_3^0a_1a_2}(B_0a_1a_2a_3)
\end{aligned}
$$

- Commençons par évaluer A_1. Tout d'abord calculons

$$W(B) = \int_{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{R}^{+3}/(**)} \frac{1}{a_1a_2a_3}\, da_1\, da_2\, da_3$$

Posons $\lambda_i = 3\log c_i^0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et faisons le changement de variables $x_i = \log a_i$. On trouve :

$$W(B) = \mathrm{Vol}(\mathscr{W}_B)$$

où $\mathscr{W}_B$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$
\begin{aligned}
&x_i \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3\\
&2x_i + 2x_j - x_l \leqslant h_0 - \lambda_l \text{ si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$W(B) \sim h_0^3 \int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ 2x_i+2x_j-x_l\leqslant 1 \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\}}} dx_1\, dx_2\, dx_3 \text{ quand } B \to +\infty$$

Comme on a la relation

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27,$$

cette dernière intégrale s'écrit,

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ x_1+x_2+x_3\leqslant\frac{1}{2}}} dx_1\,dx_2\,dx_3+\frac{1}{27}\int_{\substack{u_1+u_2+u_3\geqslant\frac{3}{2}\\ u_i\leqslant 1 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3}} du_1\,du_2\,du_3\\
&=2\int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ x_1+x_2+x_3\leqslant\frac{1}{2}}} dx_1\,dx_2\,dx_3\\
&=2\int_{\substack{x_1\geqslant 0 \text{ et } x_2\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant\frac{1}{2}}} (\frac{1}{2}-x_1-x_2)\,dx_1\,dx_2\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x_1)^2\,dx_1\\
&=\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Par ailleurs on peut réécrire la somme intervenant dans A_1 sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\frac{1}{a_1a_2a_3}
&=\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\prod_{i=1}^{3}(\log(a_i+1)-\log a_i)\\
&\quad+\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\left(\prod_{i=1}^{3}(\log(a_i+1)-\log a_i)-\frac{1}{a_1a_2a_3}\right)
\end{aligned}$$

Notons $A_{1,1}$ la première somme et $A_{1,2}$ la seconde. On a la relation :

$$A_{1,1}=\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\right)$$

et, par conséquent :

$$|A_{1,1}-W(B)|<\mathrm{Vol}\left(\bigcup\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\right)$$

où la réunion est prise sur les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ tels que

$$\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\bigcap \mathscr{S}_B\neq\varnothing$$

$\mathscr{S}_B$ désignant la surface du polyèdre défini par

$$\begin{array}{c} x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ 2x_i+2x_j-x_l\leqslant h_0-\lambda_l \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\}\end{array}$$

Mais le diamètre de la boîte $\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]$ est bornée par $\sqrt{3}$. Donc

$$\begin{array}{rcl} |A_{1,1}-W(B)| & \leqslant & \mathrm{Vol}(\{x\mid d(x,\mathscr{S}_B\leqslant\sqrt{3})\})\\ & \leqslant & C_4 h_0^2 \text{ pour } B \text{ assez grand}\end{array}$$

On obtient donc

$$A_{1,1}\sim W(B)\sim\frac{1}{24}h_0^3$$

Majorons maintenant $A_{1,2}$. Pour tout $a\in\mathbf{N}^+$ on a les inégalités :

$$\frac{-1}{2a^2}\leqslant\log(a+1)-\log(a)-\frac{1}{a}\leqslant 0$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} |A_{1,2}| & \leqslant & \displaystyle\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in[1,B_0]^3}\left(\frac{1}{a_1^2a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2^2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3^2}\right)\\ & \leqslant & 3\displaystyle\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in[1,B_0]^3}\frac{1}{a_1^2a_2a_3}\\ & \leqslant & 3\dfrac{\pi^2}{6}\log^2(B_0+1)\end{array}$$

donc

$$A_1\sim\frac{1}{24}\log^3 B$$

- Majorons maintenant A_2. On a les inégalités :

$$|R(c_1^0a_2a_3,c_2^0a_3a_1,c_3^0a_1a_2,B_0a_1a_2a_3)|$$
$$\leqslant C_1\left(\frac{1}{c_1^0c_2^0}+\frac{1}{c_2^0c_3^0}+\frac{1}{c_3^0c_1^0}\right)(a_1^0a_2^0a_3^0)^{2/3}B^{2/3}\left(\frac{1}{a_1a_2a_3^2}+\frac{1}{a_2a_3a_1^2}+\frac{1}{a_3a_1a_2^2}\right)(a_1a_2a_3)^{2/3}.$$

On pose

$$C_5=C_1\left(\frac{1}{c_1^0c_2^0}+\frac{1}{c_2^0c_3^0}+\frac{1}{c_3^0c_1^0}\right)(a_1^0a_2^0a_3^0)^{2/3}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}|A_2| &\leqslant 3C_5B^{2/3}\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ &\leqslant 3C_5B^{2/3}\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}'_B}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\end{aligned}$$

où l'ensemble $\mathscr{P}'_B$ désigne l'ensemble des $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{N}^{+3})$ tels que

$$a_ia_j\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3} \text{ si } i\neq j.$$

On obtient donc la majoration :

$$|A_2|\leqslant 6C_5B^{2/3}(A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3})$$

où

$$\begin{aligned}A_{2,1} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\\ a_2a_3\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ A_{2,2} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant a_2\\ a_1a_2\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ A_{2,3} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_1\\ a_3a_1\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}.\end{aligned}$$

Majorons $A_{2,1}$:

$$A_{2,1}\leqslant\sum_{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/2}a_1^{1/2}a_2^{-1}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}}\sum_{a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/2}a_1^{1/2}a_2^{-1}}\frac{1}{a_3^{4/3}}$$

Mais la somme intérieure est majorée par :

$$\frac{1}{a_2^{4/3}}+\frac{3}{a_2^{1/3}}\leqslant\frac{4}{a_2^{1/3}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &\leqslant 4 \sum_{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/4}a_1^{1/4}} \frac{1}{a_1^{1/3}a_2^{2/3}}\\
&\leqslant 4 \sum_{1\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/4}a_1^{1/4}} \frac{4{B_0}^{1/12}a_1^{1/12}}{a_1^{1/3}}\\
&\leqslant 16{B_0}^{1/12} \sum_{1\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/3}} \frac{1}{a_1^{1/4}}\\
&\leqslant 3.16{B_0}^{1/12}{B_0}^{1/4}\\
&\leqslant 3.16{B_0}^{1/3}
\end{aligned}$$

On peut majorer $A_{2,2}$ de la manière suivante :

$$A_{2,2} \leqslant \sum_{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/2}a_3^{1/2}a_1^{-1}} \frac{1}{a_1^{1/3}a_3^{4/3}} \sum_{a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/2}a_3^{1/2}a_1^{-1}} \frac{1}{a_2^{1/3}}$$

La somme intérieure étant majorée par :

$$\frac{1}{a_1^{1/3}} + 3{B_0}^{1/3}a_3^{1/3}a_1^{-2/3} \leqslant 4{B_0}^{1/3}a_3^{1/3}a_1^{-2/3}$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}
A_{2,2} &\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/4}a_3^{1/4}} \frac{1}{a_1a_3}\\
&\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/4}a_3^{1/4}} \left(\frac{1}{a_3^2} + \left(\frac{1}{4}\log B_0 + \frac{1}{4}\log a_3\right)\frac{1}{a_3}\right)\\
&\leqslant 4{B_0}^{1/3}\left(\tfrac{6}{\pi^2} + \tfrac{2}{4.3}\log^2 B_0 + \tfrac{2}{4}\log B_0\right)
\end{aligned}$$

Majorons maintenant $A_{2,3}$:

$$A_{2,3} \leqslant \sum_{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/2}a_2^{1/2}a_3^{-1}} \frac{1}{a_2^{1/3}a_3^{4/3}} \sum_{a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/2}a_2^{1/2}a_3^{-1}} \frac{1}{a_1^{1/3}}.$$

La somme intérieure étant majorée par $4{B_0}^{1/3}a_2^{1/3}{a_3}^{-2/3}$, on obtient les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_{2,3} &\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/4}a_2^{1/4}} \frac{1}{a_3^2}\\
&\leqslant 8{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/4}a_2^{1/4}} \frac{1}{a_2}\\
&\leqslant 8{B_0}^{1/3}(\frac{1}{3}\log B_0 + 1)
\end{aligned}
$$

En conclusion

$$A_2 = O(B\log^2 B)$$

- Majorons A_3 : d'après le lemme 5, si $a_2a_3c_1^0 \geqslant B_0^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&|m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3)|\\
&\leqslant C_2\frac{B_0^2}{a_2^3a_3^3{c_1^0}^4c_2^0c_3^0}\\
&\leqslant C_6\frac{B_0^2}{a_2^3a_3^3}
\end{aligned}
$$

où

$$C_6 = \sup_{\{i,j,l\}=\{1,2,3\}} \frac{C_2}{{c_i^0}^4c_j^0c_l^0}.$$

En outre, s' il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $a_i \geqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod_{i=1}^3 a_i^0b_i^0a_i} < 1$$

et par conséquent

$$m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3) = 0.$$

On a des résultats similaires en permutant 1, 2 et 3. Donc, si $B'_0 = \inf_{1\leqslant i\leqslant 3} B_0/c_i^0{}^{1/3}$, on obtient les majorations

$$\begin{aligned}
A_3 &\leqslant 3C_6B_0^2 \sum_{\substack{1\leqslant a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ 1\leqslant a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2a_3\geqslant B_0'^{1/2}a_1^{1/2}}} \frac{1}{a_2^3a_3^3}\\
&\leqslant 3C_6B_0^2 \sum_{\substack{a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0}} \frac{2}{2}\frac{1}{a_2^3B'_0a_1a_2^{-2}}\\
&\leqslant 3C_6\frac{B_0^2}{B'_0} \sum_{\substack{a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0}} \frac{1}{a_1a_2}\\
&\leqslant 3C_6\frac{B_0^2}{B'_0}(\log(\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0)+1)^2.
\end{aligned}$$

On obtient également :

$$A_3 = O(B\log^2 B).$$

• Majorons maintenant $N_{a,b}$ de manière uniforme. S' il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $a_i \geqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}
N_{a^0,b^0} &\leqslant \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{a_1^0a_2^0a_3^0b_1^0b_2^0b_3^0} \sum_{1\leqslant a_i\leqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)} \frac{1}{a_1a_2a_3}\\
&\leqslant \frac{B(\log B + \log \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)+1)^3}{a_1^0a_2^0a_3^0b_1^0b_2^0b_3^0}.
\end{aligned}$$

□

8. Formule d'inversion

Mon but est maintenant de construire l'analogue de la formule d'inversion de Möbius. On considère $\mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$. L'ensemble $\mathscr{B}$ est un monoïde pour la

multiplication terme à terme des idéaux. Si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, on note :

$$\alpha(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{6} N(\mathfrak{b}_i)},$$

$$(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{c} \in \mathscr{B} \mid \mathfrak{c}_i \subset \mathfrak{b}_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 6\},$$

et pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$,

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = (v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i))_{1 \leqslant i \leqslant 6}$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on pose également : si $n = (n_i)_{1\leqslant i\leqslant 6} \in \mathbf{N}^6$, $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \dots, \mathfrak{p}^{n_6})$ et si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$. Si B est un sous-ensemble de $\mathscr{B}$, sa fonction caractéristique est notée χ_B. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$ vérifiant la condition $(\mathrm{C}_{\mathfrak{p}})$, définie dans la partie 4, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$.

Lemme 9. — *Il existe une unique fonction $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ telle que :*

(a) $\chi_{\mathscr{A}} = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})\chi_{(\mathfrak{b})}$

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes :

(b) $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ *pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$

(c) $\sum_{n\in\mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n) = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)$

(d) $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} |\mu(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{b})| \leqslant +\infty$

Démonstration. — • Si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathscr{B}$, on note : $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$ si et seulement si $\mathfrak{b}' \in (\mathfrak{b})$. Une fonction μ vérifie (a) si et seulement si

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathscr{B}, \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathscr{B}, \mu(\mathfrak{b}) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de μ

• Montrons (b) par récurrence sur $\#\{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\}$ On remarque tout d'abord que pour tout $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$,

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}$, on a

$$\mu(\mathfrak{b}') = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}) \\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) + \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\leqslant \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})} \mu(\mathfrak{p}^n) - \sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}) \\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})
\end{aligned}$$

• Démontrons (c). Soit $p_i : \mathbf{N}^6 \to \mathbf{N}$ la i-ème projection canonique pour $1 \leqslant i \leqslant 6$. Soit $n \in \mathbf{N}^6$ Montrons tout d'abord par récurrence sur $|n| = \sum_{i=1}^{6} p_i(n)$ que s'il existe $i \in \{1, \ldots, 6\}$ tel que $p_i(n) \geqslant 2$ alors $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$. Soit $n' = n - (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ où le 1 se trouve à la i-ème position. Alors on a

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^{n'})$$

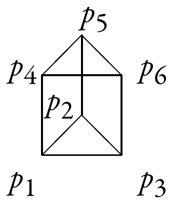
et

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) &= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{b}\neq\mathfrak{p}^n}} \mu(\mathfrak{b}) \\
&= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^{n'}} \mu(\mathfrak{b}) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n \\ k\neq n \\ p_i(k)=p_i(n)}} \mu(\mathfrak{p}^k)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\mu(\mathfrak{p}^k) = 0$ si $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n$, $k \neq n$ et $k_i = n_i > 1$. Donc $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$.

• Considérons maintenant le graphe $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les applications p_i pour i variant de 1 à 6 et dont les sommets suivants sont adjacents :

$$\begin{array}{ccc} (p_1, p_2) & (p_2, p_3) & (p_3, p_1) \\ (p_4, p_5) & (p_5, p_6) & (p_6, p_4) \\ (p_1, p_4) & (p_2, p_5) & (p_3, p_6) \end{array}$$



A tout élément n de $\{0,1\}^6 \subset \mathbf{N}^6$, on associe le sous-graphe $\mathscr{G}_n$ de $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les p_i tels que $p_i(n) \neq 0$ avec la structure de graphe induite. Par définition de $\mathscr{A}$, on a $\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) = 1$ si et seulement si $\mathscr{G}_n$ est formé de points disjoints. Par conséquent, $\chi_{\mathscr{A}}$ ne dépend que du sous-graphe correspondant. Il en est donc de même de μ. On note

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_n) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) \text{ et } \mu(\mathscr{G}_n) = \mu(\mathfrak{p}^n)$$

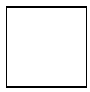
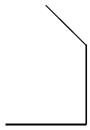
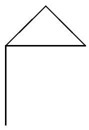
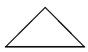
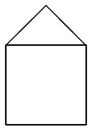
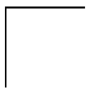
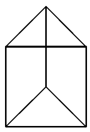
Si $\mathscr{G}_n$ est la rénion de disjoite de deux graphes $\mathscr{G}_{m_1}$ et $\mathscr{G}_{m_2}$, alors

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_n) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_{m_1})\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_{m_2}).$$

On en déduit alors comme dans la démonstration de (b) que

$$\mu(\mathscr{G}_n) = \mu(\mathscr{G}_{m_1})\mu(\mathscr{G}_{m_2}).$$

Il suffit donc de calculer les valeurs de μ pour les graphes connexes. On obtient :

$\mathscr{G}$	$\mu(\mathscr{G})$	$\mathscr{G}$	$\mu(\mathscr{G})$
$\varnothing$	1		-1
.	0		0
	-1		-1
	2		0
	1		1

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n) &= \sum_{n\in\{0,1\}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n) \\
&= 1-\frac{9}{N(\mathfrak{p})^2}+\frac{16}{N(\mathfrak{p})^3}-\frac{9}{N(\mathfrak{p})^4}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^6} \\
&= \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4\left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)
\end{aligned}$$

• Nous allons maintenant démontrer (d). D'après le calcul qui précède, on a, pour tout $\mathfrak{b}_0 \in \mathscr{B}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}\\ \mathfrak{b}|\mathfrak{b}_0}} |\mu(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{b})| &= \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}\\ \mathfrak{b}|\mathfrak{b}_0}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} |\mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})|\alpha(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\leqslant \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_0)} |\mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n)|\\
&< \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\in\mathbf{N}^6} |\mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n)|\\
&< \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1+\frac{35}{N(\mathfrak{p})^2}\right)\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

□

Lemme 10. — *On a la relation :*

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1,\operatorname{Pic}V)}.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédant :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\in\mathbf{N}^6} \alpha(\mathfrak{p}^n)\mu(\mathfrak{p}^n)\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 \left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)
\end{aligned}$$

Or on a les égalités :

$$\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 = \frac{1}{L_\mathfrak{p}(1,\operatorname{Pic}V)}$$

puisque l'action du groupe de Galois est triviale sur le groupe de Picard, et

$$\left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = d_\mathfrak{p}(V).$$

□

Cette interprétation de la valeur locale m'a été indiquée par Y. Manin à qui elle a été montrée par F. Beukers.

Lemme 11. — *Avec les notations qui précèdent,*

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{b}}(B).$$

Démonstration. — Ceci résulte de la fin de la partie 4 ainsi que du lemme 9. □

Preuve du résultat. — On a en général

$$N_U(B) = \sum_{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} N_{\mathfrak{a}}(B) = \frac{1}{w}\sum_{\substack{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)\\ \mathfrak{b}\in\mathscr{B}}} \mu(\mathfrak{b})P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(B)$$

Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a posé $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et, d'après le lemme 8, on a l'équivalence :

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \sim C''B\log^3 B\alpha(\mathfrak{b})$$

où $C'' = \frac{2}{3}$, et

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B(\log B + C_3)^3\alpha(\mathfrak{b}).$$

Soit $\varepsilon\in\mathbf{R}^*_+$, soit $I\subset\mathscr{I}(\mathbf{Z})$ fini tel que :

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}-I} |\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1/2C''+\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1)}.$$

Soit B_0 tel que $B\geqslant B_0$ implique

$$\forall\mathfrak{b}\in I,\quad |P_{\mathfrak{b}}(B) - C''B\log^3 B\alpha(\mathfrak{b})| < \frac{\varepsilon}{2\#I}B\log^3 B$$

et

$$B(\log B + C_3)^3 \leqslant 2B\log^3 B$$

alors $B\geqslant B_0$ implique

$$\begin{aligned}
&\left|N_U(B) - \frac{1}{2}C''B\log^3 B\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}}\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})\right|\\
&\leqslant \left(\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}-I}\left(\frac{2}{2}\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 + \frac{1}{2}C''\right)|\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})| + \sum_{\mathfrak{b}\in I}\frac{\varepsilon}{2\#I}\right)B\log^3 B\\
&\leqslant \varepsilon B\log^3 B.
\end{aligned}$$

Donc

$$N_U(B) \sim \frac{1}{2}C'B\log^3 B$$

□

La constante C' qu'on obtiendrait dans le cas d'un corps de nombre quelconque s'écrirait donc, d'après la remarque suivant le lemme 8,

$$\begin{aligned} C' &= \frac{h}{w}\frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\frac{w}{h}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s)\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}}\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s)\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\frac{d_{\mathfrak{p}}}{L_{\mathfrak{p}}(1,\mathrm{Pic}V)} \end{aligned}$$

Calculons maintenant les volumes de $\mathbf{P}^2_{k_\nu}$ correspondant aux métriques à l'infini. Dans le cas où $N_\nu = 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_{H_\nu}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}) &= 4\int_{\substack{0\leqslant r_1\\ 0\leqslant r_2}}\inf_{1\leqslant i\leqslant 6}\left(\frac{1}{Y_i(r_1,r_2,1)}\right)dr_1\,dr_2 \\ &= 8\left(\int_{1\leqslant r_2\leqslant r_1}\frac{1}{r_1^2r_2}dr_1\,dr_2\right. \\ &\qquad+\int_{0\leqslant r_2\leqslant 1\leqslant r_1}\frac{1}{r_1^2}dr_1\,dr_2 \\ &\qquad\left.+\int_{0\leqslant r_2\leqslant r_1\leqslant 1}\frac{1}{r_1}dr_1\,dr_2\right) \\ &= 8.3 \end{aligned}$$

et lorsque $N_\nu = 2$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}) &= (2\pi)^2\int_{\substack{0\leqslant r_1\\ 0\leqslant r_2}}\inf_{1\leqslant i\leqslant 6}\frac{r_1r_2}{Y_i(r_1,r_2,1)^2}dr_1\,dr_2 \\ &= (2\pi)^2 2\left(\int_{1\leqslant r_2\leqslant r_1}\frac{r_1r_2}{r_1^4r_2^2}dr_1\,dr_2\right. \\ &\qquad+\int_{0\leqslant r_2\leqslant 1\leqslant r_1}\frac{r_1r_2}{r_1^4}dr_1\,dr_2 \\ &\qquad\left.+\int_{0\leqslant r_2\leqslant r_1\leqslant 1}\frac{r_1r_2}{r_1^2}dr_1\,dr_2\right) \\ &= \pi^2.6. \end{aligned}$$

Donc si on pouvait obtenir l'équivalent des lemmes 4 et 5, on obtiendrait une constante C' de la forme :

$$C' = \frac{1}{3.t!} \frac{\prod_{v \in M_\infty} \mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v})}{\mathrm{Vol}\left(\left(\prod_{v \in M_\infty} k_v\right) \Big/ \mathscr{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s \to 1} (s-1)^t L(s, \mathrm{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic} V)}$$

où $t = 4$ est le rang du groupe de Picard de V.

9. Formule d'inversion dans un autre cas

On se place dans la situation suivante : V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un diviseur rationnel D de $\mathbf{P}_2$ où D s'écrit comme somme de trois points en position générale sur $\overline{\mathbf{Q}}$, clôture algébrique de k. On fixe une extension galoisienne $\mathbf{K}$ de k sur laquelle $D = P_1 + P_2 + P_3$. Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}/k)$. G agit sur $\{P_1, P_2, P_3\}$ ce qui définit un morphime $\lambda : G \to \mathfrak{S}_3$. Quitte à remplacer $\mathbf{K}$ par $\mathbf{K}^{\mathrm{Ker}\lambda}$, on peut supposer que λ est une injection. Nous nous restreignons au cas où G est cyclique d'ordre trois et où $\mu_3 \subset k$. On a alors $\mathbf{K} = k(\alpha)$ pour α une racine cubique d'un élément $a \in k^* - k^{*3}$. On note j une racine cubique primitive de l'unité et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{K}/k)$ l'automorphisme de $\mathbf{K}$ au-dessus de k défini par $\sigma(\alpha) = j\alpha$. On pose $S = \{3\} \bigcup \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}|(a)\}$. En outre, on peut se ramener à $a \in \mathscr{O}_k$ et

$$P_1 = (1 : \alpha : \alpha^2), P_2 = (1 : j\alpha : j^2\alpha), P_3 = (1 : j^2\alpha : j\alpha^2)$$

on définit $L_1, L_2, L_3, L_{1,2}, L_{2,3}, L_{3,1}$ sur $\mathbf{K}$ comme ci-dessus

$$U = V - L_1 \bigcap L_2 \bigcap L_3 \bigcap L_{1,2} \bigcap L_{2,3} \bigcap L_{3,1}$$

est défini sur k et on peut poser

$$-K = 3\Lambda - L_1 - L_2 - L_3.$$

Une base de $\Gamma(V_{\mathbf{K}}, \omega_{V_{\mathbf{K}}})$est donnée par le polynomes

$$\begin{array}{rclrclrcl} Y'_1 & = & Z_1^2 Z_2, & Y'_2 & = & Z_2^2 Z_1, & Y'_3 & = & Z_2^2 Z_3 \\ Y'_4 & = & Z_3^2 Z_2, & Y'_5 & = & Z_3^2 Z_1, & Y'_6 & = & Z_1^2 Z_3 \\ Y'_7 & = & Z_1 Z_2 Z_3 & & & & & & \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}Z_1 &= \alpha^2 X_1 + \alpha X_2 + X_3\\ Z_2 &= j^2\alpha^2 X_1 + j\alpha X_2 + X_3\\ Z_3 &= j\alpha^2 X_1 + j^2\alpha X_2 + X_3\end{aligned}$$

Une base de $\Gamma(V, \omega_V)$ sur k est donc donnée par

$$\begin{array}{lllllll} Y_1 & = & X_1(aX_1^2 - X_2X_3), & Y_2 & = & X_2(aX_1^2 - X_2X_3),\\ Y_3 & = & X_3(aX_1^2 - X_2X_3), & Y_4 & = & X_1(X_2^2 - X_3X_1),\\ Y_5 & = & X_2(X_2^2 - X_3X_1), & Y_6 & = & X_3(X_2^2 - X_3X_1),\\ Y_7 & = & X_3(X_3^2 - aX_1X_2). & & & \end{array}$$

La hauteur correspondante est donc donnée par :

$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_k} \inf_{1\leqslant i\leqslant 7} |Y_i(x_1, x_2, x_3)|_{\mathfrak{p}}$$

On fixe $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. Comme ci-dessus, on veut déterminer le cardinal de $\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ ensemble des triplets $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathscr{O}_k^3/U_k$ possédant un représentant $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant :

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \tag{1}$$

$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) \leqslant B \tag{2}$$

$$x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \tag{3}$$

Comme dans le paragraphe 3, on définit une application

$$\log_H : \left(\prod_{v\in M_{\infty,k}} k_v^*\right)^3 \to \mathbf{R}^{r_1+r_2}.$$

L'application composée

$$U_k \to \prod_{v\in M_{\infty,k}} k_v^* \xrightarrow{\text{Diag}} \left(\prod_{v\in M_{\infty,k}} k_v^*\right)^3$$

définit une action de U_k sur $\left(\prod_{v\in M_{\infty,k}} k_v^*\right)^3$. De même le morphisme canonique

$$U_k \to \mathbf{R}^{r_1+r_2}$$

définit une action de U_k sur $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ et l'application $\log_H$ est compatible avec ces actions. De plus si des éléments x et y de $\left(\prod_{v\in M_{\infty,k}} k_v^*\right)^3$ vérifient $x = uy$ pour

$u \in U_k$ et si x et y ont même images par $\log_H$, alors d'après un lemme de Schanuel ([**Sc**], lemme 2) $u^3 \in \mu_\infty(k)$ et donc $u \in \mu_\infty(k)$. On pose $\Delta = \log_H^{-1}(F)$. Comme dans la partie 3, on a

(i) Δ est stable sous l'action de $\mu_\infty(k)$,
(ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), u\Delta \bigcap \Delta = \varnothing$,
(iii) $\displaystyle\bigcup_{u \in U_k} u\Delta = \prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^*$.

Par conséquent, le cardinal recherché est $\frac{1}{w}\#\mathscr{N}_\mathfrak{a}(B)$ où $\mathscr{N}_\mathfrak{a}(B)$ désigne l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant (1),(2) et (3) ci-dessus, ainsi que

$$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \tag{4}$$

Notons pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$ et tout $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$, $N_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})})$ On reprend les notations $H_\mathfrak{p}$ et H_∞. On a alors pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$

$$H_\mathfrak{p}(x_1, x_2, x_3) = N_\mathfrak{p}((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7))$$

et

$$H_{-K}(x_1, x_2, x_3) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7))}$$

Notons

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ j^2\alpha^2 & j\alpha & 1 \\ j\alpha^2 & j^2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\mathrm{Det} M = 3(1-j)ja$$

Donc comme $S_\mathbf{K} = \{\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} \mid \exists \mathfrak{P} \in S, \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$ contient $\{\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} \mid \mathfrak{P}|3a\}$, M est inversible sur $\mathscr{O}_{S_\mathbf{K}}$. On obtient alors :

$$(Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7)\mathscr{O}_{S_\mathbf{K}} = (Y_i'(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6)\mathscr{O}_{S_\mathbf{K}}$$

et on a

$$(Y_i'(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6) = (z_1, z_2)(z_2, z_3)(z_3, z_1)$$

où $z_i = Z_i(x_1, x_2, x_3)$. L'objectif est donc de paramétriser les points de l'ouvert U par l'idéal $\mathfrak{d} = (z_1, z_2)$.

On considère l'ensemble

$$\mathscr{H}_\mathfrak{a} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \\ x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \end{array} \right. \right\}$$

On note $\mathscr{I}'_S$ le sous-monoïde $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$ engendré par S et $\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des sextuplets

$$(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_{S,1},\mathfrak{c}_{S,2},\mathfrak{c}_{S,3})\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^3\times\mathscr{I}'^{\,4}_S$$

vérifiant les conditions suivantes : pour tout $\mathfrak{P}\in M_{f,\mathbf{K}}-S_{\mathbf{K}}$

$$(\mathrm{C}_{\mathfrak{P}})\qquad\begin{cases}\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}),v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\mathfrak{d}))=0\\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}),v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\mathfrak{b}))=0\\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}),v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}))=0\end{cases}$$

pour tout $\mathfrak{p}\in S$

$$(\mathrm{C}_{\mathfrak{p}})\qquad\inf_{1\leqslant i\leqslant 3}(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i}))=0$$

ainsi que la condition ($\circ$) : $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$ est principal, engendré par un élément

$$z_1=x_3+\alpha x_2+\alpha^2x_1$$

où les éléments x_1,x_2 et x_3 de k peuvent être choisis de sorte que, pour tout $\mathfrak{p}$ de S, on ait

$$\begin{aligned}&v_{\mathfrak{p}}(x_i)=v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i})+v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\\ &v_{\mathfrak{p}}((ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_3x_1,x_3^2-ax_1x_2))=v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S)+2v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

On note également $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$ un élément $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_{S,1},\mathfrak{c}_{S,2},\mathfrak{c}_{S,3})$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2\times\mathscr{I}'^{\,4}_S$.

Lemme 12. — *Soit $\rho:\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}\to\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'application qui à tout $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ associe*

$$\rho(x_1,x_2,x_3)=(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$$

où

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}&=(Z_3(x_1,x_2,x_3),Z_2(x_1,x_2,x_3))\mathfrak{a}^{-1}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}\\ \mathfrak{b}&=(Z_1(x_1,x_2,x_3))(\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{a})^{-1}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}\\ \mathfrak{e}_S&=\prod_{\mathfrak{p}\in S}(ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_3x_1,x_3^2-ax_1x_2)_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-2}\\ \mathfrak{c}_{S,i}&=\prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x_i)-v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}.\end{aligned}$$

L'application ρ est bijective.

Démonstration. — On montre comme dans la partie 4 que cette application est bien définie et bijective de réciproque l'application $\tau : \mathscr{H}'_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ qui à tout $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ associe

$$\tau(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) = (x_1, x_2, x_3)$$

où $Z_1(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{d}^{\sigma}\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$ et pour tout $\mathfrak{p} \in S$, tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$v_{\mathfrak{p}}(x_i) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_i^S) + v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}). \quad \square$$

Notons

$$M_S(x_1, x_2, x_3) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} N_{\mathfrak{p}}(ax_1^2 - x_2x_3, x_2^2 - x_3x_1, x_3^2 - ax_1x_2)$$

On dira que $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}^S) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2 \times \mathscr{I}'^{\,4}_S$ vérifie la condition $(*)$ si il vérifie la condition $(\circ)$ ci-dessus pour un triplet (x_1, x_2, x_3) tel qu'on ait également

$$(2') \qquad H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{d})N(\mathfrak{a})^3N(\mathfrak{e}_S)$$

$$(4) \qquad (j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta$$

(11)

On note $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ vérifiant la condition $(*)$.

$$\#\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$$

En effet un élément (x_1, x_2, x_3) de $\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ d'image $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}^S)$ vérifie

$$H_{-K}(x_1, x_2, x_3) \leqslant B$$

si et seulement si

$$H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN((z_1, z_2)(z_2, z_3)(z_3, z_1)\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}))^{1/3}M_S(x_1, x_2, x_3)$$

où $z_i = Z_i(x_1, x_2, x_3)$ et donc si et seulement si

$$H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{d}\mathfrak{d}^{\sigma}\mathfrak{d}^{\sigma^2})^{1/3}N(\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})N(\mathfrak{e}_S)\prod_{\mathfrak{p} \in S} N(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^3$$

Pour tout $(\mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{I}'^{\,4}_S$ et tout $\mathfrak{p} \in S$, on considère dans le produit d'idéaux $\prod_{i=1}^{3}((\mathfrak{c}_{S,i} + \mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}})$, l'ensemble $F(\mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S)$ défini par le système d'équations :

$$\begin{aligned} ax_1^2 - x_2x_3 &= 0, \\ x_2^2 - x_3x_1 &= 0, \\ x_3^2 - ax_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

On note alors

$$d_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)=\frac{\#F(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)}{\#\prod_{i=1}^{3}((\mathfrak{c}_{S,i}+\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}})}.$$

Pour tout $(\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})\times\mathscr{I}'^{4}_{S}$, on note $m_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S}(B)$ le cardinal de l'ensemble des $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{O}_k^3$ tels que

(4) $$(j(x_1),j(x_2),j(x_3))\in\Delta$$

(2") $$H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B$$

(10) $$Z_1(x_1,x_2,x_3)\in\mathfrak{c}$$

(11) $$\forall\mathfrak{p}\in S,\forall i\in\{1,2,3\},v_{\mathfrak{p}}(x_i)\geqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i})$$

(12) $$\forall\mathfrak{p}\in S,v_{\mathfrak{p}}(ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_2x_3,x_3^2-ax_1x_2)\geqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S).$$

L'ensemble des $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{O}_k^3$ vérifiant les conditions (10) et (11) forment un sous-$\mathscr{O}_k$-module de $\mathscr{O}_k^3$. On notera M le réseau qui est l'image de ce module par l'application $\mathscr{O}_k^3\to(\prod_{v\in M_\infty}k_v)^3$. On note également

$$\mathscr{D}_B=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+3N}\;\middle|\;\left\{\begin{array}{l}(x_1,x_2,x_3)\in\Delta\\ H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B\end{array}\right.\right\}.$$

L'équivalent de lemme 4 consisterait à majorer

$$\left|m_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S}(B)-\frac{\prod_{\mathfrak{p}\in S}d_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B}{\mathrm{Det}(M)}\right|$$

avec les relations :

$$\mathrm{Det}(M)=\frac{N(\mathfrak{c})N(\mathfrak{c}_{S,1}\mathfrak{c}_{S,2}\mathfrak{c}_{S,3})\sqrt{d}^{3}}{2^{3r_2}}$$

et $\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B=B\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1$.

Comme dans la partie 7, on fixe maintenant

$$\mathfrak{f}_0=(\mathfrak{d}_0,\mathfrak{b}_0,\mathfrak{c}_S^0)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{K}}})^2\times\mathscr{I}'^{3}_{S}$$

et on note $\mathscr{P}_{\mathfrak{f}_0}(B)$ l'ensemble des éléments $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2\times\mathscr{I}'^{4}_{S}$ vérifiant la condition $(*)$ ci-dessus ainsi que

$$\mathfrak{d}\subset\mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{b}\subset\mathfrak{b}_0\text{ et }\mathfrak{c}_i^S\subset\mathfrak{c}_{S,i}^0\text{ pour }1\leqslant i\leqslant 3.$$

On note $P_{\mathfrak{f}_0}$ le cardinal de $\mathscr{P}_{\mathfrak{f}_0}$. Comme dans la partie 7, on montre que

$$P_{\mathfrak{f}_0}(B) = \sum_{(\mathfrak{d}', \mathfrak{e}'_S) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}) \times \mathscr{I}'_S} m'_{\mathfrak{d}', \mathfrak{e}'_S}(B)$$

où $m'_{\mathfrak{d}', \mathfrak{e}'_S}(B)$ est défini de la manière suivante : on considère $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{d}^{\sigma^2} \mathfrak{b}_0 \mathfrak{a} \mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$, $\mathfrak{a}_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{c}_S = \mathfrak{c}^0_S \mathfrak{a}_S$ et alors

$$m'_{\mathfrak{d}, \mathfrak{e}'_S}(B) = \sum_{\mathfrak{e}''_S \in \mathscr{I}'_S} \mu_1(\mathfrak{e}''_S) m_{\mathfrak{c}, \mathfrak{e}''_S \mathfrak{e}'_S \mathfrak{a}^2_S, \mathfrak{c}_S \mathfrak{a}_S}(BN(\mathfrak{d})N(\mathfrak{a})^3 N(\mathfrak{e}'_S))$$

avec

$$\mu_1(\mathfrak{e}''_S) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mu_1((e''_S)_{\mathfrak{p}})$$

et

$$\mu_1(\mathfrak{p}^k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ -1 \text{ si } k = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'une formule d'inversion élémentaire permettant de passer de le condition $M_S(x_1, x_2, x_3) \geqslant k$ à la condition $M_S(x_1, x_2, x_3) = k$.

Notons

$$C_S(\mathfrak{c}_S) = \sum_{\mathfrak{e}'_S \in \mathscr{I}'_S} N(\mathfrak{e}'_S) \sum_{\mathfrak{e}''_S \in \mathscr{I}'_S} \mu_1(\mathfrak{e}''_S) \prod_{\mathfrak{p} \in S} d_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}'_S \mathfrak{e}''_S \mathfrak{a}^2_S, \mathfrak{c}_S \mathfrak{a}_S)$$

On admettra par la suite que cette série est convergente. Le nombre réel $C_S(\mathfrak{c}_S)$ est en fait indépendant de $\mathfrak{a}$.

L'analogie avec le lemme 8 amène alors à s'intéresser à la série de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{K}, S_{\mathbf{K}}}(s) &= \sum_{\mathfrak{d}' \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})} \frac{1}{N(\mathfrak{d})^s} \\ &= \prod_{\mathfrak{P} \in M_{f, \mathbf{K}} - S_{\mathbf{K}}} \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{P}^m)^s} \\ &= \prod_{\mathfrak{P} \in M_{f, \mathbf{K}} - S_{\mathbf{K}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{p}$ est scindé dans l'extension $\mathbf{K}/k$, alors

$$\begin{aligned}\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^3} \\ &= L_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Pic} V, s)\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}\right)\end{aligned}$$

sinon, il existe un seul $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ et dans ce cas

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} = \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{3s}}}$$

Or, dans ce cas, l'action du Frobenius sur $\operatorname{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ est donnée, en utilisant la base associée à Λ, L_1, L_2 et L_3, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}L_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Pic} V, s)^{-1} &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} \end{pmatrix} \\ &= \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{3s}}\right)\end{aligned}$$

En définitive, on a démontré le lemme suivant :

Lemme 13. — *On a la relation*

$$\zeta_{\mathbf{K},S_{\mathbf{K}}}(s) = L_S(\operatorname{Pic} V, s)/\zeta_{k,S}(s)$$

L'analogue du lemme 8 serait donc d'obtenir une équivalence entre le cardinal $P_{\mathfrak{f}_0}(B)$ et $C'' B \log^{t-1} B$ où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V)$ et C'' une constante de la forme :

$$C'' = C_S(\mathfrak{c}_S^0) C_0 \lim_{s\to 1}(s-1)^{t-1} \frac{L_S(\operatorname{Pic} V, s)}{\zeta_{k,S}(s)} \frac{\operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \sqrt{d}^3}{N(\mathfrak{d}_0\mathfrak{b}_0)\prod_{i=1}^3 N(\mathfrak{c}_{S,i}^0) 2^{3r_2}}$$

Dans le cas de trois points rationnels sur $\mathbf{Q}$, on avait $C_0 = \frac{1}{t!}$. On peut remarquer que le théorème de Hardy, Littlewood et Karamata comprend par contre une constante $\frac{1}{(t-1)!}$.

Notons $\mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_\mathbf{K}})^2 \times \mathscr{I}'^3_S$ et $\mathscr{A}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ vérifiant les conditions $(\mathrm{C}_\mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} - S_\mathbf{K}$ et $(\mathrm{C}_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in S$. Pour tout $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathscr{B}$ et tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on prend des notations $(\mathfrak{b})$, $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$ analogues à celles utilisées dans la partie 8. En outre, on pose $\alpha_S((\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}_S)) = \frac{1}{N(\mathfrak{d})N(\mathfrak{b})}$ et si $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$

$$\mathscr{B}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} \mid v'_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}) = 0 \text{ si } \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}\}$$

Lemme 14. — *Il existe une unique fonction* $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ *telle que*

(a) $\chi_\mathscr{A} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})\chi_{(\mathfrak{b})}$

Cette fonction vérifie en outre :

(b) *Pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})$,

(c) *Si* $\mathfrak{p} \notin S$, $\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b})\alpha_S(\mathfrak{b}) = \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(\mathrm{Pic} V, 1)}$.

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) se démontrent comme dans la partie 8. Montrons (c) en distingant le cas où $\mathfrak{p}$ est scindé et le cas où il ne l'est pas. Supposons $\mathfrak{p}$ scindé, soient $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_3$ les idéaux premiers de $\mathscr{O}_\mathbf{K}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Si $n \in \mathbf{N}^6$ et $\mathfrak{p} \in M_f - S$, on note

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{P}_1^{n_1}\mathfrak{P}_2^{n_2}\mathfrak{P}_3^{n_3}, \mathfrak{P}_1^{n_4}\mathfrak{P}_2^{n_5}\mathfrak{P}_3^{n_6}, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k).$$

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^6 & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \chi_\mathscr{A}(\mathfrak{p}^n) \end{array}$ est la même que dans la partie 8 et on retrouve la même fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^6 & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \mu(\mathfrak{p}^n) \end{array}$ Donc (c) est démontrée dans ce cas.

Dans le cas contraire, soit $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $\mathscr{O}_\mathbf{K}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. la condition $(C_\mathfrak{P})$ pour un élément $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{B}$ s'écrit

$$v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}) = v_\mathfrak{P}(\mathfrak{d}) = 0.$$

Si $n \in \mathbf{N}^2$, on note $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{P}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k) \in \mathscr{B}$ Comme ci-dessus $\mu(\mathfrak{p}^n)$ ne dépend que de n, on note $\mu(n)$ cette valeur. L'entier $\mu(n)$ est nul si un des $n_i \geqslant 2$

pour un $i \in \{1,2,3\}$. De plus

$$\begin{array}{ll} \mu((0,0)) = 1 & \mu((0,1)) = -1 \\ \mu((1,0)) = -1 & \mu((1,1)) = 1 \end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{N}^2} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha_S(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p})^3} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^6} \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \\ &= \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Pic} V, 1)}. \end{aligned}$$

□

La constante que l'on peut espérer obtenir dans ce cas est donc de la forme

$$C' = C_0 \lim_{s \to 1} (s-1)^{t-1} L_S(\operatorname{Pic} V, s)/\zeta_{k,S}(s) \frac{\operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 d^{3/2}}{2^{3r_2}} \prod_{\mathfrak{p} \in S} C_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Pic} V, 1)}.$$

Il est également vraisemblable que l'on puisse écrire pour tout $\mathfrak{p} \in S$

$$C_{\mathfrak{p}} = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \frac{\operatorname{Vol}_H(\mathscr{V}_{\mathscr{O}_{k_{\mathfrak{p}}}})}{N(\mathfrak{p})^2}$$

ainsi qu'une relation de la forme

$$\frac{\operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \sqrt{d}}{2^{r_2}} = \prod_{v \in M_\infty} \operatorname{Vol}_H(V_{k_v}) \lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_k(s).$$

Je tiens à remercier Y. Manin, Y. Tschinkel et J.-L. Colliot-Thélène pour les discussions et les indications qui sont à la base de ce texte.

Références

[Bl] S. Bloch, *A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[MT] Y. I. Manin and Y. Tschinkel, *Points of bounded height on del Pezzo surfaces*, Compositio Math. **85** (1993), n° 3, 315–332.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

1993

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre
• *E-mail :* Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

HAUTEURS ET MESURES DE TAMAGAWA SUR LES VARIÉTÉS DE FANO*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soit V une variété de Fano. On peut construire sur V une hauteur correspondant à l'opposé du faisceau canonique. Pour tout ouvert U de V, on note $n_U(B)$ le cardinal des points rationnels de U de hauteur inférieure à B. Manin a conjecturé que, pour un ouvert U convenable, il existe une constante C telle que

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

avec $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V)$. Ce texte donne tout d'abord une expression conjecturale de la constante C en termes du volume de l'espace adélique associé à V pour une mesure de Tamagawa dépendant du choix de la hauteur. Cette expression est compatible avec les résultats de la méthode du cercle et redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. La conjecture ainsi raffinée est ensuite vérifiée pour diverses variétés toriques obtenues en éclatant des sous-espaces de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$.

Abstract. — Let V be a Fano variety and let h be a height on V corresponding to the inverse of the canonical sheaf. For any open set U of V, let $n_U(B)$ denote the number of rational points in U whose height is bounded by B. Manin conjectured that for a small enough U, there exists a constant C such that

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B$$

where $t = \operatorname{rk} \operatorname{Pic} V$. The first aim of this paper is to give a conjectural expression for the constant C in terms of the adelic volume of V for a Tamagawa measure corresponding to the chosen height. This expression agrees with the constants computed by Schanuel for projective spaces and by Franke, Manin and Tschinkel for generalized flag varieties under quasi-split groups and is compatible with the results of the circle method. We then check the conjecture thus refined for toric varieties obtained as the blowing-up of particular subspaces in $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$.

*Duke Math. J. **79** (1995), 101–218

Soit V une variété de Fano telle que l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} soit très ample. A toute base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ correspond une hauteur H sur V. Pour tout ouvert U de V, on note

$$n_U(B) = \#\{P \in U(k) / H(P) \leqslant B\}.$$

Manin a conjecturé qu'à condition de se restreindre à un ouvert suffisamment petit U, le comportement asymptotique de ce cardinal est de la forme

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B$$

où t désigne le rang du groupe de Picard de V. Il faut noter que la constante qui apparaît dans cette estimation dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Toutefois il est possible de donner une expression conjecturale de cette constante. Pour cela, on utilise tout d'abord la correspondance naturelle entre hauteurs et systèmes de métriques sur les fibrés canoniques des variétés $V \times_k k_v$, où les corps k_v sont les complétés de k pour les différentes places v de k. Un tel système de métriques permet alors de construire une mesure de Tamagawa sur V qui généralise la mesure de Tamagawa usuelle pour les groupes algébriques notamment décrite dans [**We**], ainsi que la mesure de Leray utilisée dans la méthode du cercle (cf. [**Lac**]). La constante conjecturale s'exprime alors en termes du nombre de Tamagawa correspondant. La conjecture ainsi raffinée est stable par produit de variétés, redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tshinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. Elle est également compatible avec les résultats de la méthode du cercle.

Dans le cas des variétés de drapeaux ou celui des intersections complètes, le résultat est indépendant de l'ouvert choisi. En particulier, on peut prendre $U = V$. Cela n'est plus possible lorsque la variété contient des sous-variétés accumulatrices. Les exemples les plus simples de telles variétés sont obtenues par éclatement. Il nous a donc semblé intéressant de vérifier la conjecture de Manin raffinée pour les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ ainsi que pour la variété obtenue en éclatant les sous-espaces de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ définis par les équations $X_i = 0$ pour $i \in I$, où I décrit les parties de $\{0, \ldots, n\}$ telles que $2 \leqslant \#I \leqslant n$.

L'énoncé de la conjecture de Manin est rappelé dans la partie 1. L'objet de la partie 2 est la construction de la constante conjecturale. Dans les parties 3, 4 et 6, nous vérifions la compatibilité de la conjecture raffinée avec les résultats antérieurs. La partie 5 donne une condition nécessaire et suffisante pour que la

conjecture soit indépendante de la construction de la hauteur. Dans les parties 8 à 10 nous montrons la conjecture pour des variétés obtenues par éclatement.

Table des matières

1. Une conjecture de Manin

1.1. Notations. — Nous commençons par introduire des notations qui sont utilisées dans l'ensemble de ce texte.

Notation . **—** Pour tout corps F, on note $\overline{F}$ une clôture algébrique de F.

Pour tout corps de nombres k, $\mathscr{O}_k$ désigne son anneau des entiers et U_k le groupe des unités de k. On notera M_k l'ensemble des places de k, $M_{f,k} \subset M_k$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathscr{O}_k$ et $M_{\infty,k}$ l'ensemble des places à l'infini de k. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_k$, on note $k_\mathfrak{p}$ le corps local correspondant et $|\,.\,|_\mathfrak{p}$ la norme associée à $\mathfrak{p}$ définie par (cf. [**Se3**, page 9])

$$\forall x \in k_\mathfrak{p},\ |\,x\,|_\mathfrak{p} = |\,N_{k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p}(x)\,|_p$$

où $p \in M_\mathbf{Q}$ est l'unique place telle que $\mathfrak{p} \mid p$ et $|\,.\,|_p$ la norme usuelle. En particulier cette norme n'est pas invariante par extension de corps. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, on

désigne par $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel. Pour tout $v \in M_{\infty,k}$, on note $N_v = [k_v : \mathbf{R}]$,

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \#\{v \in M_{\infty,k} \mid N_v = 1\} \\ r_{2,k} &= \#\{v \in M_{\infty,k} \mid N_v = 2\} \\ r_k &= r_{1,k} + r_{2,k} - 1 \\ N_k &= r_{1,k} + 2r_{2,k}. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in M_{\infty,k}$ tel que $k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, on fixe un tel isomorphisme. Comme dans [**We**], pour tout $v \in M_k$, on normalise la mesure de Haar dx_v de la manière suivante

- si $v \in M_{f,k}$, alors $\int_{\mathcal{O}_{k_v}} dx_v = 1$
- si $k_v = \mathbf{R}$, alors on prend pour dx_v la mesure de Lebesgue usuelle.
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors on pose $dx_v = -i\, dz\, d\bar{z} = 2\, dx\, dy$.

L'entier w_k désigne le nombre de racines de l'unité dans k, d_k la valeur absolue du discriminant de k et R_k le régulateur de k. On note $\mathscr{I}(\mathcal{O}_k)$ le monoïde des idéaux non nuls de $\mathcal{O}_k$, $\mathscr{P}(\mathcal{O}_k)$ le sous-monoïde des idéaux principaux non nuls et $h_k = \# \mathscr{I}(\mathcal{O}_k)/\mathscr{P}(\mathcal{O}_k)$ le nombre de classes d'idéaux. Lorsque $k = \mathbf{Q}$, il nous arrivera d'identifier $\mathscr{I}(\mathcal{O}_\mathbf{Q})$ à $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$. Si S est un sous-ensemble fini de M_k, on note $\mathcal{O}_S$, l'anneau des S-entiers.

Le plus souvent nous omettrons k dans ces notations quand le corps de nombres est clairement indiqué par le contexte.

1.2. Hauteurs associées à un faisceau ample. — Soient k un corps de nombres, V une variété sur k, $\mathscr{L}$ un faisceau très ample sur V. On choisit $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une base de $\Gamma(V, \mathscr{L})$. Par hypothèse, on a un plongement

$$\Phi : V \to \mathbf{P}_k(\Gamma(V, \mathscr{L})^\vee)$$

où $\Gamma(V, \mathscr{L})^\vee$ désigne le dual de $\Gamma(V, \mathscr{L})$. Une première définition de la hauteur est alors donnée par

***Définition 1.1.* —** On définit la *hauteur* de $P \in V(k)$ relativement à $\mathscr{L}$ et $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ par

$$H(P) = \prod_{v \in M_k} \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |y_i|_v$$

où $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ sont des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$ pour la base $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$.

Par la formule du produit, cette hauteur est indépendante du choix des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$. Elle dépend par contre du corps de base k et de la base choisie.

Plus généralement, on peut considérer les hauteurs définies de la manière suivante pour tout $v \in M_k$, on se donne une métrique v-adique $\|.\|_v$ sur $\mathscr{L}$. On suppose en outre qu'il existe une base $(s_1, \dots, s_q)$ de $\Gamma(V, \mathscr{L})$ telle que pour presque tout $v \in M_f$, pour tout $x \in V(k)$ et tout $s \in \Gamma(V, \mathscr{L})$ telle que $s(x) \neq 0$,

$$\|s(x)\|_v = \left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1}.$$

Il faut noter que cette condition est alors vérifiée pour toute base. Nous appelerons métrique adélique un tel système de métriques.

Définition 1.2. — La *hauteur* d'un point rationnel P de V relativement à $\mathscr{L}$ et au système de métriques est donnée par

$$H(P) = \prod_{v \in M_k} \|s(x)\|_v^{-1}$$

où s est section de $\mathscr{L}$ non nulle en x. Ce produit est également indépendant du choix de la section. Par abus de langage, nous appelerons *hauteur* sur V la donnée d'un faisceau très ample $\mathscr{L}$ et d'une métrique adélique sur $\mathscr{L}$.

Un exemple d'un tel système de métriques consiste à prendre

$$\|s(x)\|_v = \begin{cases} \left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1} & \text{si } v \in M_f, \\ \sqrt{\left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_v^2 + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_v^2}^{\,-1} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}, \\ \left(\left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_v + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

La hauteur utilisée dans [**Th**] correspond à cette métrique.

Un autre exemple consiste à choisir une famille génératrice finie $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de $\Gamma(V, \mathscr{L})$ et poser

$$\|s(x)\|_v = \inf_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_v.$$

1.3. Sous-variétés accumulatrices. — Soit U un sous-espace constructible de V défini sur k. On note

$$n_U(B) = \#\{P \in U(k) \mid H(P) \leqslant B\}$$

qui est un nombre fini. On s'intéresse au comportement asymptotique de $n_U(B)$ quand B tend vers $+\infty$. On pose

$$\beta_U = \varlimsup_{B\to+\infty} (\log n_U(B)/\log(B)).$$

La constante β_U donne la puissance de B qui intervient dans $n_U(B)$. Un fermé F de V est dit accumulateur si et seulement si pour tout ouvert W de F, il existe un ouvert U de V tel que

$$\beta_W > \beta_U.$$

Cette notion permet de définir une stratification arithmétique sur V qui peut éventuellement être infinie (cf. [**Ma**]). Il est clair que si l'on a un tel fermé F, le comportement asymptotique de $n_V(B)$ reflète la structure de F et non celle de V. C'est pourquoi il est plus intéressant de se placer, lorsque cela est possible, sur le complémentaire U des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que nous ferons par la suite.

1.4. Enoncé de la conjecture de Manin. — Dans la suite de ce texte, on se placera dans le cas où V est une variété de Fano, c'est à dire une variété projective et lisse dont l'inverse du faisceau canonique ω_V^{-1} est ample. Pour simplifier, je le supposerai très ample. Les hauteurs qu'on utilisera désormais sont relatives au faisceau très ample ω_V^{-1}.

Manin énonce alors la conjecture suivante (cf. en particulier [**FMT**])

***Conjecture 1.4.1* (Manin).** — *Si $V(k)$ est dense dans V et si U, le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices, est défini sur k, alors il existe une constante C telle que*

$$n_U(B) \sim CB\log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$.

1.5. Rappel des résultats connus. — L'exemple le plus simple de variété de Fano est $\mathbf{P}^n_k$. Dans ce cas, on a

$$\omega_V = \mathcal{O}(-n-1)$$

et $U = V = \mathbf{P}^n_k$. Le résultat est dû à Schanuel et s'écrit, en remarquant que la hauteur utilisée ici est la puissance $(n+1)$-ème de celle utilisée dans [**Sc**]

Théorème 1.5.1 **(Schanuel [Sc]). —**

$$n_U(B) \sim CB \textit{ quand } B \to +\infty$$

où C est la constante donnée par

$$C = \frac{h}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w}.$$

Franke, Manin et Tschinkel ont démontré dans [**FMT**] que la conjecture est stable par produit de variétés, compatible avec les résultats de la méthode du cercle et vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées de la forme $V = P\backslash G$ où G est un groupe algébrique semi-simple linéaire et P un sous-groupe parabolique. Dans le cas où $G = GL_{n,k}$, Thunder a donné dans [**Th**] une majoration explicite du terme résiduel. En outre Batyrev a annoncé avoir démontré la conjecture dans le cas des variétés toriques.

Les résultats à l'origine de ce texte, les théorèmes 8.6.1, 9.6.1, 10.6.1 et 11.6.1 sont des vérifications de cette conjecture dans le cas où V est obtenue en éclatant certains sous-espaces de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$. Dans le cas particulier où V est obtenue en éclatant trois points, Batyrev et Manin avaient démontré le résultat suivant

Théorème 1.5.2 **(Batyrev, Manin [BM]). —** *Si $k = \mathbf{Q}$ et si U désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels sur V, alors il existe des constantes C_1 et C_2 telles que*

$$0 < C_1 < \frac{n_U(B)}{B \log^3 B} < C_2.$$

2. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur une variété de Fano

2.1. Expression conjecturale de la constante. — Soit k un corps de nombres et V une variété de Fano sur k telle que ω_V^{-1} soit très ample. Comme dans [**We**], on introduit l'ensemble fini S des places de mauvaise réduction de V identifiée avec son plongement dans $\mathbf{P}^q_k$. Quitte à augmenter S, V se relève en un schéma projectif et lisse $\mathcal{V}$ au-dessus de $\mathcal{O}_S$. Pour toute algèbre A sur $\mathcal{O}_S$, le produit $\mathcal{V} \times_{\mathcal{O}_S} \operatorname{Spec} A$ est noté $\mathcal{V}_A$ et pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S$, le morphisme de Frobenius géométrique défini sur $\operatorname{Pic} \mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$ est désigné par $\operatorname{Fr}_\mathfrak{p}$. On pose $\overline{V} = V \times_k \overline{k}$. Le terme local de la fonction L associée à $\operatorname{Pic} \overline{V}$ est alors défini par

$$L_\mathfrak{p}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \operatorname{Fr}_\mathfrak{p} \mid \operatorname{Pic} \mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L_S globale est donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}).$$

Lemme 2.1.1. — *Le produit eulérien*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} \overline{V})$$

converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ *et la fonction* $L_S(s, \operatorname{Pic} \overline{V})$ *se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$. *Cette fonction a un pôle d'ordre* $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ *en 1.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{G}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. La suite exacte (1.5.0) dans [**CTS**] fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic} V \longrightarrow (\operatorname{Pic} \overline{V})^{\mathscr{G}} \longrightarrow \operatorname{Br}(k).$$

Le groupe $\operatorname{Br}(k)$ étant de torsion

$$t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V = \operatorname{rg} (\operatorname{Pic} \overline{V})^{\mathscr{G}}.$$

Or il existe une extension finie de k scindant l'action de $\mathscr{G}$ sur $\operatorname{Pic} \overline{V}$. En tant que $\mathscr{G}$-module, $(\operatorname{Pic} \overline{V}) \otimes \mathbf{C}$ se décompose donc sous la forme

$$\operatorname{Pic} \overline{V} \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \left((\operatorname{Pic} \overline{V})^{\mathscr{G}} \otimes \mathbf{C}\right) \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i$$

où les M_i sont des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{C}$. Soit K une extension galoisienne de k scindant l'action de $\mathscr{G}$ sur $\operatorname{Pic} \overline{V}$. Soit

$$S' = S \bigcup \{\mathfrak{p} \in M_f \mid \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } K/k\}.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S'$, la substitution de Frobenius correspondant à un idéal premier $\mathfrak{P}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ est notée $(\mathfrak{P}, K/k)$ (cf. [**Se1**, §I.8]) et

$$L_{\mathfrak{p}}(s, M_i) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} (\mathfrak{P}, K/k) | M_i)}.$$

La fonction L d'Artin associée à M_i est alors définie par le produit eulérien

$$L_{S'}(s, M_i) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S'} L_{\mathfrak{p}}(s, M_i).$$

On a alors la relation

$$L_{S'}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \zeta_{k,S'}(s)^t \prod_{i \in I} L_{S'}(s, M_i)$$

D'après [**Art**, théorème 7], les produits eulériens $L_{S'}(s, M_i)$ convergent pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ et les fonctions L obtenues se prolongent en des fonctions méromorphes qui sont entières au voisinage de 1. □

Par ailleurs, la densité locale en $\mathfrak{p} \in M_f - S$ est définie comme

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{N(\mathfrak{p})^{\dim(V)}}.$$

Fixons une métrique adélique $(||.||_v)_{v \in M_k}$ sur ω_V^{-1} et notons H la hauteur correspondante. On va alors définir pour tout $v \in M_k$ une mesure ω_v sur $V(k_v)$ d'une manière analogue à celle utilisée dans [**We**]. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des coordonnées locales en $x \in V$. Ces coordonnées définissent un morphisme de variétés f d'un ouvert U de $V_v = V \times k_v$ dans $\mathbf{A}_k^n$ et induisent un homéomorphisme d'un ouvert W pour la topologie v-adique de $V(k_v)$ sur $f(W)$ et un morphisme de faisceaux

$$f^* \Omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \to \Omega_{U/k}$$

et donc

$$\omega(f) : f^* \omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \to \omega_{U/k}.$$

Sur W la mesure ω_v est définie par la relation

$$\omega_v = ||{}^t\omega(f)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x))||_v dx_1 \ldots dx_n.$$

où $dx_{i,v}$ est la mesure de Haar normalisée comme ci-dessus. En particulier si la métrique pour v est définie par une base $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$, alors

$$\omega_v = \frac{1}{\sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)) \right|_v} dx_{1,v} \ldots dx_{n,v}.$$

Ces mesures locales se recollent. En effet, soient $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ deux systèmes de coordonnées définis sur un même ouvert W et correspondant respectivement à f et f'. Il existe un C^ω difféomorphisme

$$\phi : f(W) \to f'(W)$$

tel que $f' = \phi \circ f$. On a alors la relation

$${}^t\omega(\phi)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) = \mathrm{Jac}_x(\phi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\|{}^t\omega(f')^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)(f'^{-1}(x'))\|_v dx'_{1_v}\ldots dx'_{n,v}\\
&=\frac{\|{}^t\omega(f)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(f'^{-1}(x'))\|_v}{|\mathrm{Jac}_{\phi^{-1}(x')}\phi|_v}dx'_{1,v}\ldots dx'_{n,v}\\
&=\|{}^t\omega(f)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(f^{-1}(x))\|_v dx_{1,v}\ldots dx_{n,v}.
\end{aligned}$$

La formule $dx'_{1,v}\ldots dx'_{n,v} = |\mathrm{Jac}_x\phi|_v dx_{1,v}\ldots dx_{n,v}$ se démontrant comme dans [**We**].

Pour tout $v\in M_k$, on pose

$$\lambda_v=\begin{cases} L_v(s,\mathrm{Pic}\,\overline{V}) \text{ si } v\in M_f-S\\ 1 \text{ sinon.}\end{cases}$$

La mesure de Tamagawa correspondant à H et S est alors définie comme

$$\omega_{H,S}=\sqrt{d_k}^{-\dim V}\prod_{v\in M_k}\lambda_v^{-1}\omega_v.$$

La constante

$$\tau_H(V(\boldsymbol{A}_k))=\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s,\mathrm{Pic}\,\overline{V})\,\omega_{H,S}(V(\boldsymbol{A}_k))$$

où $t=\dim\mathrm{Pic}\,V$ ne dépend plus du choix fait pour S. Cependant, comme le fait remarquer Swinnerton-Dyer dans le cas d'une surface cubique ([**SD**]), la constante C qui apparaît est liée en général au problème de l'approximation faible pour la variété V. Bien que cela n'intervienne pas dans les cas que nous considérerons, nous poserons donc

$$\tau_H(V)=\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s,\mathrm{Pic}\,\overline{V})\,\omega_{H,S}(\overline{V(k)})$$

où $\overline{V(k)}$ désigne l'adhérence de $V(k)$ dans $V(\boldsymbol{A}_k)$.

Lemme 2.1.2. — *Pour presque tout* $\mathfrak{p}\in M_k$,

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V(k_{\mathfrak{p}}))=d_{\mathfrak{p}}(V).$$

Démonstration. — Soit $(s_1, \dots, s_q)$ une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$. Il suffit de démontrer que la formule est vraie pour presque tout les $\mathfrak{p}$ tels que

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \inf_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_{\mathfrak{p}}.$$

Or pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$, $\mathscr{V}(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}) = V(k_{\mathfrak{p}})$ puisque V est complète. L'intégrale peut donc se mettre sous la forme

$$\int_{\mathscr{V}(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})} \omega_{\mathfrak{p}} = \sum_{a \in \mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})} \int_{x \equiv a\,(\mathfrak{p})} \omega_{\mathfrak{p}}.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \notin S$, $\omega_{\mathscr{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$ est très ample. Fixons donc un $\mathfrak{p} \notin S$ vérifiant les conditions ci-dessus. Soit $a \in V(k_{\mathfrak{p}})$. On considère des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ sur un ouvert $W \supset \{x \equiv a\,(\mathfrak{p})\}$. On note f le morphisme correspondant et

$$Y_i(x) = s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)).$$

Comme $\omega_{\mathscr{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$ est très ample, pour tout $x \in W$, on a la relation

$$(Y_i(x), 1 \leqslant i \leqslant q) = \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}.$$

Donc

$$\int_{x \equiv a\,(\mathfrak{p})} \omega_{\mathfrak{p}} = \int_{x \equiv a\,(\mathfrak{p})} dx_{1,\mathfrak{p}}\, dx_{2,\mathfrak{p}} \ldots dx_{n,\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-\dim V}. \quad \square$$

Remarque 2.1. — Le choix des coefficients $\lambda_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} \overline{V})$ pour rendre convergent le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} \overline{V})}$$

est inspiré de l'article de Bloch (cf. [**Bl**, p. 69]). On peut l'interpréter de la manière suivante. Par la formule de Lefschetz (cf. [**Se2**]), on a, si $\mathfrak{p} \in M_f - S$ et si l est un nombre premier ne divisant pas $N(\mathfrak{p})$,

$$\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \,|H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l)).$$

Notons $n = \dim V$. La variété $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}$ étant lisse, on a un isomorphisme

$$H^{2n}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_l.$$

Comme $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$ est projective, $\Gamma(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathscr{O}_{\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}})^* = \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}^*$. Par ailleurs, $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$ étant de Fano, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ est isomorphe à $\mathrm{NS}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ et $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ est sans torsion. En outre, $\mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ est de torsion. La suite exacte

$$0 \to \mu_n \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \to 0$$

fournit donc

$$\begin{aligned}&H^1_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l) = 0\\ &\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}_l \tilde{\to} H^2_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l(1)).\end{aligned}$$

Par dualité de Poincaré (cf. [**Mi**, corollaire VI.11.2]) on en déduit que

$$\begin{aligned}&H^{(2n-1)}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l) = 0\\ &H^{(2n-2)}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l(n-1)) \tilde{\to} H^2_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l(1))^\vee \tilde{\to} (\mathrm{Pic}\,\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q}_l)^\vee.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}d_\mathfrak{p}(V) \quad = \quad & 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}\,\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q}_l)\\ & + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(-1)^i}{N(\mathfrak{p})^{\dim V}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l)).\end{aligned}$$

Or, d'après la conjecture de Weil sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (cf. [**De**, théorème 1.6]),

$$\left|\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l))\right| \leqslant \dim H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_l) N(\mathfrak{p})^{\frac{i}{2}}.$$

On obtient donc que

$$d_\mathfrak{p}(V) = 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}\,\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q}_l) + O\left(\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Par conséquent, le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1, \mathrm{Pic}\,\overline{V})}$$

converge. Comme l'a indiqué Swinnerton-Dyer dans [**SD**], on pourrait donc aussi utiliser la série L associée à $H^2_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Q}_l(1))$ qui présente l'avantage de pouvoir être définie en toutes les places et de vérifier des équations fonctionnelles.

Cependant, dans les démonstrations de ce texte, les termes correcteurs apparaissent directement comme valeurs de la fonction L associée au groupe de Picard et c'est pour cette raison que nous avons utilisée cette définition de la mesure de Tamagawa.

Soit t le rang du groupe de Picard de V. L'image de $\operatorname{Pic} V$ dans $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$ est un réseau. Le groupe $\Lambda^t(\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})$ contient donc un générateur canonique et on obtient un isomorphisme

$$\Lambda^{t-1}(\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})^\vee \tilde{\to} \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

Par conséquent un élément x de $\operatorname{Pic} V$ définit une mesure θ_x sur

$$\mathscr{H}_x(\lambda) = \{y \in (\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})^\vee \mid y(x) = \lambda\}.$$

On convient que si $t = 1$ et si x est un générateur de $\operatorname{Pic} V$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\theta_x(\mathscr{H}_x(\lambda)) = 1.$$

On note $C^\vee_{\text{eff}}(V)$ l'ensemble des $y \in (\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})^\vee$ tels que pour tout diviseur effectif D de V on ait

$$y([D]) > 0.$$

Définition 2.1. — Avec les notations ci-dessus, on pose

$$\alpha_c(V) = \theta_{\omega_V^{-1}}(C^\vee_{\text{eff}}(V) \bigcap \mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1))$$

et

$$C_H(V) = \alpha_c(V)\tau_H(V).$$

2.2. La conjecture de Manin raffinée. — Les différents exemples donnés dans la suite de ce texte vérifient la formule suivante

Conjecture 2.2.1. — *On suppose que $V(k)$ est dense dans V et que le complémentaire U des sous-variétés accumulatrices est défini sur k. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \textit{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$.

Il serait sans doute prématuré de conjecturer cette formule dans le cas général. Il paraît relativement plus raisonnable d'énoncer la conjecture suivante

Conjecture 2.2.2. — *Si $V(k)$ est dense dans V et si U le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices est défini sur k, alors il existe une constante $\alpha(V) \in \mathbf{Q}^*$ telle que pour toute métrique sur ω_V^{-1}*

$$n_U(B) \sim \alpha(V)\tau_H(V)B\log^{t-1} B \textit{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$.

Toutefois la seule indication que nous ayons pour une telle formule lorsque V ne vérifie pas l'approximation forte est donnée par la partie 4.3. Il est donc envisageable que d'autres phénomènes interviennent dans ce cas.

2.3. Présentation des résultats. — Les principaux résultats de ce texte sont les suivants

- La formule 2.2.1 est stable par produit de variétés (corollaire 3.0.3).
- Elle coïncide avec les résultats de Schanuel et de Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées si le groupe est quasi-déployé sur k (théorèmes 6.1.1 et 6.2.2).
- Elle est compatible avec les résultats de la méthode du cercle (proposition 4.2.1).
- Elle est également vérifiée par les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ (théorèmes 8.6.1, 9.6.1 et 10.6.1), par celle obtenue en éclatant le 0-cycle $D = (0:1:i)+(0:1:-i)$ sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ (théorème 11.6.1) ainsi que par la variété torique obtenue en éclatant les sous-espaces de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ définis par $X_i = 0$ pour $i \in I$ où I décrit les parties de $\{0, \dots, n\}$ telles que $2 \leqslant \#I \leqslant n$ (théorème 8.6.1). En outre, la plus grande partie des démonstrations des théorèmes 8.6.1, 9.6.1 et 10.6.1 se généralisent à un corps de nombres quelconque.

Dans les différents résultats ci-dessus la formule est vérifiée pour des métriques particulières sur ω_V^{-1}. L'objet de la partie 5 est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que la constante $\alpha(V)$ soit indépendante de la métrique. Cette condition est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées si le groupe est quasi-déployé (proposition 6.2.13). Par conséquent, la formule 2.2.1 est valable pour ces variétés indépendamment du choix de la métrique.

3. Compatibilité de la conjecture avec le produit de variétés

Nous allons maintenant démontrer que la conjecture 2.2.1 est compatible avec le produit de variétés.

Proposition 3.0.1. — *Si V_1 et V_2 sont des variétés de Fano telles que $V_1 \times V_2(k) \neq \varnothing$, H_1 et H_2 des hauteurs sur V_1 et V_2 respectivement, $t_1 = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V_1$ et $t_2 = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V_2$, alors*

$$C_{H_1 H_2}(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!\,(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} C_{H_1}(V_1) C_{H_2}(V_2).$$

Lemme 3.0.2. —

$$\alpha_c(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!\,(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} \alpha_c(V_1) \alpha_c(V_2).$$

Démonstration. — D'après le théorème d'annulation de Kodaira, on a

$$H^i(V_1, \mathscr{O}_{V_1}) = \{0\} \text{ si } i > 0.$$

En particulier, $H^1(V_1, \mathscr{O}_{V_1}) = \{0\}$. Donc, d'après [**Ha**, exercice 3.12.6], on obtient un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Pic} V_1 \times \operatorname{Pic} V_2 & \tilde{\to} & \operatorname{Pic}(V_1 \times V_2) \\ (\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) & \mapsto & \mathscr{L}_1 \boxtimes \mathscr{L}_2 = \pi_1^* \mathscr{L}_1 \otimes \pi_2^* \mathscr{L}_2. \end{array}$$

En outre, comme $V_1 \times V_2(k) \neq \varnothing$, $\mathscr{L}_1 \boxtimes \mathscr{L}_2$ possède une section si et seulement si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ en ont une. Si on note $C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône des classes de diviseurs effectifs dans $\operatorname{Pic} V$, l'isomorphisme ci-dessus induit donc une bijection

$$C_{\mathrm{eff}}(V_1 \times V_2) \tilde{\to} C_{\mathrm{eff}}(V_1) \times C_{\mathrm{eff}}(V_2).$$

Enfin, comme V_1 et V_2 sont non singulières, on a, d'après [**Ha**, page 187], la relation

$$\omega_{V_1 \times V_2} = \omega_{V_1} \boxtimes \omega_{V_2}$$

et la métrique sur $\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}$ est le produit des métriques induites.

Avec les notations de la fin de la partie 2,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_c(V_1 \times V_2) & = & \theta_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}} (C_{\mathrm{eff}}^{\vee}(V_1 \times V_2) \cap \mathscr{H}_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(1)) \\ & = & \theta_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})} (C_{\mathrm{eff}}^{\vee}(V_1) \times C_{\mathrm{eff}}^{\vee}(V_2) \cap \mathscr{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1)). \end{array}$$

Mais

$$\mathscr{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1) = \{(u, v) \in \prod_{i=1}^{2} (\operatorname{Pic}(V_i) \otimes \mathbf{R})^{\vee} \mid u(\omega_{V_1}^{-1}) + v(\omega_{V_2}^{-1}) = 1\}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\theta_{\omega^{-1}_{V_1\times V_2}}(C^\vee_{\mathrm{eff}}(V_1\times V_2)\bigcap \mathscr{H}_{\omega^{-1}_{V_1\times V_2}}(1))\\
&= \int_0^1 \theta_{\omega^{-1}_{V_1}}(C^\vee_{\mathrm{eff}}(V_1)\bigcap \mathscr{H}_{\omega^{-1}_{V_1}}(u))\theta_{\omega^{-1}_{V_2}}(C^\vee_{\mathrm{eff}}(V_2)\bigcap \mathscr{H}_{\omega^{-1}_{V_2}}(1-u))du\\
&= \prod_{i=1}^2 \theta_{\omega^{-1}_{V_i}}(C^\vee_{\mathrm{eff}}(V_i)\bigcap \mathscr{H}_{\omega^{-1}_{V_i}}(1))\int_0^1 u^{t_1-1}(1-u)^{t_2-1}du\\
&= \frac{(t_1-1)!\,(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!}\prod_{i=1}^2 \alpha_c(V_i)
\end{aligned}$$

ce qui montre la formule. □

Démonstration de la proposition 3.0.1. — Comme $V_1 \times V_2(k) = V_1(k)\times V_2(k)$, on obtient que $\tau_{H_1H_2}(V_1\times V_2) = \tau_{H_1}(V_1)\tau_{H_2}(V_2)$, ce qui montre la proposition. □

Corollaire 3.0.3. — *Si V_1 et V_2 sont des variétés de Fano et si pour $i = 1, 2$ le complémentaire U_i des sous-variétés accumulatrices vérifie*

$$n_{U_i}(B) = C_{H_i}(V_i)B\log^{t_i-1}B + O(B\log^{t_i-2}B)$$

où $t_i = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,V_i$, alors

$$n_{U_1\times U_2}(B) = C_{H_1H_2}(V_1\times V_2)B\log^{(t_1+t_2-1)}B + O(B\log^{(t_1+t_2-2)}B).$$

Démonstration. — Ceci résulte de la proposition 3.0.1 et de la proposition 2 de [**FMT**]. □

4. Le cas des intersections complètes non singulières

4.1. Domaine fondamental pour l'action des unités. — Nous allons maintenant exprimer la compatibilité de la constante définie dans la partie 2 avec celle qui serait obtenue par la méthode du cercle.

Soit $W \subset \mathbf{A}^{n+1}_k - \{0\}$ une intersection complète non singulière donnée par les équations

$$f_i(x_0,\dots,x_n) = 0$$

où f_i est une forme homogène de degré d_i pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Soit

$$\pi : \mathbf{A}^{n+1}_k - \{0\} \to \mathbf{P}^n_k$$

la projection canonique. Soit V l'image de W par π. On fait les hypothèses suivantes

- V vérifie l'approximation faible, i.e. $V(k)$ est dense dans $V(\boldsymbol{A}_k)$.
- $\dim V \geqslant 3$ et $n > \sum_{i=1}^{m} d_i$.

Alors V est une variété de Fano. En effet $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(n+1-\sum_{i=1}^{m} d_i)$. On pose

$$\delta = n+1-\sum_{i=1}^{m} d_i > 0.$$

Soit $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille génératrice finie de $\Gamma(V,\omega_V^{-1})$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ les fonctions homogènes de degré δ correspondant aux s_i. La hauteur H correspondante est donnée par

$$\forall x \in W(k),\ H(\pi(x)) = \prod_{v\in M_k} \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |Y_i(x)|_v.$$

Afin de simplifier la démonstration, nous prendrons comme polynômes $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ les monômes de degré δ.

Le problème est que la méthode du cercle donne des résultats sur le cône W, alors qu'ici on se place sur V. L'objet des notations qui suivent est de trouver un système de représentants de V dans W. Comme dans [**Sc**] on définit un domaine fondamental sous l'action des unités de la manière suivante soit $\log_H$ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \log_H : \prod_{v\in M_\infty} W(k_v) & \to & \prod_{v\in M_\infty} \mathbf{R} \\ (x_v)_{v\in M_\infty} & \mapsto & \left(\log\left(\sup_{1\leqslant i\leqslant q} |Y_i(x_v)|_v\right)\right)_{v\in M_\infty}. \end{array}$$

D'après le théorème des unités, le morphisme canonique

$$\begin{array}{rcl} \rho : U_k & \to & \prod_{v\in M_\infty} \mathbf{R} \\ u & \mapsto & (\log |u|_v^\delta)_{v\in M_\infty} \end{array}$$

a pour noyau le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et pour image un réseau L de rang r dans l'hyperplan P défini par $\sum_{v\in M_\infty} y_v = 0$. En outre, ce réseau étant l'image du réseau usuel par $\delta\,\mathrm{Id}$, $\operatorname{Det} L = \delta^r R$. L'application $\log_H$ est compatible avec l'action des unités qui agissent de manière diagonale sur $\prod_{v\in M_\infty} k_v^{n+1}$ et par l'intermédiaire de ρ sur $\prod_{v\in M_\infty} \mathbf{R}$. On projette $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ sur P

selon $(N_v)_{v\in M_\infty}$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{pr}: & \mathbf{R}^{r_1+r_2} & \to & P \\ & (y_v)_{v\in M_\infty} & \mapsto & (y_v - \frac{N_v}{N}\sum\limits_{\lambda\in M_\infty} y_\lambda)_{v\in M_\infty}. \end{array}$$

On choisit $u_1,\dots,u_r$ une base de L. Soit $(u_i^\vee)_{1\leqslant i\leqslant r}$ la base duale. On pose

$$F = \{y\in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leqslant u_i^\vee(\mathrm{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_H = \log_H^{-1}(F).$$

***Lemme 4.1.1* (Schanuel [Sc]).** — *L'ensemble Δ_H vérifie*

(i) Δ_H *est stable sous* $\mu_\infty(k)$,

(ii) $\forall u\in U_k - \mu_\infty(k),\quad u\Delta_H \bigcap \Delta_H = \varnothing$,

(iii) $\bigcup\limits_{u\in U_k} u\Delta_H = \prod\limits_{v\in M_\infty} W(k_v)$.

Pour tout $x\in(\boldsymbol{A}_k)^{n+1}$, on note

$$H_\infty(x) = \prod_{v\in M_\infty}\sup_{1\leqslant i\leqslant q}|Y_i(x_v)|_v$$

et $x_\infty = (x_v)_{v\in M_\infty}$. Pour tout $\mathfrak{b}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$, soit $\Phi_{\mathfrak{b},B} : W(\boldsymbol{A}_k)\to\mathbf{R}$ la fonction caractéristique des $x\in W(\boldsymbol{A}_k)$ tels que

$$\begin{cases} x_\infty\in\Delta_H, \\ \mathfrak{b}_\mathfrak{p}|(x_i)_\mathfrak{p} \text{ pour tout } \mathfrak{p}\in M_f \text{ et } 0\leqslant i\leqslant n, \\ H_\infty(x)\leqslant B. \end{cases}$$

Soit $j : W(k)\to W(\boldsymbol{A}_k)$ l'application naturelle. La méthode du cercle donne alors une majoration du terme $R_\mathfrak{b}$ défini par la relation

$$\sum_{x\in W(k)}\Phi_{\mathfrak{b},B}(x) = \int_{W(\boldsymbol{A}_k)}\Phi_{\mathfrak{b},B}(x)\omega_{\mathrm{HL}}(x) + R_\mathfrak{b}(B)$$

où ω_{HL} est la forme de Leray sur $W(\boldsymbol{A}_k)$ définie par $\frac{1}{\sqrt{d}^{\,n-m+1}}\prod\limits_{v\in M_k}\omega_{\mathrm{L},v}$, où la forme locale $\omega_{\mathrm{L},v}$ est caractérisée par la relation

$$\omega_{\mathrm{L},v}\wedge f^*\left(\bigwedge_{i=1}^m dx_{i,v}\right) = \bigwedge_{i=0}^n dx_{i,v},$$

$f:\mathbf{A}_k^{n+1}\to\mathbf{A}_k^m$ désignant le morphisme défini par les f_i.

4.2. Compatibilité de la conjecture avec la méthode du cercle. — On note $\mu : \mathscr{I}(\mathscr{O}_k) \to \mathbf{Z}$ la fonction de Möbius.

Proposition 4.2.1. — *Avec les notations précédentes,*

(a) *L'entier $n_V(B)$ vérifie*

$$n_V(B) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x).$$

(b) *On a la relation*

$$\frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \int_{W(\boldsymbol{A}_k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x) \omega_{\mathrm{HL}}(x) = C_H(V)B.$$

Remarque 4.1. — La méthode du cercle, lorsqu'elle s'applique fournit donc une majoration de $|n_V(B) - C_H(V)B|$.

Démonstration. — • Nous allons tout d'abord démontrer l'assertion (a) de la proposition on a la relation

$$n_V(B) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} n_{W,\mathfrak{a}}(B)$$

où

$$\begin{aligned} &n_{W,\mathfrak{a}}(B) \\ &= \#\{x \in W(k) \mid H(x) \leqslant B,\ (x_i, 0 \leqslant i \leqslant n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_H\} \\ &= \#\{x \in W(k) \mid H_\infty(x) \leqslant BN(\mathfrak{a})^\delta,\ (x_i, 0 \leqslant i \leqslant n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_H\}. \end{aligned}$$

La formule d'inversion de Möbius permet alors de passer de la relation

$$(x_0, \dots, x_n) = \mathfrak{a}$$

à la relation

$$(x_0, \dots, x_n) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

donnant l'égalité

$$n_{W,\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x). \qquad \square$$

• Nous allons maintenant démontrer la deuxième assertion de la proposition 4.2.1. Celle-ci découle des lemmes qui suivent.

Soit $f : \mathbf{A}^{n+1}_{k_\nu} \to \mathbf{A}^m_{k_\nu}$ l'application induite par les f_i et $H_\nu : k_\nu^{n+1} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$H_\nu(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |Y_i(x)|_\nu.$$

Soit V_0 l'ouvert de $V(k_\nu)$ défini par $x_0 \neq 0$. Soit V_1 un ouvert pour la topologie ν-adique contenu dans V_0 sur lequel $x_1, \dots, x_{n-m}$ définit un sytème de coordonnées. En tout point $x \in \mathbf{P}^n(k_\nu)$ tel que $x_0 = 1$, f induit une application

$$\begin{array}{llll} \tilde{f}_x : & \mathbf{A}^m_{k_\nu} & \to & \mathbf{A}^m_{k_\nu} \\ & (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} & \mapsto & (f_j(1, x_1, \dots, x_{n-m}, x_{n-m+1} + y_1, \dots, x_n + y_m))_{1 \leqslant j \leqslant m} \end{array}$$

Lemme 4.2.2. — *Sur l'ouvert* V_1

$$\omega_\nu = \frac{1}{H_\nu(\rho^{-1}(x)) |\mathrm{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1} x}|_\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n-m,\nu}$$

où ρ *est l'application* $V_1 \to \mathbf{A}^{n-m}_{k_\nu}$.

Démonstration. — Rappelons tout d'abord la construction de l'isomorphisme

$$\mathscr{O}_V(\delta) \tilde{\to} \omega_V^{-1}.$$

Soit U_0 l'ouvert de $\mathbf{P}^n_{k_\nu}$ défini par $x_0 \neq 0$. On a une suite exacte

$$\mathscr{O}^m_{U_0} \otimes \mathscr{O}_{V_0} \xrightarrow{\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)} \mathscr{O}^n_{U_0} \otimes \mathscr{O}_{V_0} \to \Omega^1_{V_0/k} \to 0$$

Donc si $g \in \Gamma(V, \mathscr{O}_V(\delta))$, g est donné par un polynôme homogène de degré δ et l'élément associé $\theta \in \Gamma(V_0, \omega_V^{-1})$ est défini par la relation suivante pour tout $x = (1 : x_1, \dots : x_n) \in V_0$ tel que $g(x) \neq 0$,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \theta^\vee(x) \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)(x)$$

où $\theta^\vee$ est la section de ω_V duale de θ. Pour tout $x \in V_0$, on a alors

$$||\theta(x)||_\nu = \frac{|g(1, x_1, \dots, x_n)|_\nu}{H_\nu(1, x_1, \dots, x_n)}.$$

La section ${}^t\omega(\rho)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n-m}}\right)$ de ω_V^{-1} correspond donc à une fonction rationnelle homogène g telle que, pour tout $x = (1, x_1, \dots, x_n) \in V_0$,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-m} \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m).$$

La fonction définie par pour tout $x \in V_0$

$$g(x) = \left(\mathrm{Jac}_0 \tilde{f}_x\right)^{-1}$$

convient donc. Le lemme s'en déduit directement. □

Lemme 4.2.3. — *Soient $\mathfrak{p} \in M_f$, g et h deux fonctions positives et localement constantes sur $k_\mathfrak{p}^{n+1} - \{0\}$ telles que*

$$\forall \lambda \in k_\mathfrak{p},\ \forall x \in k_\mathfrak{p}^{n+1},\ g(\lambda x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^p g(x) \text{ et } h(\lambda x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^q h(x)$$

où p et q sont des entiers tels que $p + q = n + 1$. On suppose en outre que pour tout $x \in k_\mathfrak{p}^{n+1} - \{0\}$, il existe $\lambda \in k_\mathfrak{p}$ tel que $h(x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^q$. Soit U_1 un ouvert de $\mathbf{P}^n(k_\mathfrak{p})$ pour la topologie ν-adique contenu dans l'ouvert $x_0 \neq 0$ et sur lequel gh ne s'annule pas. On note CU_1 le cône au-dessus de U_1. On a alors la relation

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \zeta_\mathfrak{p}(q) \int_{U_1} \frac{1}{gh} dx_1 \dots dx_n = \int_{\{x \in CU_1 | H(x) \leqslant 1\}} \frac{1}{g} dx_0 \dots dx_n.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat pour un ouvert U_1 où les fonctions considérées $g(1, x_1, \dots, x_n)$ et $h(1, x_1, \dots, x_n)$ sont constantes. On peut également supposer que U_1 est de la forme $B(P_0, \varepsilon)$ pour un $P_0 \in U_0$ et un $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On se ramène alors à $g = 1$ sur U_1. Comme h vérifie la condition

$$\forall x \in k_\mathfrak{p}^{n+1} - \{0\},\ \exists \lambda \in k_\mathfrak{p}^* / H(x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^q$$

on peut également se ramener à $h = 1$ sur U_1. On peut ensuite supposer $\varepsilon = 1$ et $P_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$. On obtient que le résultat du lemme vaut à une constante multiplicative fixe près. La valeur de la constante est alors obtenue en calculant les deux termes pour $U_1 \subset \mathbf{A}_{k_\mathfrak{p}}^{q-1} \times \mathbf{A}_{k_\mathfrak{p}}^{n-q+1}$ défini par $|x_i - 1|_\mathfrak{p} < 1$ si $i \geqslant q$,

$$h = \sup_{0 \leqslant i \leqslant q-1} |x_i|_\mathfrak{p}^q \text{ et } g = \sup_{q \leqslant i \leqslant n} |x_i|_\mathfrak{p}^{n-q+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de constater que, après s'être ramené à $q = n + 1$, l'intégrale de droite est, d'après le lemme 2.1.2, $d_\mathfrak{p}(\mathbf{P}_{k_\mathfrak{p}}^n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{N(\mathfrak{p})^i}$ tandis que l'intégrale de gauche vaut 1. □

Lemme 4.2.4. — *Soit $\mathfrak{p} \in M_f$. Pour tout $x \in W(k_\mathfrak{p})$, notons*

$$H_\mathfrak{p}(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |Y_i(x)|_\mathfrak{p}.$$

Alors

$$\int_{\{x\in W(k_{\mathfrak p})\mid H_{\mathfrak p}(x)\leqslant 1\}} \omega_{\mathrm{L},\mathfrak p}(x) = \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak p)}\right)\zeta_{\mathfrak p}(\delta)\,\omega_{\mathfrak p}(V(k_{\mathfrak p})).$$

Démonstration. — Ce lemme résulte du lemme 4.2.2 et du lemme 4.2.3 que l'on applique avec $g = |\mathrm{Jac}_0 \tilde f_{\rho^{-1}(x)}|_{\mathfrak p}$ qui, vue comme fonction en les coordonnées homogènes, vérifie l'équation du lemme 4.2.3 avec $p = \sum_{i=1}^{m}(d_i-1)$. En effet la mesure de Leray est définie localement par

$$\frac{1}{|\mathrm{Jac}_0 \tilde f_{\rho^{-1}(x)}|_{\mathfrak p}} dx_{0,\mathfrak p}\dots dx_{n-m,\mathfrak p}. \qquad \square$$

Lemme 4.2.5. — *Pour les places archimédiennes, on a la relation*

$$\int_{\prod_{v\in M_\infty} W(k_v)} \chi_{\{x\in\Delta_H\mid H_\infty(x)\leqslant B\}} \prod_{v\in M_\infty}\omega_{\mathrm{L},v} = B\frac{\sqrt{d}w}{h\delta}\lim_{s\to 1}\zeta_k(s)(s-1)\prod_{v\in M_\infty}\omega_v(V(k_v)).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat analogue pour un ouvert U_1 pour le produit des topologies v-adiques sur lequel $x_{1,v},\dots x_{n-m,v}$ définissent un système de coordonnées. On note CU_1 le cône au-dessus de U_1. Par définition de la mesure de Leray, le membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} L &= \int_{\{x\in\Delta_H\bigcap CU_1\mid H_\infty(x)\leqslant B\}} \prod_{v\in M_\infty}\frac{1}{|\mathrm{Jac}_0\tilde f_{\rho^{-1}(x)}|_v} dx_{0,v}\dots dx_{n-m,v}\\ &= B\int_{\mathscr{V}_1}\frac{1}{\prod_{v\in M_\infty}|\mathrm{Jac}_0\tilde f_{\rho^{-1}(x)}|_v}\prod_{v\in M_\infty} dx_{0,v}\dots dx_{n-m,v}\end{aligned}$$

où $\mathscr{V}_1$ désigne l'ensemble des $x\in CU_1$ tels que

$$\begin{cases} \prod_{v\in M_\infty}\sup_{0\leqslant i\leqslant q}|Y_i(x_v)|_v\leqslant 1\\ (\log(\sup_{0\leqslant i\leqslant q}|Y_i(x_v)|_v))_{v\in M_\infty}\in F.\end{cases}$$

Notons $M_{\mathbf{R}} = \{v \in M_\infty \mid N_v = 1\}$ et $M_{\mathbf{C}} = \{v \in M_\infty \mid N_v = 2\}$. Pour tout $v \in M_{\mathbf{C}}$, on utilise des coordonnées polaires pour $x_{0,v}$. On note

$$\iota : \prod_{v \in M_\infty} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_v \dim V} \to \prod_{v \in M_\infty} k_v^{\dim V + 1}$$

le produit des applications définies par

$$\begin{array}{rcl} \iota_v : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_v \dim V} & \to & k_v^{\dim V+1} \\ (x_0, (x_{j,l})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \dim V \\ 1 \leqslant l \leqslant 2}}) & \mapsto & (x_0, (x_{j,1} + i x_{j,2})_{1 \leqslant j \leqslant \dim V}) \end{array}$$

si $N_v = 2$ et de manière similaire si $v \in M_{\mathbf{R}}$. On obtient alors

$$L = B 2^{r_2(\dim V + 1)} (2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \int_{\mathscr{V}_2} \frac{\prod_{v \in M_{\mathbf{C}}} x_{0,v}}{\prod_{v \in M_\infty} |\mathrm{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1} \iota(x)}|_v} dx$$

où $\mathscr{V}_2$ désigne l'ensemble des $x \in \prod_{v \in M_\infty} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_v \dim V}$ tels que

$$\begin{cases} \iota(x) \in CU_1 \\ \prod_{v \in M_\infty} H_v \iota_v(x_v) \leqslant 1 \\ \Big(\log(H_v \iota_v(x_v))\Big)_{v \in M_\infty} \in F. \end{cases}$$

On fait alors le changement de variables

$$\begin{array}{ll} v_v = H_v \iota_v(x_v) & \text{pour } v \in M_\infty \\ v_{j,v} = \dfrac{x_{j,v}}{x_{0,v}} & \text{pour } v \in M_\infty \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant N_v \dim V. \end{array}$$

La Jacobienne est le produit pour $v \in M_\infty$ des déterminants suivants

$$\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_0} & \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_1} & \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_{N_v \dim V}} \\ -\frac{x_1}{x_0^2} & \frac{1}{x_0} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0^2} & 0 & \frac{1}{x_0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{x_{N v \dim V}}{x_0^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{x_0} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{x_0^{N_v \dim V}} \left(\frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{N_v \dim V} \frac{x_i}{x_0^2} x_0 \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_i} \right)$$

$$= \frac{1}{x_0^{N_v \dim V + 1}} \left(\sum_{i=0}^{N_v \dim V} x_i \frac{\partial H_v \iota_v}{\partial x_i} \right)$$

$$= \frac{N_v \delta}{x_0^{N_v \dim V + 1}} H_v \iota_v$$

$$= \frac{N_v \delta}{x_0^{N_v (\dim V - \delta) + 1}} H_v \iota_v \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{nN_v}}{x_0} \right).$$

En utilisant le lemme 4.2.2 et le fait que la fonction $x \mapsto |\mathrm{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}\iota(x)}|_v$ est homogène de degré $N_v \sum_{i=1}^{m} (d_i - 1)$, on obtient

$$L = B(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} 2^{r_2} \frac{1}{2^{r_2} \delta^{r_1 + r_2}} \left(\prod_{v \in M_\infty} \omega_v \right) (U_1) \int_{\substack{\prod_{v \in M_\infty} u_v \leqslant 1 \\ (\log u_v)_{v \in M_\infty} \in F}} \prod_{v \in M_\infty} du_v.$$

On fait alors le changement de variables $w_0 = \prod_{v \in M_\infty} v_v$ et $w_i = u_i^\vee(\mathrm{pr}(v))$ si $1 \leqslant i \leqslant r$ où u_i désigne la base du réseau L introduite dans la partie 4.1. Comme dans [**Sc**], on en déduit que

$$L = B(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \frac{1}{\delta^{r_1 + r_2}} \left(\prod_{v \in M_\infty} \omega_v \right) (U_1) \delta^r R.$$

La formule de Dirichlet montre alors le résultat. □

Lemme 4.2.6. — *La constante α est donnée par*

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}.$$

Démonstration. — Comme $\dim V \geqslant 3$, le théorème de Lefschetz (cf. [**SGA2**, exposé XII]) implique que $\operatorname{Pic} V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\mathscr{O}_V(1)$. Or $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(\delta)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha_c(V) &= \theta_{\omega_V^{-1}}(\mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\text{eff}}^{\vee}(V)) \\ &= \frac{1}{\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

Démonstration de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1. — D'après ce qui précède, $\operatorname{Pic} V$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 impliquent donc que

$$\int_{W(\boldsymbol{A}_k)} \phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b},BN(\mathfrak{a})^\delta}\omega_{\text{HL}} = B\frac{w \lim_{s\to 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta h \sqrt{d}^{\dim V}} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \prod_{v\in M_\infty} \omega_v(V(k_v)) \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \frac{\omega_{\mathfrak{p}}(V(k_{\mathfrak{p}}))}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} \overline{V})}.$$

Le terme de gauche dans l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 s'écrit donc

$$B\frac{\zeta_k(\delta)}{\delta} \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta}\tau_H(V(\boldsymbol{A}_k)).$$

Mais

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta} = \frac{1}{\zeta_k(\delta)}$$

et $\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}$. □

En appliquant le théorème 1 de [**Bir**], on obtient le corollaire suivant

Corollaire 4.2.7. — *Si $d_1 = \cdots = d_m = d \geqslant 2$, $k = \mathbf{Q}$, si $n > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$ et si H est défini par une famille génératrice $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ telle que les s_i correspondent à des monômes M_i de degré δ avec $M_i = X_i^\delta$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ alors*

$$n_V(B) \sim C_H(V)B \text{ lorsque } B \to +\infty.$$

Démonstration. — Comme $k = \mathbf{Q}$, on a $\Delta_H = \prod_{v\in M_\infty} W(k_v)$. En outre, on a supposé que les $n+1$ premières sections de la famille choisie sont induites par les monômes X_i^δ. On peut donc appliquer le théorème 1 de [**Bir**] pour obtenir que

$$|R_{\mathbf{Z}}(B^\delta)| \leqslant CB^{\delta-\varepsilon}$$

avec des constantes C et ε strictement positives. Par conséquent

$$R_{(n)}(B^{\delta}) \leqslant C\left(\frac{B}{n}\right)^{\delta-\varepsilon}.$$

Soit $g(B,n) = R_{(n)}(B^{\delta})$. On déduit du lemme 12 de [**Sc**] que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^+} \mu(n)g(B,n) = O(B^{\delta-\varepsilon}). \quad \square$$

4.3. Le cas de la surface cubique étudiée par Heath-Brown. — Dans [**HB**], Heath-Brown décrit un test numérique réalisé pour la surface V définie par l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = kT^3$$

avec $k = 2$ ou 3. D'après [**HB**, theorem 1], cette variété ne vérifie pas l'approximation faible. Les résultats de ce test fait sur les points de hauteur inférieure à 1000 donne un comportement asymptotique de la forme

$$n_V(B) \sim C_{\mathrm{HB}}(V)B.$$

Cette constante $C_{\mathrm{HB}}(V)$ peut, d'après [**SD**], se mettre sous la forme

$$C_{\mathrm{HB}}(V) = \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}(s-1)L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\prod_{v\in M_k}\sigma_v$$

où $S = \{p|3k\}$ et pour tout $v \in M_{\mathbf{Q}}$

$$\sigma_v = \lambda_v^{-1}\int_{\substack{H_v(x,y,z,t)\leqslant 1\\ f(x,y,z,t)=0}} \frac{dx\,dy\,dz}{\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|_v}$$

avec $f(x,y,z,t) = x^3 + y^3 + z^3 - kt^3$ et

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V}) & \text{si } v \in M_f - S\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Or le lemme 4.2.4 implique que pour tout nombre premier p

$$\sigma_p = \left(1-\frac{1}{p}\right)\zeta_p(1)\lambda_p^{-1}\omega_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \lambda_p^{-1}\omega_p(V(\mathbf{Q}_p))$$

et par le lemme 4.2.5, comme $k = \mathbf{Q}$, on a

$$\sigma_\infty = 2\omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

donc $C_{\mathrm{HB}}(V) = \frac{1}{3}\tau_H(V(\boldsymbol{A}_k))$. Or, d'après [**CTS**, page 430], $\operatorname{Pic} V$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de dimension 1 et $\alpha_c(V) = 1$. En outre comme dans [**SD**] on a

$$\frac{1}{3}\tau_H(V(\boldsymbol{A}_k)) = \tau_H(\overline{V(k)}).$$

On obtient donc

Proposition 4.3.1. — *Avec les notations ci-dessus,*

$$C_{\mathrm{HB}}(V) = C_H(V).$$

5. Indépendance vis-à-vis de la construction de la hauteur

On note V une variété de Fano telle que ω_V^{-1} soit très ample. Les hauteurs considérées ici sont définies par des systèmes de métriques relatifs au faisceau ω_V^{-1}. On reprend les notations de la partie 2.

Définition 5.1. — On fixe un ouvert U de V. Pour toute hauteur H sur V et tout ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ on note

$$n_{H,W}(B) = \#\{x \in U(k) \bigcap W \mid H(x) \leqslant B\}.$$

On dira qu'un ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ est bon si et seulement si il existe une hauteur H sur V telle que $\omega_{H,S}(\partial W) = 0$. Cette condition est alors vérifiée pour toute hauteur H.

On dit alors que les points rationnels de V sont équidistribués sur U ou que V vérifie la propriété (E_U) si et seulement si il existe un choix de la hauteur H sur V tel que pour tout bon ouvert W de $U(\boldsymbol{A}_k)$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{n_{H,W}(B)}{n_U(B)} & \to & \dfrac{\omega_{H,S}(\overline{V(k)} \cap W)}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}. \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

Remarques 5.1. — (1) Il est clair que si V contient des sous-variétés accumulatrices alors V ne vérifie pas (E_V). La question de savoir si (E_U) est vérifiée n'est en fait pertinente que si U est inclu dans le complémentaire des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que l'on suppose par la suite.

(2) La raison pour laquelle on ne considère que les bons ouverts est que la condition ne peut être vérifiée par tout les ouverts W. En effet soit $v_0 \in M_\infty$. L'ensemble $V(k)$ étant dénombrable, $\omega_{v_0}(V(k)) = 0$. Or la mesure ω_{v_0} est régulière. Pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, il existe donc un ouvert W_{v_0} de $V(k_{v_0})$ tel que

$V(k) \subset W_{v_0}$ et $\omega_{v_0}(W_{v_0}) < \varepsilon$. Prenons pour W le produit $W_{v_0} \times \prod_{\substack{v \in M_k \\ v \neq v_0}} V(k_v)$.

On obtient que

$$n_{H,W}(B) = n_U(B)$$

mais

$$\omega_{H,S}(\overline{V(k)} \bigcap W) \leqslant \varepsilon\, \omega_{H,S}(V(\boldsymbol{A}_k)).$$

Proposition 5.0.1. — (a) *La propriété (E_V) est compatible avec les résultats de la méthode du cercle au sens de la proposition 4.2.1.*

(b) *Si V vérifie (E_U) pour une hauteur H alors, pour toute fonction continue f sur $V(\boldsymbol{A}_k)$, on a*

$$\lim_{B \to +\infty} \frac{\sum_{\{x \in U(k) \mid H(x) \leqslant B\}} f(x)}{n_U(B)} = \frac{\int_{\overline{V(k)}} f\,\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

(c) *Si V vérifie (E_U) et la formule 2.2.1 pour une même hauteur H, alors elle les vérifie pour toute hauteur relative au faisceau ω_V^{-1}.*

(d) *Si V vérifie la conjecture de Manin raffinée, alors elle vérifie la propriété (E_U) où U désigne le complémentaire des sous-variétés accumulatrices.*

Remarque 5.2. — On verra par la suite que la propriété (E_V) est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé.

Démonstration de la proposition. — • L'assertion (a) se démontre comme la proposition 4.2.1. En effet, les démonstrations des lemmes 4.2.3 et 4.2.5 montrent que si g est de la forme $\prod_{v \in S'} g_v$ pour un ensemble fini S' de places de k et g_v des fonctions continues sur $V(k_v)$, alors, avec les notations de la partie 4, on a

$$\int_{W(\boldsymbol{A}_k)} g \circ \pi \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta} \omega_{\mathrm{HL}} = B \frac{w \lim_{s \to 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta h} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \int_{V(\boldsymbol{A}_k)} g\,\omega_{H,\varnothing}.$$

Or si O est un bon ouvert de $V(\boldsymbol{A}_k)$, alors il existe une suite d'applications $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de la forme ci-dessus telles que

$$\int_{V(\boldsymbol{A}_k)} |\chi_O - g_i|\,\omega_{H,\varnothing} \quad \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

ce qui implique l'analogue de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 pour l'ouvert O. L'analogue de l'assertion (a) de la proposition 4.2.1, c'est à dire

$$\sum_{\{x\in V(k)|H(x)\leqslant B\}} \chi_O(x) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x\in W(k)} \chi_{O}\circ\pi(x)\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b},BN(\mathfrak{a})^\delta}(x)$$

se démontre exactement comme dans la partie 4.

• Démontrons l'assertion (b). Elle est vérifiée par les fonctions caractéristiques des bons ouverts de $V(\boldsymbol{A}_k)$ et donc par toute combinaison linéaire de telles fonctions. Or les bons ouverts forment une base de la topologie de $V(\boldsymbol{A}_k)$ qui est compact. On peut donc approcher f de manière uniforme par des applications de la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i\chi_{W_i}$ où les W_i sont de bons ouverts de $V(\boldsymbol{A}_k)$.

• Pour démontrer (c), on constate tout d'abord que pour toute hauteur H', la fonction $\frac{H}{H'}$ est bien définie sur $V(\boldsymbol{A}_k)$. En outre

$$\frac{H}{H'} = \prod_{v\in S'} \frac{H_{2,v}}{H_{1,v}}$$

où S' est un ensemble fini de places. Par conséquent $\frac{H}{H'}$ est continue et partout non nulle. Si V vérifie (E_U), alors pour toute fonction caractéristique χ_W d'un bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$, on a

$$\frac{\#\{x\in U(k)\mid H(x)\leqslant \chi_W B\}}{n_U(B)} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_{V(k)} \chi_W\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

Cette relation est également vraie pour une combinaison linéaire de telles fonctions. On approche alors $\frac{H}{H'}$ de manière uniforme en utilisant le fait que

$$\frac{\#\{x\in U(k)\mid B\leqslant H(x)\leqslant B(1+\varepsilon)\}}{n_U(B)} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon.$$

• Démontrons maintenant l'assertion (d). On fixe une hauteur H sur V. Nous allons démontrer l'assertion (E_U) pour H. On montre tout d'abord le résultat pour un ouvert élémentaire W de $V(\boldsymbol{A}_k)$, c'est à dire de la forme $W = \prod_{v\in M_k} W_v$ où, quel que soit $v\in M_k$, $\omega_v(\partial W_v) = 0$ et, pour presque tout $v\in M_k$,

$W_v = V_v(k_v)$. On note S_W l'ensemble des places telles que $W_v \neq V_v(k_v)$. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Comme $\omega_v(\partial W_v) = 0$ pour tout $v \in S_W$ il existe des fonctions continues f_v et g_v de $V(k_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ telles que

$$0 \leqslant f_v \leqslant \chi_{W_v} \leqslant g_v \leqslant 1 \text{ et } \int_{V(k_v)} (g_v - f_v)\omega_v \leqslant \frac{\varepsilon}{8\omega_v(V_v)}.$$

On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$ et

$$\tilde{f}_v = (1-\eta)f_v + \eta \text{ et } \tilde{g}_v = (1-\eta)g_v + \eta$$

si $v \in S_W$ et $\tilde{f}_v = \tilde{g}_v = 1$ sinon. On définit alors $f = \prod_{v \in M_k} \tilde{f}_v$ et $g = \prod_{v \in M_k} \tilde{g}_v$. Alors $\frac{H}{f}$ et $\frac{H}{g}$ sont des hauteurs sur V et, par hypothèse, on a les équivalences

$$\#\{x \in U(k) \mid \frac{H}{f}(x) \leqslant B\} \sim C_0 \int_{\overline{V(k)}} f\,\omega_{H,S}\, B \log^{t-1} B$$

et

$$\#\{x \in U(k) \mid \frac{H}{g}(x) \leqslant B\} \sim C_0 \int_{\overline{V(k)}} g\,\omega_{H,S}\, B \log^{t-1} B.$$

où

$$\frac{C_0}{\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic} \overline{V})} \in \mathbf{Q}.$$

On obtient donc

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leqslant Bf(x)\}}{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leqslant B\}} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_{\overline{V(k)}} f\, d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}$$

et on a une limite analogue pour g. Il existe donc B_0 tel que pour tout $B > B_0$ on ait

$$\frac{\int_{\overline{V(k)}} f\, d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} - \frac{\varepsilon}{8} \leqslant \frac{\#\left\{x \in U(k) \,\middle|\, H(x) \leqslant \prod_{v \in S_W}((1-\eta)\chi_{W_v}(x)+\eta)B\right\}}{n_U(B)} \leqslant \frac{\int_{\overline{V(k)}} g\, d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Or

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leqslant \eta B\}}{n_U(B)} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \eta.$$

Donc, pour B assez grand,

$$\left| \frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leqslant \chi_W(x)B\}}{n_U(B)} - \frac{\int_{\overline{V(k)}} \chi_W \,\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} \right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4} + 4\frac{\varepsilon}{8}.$$

On en déduit alors que pour tout $W \subset V(\boldsymbol{A}_k)$ appartenant à l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts élémentaires

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\#\{x \in W \bigcap U(k) \mid H(x) \leqslant B\}}{n_U(B)} & \to & \dfrac{\int_{\overline{V(k)}} \chi_W \omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}. \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

Le cas général s'obtient en construisant pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ et tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ des éléments W' et W'' de cette algèbre tels qu'on ait les relations

$$\chi_{W'} < \chi_W < \chi_{W''} \text{ et } \omega_{H,S}(W'' - W') < \varepsilon.$$

Là encore on utilise le fait que $\omega_{H,S}(\partial W) = 0$. □

6. Compatibilité de la conjecture avec les résultats de Schanuel, Franke, Manin et Tschinkel

6.1. Le cas de l'espace projectif. — Nous allons maintenant vérifier que $C_H(\mathbf{P}_k^n)$ coïncide avec la constante obtenue par Schanuel.

Proposition 6.1.1. —

$$C_{\mathrm{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \frac{h_k}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w} = \frac{1}{n+1} \tau_H(\mathbf{P}_k^n) = C_H(\mathbf{P}_k^n).$$

Remarque 6.1. — Ce résultat découle également du corollaire 6.2.16. Toutefois nous en donnons ici une démonstration directe.

Démonstration. — Grâce à la formule de Dirichlet, on peut réécrire $C_{\mathrm{Sch}}(\mathbf{P}_k^n)$ sous la forme

$$C_{\mathrm{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \left(\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_k(s) \right) \frac{1}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^n (n+1)^{r_1+r_2-1}.$$

Mais, par définition de la fonction ζ_k, on a la relation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta_k(n+1)} &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{n+1}}\right)\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{N(\mathfrak{p})^k}\right)\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\frac{d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}^n_k)}{L_{\mathfrak{p}}(1,\mathbf{P}^n_{\overline{k}})}.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la volume à l'infini de $\mathbf{P}^n_{k_v}$ correspondant à notre choix de la hauteur. Dans le cas où $k_v = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\omega_v(\mathbf{P}^n(k_v)) &= \int_{\mathbf{R}^n}\inf\left(1, \inf_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{|\,x_i\,|_v^{n+1}}\right)\right)dx_1\,dx_2\dots dx_n\\
&= 2^n\left(1+n\int_1^{+\infty}\frac{x_1^{n-1}}{x_1^{n+1}}dx_1\right)\\
&= 2^n\times(n+1)
\end{aligned}$$

et, dans le cas où $k_v = \mathbf{C}$, en remarquant que, avec nos notations, $|\,.\,|_v = |\,.\,|^2$

$$\omega_v(\mathbf{P}^n(k_v)) = 2^n \int_{\substack{0\leqslant\theta_i\leqslant 2\pi \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant r_i \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n}}\inf\left(1, \inf_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{r_i^{2(n+1)}}\right)\right)\prod_{i=1}^{n} r_i\,dr_i\,d\theta_i.$$

En faisant le changement de variables $u_i = r_i^2$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\omega_v(\mathbf{P}^n(k_v)) &= (2\pi)^n\frac{1}{2^n}\omega_v(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}))\\
&= (2\pi)^n(n+1).
\end{aligned}$$

En définitive la constante C s'écrit

$$C = \frac{1}{n+1}\frac{\prod_{v\in M_\infty}\omega_v(\mathbf{P}^n(k_v))}{\sqrt{d}^{\,n}}\left(\lim_{s\to 1}(s-1)L(s,\operatorname{Pic}\mathbf{P}^n_{\overline{k}})\right)\prod_{\mathfrak{p}\in M_k}\frac{d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}^n_k)}{L_{\mathfrak{p}}(1,\operatorname{Pic}\mathbf{P}^n_{\overline{k}})}$$

ce qui est la constante recherchée. □

6.2. Le cas des variétés de drapeaux généralisées

6.2.1. *Notations*. — Nous allons maintenant comparer la constante obtenue par Franke, Manin et Tschinkel dans le cas des variétés de drapeaux généralisées (cf. [**FMT**, (2.11)]) avec $C_H(P\backslash G)$.

On fixe donc un groupe linéaire semi-simple connexe G sur k et P un k-sous-groupe parabolique de G. On note $V = P\backslash G$ et $\pi : G \to V$ la projection canonique. Quitte à remplacer G par son k-revêtement universel $\tilde{G}$ (cf. [**BoTi**, proposition 2.24]) et P par son image réciproque dans $\tilde{G}$, on peut se ramener au cas où G est simplement connexe. On note ${}_kP$ un k-sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P. Pour tout groupe algébrique linéaire H sur un corps L de caractéristique 0, $\mathrm{L}(H)$ désigne l'algèbre de Lie de H, $\mathscr{R}H$ son radical, $\mathscr{R}_uH$ son radical unipotent, $X^*(H)_L$ le groupe des caractères de H sur L et $X_*(H)_L$ le groupe des cocaractères de H sur L. On note ${}_kS$ la composante scindée du tore maximal dans $\mathscr{R}\,{}_kP$. Soit ${}_k\Phi$ l'ensemble des racines de ${}_kS$ dans G, ${}_k\Delta$ la base de ${}_k\Phi$ correspondant à ${}_kP$ et ${}_k\Phi^+$ l'ensemble des racines positives. Pour tout $\alpha \in {}_k\Phi$, on note $\check{\alpha}$ la coracine correspondante.

Pour toute partie J de ${}_k\Delta$, on note $[J]$ l'ensemble des racines s'écrivant comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de J, $[J]^+$ l'intersection de $[J]$ avec ${}_k\Phi^+$, ${}_kP_J$ le k-sous-groupe parabolique standard correspondant (cf. [**Bo**, page 234]) et ${}_kS_J$ le tore

$$ {}_kS_J = \left(\bigcap_{\alpha \in J} \operatorname{Ker} \alpha \right)^{\circ}. $$

Le tore ${}_kS_J$ est la composante scindée du tore maximal dans $\mathscr{R}({}_kP_J)$. L'application de restriction de $X^*({}_kP_J)_k$ dans $X^*({}_kS_J)_k$ est injective et de conoyau fini. On identifiera $X^*({}_kP_J)_k$ à son image. On note également

$$ \mathfrak{s}_J = X_*({}_kS_J)_k \otimes \mathbf{R}, \quad \mathfrak{s}_J^{\vee} = X^*({}_kS_J) \otimes \mathbf{R} $$

et $\mathfrak{r}_J$ le radical de $\mathrm{L}({}_kP_J)$. On désigne par $\Phi(J)^+$ l'ensemble des racines de ${}_kS_J$ dans $\mathfrak{r}_J$ et $\rho_{{}_kP_J}$ la demi-somme de ces racines comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans $\mathfrak{r}_J$. Si V_J désigne le quotient ${}_kP_J\backslash G$ et $\pi_J : G \to V_J$ la projection canonique, on a, d'après [**San**, proposition 6.10] une suite exacte

$$ 0 \to k[V_J]^*/k^* \to k[G]^*/k^* \to X^*({}_kP_J)_k \to \operatorname{Pic} V_J \to \operatorname{Pic} G. $$

Par le théorème de Rosenlicht [**Ro**, theorem 3] $k[G]^*/k^*$ est isomorphe a $X^*(G)_k$ qui est trivial. En outre par [**San**, lemme 6.9 (iii)], $\operatorname{Pic} G$ est trivial puisque G est simplement connexe. On obtient donc un isomorphisme

$$X^*({}_kP_J)_k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} V_J.$$

On vérifie aisément que cet isomorphisme est l'application qui à tout caractère χ de ${}_kP_J$ associe le faisceau $\mathscr{L}_\chi$ défini par

$$\Gamma(U, \mathscr{L}_\chi) = \{f \in \Gamma(\pi_J^{-1}(U), \mathscr{O}_G) \mid \forall p \in {}_kP_J,\ \forall g \in \pi_J^{-1}(U) f(pg) = \chi(p) f(g)\}$$

pour tout ouvert U de V_J. Cet isomorphisme envoie $2\rho_{{}_kP_J}$ sur le faisceau canonique ω_{V_J}. Par définition on a ${}_kP = {}_kP_\varnothing$. Nous noterons I la partie de ${}_k\Delta$ correspondant à P. On a donc la relation

$$\omega_V = \mathscr{L}_{2\rho_P}. \tag{6.2.1}$$

Pour toute place v de k, on note K_v un sous-groupe compact maximal de $G(k_v)$ tel que

$$G(k_v) = {}_kP(k_v)K_v.$$

L'existence de tels sous-groupes est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa (cf. [**Tit**, §3.3.2] pour le cas d'un corps local). On suppose en outre qu'il existe un plongement $G \to GL_{n,k}$ tel que pour presque tout $v \in M_f$ on ait

$$K_v = G \bigcap GL_n(\mathscr{O}_{k_v}).$$

On pose $K = \prod_{v \in M_k} K_v$. On a alors $G(\boldsymbol{A}_k) = {}_kP(\boldsymbol{A}_k)K$. La hauteur d'un point $x \in V(k)$ relativement à un faisceau ample $\mathscr{L}_\chi$ est défini de la manière suivante (cf. [**FMT**, §2]) soit $s \in \Gamma(V, \mathscr{L}_\chi)$ une section de $\mathscr{L}_\chi$ non nulle en x correspondant à une fonction $\tilde{s} \in \Gamma(G, \mathscr{O}_G)$, soit $k \in K$ tel que, pour tout $v \in M_k$, $\pi(k_v) = x$, alors

$$H_\chi(x) = \prod_{v \in M_k} |\tilde{s}(k_v)|_v^{-1}.$$

L'hypothèse sur K entraîne que ce produit n'a qu'un nombre fini de termes non triviaux et la formule du produit qu'il est indépendant du choix de la section s. Dans la suite de cette section, on utilisera la hauteur

$$H = H_{-2\rho_P} \tag{6.2.2}$$

correspondant à ω_V^{-1} d'après (6.2.1).

On note ${}_kW$ le groupe de Weyl de ${}_k\Phi$. et ${}_kW_J$ le sous-groupe de ${}_kW$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$. Nous désignerons par w^J le plus long élément de ${}_kW_J$ et par w'_J un relevé de w_J dans $\mathcal{N}_G({}_kS)(k)$. Pour tout $v \in M_k$, on note $H_{{}_kP_J,v}$ la fonction de $G(k_v)$ dans $\mathfrak{s}_J$ définie par

$$\forall \chi \in X^*({}_kP_J)_k,\ \forall p \in {}_kP_J, \forall k \in K_v,\ \exp(< H_{{}_kP_J,v}(pk), \chi >) = |\chi(p)|_v.$$

La fonction globale correspondante est définie par

$$\forall g \in G(\boldsymbol{A}_k),\ H_{{}_kP_J}(g) = \sum_{v \in M_k} H_{{}_kP_J,v}(g_v).$$

On a alors la relation (cf. [**FMT**, §2.3])

$$\forall \chi \in X^*(P)_k,\ \forall g \in G(k),\ H_\chi(\pi(g)) = \exp(< H_P(g), \chi >).$$

Pour tout groupe unipotent U sur k, on normalise la mesure de Haar sur $U(\boldsymbol{A}_k)$ par

$$\int_{U(k)\backslash U(\boldsymbol{A}_k)} du = 1.$$

Pour tout $w \in {}_kW$, représenté par $w' \in \mathcal{N}_G({}_kS)(k)$ et tout $\lambda \in \mathfrak{s}_\varnothing^\vee$, l'intégrale d'entrelacement $c(w, \lambda)$ est définie par

$$c(w,\lambda) = \int_{w'\,{}_kN(\boldsymbol{A}_k)w'^{-1} \bigcap {}_kN(\boldsymbol{A}_k)\backslash {}_kN(\boldsymbol{A}_k)} \exp(< H_{{}_kP}(w'^{-1}n), \lambda + \rho_{{}_kP} >)dn.$$

où ${}_kN$ désigne le radical unipotent de ${}_kP$. On note alors

$$C_{{}_kP_J} = \lim_{\lambda \to \rho_{{}_kP}} \prod_{\alpha \in J} < \check{\alpha}, \lambda - \rho_{{}_kP} > c(w_J, \lambda).$$

6.2.2. *Le résultat de Franke, Manin et Tschinkel.* — En utilisant les travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein [**Lan**], Franke, Manin et Tschinkel démontrent le résultat suivant (cf. [**FMT**, (2.11)])

Théorème 6.2.1 **(Franke,Manin,Tschinkel).** — *Avec les notation introduites dans le paragraphe 6.2.1*

$$n_V(B) \sim C_{\mathrm{FMT}}(V) B \log^{t-1} B \ \textit{quand}\ B \to +\infty$$

avec $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$ *et*

$$C_{\mathrm{FMT}}(V) = \frac{C_G}{C_P(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} < \check{\alpha}, 2\rho_P >}.$$

6.2.3. *Expression de la constante en termes de la mesure de Tamagawa.* — L'objectif de cette section est la démonstration du résultat suivant

Théorème 6.2.2. — *Si le groupe G est quasi-déployé alors*

$$C_{\mathrm{FMT}}(V) = C_H(V).$$

Nous commençons par décrire une métrique sur ω_V^{-1} qui induit la hauteur H. Pour tout $J \subset {}_k\Delta$, pour tout $v \in M_k$ la métrique v-adique $\|.\|_{J,v}$ sur $\omega_{V_J}^{-1}$ est définie par pour toute section s de $\omega_{V_J}^{-1}$ correspondant à une fonction $\tilde{s}$ sur G

$$\forall k \in K_v,\ \|s(\pi_J(k))\|_{J,v} = |\tilde{s}(k)|_v.$$

Lemme 6.2.3. — *Les normes $\|.\|_{I,v}$ définissent une métrique adélique sur ω_V^{-1} dont H est la hauteur associée.*

Démonstration. — Fixons un plongement de G dans $GL_n(k)$ et une base $(s_1, \dots, s_q)$ de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ correspondant à des éléments $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q$ de $\Gamma(G, \mathscr{O}_G)$, Par l'hypothèse que nous avons faite sur K, pour presque tout $v \in M_k$,

$$K_v = G(k_v) \bigcap GL_n(\mathscr{O}_{k_v}).$$

En outre, ω_V^{-1} étant très ample, pour presque tout $v \in M_k$, pour tout x appartenant à l'intersection de $GL_n(\mathscr{O}_{k_v})$ et de $G(k_v)$, l'idéal fractionnaire engendré par les $\tilde{s}_i(x)$ est égal à $\mathscr{O}_{k_v}$. Si $v \in M_k$ vérifie les deux conditions ci-dessus, pour tout $p \in P(k_v)$, tout $k \in K_v$ et toute section s de ω_V^{-1} correspondant à une fonction $\tilde{s}$ sur G, on a

$$\begin{aligned} \|s(\pi(pk))\|_v &= |\tilde{s}(k)|_v \\ &= \frac{|\tilde{s}(pk)|_v}{|-2\rho_P(p)|_v}. \end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |\tilde{s}_i(pk)|_v &= |-2\rho_P(p)|_v \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |\tilde{s}_i(k)|_v \\ &= |-2\rho_P(p)|_v. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|s(\pi(pk))\|_v = \frac{|\tilde{s}(pk)|_v}{\sup_{1\leqslant i\leqslant q} |\tilde{s}_i(pk)|_v}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde est une conséquence directe des définitions. □

On se donne maintenant deux parties J et J' de ${}_k\Delta$ telles que $J \subset J'$. On note $\rho_{J,J'}$ la demi-somme des racines de ${}_kS_J$ dans $\mathfrak{t}_J \bigcap \mathrm{L}(\mathscr{Z}_G({}_kS_{J'}))$. Notons $V_{J,J'}$ la variété homogène $V_{J,J'} = {}_kP_J \backslash {}_kP_{J'}$. D'après [**San**, proposition 6.10], et le théorème de Rosenlicht, on a une suite exacte

$$0 \to X^*({}_kP_{J'}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} X^*({}_kP_J) \to \mathrm{Pic}(V_{J,J'}) \to \mathrm{Pic}({}_kP_{J'}).$$

Ce dernier groupe étant fini on obtient un isomorphisme

$$\Big(X^*({}_kP_J)/X^*({}_kP_{J'})\Big) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q}.$$

En outre l'image de la classe de $2\rho_{J,J'}$ par cet isomorphisme est $\omega_{V_{J,J'}}$. On a une fibration d'espaces homogènes pointés

$$e \to V_{J,J'} \xrightarrow{j} V_J \xrightarrow{\pi_{J,J'}} V_{J'} \to e.$$

On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(V_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\pi^*_{J,J'}"] & \mathrm{Pic}(V_J) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Pic}(V_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^*({}_kP_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[u] & X^*({}_kP_J) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[u] & \Big(X^*({}_kP_J)/X^*({}_kP_{J'})\Big) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et les colonnes des isomorphismes.

Lemme 6.2.4. — *Avec les notations ci-dessus, on a la relation*

$$\rho_{{}_kP_J} - \mathrm{Res}(\rho_{{}_kP_{J'}}) = \rho_{J,J'}$$

Démonstration. — On a un isomorphisme de ${}_kS_J$ modules

$$\mathfrak{t}_J \bigcap \mathrm{L}(\mathscr{Z}_G({}_kS_{J'})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}_J/\mathfrak{t}_{J'}$$

Par conséquent $2\rho_{J,J'}$ est le déterminant de la représentation de ${}_kP_J$ sur $\mathfrak{r}_J/\mathfrak{r}_{J'}$ induite par la représentation adjointe. Or $2\rho_{{}_kP_J}$ est le déterminant de la représentation adjointe restreinte à $\mathfrak{r}_J$ et $2\,\mathrm{Res}(\rho_{{}_kP_{J'}})$ celui de sa restriction à $\mathfrak{r}_{J'}$. La formule provient donc de la suite exacte de ${}_kP_J$-modules

$$0 \to \mathfrak{r}_{J'} \to \mathfrak{r}_J \to \mathfrak{r}_J/\mathfrak{r}_{J'} \to 0. \qquad \square$$

Comme ci-dessus nous définissons une métrique adélique $\|.\|_{J,J'}$ sur $\omega^{-1}_{V_{J,J'}}$ par pour toute place v de k, pour toute section s de $\omega^{-1}_{V_{J,J'}}$ correspondant à une fonction $\tilde{s}$ sur ${}_kP_{J'}$,

$$\forall k \in K_v \bigcap {}_kP_{J'}(k_v),\ \|s({}_kP_Jk)\|_{J,J',v} = |\tilde{s}(k)|_v.$$

On note ω_J, $\omega_{J'}$ et $\omega_{J,J'}$ les mesures de Tamagawa définies respectivement sur V_J, $V_{J'}$ et $V_{J,J'}$ par les normes adéliques $\|.\|_J$, $\|.\|_{J'}$ et $\|.\|_{J,J'}$. On note H_J, $H_{J'}$ et $H_{J,J'}$ les hauteurs induites. Pour tout $x \in V_J(\boldsymbol{A}_k)$ se relevant en un élément $k \in K$, on note $\omega^x_{J,J'}$ la mesure sur $V_{J,J'}(\boldsymbol{A}_k)k$, vu comme sous-espace de $V_J(\boldsymbol{A}_k)$, telle que, pour tout ouvert U de $V_{J,J'}(\boldsymbol{A}_k)k$, on ait

$$\omega^x_{J,J'}(U) = \omega_{J,J'}(Uk^{-1})$$

Cela ne dépend pas du relèvement choisi. En effet la norme $\|.\|_{J,J'}$ est invariante sous l'action à droite de $K_v \cap {}_kP_{J'}(k_v)$. La mesure $\omega_{J,J'}$ est donc également invariante sous cette action. La mesure ω'_J sur $V_J(\boldsymbol{A}_k)$ est alors donnée par la relation

$$\omega'_J(U) = \int_{V_{J'}(\boldsymbol{A}_k)} \omega_{J'} \int_{V_J(\boldsymbol{A}_k)x} \chi_U\, \omega^x_{J,J'}$$

pour tout ouvert U de $V_J(\boldsymbol{A}_k)$.

Lemme 6.2.5. — *Les mesures ω_J et ω'_J coïncident. En particulier*

$$\tau_{H_{J'}}(V_{J'}) = \tau_{H_J}(V_J)/\tau_{H_{J,J'}}(V_{J,J'}).$$

Démonstration. — La suite exacte de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

$$0 \to \mathrm{Pic}(\overline{V}_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{Pic}(\overline{V}_J) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{Pic}(\overline{V}_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q} \to 0$$

donne pour tout $v \in M_f - S$ la relation

$$L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}_J)) = L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}_{J'}))L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}_{J,J'})).$$

Il suffit donc de montrer que les mesures locales coïncident. On fixe donc une place v de k. Pour tout $\alpha \in {}_k\Phi$, on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in {}_kS(k),\ \mathrm{Ad}\,t(X) = \alpha(t)X\}$$

où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G ; (α) est l'ensemble des multiples positifs de α et $\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \in (\alpha)} \mathfrak{g}_\beta$. L'unique k-sous-groupe connexe unipotent de G normalisé par $\mathscr{Z}_G({}_kS)$ et ayant $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ pour algèbre de Lie est noté ${}_kU_{(\alpha)}$ (cf. [**Bo**, proposition 21.9]). Nous noterons U_J^- (resp. $U_{J'}^-$, $U_{J,J'}^-$) le sous-groupe engendré par les ${}_kU_{(\alpha)}$ pour α appartenant à ${}_k\Phi^- - [J]$ (resp. ${}_k\Phi^- - [J']$, ${}_k\Phi^- \cap([J'] - [J])$) où ${}_k\Phi^-$ désigne l'ensemble des racines négatives. Le groupe $U_J^- \mathscr{Z}_G({}_kS_J)$ est le k-sous-groupe parabolique opposé à ${}_kP_J$ et U_J^- est le radical unipotent de ce groupe. D'après [**Bo**, proposition 14.21 (iii)], la projection π_J induit donc un isomorphisme de U_J^- sur un ouvert de Zariski W de V_J. Il suffit de montrer le résultat sur cet ouvert. L'application produit

$$U_{J,J'}^- \times U_{J'}^- \to U_J^-$$

est un isomorphisme. En outre, $U_{J'}^-$ et $U_{J,J'}^-$ sont isomorphes à des espaces affines en tant que variétés sur k. Soient $u_{1,1}, \ldots, u_{1,k}$ des coordonnées pour $U_{J,J'}^-$ et $u_{2,1}, \ldots, u_{2,n-k}$ des coordonnées pour $U_{J'}^-$. Les coordonnées $(u_{1,1}, \ldots, u_{2,n-k})$ induisent des coordonnées locales sur $V_J(k_v)$. On notera u le morphisme correspondant de W dans $\boldsymbol{A}_k^n$. La section

$${}^t\omega(u)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}}\right)$$

de $\omega_{V_J}^{-1}$ correspond à la fonction f sur $\pi^{-1}(W)$ caractérisée par les relations

$$\begin{cases} \forall p \in {}_kP_J(k_v),\ \forall g \in G(k_v), & f(pg) = (-2\rho_{{}_kP_J})(p)f(g) \\ \forall g \in U_J^-(k_v), & f(g) = 1. \end{cases}$$

Si $g \in U_J^-(k_v)$ s'écrit $g = pk$ avec $p \in {}_kP(k_v)$ et $k \in K_v$ alors

$$\begin{aligned} \left\|{}^t\omega(u)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}}\right)(\pi_J(g))\right\|_v &= |f(k)|_v \\ &= |-2\rho_{{}_kP_J}(p)|_v^{-1} \\ &= \exp(< H_{{}_kP_J}(g), 2\rho_{{}_kP_J} >). \end{aligned}$$

La mesure $\omega_{J,v}$ est donc donnée par

$$\omega_{J,v} = \exp(< H_{{}_kP_J}(u), 2\rho_{{}_kP_J} >)du. \tag{6.2.3}$$

De même, sur l'image de $U_{J'}^-(k_v)$ dans $V_{J'}(k_v)$, la mesure $\omega_{J',v}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_{J',v} &= \exp(< H_{{}_kP_{J'}}(u_2), 2\rho_{{}_kP_{J'}} >)du_2 \\ &= \exp(< H_{{}_kP_J}(u_2), 2\,\mathrm{Res}\,\rho_{{}_kP_{J'}} >)du_2 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

et sur l'image de $U_{J,J'}^-(k_v)$ dans $V_{J,J'}(k_v)$ on a

$$\omega_{J,J',v} = \exp(< H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} >)du_1. \tag{6.2.5}$$

Soit $u_2 \in U_{J'}^-$. Nous allons maintenant décrire la mesure $\omega_{J,J'}^{\pi_{J'}(u_2)}$. Soit U un ouvert de $U_{J,J'}^-u_2$. Soit $u_2 = p_2k_2$ une décomposition de u_2 avec $p_2 \in {}_kP_J(k_v)$ et $k_2 \in K_v$. Par définition on a

$$\begin{aligned} \omega_{J,J'}^{\pi_{J'}(u_2)}(U) &= \omega_{J,J'}(Uk_2^{-1}) \\ &= \omega_{J,J'}((Uu_2^{-1})p_2). \end{aligned}$$

Il nous faut donc déterminer comment l'action à droite de ${}_kP_J$ sur $V_{J,J'}$ agit sur $\omega_{J,J'}$. Soit x un élément de ${}_kP_{J'}$ de décomposition $x = pk$, soit s une section de $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$ correspondant à une fonction $\tilde{s}$ sur G. Soit $\tilde{s}'$ la fonction définie par

$$\forall g \in G(k_v), \tilde{s}'(g) = \tilde{s}(gp_2^{-1}).$$

Soit s' la section correspondante. Soit $p'k'$ une décomposition de xp_2 avec des éléments p' de ${}_kP_J(k_v)$ et k' de H_v. On obtient

$$\begin{aligned}
||s(\pi_J(x)).p_2||_v &= ||s'(\pi_J(xp_2))||_v \\
&= |\tilde{s}'(k')|_v \\
&= |\tilde{s}(k'p_2^{-1})|_v \\
&= |(-2\rho_{J,J'})(p'^{-1}p)|_v||s(\pi_J(x))||_v \\
&= \exp(< H_{{}_kP_J}(xp_2) - H_{{}_kP_J}(x), 2\rho_{J,J'} >)||s(\pi_J(x)||_v.
\end{aligned}$$

En appliquant (6.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\omega_{J,J'}^{\pi'_J(u_2)}(U) \\
&= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(< H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} >) \exp(< H_{{}_kP_J}(u_1p_2) - H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} >)du_1 \\
&= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(< H_{{}_kP_J}(u_1u_2), 2\rho_{J,J'} >)du_1.
\end{aligned}$$

La mesure ω'_J s'écrit donc

$$\omega'_J = \exp(< H_{{}_kP_J}(u), 2\operatorname{Res}\rho_{{}_kP_{J'}} + 2\rho_{J,J'} >)du.$$

Le lemme découle de (6.2.3) et du lemme 6.2.4. □

Notre objectif est maintenant de comparer C_G à $\tau_{H_\varnothing}(V_\varnothing)$ et C_P à $\tau_{H_{J,J'}}(V_{\varnothing,I})$. Pour toutes parties J, J' de ${}_k\Delta$, nous noterons

$$\lambda_v(J,J') = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic}(\overline{V}_{J,J'})) & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On posera également $\lambda_v(J) = \lambda_v(J, {}_k\Delta)$. Si U est un groupe unipotent sur k_v, les mesures de Haar sur $U(k_v)$ sont normalisées de sorte que

$$\int_{U(\mathcal{O}_{k_v})} du_v = 1$$

si $v \in M_f$ et

$$\int_{\prod_{v\in M_\infty} U(k_v) \Big/ U(k)} \prod_{v\in M_\infty} du_v = 1.$$

On note

$$Q_J = {}_kN \bigcap w_J'^{-1}\, {}_kNw_J' \backslash w_J'^{-1}\, {}_kN.$$

Lemme 6.2.6. — *La projection $\pi_\varnothing$ induit un isomorphime de $Q_\varnothing$ sur un ouvert de Zariski $W_\varnothing$ de $V_\varnothing$. Cet isomorphisme transforme la mesure $\omega_{H_\varnothing,S}$ en la mesure*

$$\prod_{v\in M_k} \lambda_v(\varnothing) \exp(< H_{{}_kP_\varnothing,v}(n), 2\rho_{{}_kP_\varnothing} >) dn_v.$$

Elle induit également un isomorphisme de Q_I sur un ouvert de Zariski W_I de $V_{\varnothing,I}$. Cet isomorphisme transforme la mesure $\omega_{H_{\varnothing,I},S}$ en la mesure

$$\prod_{v\in M_k} \lambda_v(\varnothing, I) \exp(< H_{{}_kP_\varnothing,v}(n), 2\rho_{{}_kP_\varnothing} >) dn_v.$$

Démonstration. — D'après la démonstration du lemme 6.2.5 $\pi_\varnothing$ induit un isomorphisme de $U_\varnothing^-$ sur un ouvert de $V_\varnothing$. Mais $U_\varnothing^-$ est isomorphe à

$${}_kN \bigcap w_\varnothing'^{-1}\, {}_kNw_\varnothing' \backslash w_\varnothing'^{-1}\, {}_kN$$

ce qui démontre la première assertion du lemme. En outre cela montre que $Q_\varnothing$ est isomorphe à un espace affine $\mathbf{A}_k^n$. On note u l'isomorphisme induit de $W_\varnothing$ dans $\mathbf{A}_k^n$. Comme dans le lemme précédant, on montre que pour tout $g \in w_\varnothing'\, {}_kN(k_v)$

$$\|{}^t\omega(u)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial u_n}\right)(\pi_\varnothing(g))\|_v = \exp(< H_{{}_kP_\varnothing,v}(g), 2\rho_{{}_kP_\varnothing} >)$$

Par ailleurs la mesure induite par l'isomorphisme de $Q_\varnothing(k_v)$ sur $\mathbf{A}_k^n(k_v)$ transporte la mesure de $\mathbf{A}_k^n(k_v)$ en dn_v si v est une place finie de k et le produit des places à l'infini en $\sqrt{d_k}^{\dim V} \prod_{v\in M_\infty} dn_v$. Ceci démontre la seconde assertion. Les deux dernières se démontrent de manière similaire en utilisant le fait que les fonctions

$$\exp(< H_{{}_kP_J}(g), 2\rho_{{}_kP_\varnothing} >) \text{ et } \exp(< H_{{}_kP_J}(g), 2\rho_{\varnothing,I} >)$$

coïncident sur l'ensemble $w_I'^{-1}\, {}_kN(\boldsymbol{A}_k)$. □

L'intégrale divergente $\int_{Q_\varnothing} \exp(< H_{{}_kP_\varnothing}(n), 2\rho_{{}_kP_\varnothing} >)dn$ et l'intégrale similaire pour Q_I peuvent donc être régularisées de deux manières différentes, soit en utilisant les facteurs de convergence $\lambda_v(\varnothing)$ (resp. $\lambda_v(\varnothing, I)$), soit en utilisant les fonctions $s \to c(w, s\rho_{{}_kP})$. Il nous faut comparer les valeurs obtenues par ces deux méthodes. Pour cela il nous faut étudier de manière plus précise les termes locaux intervenant dans $c(w, \lambda)$, ce qui nous amène à considérer les intégrales d'entrelacement locales.

Dans ce but nous commençons par rappeler quelques notations de la théorie des immeubles. On suppose désormais que le groupe G est quasi-déployé. Pour souligner cette hypothèse on notera B le k-sous-groupe de Borel ${}_kP$. Soit T le normalisateur de ${}_kS$. C'est un tore maximal de G. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de k, on note ${}_{k_\mathfrak{p}}S$ la composante scindée de $T_{k_\mathfrak{p}}$, ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ l'ensemble des racines de ${}_{k_\mathfrak{p}}S$ dans $G_{k_\mathfrak{p}}$ et ${}_{k_\mathfrak{p}}W$ le groupe de Witt associé. L'appartement associé au triplet $(G, {}_{k_\mathfrak{p}}S, k_\mathfrak{p})$ sera noté $\mathscr{A}_\mathfrak{p}$. Le groupe de Weyl du système de racines affines est noté ${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$. D'après [**Tit**, §3.9.1], pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$ le groupe $K_\mathfrak{p}$ est le stabilisateur d'un point $x_\mathfrak{p}$ de $\mathscr{A}_\mathfrak{p}$. Soit ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$ le système de racines réduit dont ${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$ est le groupe de Weyl affine. Le choix de $x_\mathfrak{p}$ permet d'identifier $\mathscr{A}_\mathfrak{p}$ à l'espace vectoriel associé qui est donné par

$$V_\mathfrak{p} = \mathrm{Hom}(X^*(\mathscr{Z}_G({}_{k_\mathfrak{p}}S))_{k_\mathfrak{p}}, \mathbf{R}) = \mathrm{Hom}(X^*(T)_{k_\mathfrak{p}}, \mathbf{R}).$$

Comme $X^*(T)_{k_\mathfrak{p}}$ est égal à $X^*({}_{k_\mathfrak{p}}S)$, on a un plongement de $X^*({}_{k_\mathfrak{p}}S)$ dans le dual de $V_\mathfrak{p}$. On identifie ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ avec son image par ce plongement. Toute racine de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ est proportionnelle à une unique racine de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$. Pour toute racine affine α, on note ${}_{k_\mathfrak{p}}N$ le radical unipotent de ${}_{k_\mathfrak{p}}P$ et

$$N(\alpha) = \{n \in {}_{k_\mathfrak{p}}N(k_\mathfrak{p}) \mid \forall x \in \mathscr{A}_\mathfrak{p}, \alpha(x) \geqslant 0 \Rightarrow nx = x\}.$$

On définit $q_\alpha = [N(\alpha - 1) : N(\alpha)]$. Comme dans [**Mac**] ou [**Cas**], on définit ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_1$ comme la réunion de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$ et de

$$\left\{\frac{\alpha}{2}, \alpha \in {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0 \mid q_\alpha \neq q_{\alpha+1}\right\}.$$

Nous noterons ${}_{k_\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$ le système obtenu à partir de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ en retirant les racines telles que 2α appartient à ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$.

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on note $\rho_{B_{k_\mathfrak{p}}}$ la demi-somme des racines positives comptées avec multiplicités et

$$\begin{array}{rccl} \chi_\mathfrak{p} : & T(k_\mathfrak{p}) & \to & \mathbf{C}^* \\ & m & \mapsto & |2\rho_{B_{k_\mathfrak{p}}}(m)|_\mathfrak{p}^{1/2}. \end{array}$$

Soit ${}_{k_\mathfrak{p}}\Delta$ la base de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ correspondant à $B_{k_\mathfrak{p}}$. Soit ${}_{k_\mathfrak{p}}I \subset {}_{k_\mathfrak{p}}\Delta$ la partie de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Delta$ correspondant à $P_{k_\mathfrak{p}}$. Comme précédemment, si $J \subset {}_{k_\mathfrak{p}}\Delta$, on note ${}_{k_\mathfrak{p}}W_J$ le sous-groupe de ${}_{k_\mathfrak{p}}W$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$ et w_J le plus long élément de ${}_{k_\mathfrak{p}}W_J$. Pour tout caractère régulier $\chi \in \mathrm{Hom}(T(k_\mathfrak{p}), \mathbf{C}^*)$ et tout $w \in {}_{k_\mathfrak{p}}W$, $c_\mathfrak{p}(w, \chi)$ est l'intégrale d'entrelacement locale (cf. [**Cas**, theorem 3.11]).

Lemme 6.2.7. — *Si le groupe G est quasi-déployé, pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de k, le terme local de $c(w_{{}_k\Delta}, s\rho_B)$ à savoir l'intégrale*

$$\int_{w'_{{}_k\Delta}\, {}_kN(k_\mathfrak{p}) {w'_{{}_k\Delta}}^{-1} \cap\, {}_kN(k_\mathfrak{p}) \backslash {}_kN(k_\mathfrak{p})} \exp(< H_{B,\mathfrak{p}}({w'_{{}_k\Delta}}^{-1} n), (s+1)\rho_B >) dn_\mathfrak{p}$$

est égale à

$$c_\mathfrak{p}(w_{{}_{k_\mathfrak{p}}\Delta}, \chi_\mathfrak{p}^s).$$

Un résultat analogue vaut pour $c(w_I, s\rho_B)$.

Démonstration. — D'après [**Cas**, theorem 3.1] et [**Car**, §3.7 (32)], pour tout caractère $\chi \in X^*({}_{k_\mathfrak{p}}S)$ tel que la composée $|.|_\mathfrak{p} \circ \chi$ soit régulière, on a

$$c_\mathfrak{p}(w, |.|_\mathfrak{p} \circ \chi) = \int_{w'\, {}_{k_\mathfrak{p}}N(k_\mathfrak{p}) w'^{-1} \cap\, {}_{k_\mathfrak{p}}N(k_\mathfrak{p}) \backslash {}_{k_\mathfrak{p}}N(k_\mathfrak{p})} \exp(< H_{B,\mathfrak{p}}(w'^{-1} n), \chi + \rho_B >) dn_\mathfrak{p}.$$

où w' est un relevé de w dans $\mathcal{N}_G({}_{k_\mathfrak{p}}S)(k_\mathfrak{p}) \cap K_\mathfrak{p}$. La formule résulte alors du fait que $w'_{{}_k\Delta}$ représente $w_{{}_{k_\mathfrak{p}}\Delta}$ puisque G est quasi-déployé et appartient à $K_\mathfrak{p}$ pour presque toute place finie de k. La démonstration de la seconde assertion est analogue. □

Lemme 6.2.8. — *Pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$, les systèmes de racines ${}_{k_\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$ et ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$ coïncident. Si α est une racine de ${}_{k_\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$ telle que $1/2\alpha \notin {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$ et telle que l'espace propre correspondant $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension un, alors $1/2\alpha \notin {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_1$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p} \in M_f$ une place telle que $K_\mathfrak{p}$ soit le stabilisateur d'un point hyperspécial de $\mathscr{A}_\mathfrak{p}$ et telle que $G_{k_\mathfrak{p}}$ se déploie sur une extension non ramifiée. Nous allons tout d'abord montrer la première assertion. Pour cela il suffit de démontrer que les groupes de Weyl affines correspondants sont identiques. Par définition, le groupe de Weyl affine de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$ est ${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$. Soit

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\nu}_\mathfrak{p} : & T(k_\mathfrak{p}) & \to & V_\mathfrak{p} \\ & m & \mapsto & \Big(\chi \mapsto \nu_\mathfrak{p}(\chi(m))\Big). \end{array}$$

le noyau de $\tilde{\nu}_\mathfrak{p}$ est noté $T^0_{k_\mathfrak{p}}$. Le groupe G étant semi-simple et simplement connexe

$${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}} = \mathscr{N}_G({}_{k_\mathfrak{p}}S)(k_\mathfrak{p})/T^0_{k_\mathfrak{p}}$$

(cf. [**Tit**, §1.13]). Par [**Tit**, §1.3]

$$\operatorname{Im}\tilde{\nu}_\mathfrak{p} = \operatorname{Hom}(X^*({}_{k_\mathfrak{p}}S)_{k_\mathfrak{p}}, \mathbf{Z})$$

puisque G se déploie sur une extension non ramifiée. Comme G est simplement connexe $X^*({}_{k_\mathfrak{p}}S)_{k_\mathfrak{p}}$ est le réseau des poids $P({}_{k_\mathfrak{p}}\Phi)$ de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$. Son dual est donc le réseau engendré par ${}_k\tilde{\Phi}^\vee$, noté $Q({}_k\tilde{\Phi}^\vee)$. On obtient donc que ${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$ est le produit semi-direct

$$Q({}_k\tilde{\Phi}^\vee) \rtimes ({}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}})_{x_\mathfrak{p}}.$$

Mais comme $x_\mathfrak{p}$ est spécial, $({}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}})_{x_\mathfrak{p}}$ coïncide avec le groupe de Weyl de ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi$. Par [**Bki**, §VI.2.1, proposition 1], le groupe ${}_{k_\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$ est le groupe de Weyl affine de ${}_{k_\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$.

Soient $\mathfrak{p}$ et α vérifiant les hypothèses de la seconde assertion du lemme. Alors $U_\alpha(k_\mathfrak{p})$ est isomorphe en tant que groupe à $\mathbf{G}_a(k_\mathfrak{p})$ et $q_\alpha = q_{\alpha+1} = N(\mathfrak{p})$. □

Soit k' une extension de Galois de k déployant le groupe G. Soit ${}_{k'}\Delta$ la base du système de racines ${}_{k'}\Phi$ de $T_{k'}$ dans $G_{k'}$ correspondant à $B_{k'}$. Soit ${}_{k'}I$ la partie de ${}_{k'}\Delta$ correspondant à $P_{k'}$. La base du réseau des poids est notée $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in {}_{k'}\Phi}$.

Lemme 6.2.9. — *Si G est quasi-déployé et J est une partie de ${}_k\Delta$, alors une base de* $\operatorname{Pic}(V_J \times k')$ *est donnée par les éléments ϖ_α pour $\alpha \in {}_{k'}\Delta - J$. L'action du groupe de Galois* $\operatorname{Gal}(k'/k)$ *sur* $\operatorname{Pic}(V_J \times k')$ *est celle induite par l'action naturelle sur cette base et le cône des classes de diviseur effectifs est le cône* $\sum_{\alpha \in {}_{k'}\Phi - J} \mathbf{R}^+(-\varpi_\alpha)$.

Démonstration. — Comme G est simplement connexe, $X^*(T_{k'})$ est le réseau des poids. Il en est donc de même de $X^*(B_{k'})$ ce qui montre les deux premières assertions du lemme pour $V_\varnothing$. Par la décomposition de Bruhat, G est la réunion disjointe des $C(w) = BwB$ pour $w \in {}_{k'}W$. On a également des isomorphismes (cf. [**Bo**, theorem 14.12])

$$\begin{array}{rcl} B \times U'_w & \tilde{\to} & BwB \\ (b, u) & \mapsto & bwu \end{array} \tag{6.2.6}$$

où U'_w est le sous-groupe de G_k engendré par les sous-groupes U_γ pour

$$\gamma \in \{\delta \in {}_{k'}\Phi \mid \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\}.$$

Si $J \subset {}_{k'}\Delta$, ${}_{k'}W^J$ désigne l'ensemble des uniques éléments de longueur minimale dans les classes $W_J w \subset {}_{k'}W$. D'après [**Bo**], theorem 21.29, les $\pi_J(C(w))$ pour $w \in {}_{k'}W^J$ forment une décomposition cellulaire de $V_J \times k'$ et l'isomorphisme (6.2.6) fournit un isomorphisme

$$U'_w \tilde{\to} \pi_J(C(w))$$

pour tout $w \in {}_{k'}W^J$. On obtient donc que

$$\begin{array}{rcl} \dim\Big(\pi_J(C(w))\Big) & = & \dim(U'_w) \\ & = & \#\{\gamma \in {}_{k'}\Phi \mid \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\} \\ & = & l(w) \end{array}$$

où la dernière égalité est donnée par [**Bki**, §VI 1.1.6 corollaire 2]. Par [**Fu**], example 1.9.1 on en déduit que le groupe de Chow $\mathrm{CH}_i(V_J)$ est engendré par les classes $\left[\overline{\pi_J(C(w))}\right]$ pour $w \in {}_{k'}W^J$ avec $l(w) = i$. En particulier $\mathrm{CH}_1(V_\varnothing \times k')$ est engendré par les éléments $\left[\overline{\pi_\varnothing(C(s_\alpha))}\right]$ pour $\alpha \in {}_{k'}\Delta$ et $\mathrm{Pic}(V_\varnothing \times k')$ par les éléments $\left[\overline{\pi_\varnothing(C(s_\alpha w_{{}_{k'}\Delta}))}\right]$. La fonction définie par

$$\forall b \in B(k'), \forall u \in U(k'), f(bw'_{{}_{k'}\Delta}u) = \varpi_\alpha(b)^{-1}$$

s'étend en une fonction sur G et induit une section du faisceau inversible associé. Elle s'annulle sur $Bs_\alpha w_{{}_k\Delta}B$. On en déduit que la base du lemme correspond au système générateur ci-dessus. En particulier les images des poids fondamentaux sont les opposés de classes de diviseurs effectifs. Par ailleurs, pour tout $\alpha \in {}_{k'}\Delta$, $\overline{\pi_\varnothing(C(s_\alpha))}$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et si $\chi \in X^*(B)_k$, alors $\mathscr{L}_\chi$ induit le faisceau $\mathscr{O}(<$

$\check{\alpha}, \chi >$) sur $\overline{\pi_\varnothing(C(s_\alpha))}$ ce qui montre l'inclusion inverse. Soit ${}_{k'}W^J(1)$ le sous-ensemble des éléments de longueur $\dim(V_J) - 1$ dans ${}_{k'}W^J$. D'après [**Bki**, Chap. IV §1 exercice 3], pour tout $w \in {}_{k'}W^J(1)$,

$$\begin{aligned} l(w_J w) &= l(w_J) + l(w) \\ &= \dim(V_{\varnothing,J}) + \dim(V_J) - 1 \\ &= \dim(V_\varnothing) - 1 \end{aligned}$$

et d'après [**Bo**, §14.21]

$$\pi_{\varnothing,J}(\pi_\varnothing(C(w_J w))) = \pi_{\varnothing,J}(\pi_\varnothing(C(w))).$$

Par conséquent une base de $\mathrm{Pic}(V_J \times k')$ est donnée par les éléments ϖ_α pour $\alpha \in {}_{k'}\Delta - J$. Les autres assertions pour V_J résultent de leurs analogues pour $V_\varnothing$. $\square$

Lemme 6.2.10. — *Si G est quasi-déployé, le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}\,\overline{V}_\varnothing) c_\mathfrak{p}(w_{{}_{k_\mathfrak{p}}\Delta}, \chi_\mathfrak{p}^s)$$

converge absolument au voisinage de 1. *Un résultat analogue vaut pour $\overline{V}_{\varnothing,I}$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p} \in M_f - S$. Pour tout $\alpha \in {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0$, a_α désigne un élément de $T_{k_\mathfrak{p}}$ tel que $\tilde{v}_\mathfrak{p}$ est la coracine $\check{\alpha}$. D'après [**Car**, theorem 3.9],

$$c_\mathfrak{p}(w, \chi) = \prod_{\substack{\alpha \in {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0 \\ \alpha > 0 \text{ et } w\alpha < 0}} c_\mathfrak{p}(\alpha, \chi)$$

avec

$$c_\mathfrak{p}(\alpha) = \frac{(1 - q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} q_\alpha^{-1} \chi(a_\alpha))(1 + q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} \chi(a_\alpha))}{1 - \chi(a_\alpha)^2}$$

où $q_{\frac{\alpha}{2}} = q_{\alpha+1}/q_\alpha$ et vaut 1 si $\frac{\alpha}{2} \notin {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_1$. Pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$ le point $x_\mathfrak{p}$ correspondant à $K_\mathfrak{p}$ est hyperspécial et, par le lemme 6.2.8, ${}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0 = {}_{k_\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$. Si $\mathfrak{p}$ vérifie ces deux conditions, alors

$$\forall \alpha \in {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi_0,\ \chi_\mathfrak{p}^s(a_\alpha) = N(\mathfrak{p})^{-s < \check{\alpha}, \rho_{B_{k_\mathfrak{p}}} >}$$

et $q_{\frac{\alpha}{2}} \geqslant 1$. En outre

$$\{\alpha \in {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi \mid \alpha > 0 \text{ et } w_{{}_{k_\mathfrak{p}}\Delta}\alpha < 0\} = {}_{k_\mathfrak{p}}\Phi^+.$$

Il suffit donc de montrer que le produit

$$\prod_{\mathfrak{p}\in M_f-S} \frac{L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}\overline{V}_{\varnothing})}{\prod\limits_{\alpha\in\{_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta|\dim \mathfrak{g}_{(\alpha)}=1\}}(1-N(\mathfrak{p})^s)}$$

converge au voisinage de 1. Pour tout $\mathfrak{p}\in M_f-S$ tel que k' soit contenu dans une extension non ramifiée maximale $k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}$ de $k_{\mathfrak{p}}$ le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}/k_{\mathfrak{p}})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}$ conserve la base de $\operatorname{Pic} V_{\varnothing}\times k'$ et l'orbite d'un élément de $_{k'}\Delta$ est réduite à cet élément si et seulement si $\dim \mathfrak{g}_{(j(\alpha))}=1$ où $j: {}_{k'}\Delta\to {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta$ est l'application naturelle. La première assertion du lemme s'en déduit. La seconde se démontre de même. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les deux méthodes de régularisation donnent le même résultat ce qui fournit le lemme suivant

Lemme 6.2.11. — *Si le groupe G est quasi-déployé, on a les égalités*

$$C_G=\prod_{\alpha\in{}_k\Delta} <\check{\alpha},\rho_B> \lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V_{\varnothing}}L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V}_{\varnothing})\omega_{\varnothing}(V_{\varnothing}(\boldsymbol{A}_k))$$

et

$$C_P=\prod_{\alpha\in I} <\check{\alpha},\rho_B> \lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V_{\varnothing,I}}L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V}_{\varnothing,I})\omega_{\varnothing,I}(V_{\varnothing,I}(\boldsymbol{A}_k)).$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned}
C_G &= \lim_{\lambda\to\rho_B}\prod_{\alpha\in{}_k\Delta} <\check{\alpha},\lambda-\rho_B> c(w_{{}_k\Delta},\lambda)\\
&= \prod_{\alpha\in{}_k\Delta} <\check{\alpha},\rho_B> \lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V_{\varnothing}}\int_{Q_{\varnothing}(\boldsymbol{A}_k)}\exp(<H_B(n),\rho_B>)^{s+1}dn\\
&= \prod_{\alpha\in{}_k\Delta} <\check{\alpha},\rho_B> \lim_{s\to 1}\Bigg[(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V_{\varnothing}}L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V}_{\varnothing})\\
&\qquad\int_{Q_{\varnothing}(\boldsymbol{A}_k)}\left(\prod_{v\in M_k}\lambda_v(s)^{-1}\right)\exp(<H_B(n),\rho_B>)^{s+1}dn\Bigg]
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_v(s)=\begin{cases} L_v(s,\operatorname{Pic}\overline{V}_{\varnothing}) & \text{si } v\in M_f-S\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Grâce aux lemmes 6.2.7 and 6.2.10, on obtient

$$C_G = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} < \check{\alpha}, \rho_B > \lim_{s \to 1} \left((s-1)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\, V_\varnothing} L_S(s, \mathrm{Pic}\, \overline{V}_\varnothing) \right)$$

$$\int_{Q_\varnothing(\boldsymbol{A}_k)} \left(\prod_{v \in M_k} \lambda_v(1)^{-1} \right) \exp(< H_B(n), \rho_B >)^2 dn.$$

La première assertion s'en déduit à l'aide du lemme 6.2.6. On démontre de façon semblable la seconde assertion. □

Lemme 6.2.12. — *Si G est quasi-déployé alors*

$$\alpha_c(V) = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \frac{< \check{\alpha}, \rho_B >}{(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} < \check{\alpha}, 2\rho_P >}.$$

Démonstration. — Par le lemme 6.2.9, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{V}_J)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ a pour base

$$\left(\sum_{j(\beta)=\alpha} \varpi_\beta \right)_{\alpha \in {}_k\Delta - J}.$$

Or on a des isomorphismes

$$\mathrm{Pic}(V_J) \tilde{\to} X^*(P_J)_k \tilde{\to} X^*(P_J)_{\bar{k}}^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \tilde{\to} \mathrm{Pic}(\overline{V}_J)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Donc les éléments ci-dessus forment également une base de $\mathrm{Pic}\, V_J$. Sur la base obtenue pour $\mathrm{Pic}\, V_\varnothing$, ρ_B s'écrit comme $\sum_{\beta \in {}_{k'}\Delta} \varpi_\beta$. Une base de $\mathrm{Pic}(V_I)^\vee$ est donc donnée par les éléments $\frac{\check{\alpha}}{<\check{\alpha}, \rho_B>}$. Or le cône des classes de diviseurs effectifs est donné par

$$C_{\mathrm{eff}}(V_I) = \sum_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \mathbf{R}^+ \sum_{j(\beta)=\alpha} -\varpi_\beta$$

Le domaine $C_{\mathrm{eff}}^\vee(V_I) \cap \mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1)$ a donc pour équations

$$\begin{cases} x_\alpha < 0 \text{ pour } \alpha \in {}_k\Delta - I \\ \sum_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \frac{<\check{\alpha}, -2\rho_P>}{<\check{\alpha}, \rho_B>} x_\alpha = 1 \end{cases}$$

ce qui donne la formule du lemme. □

Démonstration du théorème 6.2.2. — D'après le lemme 6.2.11, on a

$$\frac{C_G}{C_P} = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} < \check{\alpha}, \rho_B > \tau_H(V(\boldsymbol{A}_k)).$$

Donc le lemme 6.2.12 montre que

$$C_{\mathrm{FMT}}(V) = \alpha_c(V)\tau_H(V(\boldsymbol{A}_k)). \quad \square$$

6.2.4. *Vérification de la conjecture raffinée*

Proposition 6.2.13. — *Si G est quasi-déployé, pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$*

$$\begin{array}{ccc} \frac{n_{H,W}(B)}{n_U(B)} & \to & \frac{\omega_{H,S}(W)}{\omega_{H,S}(V(\boldsymbol{A}_k))} \\ B & \to & +\infty. \end{array}$$

Démonstration. — Soit S' un sous-ensemble fini de M_k et pour tout $v \in S'$, soit ϕ_v une application continue et K_v-finie sur le quotient $K_v \bigcap P(k_v)\backslash K_v$ (i.e telle que l'espace vectoriel engendré par l'orbite de ϕ_v sous l'action de K_v soit de dimension finie.) On étend ϕ_v à $G(k_v)$ à l'aide de la décomposition d'Iwasawa et on note $\phi = \prod_{v \in S'} \phi_v$. La remarque 10.b dans [**FMT**] qui est une conséquence des travaux de Langlands (cf. notamment [**Lan**] appendice II) et la démonstration du théorème 6.2.2 impliquent que

$$\lim_{B \to +\infty} \frac{\sum_{\{x \in V(k) | H(x) \leqslant B\}} \phi(x)}{n_V(B)} = \frac{\int_{\overline{V(k)}} \phi\, \omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

Or toute fonction continue f_v sur $V(k_v)$ est limite uniforme de telles fonctions ϕ_v. Par conséquent, on a une limite analogue si on remplace ϕ par une fonction f de la forme $\prod_{v \in S'} f_v$ où f_v est une fonction continue sur $V(k_v)$. La fin de la démonstration de l'assertion (b) est semblable à celle de l'assertion (d) de la proposition 5.0.1. $\square$

Ceci donne en particulier une nouvelle démonstration de l'approximation faible pour ces variétés (cf. [**Bor**]).

Corollaire 6.2.14. — *Si G est quasi-déployé, V vérifie l'approximation faible.*

Démonstration. — Pour tout $v \in M_k$, $V(k_v)$ est lisse et pour tout $P \in V(\boldsymbol{A}_k)$, P possède une base de voisinage constituée de bons ouverts de volume non nul pour $\omega_{H,S}$. $\square$

Corollaire 6.2.15. — *Si G est quasi-déployé,*

$$C_H(V) = C_{\mathrm{FMT}}(V)$$

et V vérifie la propriété (E_V).

Corollaire 6.2.16. — *Si $V = P\backslash G$ est une variété de drapeaux généralisée pour un groupe semi-simple quasi-déployé G et un sous-groupe parabolique P défini sur k et si H est une hauteur quelconque, relative au faisceau ω_V^{-1}, alors*

$$n_V(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty.$$

Démonstration. — Cela résulte du corollaire précédant et de l'assertion (c) de la proposition 5.0.1. □

7. Généralités sur les éclatements

7.1. Domaine fondamental pour l'action des unités. — Soit V une variété de Fano obtenue en éclatant des sous-variétés de $\mathbf{P}^n_k$. On suppose que ω_V^{-1} est très ample. Soit U le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices. Soit $\pi : V \to \mathbf{P}^n_k$ la projection canonique. Quitte à restreindre U on peut supposer que $\pi(U) \tilde{\to} U$. On identifiera U avec son image. Comme dans la section 4.1, l'objectif est de se ramener de l'espace projectif à l'espace affine en utilisant un système de représentants. La méthode utilisée ici s'inspire également de celle introduite dans [**Sc**]. Une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ est donnée par des polynômes homogènes de degré $n+1$, $P_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Pour tout $v \in M_k$, on note

$$H_v(x_0, \dots, x_n) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |P_i(x_0, \dots, x_n)|_v.$$

La hauteur associée à la base choisie est donnée par

$$\forall (x_0 : \dots : x_n) \in U(k),\ H(x_0 : \dots : x_n) = \prod_{v \in M_k} H_v(x_0, \dots, x_n).$$

L'objectif est donc de se ramener de $U(k)$ à $W(k)$ cône au-dessus de $U(k)$. On fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. On veut donc déterminer

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \# \mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathcal{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des $(n+1)$-uplets $(\overline{x}_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/U_k$ possédant un représentant $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ qui vérifie

$$(x_i, 0 \leqslant i \leqslant n) = \mathfrak{a} \tag{7.1.1}$$

$$H(x) \leqslant B \tag{7.1.2}$$

$$x \in W(k). \tag{7.1.3}$$

Pour cela on introduit comme dans la section 4.1 l'application $\log_H$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \log_H : \prod\limits_{v\in M_\infty} W(k_v) & \to & \mathbf{R}^{r_1+r_2} \\ (u_v)_{v\in M_\infty} & \mapsto & \Big(\log(H_v(u_v))\Big)_{v\in M_\infty}. \end{array}$$

On considère également la composée des applications canoniques

$$U_k \to \prod_{v\in M_\infty} k_v^* \xrightarrow{\log} \mathbf{R}^{M_\infty} \xrightarrow{\times(n+1)} \mathbf{R}^{M_\infty}.$$

Par le théorème des unités c'est un homomorphisme dont le noyau est le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et l'image un réseau L de rang r dans l'hyperplan P défini par $\sum\limits_{v\in M_\infty} y_v = 0$. En outre, $\operatorname{Det} L = (n+1)^r R$. Cet homomorphisme définit une action de U_k sur $\mathbf{R}^{M_\infty}$. L'application $\log_H$ est compatible avec les actions de U_k ainsi définies. Comme dans la section 4.1, on note pr la projection sur P suivant $(N_v)_{v\in M_\infty}$ et on choisit $u_1, \dots, u_r$ une base de L. On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leqslant u_j^\vee(\mathrm{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_H = \log_H^{-1}(F) \subset \prod_{v\in M_\infty} W(k_v).$$

***Lemme 7.1.1* (Schanuel [Sc]).** — *L'ensemble Δ_H vérifie*

(i) *Δ_H est stable sous $\mu_\infty(k)$,*
(ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta_H \cap \Delta_H = \varnothing,$
(iii) $\bigcup\limits_{u\in U_k} u\Delta_H = \prod\limits_{v\in M_\infty} W(k_v).$

On en déduit comme dans [**Sc**] le lemme suivant

Lemme 7.1.2. — *En notant $j : W(k) \to \prod_{v\in M_\infty} W(k_v)$ l'injection canonique,*

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des $x \in \mathscr{O}_k^{n+1}$ vérifiant les conditions (7.1.1), (7.1.2) *et* (7.1.3) *ci-dessus, ainsi que*

$$j(x) \in \Delta_H. \tag{7.1.4}$$

7.2. Volume du domaine fondamental. — A tout $x \in \Delta_H$, on associe

$$H_\infty(x) = \prod_{v\in M_\infty} H_v(x_v).$$

Soit

$$\mathscr{D}_B = \{x \in \Delta_H \mid H_\infty(x) \leqslant B\}.$$

Comme nous le verrons un peut plus loin, le volume de $\mathscr{D}_B$ intervient dans l'estimation du cardinal $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$. Or la démonstration du lemme 4.2.5 implique le lemme suivant

Lemme 7.2.1. —

$$\operatorname{Vol} \mathscr{D}_B = B\frac{\sqrt{d}w}{(n+1)h2^{(n+1)r_2}} \lim_{s\to 1} \zeta_k(s)(s-1) \prod_{v\in M_\infty} \omega_v(V(k_v)).$$

8. Cas de l'éclatement de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ en trois points rationnels et de ses analogues en dimension supérieure

Sauf indication du contraire, on se place sur un corps de nombres k arbitraire.

8.1. Construction de la hauteur et sous-variétés accumulatrices. — On fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $m \in 1,\dots,n$, on note F_m l'ensemble des parties à m éléments de $\{0,\dots,n+1\}$. On pose $F' = \bigcup_{m=2}^{n} F_m$ et $F = F_1 \bigcup F'$. Pour toute partie $I \in F$ on note P_I le sous-espace de $\mathbf{P}^n_k$ défini par les équations $X_i = 0$ pour $i \in I$. La lettre V désigne ici la variété torique obtenue en éclatant successivement pour m variant de n à 2 les relevés stricts des sous-espaces P_I pour $I \in F_m$. Pour tout $I \in F'$, on note L_I la sous-variété de V au-dessus de P_I. On notera $L_{\{i\}}$ ou L_i le relevé strict de l'hyperplan $P_{\{i\}}$. On note $\pi : V \to \mathbf{P}^n_k$ la projection canonique et

$$U = V - \bigcup_{I\in F} L_I$$

que l'on identifiera avec son image par π. Une base de $\operatorname{Pic} V = \operatorname{Pic} \overline{V}$ est donnée par $\Lambda = \pi^*(H)$ où H est un hyperplan ne contenant aucun des sous-espaces P_I et les diviseurs L_I pour $I \in F'$. On a en outre la relation

$$[L_i] = [\Lambda] - \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} [L_I].$$

D'après [**Ha**, exercice II.8.5], un diviseur canonique de V est donné par

$$K = \sum_{I \in F} (\# I - 1) L_I - (n+1)\Lambda.$$

Donc

$$\omega_V^{-1} = (n+1)[\Lambda] - \sum_{I \in F} (\# I - 1)[L_I] = \sum_{I \in F} [L_I].$$

Dans ce cas ω_V^{-1} n'est pas ample si $n \geqslant 3$. Toutefois le système linéaire correspondant est sans point base et définit un morphisme de V dans un espace projectif qui est injectif sur un ouvert dont le complémentaire est de codimension deux. Les définitions se généralisent sans difficulté à ce cas. Une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ est donnée par les monomômes de degré $n+1$

$$X^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{n} X_i^{k_i}$$

où au plus un des k_i est nul. On notera T_n l'ensemble de ces monômes. Sur U la hauteur correspondant à cette base est donnée par

$$H((x_0 : \ldots : x_n)) = \prod_{v \in M_k} \sup_{Y \in T_n} |Y(x)|_v.$$

Les sections 8.2 à 8.5 ont pour objet la démonstration de l'équivalence

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B.$$

Le lemme suivant montre donc que les sous-variétés L_I sont effectivement accumulatrices.

Lemme 8.1.1. — *Pour tout $I \in F$, pour tout ouvert non vide U_I de L_I*

$$\beta_{U_I} > 1.$$

Démonstration. — Soit $I \in F'$. Soit W l'ouvert $V - \bigcup_{J \neq I} L_J$. Cet ouvert est isomorphe à un ouvert de l'éclaté de $\mathbf{P}^n_k$ en L_I qui est donné par les équations

$$\forall (i,j) \in I^2,\ X_i U_j = X_j U_i$$

dans $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^{\#I-1}_k$. Notons m le cardinal de I. Soit Y un élément de T_n de la forme $X_i^2 \prod_{k \notin \{i,j\}} X_k$ avec $i \neq j$. Soit s la section correspondante de ω_V^{-1}. Soit J une partie de cardinal $m-1$ de $I - \{j\}$. La restriction de s à W est donnée par un polynôme de la forme

$$\frac{X_i^2 \prod_{k \notin \{i,j\}} X_k}{\prod_{k \in J} X_k} \prod_{k \in J} U_k$$

sa restriction à un ouvert U_I contenu dans $L_I - \bigcup_{K \neq I} L_K$ est donc nulle sauf lorsque $i \notin I$ et $j \in I$. La restriction de H à U_I est donc donnée par

$$\begin{aligned} H((x,u)) &= \prod_{v \in M_k} \sup_{\substack{i \notin I \\ j \in I}} (|x_i^2 \prod_{\substack{k \notin I \\ k \neq i}} x_k \prod_{k \in I - \{j\}} u_k|_v) \\ &\leqslant \prod_{v \in M_k} \sup_{i \notin I} (|x_i|_v^{n+2-\#I}) \sup_{i \in I} (|u_i|_v^{\#I-1}). \end{aligned}$$

Donc par le résultat de schanuel $\beta_{U_I} \geqslant \frac{\#I}{\#I-1}$. Sur un ouvert U_i de L_i contenu dans le complémentaire des L_I, la hauteur d'un élément $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ est donnée par

$$H(x) = \prod_{v \in M_k} \sup_{j \neq i} |x_j|_v \prod_{v \in M_k} \prod_{j \neq i} |x_j|_v = \prod_{v \in M_k} \sup_{j \neq i} |x_j|_v.$$

Le résultat de Schanuel montre alors que $\beta_{U_i} \geqslant n$. $\square$

8.2. Réécriture de la hauteur. — Jusqu'à la section 8.4 on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. l'objectif est donc d'estimer le cardinal $N'_{\mathfrak{a}}(B) = wN_{\mathfrak{a}}(B)$ des $x \in \mathscr{O}_k^{n+1}$ tels que

$$(x_i, 0 \leqslant i \leqslant n) = \mathfrak{a} \tag{8.2.1}$$

$$H(x) \leqslant B \tag{8.2.2}$$

$$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n \tag{8.2.3}$$

$$j(x) \in \Delta_H \tag{8.2.4}$$

où j et Δ_H sont définis dans la section 7.1. On reprend également les notations H_v et H_∞ de cette section. Soit x un élément de $\mathscr{O}_k^{n+1}$ vérifiant (8.2.1) et (8.2.3), la hauteur de l'image $\bar{x}$ de x dans U est donnée par

$$H(\bar{x}) = \frac{H_\infty(x)}{N((Y(x), Y \in T_n))}.$$

On notera $\tilde{\rho} : \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{n+1} \to \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^F$ l'application qui à $(\mathfrak{c}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ associe $(\mathfrak{b}_I)_{I\in F}$ défini par

$$\forall I \in F,\ \mathfrak{b}_I = \left(\sum_{i\in I} \mathfrak{c}_i\right) \prod_{\substack{J\in F\\ J\supsetneq I}} \mathfrak{b}_J^{-1}.$$

Si x vérifie la condition (8.2.1) et $\mathfrak{b} = \tilde{\rho}(((x_i)\mathfrak{a}^{-1})_{0\leqslant i\leqslant n})$ alors pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, l'entier $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_I)$ est le degré d'intersection entre le diviseur défini par L_I dans $\mathscr{V}_{\mathscr{O}_{k_\mathfrak{p}}}$ et le $\mathscr{O}_{k_\mathfrak{p}}$-point de cette variété induit par $x\pi^{-v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$ pour une uniformisante π de $\mathscr{O}_{k_\mathfrak{p}}$. En outre pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, $\{I \mid v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_I) \neq 0\}$ est totalement ordonné par l'inclusion. Soit i_0 n'appartenant pas au plus grand élément de cet ensemble et j_0 un élément du plus petit. Alors

$$\inf_{Y\in T_n} v_\mathfrak{p}(Y(x)) = v_\mathfrak{p}(x_{i_0}^2 \prod_{k\neq j_0} x_j) = (n+1)v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) + \sum_{I\in F'} (\#I - 1)v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_I).$$

On a donc la relation

$$N((Y(x), Y \in T_n)) = N(\mathfrak{a})^{n+1} \prod_{I\in F} N(\mathfrak{b}_I)^{\#I-1}.$$

Soit $\mathscr{H}'$ l'ensemble des $\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^F$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ on ait

$$((\mathrm{C}_\mathfrak{p})) \qquad \forall I, J \in F,\ \big((I \not\subset J \text{ et } J \not\subset I) \Rightarrow \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_I), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_J)) = 0\big)$$

ce qui équivaut à

$$((\mathrm{C}_\mathfrak{p})) \qquad \forall G \subset F,\ \left(\bigcap_{f\in G} L_f = \varnothing \Rightarrow \inf_{f\in G}(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_f)) = 0\right).$$

Pour tout $\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^F$, on note $n_{\mathfrak{b}}(B)$ le cardinal de l'ensemble des $x \in \mathscr{O}_k^{n+1}$ tels que

$$(x_i) = \mathfrak{a} \prod_{\substack{I \in F \\ i \in I}} \mathfrak{b}_I \tag{(8.2.1')}$$

$$H_\infty(x) \leqslant BN\left(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F} \mathfrak{b}_I^{\#I-1}\right) \tag{(8.2.2')}$$

$$j(x) \in \Delta_H. \tag{(8.2.4)}$$

Lemme 8.2.1. —

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{H}'} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{H} = \left\{ \mathfrak{c} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{c}_i = \mathscr{O}_k \right\}$. L'application $\tilde{\rho}$ induit alors une bijection

$$\rho : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$$

dont la réciproque θ est donnée par

$$\theta(\mathfrak{b}) = \left(\prod_{\substack{I \in F \\ i \in I}} \mathfrak{b}_I \right)_{0 \leqslant i \leqslant n}. \qquad \square$$

8.3. Estimations pour le corps des rationnels. — Pour déterminer le cardinal $wN_{\mathfrak{a}}(B)$, nous allons tout d'abord chercher pour tout $(\mathfrak{c}) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{n+1}$ une estimation du cardinal $m_{\mathfrak{c}}(B)$ de l'ensemble des $(x) \in \prod_{i=0}^{n} \mathfrak{c}_i$ tels que

$$H_\infty(x) \leqslant B \tag{(8.2.2'')}$$

$$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n \tag{(8.2.3)}$$

$$j(x) \in \Delta_H. \tag{(8.2.4)}$$

On reprend la notation $\mathscr{D}_B$ de la section 7.1.

Lemme 8.3.1. — *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a pour tout $c \in \mathbf{N}^{+\,n+1}$ les inégalités*

$$\frac{\operatorname{Vol}(\mathscr{D}_B)}{\prod_{i=0}^{n} c_i} - C_1 \left(\sum_{i=0}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{1}{c_j} \right) B^{\frac{n}{n+1}} \leqslant m_c(B) \leqslant \frac{\operatorname{Vol}(\mathscr{D}_B)}{\prod_{i=0}^{n} c_i}$$

où C_1 est une constante indépendante de B et de c.

Remarque 8.1. — la difficulté pour généraliser le théorème 8.6.1 aux autres corps de nombres réside dans la démonstration de ce lemme ainsi que dans celle du lemme suivant. Il faudrait en particulier pouvoir majorer de manière suffisamment fine

$$\left| m_{\mathfrak{c}}(B) - \frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)}{\mathrm{Det}(M)} \right|$$

où M est le réseau $j\left(\prod_{i=0}^{n} \mathfrak{c}_i\right)$ et donc

$$\mathrm{Det}(M) = \frac{N\left(\prod_{i=0}^{n} \mathfrak{c}_i\right)\sqrt{d}^{\,n+1}}{2^{(n+1)r_2}}.$$

L'estimation de $m_{\mathfrak{c}}(B)$ se complique du fait que le domaine est non borné (si on ôte la condition $x_i \neq 0$, le cardinal de l'intersection du réseau avec $\mathscr{D}_B$ est infini).

Démonstration. — Dans cette démonstration, $k = \mathbf{Q}$. Fixons $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$. Majorons tout d'abord $m_c(B)$

$$\begin{aligned}
m_c(B) &= 2^{n+1}\#\left\{ x \in \prod_{i=0}^{n}(c_i) / \left\{ \begin{array}{l} x_i > 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n \\ x \in \mathscr{D}_B \end{array} \right. \right\} \\
&= 2^{n+1}\#\{ m \in \mathbf{N}^{+n+1} \mid H_\infty((c_i m_i)_{0\leqslant i\leqslant n}) \leqslant B \} \\
&= \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n} c_i} \mathrm{Vol}\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \mid \left(c_i E\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i \right)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_B \}.
\end{aligned}$$

Or $H_\infty(x)$ est croissante en chacune des variable x_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Donc

$$\left(c_i E\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i \right)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_B \Rightarrow (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_B.$$

Par conséquent on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
m_c(B) &\leqslant \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n} c_i} \mathrm{Vol}\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \mid x \in \mathscr{D}_B \} \\
&\leqslant \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} c_i} \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B).
\end{aligned}$$

Majorons maintenant $\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)\\
&= 2^{n+1}\,\mathrm{Vol}\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} \mid x \in \mathscr{D}_B\}\\
&\leqslant 2^{n+1}\,\mathrm{Vol}\left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \left(c_i E\left(\frac{x_i}{c_i}\right)\right)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_B \\ E\left(\frac{x_i}{c_i}\right) \geqslant 1 \end{array} \right. \right\}\\
&\quad + 2^{n+1}\,\mathrm{Vol}\left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \exists i \in \{0,\dots,n\} / 0 \leqslant x_i \leqslant c_i \\ x \in \mathscr{D}_B \end{array} \right. \right\}\\
&\leqslant \left(\prod_{i=0}^{n} c_i\right) m_c(B)\\
&\quad + 2^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)\mathrm{Vol}\left\{ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{R}^{+n} \;\middle|\; \sup_{Y\in T_n}\,(Y(0,x_1,\dots,x_n)) \leqslant B \right\}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}\left\{ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{R}^{+n} \;\middle|\; \sup_{Y\in T_n}\,(Y(0,x_1,\dots,x_n)) \leqslant B \right\}\\
&= B^{\frac{n}{n+1}}\,\mathrm{Vol}\left\{ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{R}^{+n} \;\middle|\; \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\,(x_i) x_1 \dots x_n < 1 \right\}\\
&= B^{\frac{n}{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{3}.
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de poser $C_1 = \frac{(n+1)^n}{3}$. □

Lemme 8.3.2. — *Si $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$ vérifie $c_0 \geqslant B^{\frac{1}{n+1}}$, alors*

$$
m_c(B) \leqslant C_2 \frac{B^{1+\frac{1}{n-1}}}{c_0^{2+\frac{2}{n-1}} \prod_{i=1}^{n} c_i}
$$

où C_2 est indépendante de c et de B.

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
&m_c(B)\\
&\leqslant \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n} c_i} \operatorname{Vol}\left\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_0 \geqslant c_0 \\ H_\infty(x) \leqslant B \end{array}\right.\right\}\\
&\quad + \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n} c_i} \operatorname{Vol}\left\{x \in \mathbf{R}^{+n} \,\middle|\, H_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leqslant B\right\}.
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Vol}\left\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_0 \geqslant c_0 \\ H_\infty(x) \leqslant B \end{array}\right.\right\}\\
&\leqslant n \operatorname{Vol}\left\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_0 \geqslant c_0 \\ x_0 \geqslant x_i \geqslant x_n \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant B \end{array}\right.\right\}\\
&\qquad + n(n-1) \operatorname{Vol}\left\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_0 \geqslant c_0 \\ x_1 \geqslant x_i \geqslant x_n \text{ pour } i = 0 \text{ ou } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leqslant B \end{array}\right.\right\}.
\end{aligned}$$

Le premier des deux volumes que l'on notera $\mathscr{V}_1$ est majoré par

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Vol}\left\{x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_0 \geqslant c_0 \\ x_i \geqslant x_n \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant B \end{array}\right.\right\}\\
&\leqslant \int_{c_0}^{+\infty} \operatorname{Vol}\left\{x \in (\mathbf{R}^+)^{n} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_i \geqslant x_n \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant \frac{B}{x_0^2} \end{array}\right.\right\} dx_0.
\end{aligned}$$

Or les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x_i \geqslant x_n \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant 1 \end{array}\right.$$

définissent un domaine de volume fini. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &\leqslant C_3 \int_{c_0}^{+\infty} \left(\frac{B}{x_0^2}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx_0 \\ &\leqslant C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{2\frac{n}{n-1}-1}}\end{aligned}$$

où C_3 est indépendante de B et de c. Par ailleurs on a les inégalités

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &\leqslant \mathrm{Vol}\left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} \,\middle|\, \begin{cases} x_1 \geqslant c_0 \\ x_i \geqslant x_n \text{ pour } i = 0 \text{ ou } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leqslant B \end{cases} \right\} \\ &\leqslant C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{2\frac{n}{n-1}-1}}.\end{aligned}$$

Enfin le même raisonnement montre que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}\{x \in (\mathbf{R}^+)^n \mid H_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leqslant B\} \\ &\leqslant (n + n(n-1))\, C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{2\frac{n}{n-1}}}. \quad \square\end{aligned}$$

8.4. Sommation sur les idéaux. — On considère l'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^F$. L'ensemble $\mathscr{B}$ est un monoïde pour la multiplication terme à terme des idéaux. Si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, on note

$$(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{c} \in \mathscr{B} \mid \mathfrak{c}_f \subset \mathfrak{b}_f \text{ pour tout } f \in F\}.$$

Nous allons maintenant étudier pour tout $\mathfrak{b}_0 \in \mathscr{B}$ la somme

$$P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

Il s'agit en réalité d'une somme finie. Comme on le verra dans la partie suivante, $wN_{\mathfrak{a}}(B)$ s'exprime en fonction de $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}^0}(B)$. Jusqu'à la fin de cette partie, on omettra $\mathfrak{a}$ dans cette notation. Pour commencer, exprimons en général $P_{\mathfrak{b}^0}$ en termes des nombres $m_{\mathfrak{c}}$ définis au début de la partie 8.3.

***Lemme 8.4.1.* —** *On considère*

$$(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0) \in \mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{n+1} \times \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{F'}.$$

Posons, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et tout $\mathfrak{d} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{F'}$

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{d})_i = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_i^0 \prod_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} \mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I.$$

Alors on a l'égalité

$$P_{\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{F'}} m_{\mathfrak{c}(\mathfrak{d})}\Big(BN\Big(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F'} (\mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I)^{\# I - 1}\Big)\Big).$$

En fait, comme nous le verrons dans la partie suivante, l'introduction de cette sommation correspond au choix du facteur de convergence $L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} \overline{V})$.

Démonstration. — Le lemme résulte du fait que pour tout $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{d}_0) \in \mathscr{B}$, tout $\mathfrak{d} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^{F'}$ on a la relation

$$m_{\mathfrak{c}(\mathfrak{d})}\left(BN\left(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F'} (\mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I)^{\# I - 1}\right)\right) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_0)}(B). \quad \square$$

Nous allons maintenant déduire du lemme précédant une estimation de $P_{\mathfrak{b},\mathfrak{d}}(B)$ dans le cas où $k = \mathbf{Q}$.

Lemme 8.4.2. — *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on peut poser $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et on obtient*

$$P_b(B) \sim C'' \frac{B \log^{t-1} B}{\prod_{I \in F} b_I} \quad \text{quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ et où la constante C'' est donnée par la formule

$$C'' = (n+1)\alpha_c(V) \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \lim_{s \to 1} (s-1)^{t-1} \zeta_{\mathbf{Q}}^{t-1}(s).$$

De plus, on a la majoration

$$P_b(B) \leqslant \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B(\log B + C_4)^{t-1}}{\prod_{f \in F} b_f}$$

où C_4 est une constante indépendante de b et de B.

Remarque 8.2. — Ce lemme repose sur les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 et n'est donc valable que sur le corps $\mathbf{Q}$. Si les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 se généralisaient au cas

du corps de nombres quelconque, alors on obtiendrait un lemme analogue avec une constante C'' de la forme

$$C'' = (n+1)\alpha_c(V)\frac{2^{(n+1)r_2}}{\sqrt{d}^{\,n+1}}\operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)\lim_{s\to 1}(s-1)^{t-1}\zeta_k^{t-1}(s).$$

D'après le lemme 7.2.1, on obtiendrait

$$C'' = \alpha_c(V)\frac{w}{h\sqrt{d}^{\,n}}\lim_{s\to 1}(s-1)^t\zeta_k^t(s)\prod_{v\in M_\infty}\omega_v(V(k_v)).$$

Démonstration. — D'après le lemme 8.3.1, on sait que

$$m_c(B') = \operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B'}{\prod_{i=0}^{n} c_i} + R(c,B')$$

avec

$$-C_1\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\prod_{i\neq j} c_j}\right)B'^{\frac{n}{n+1}} \leqslant R(c,B') \leqslant 0.$$

On fixe b^0 dans $\mathbf{N}^{+F}$ et B dans $\mathbf{R}^+$. Pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, on pose

$$c_i^0 = \prod_{\substack{I\in F\\ i\in I}} b_I^0.$$

Soit $B_0 = B\prod_{i\in F'} b_I^{0\,\#I-1}$ et $h_0 = \log B_0$. On écrira $c(d)$ à la place de $\mathfrak{c}(\mathfrak{d})$. On note $\mathscr{P}_B$ l'ensemble des $d\in\mathbf{N}^{+F'}$ tels que

$$((**))\qquad \begin{cases} d_I \geqslant 1 \text{ pour } I\in F' \\ c_i^0\prod_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} d_I \leqslant B_0^{\frac{1}{n+1}}\prod_{I\in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \text{ pour } 0\leqslant i\leqslant n. \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{d\in\mathbf{N}^{+F'}} m_{c(d)}\Big(B_0\prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\Big) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont définis par

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod_{I\in F} b_I^0}\sum_{d\in\mathscr{P}_B}\frac{1}{\prod_{I\in F'} d_I}\\
A_2 &= \sum_{d\in\mathscr{P}_B} R\left(c(d), B_0\prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\right)\\
A_3 &= \sum_{d\notin\mathscr{P}_B} m_{c(d)}\Big(B_0\prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\Big).
\end{aligned}$$

- Commençons par évaluer A_1. Tout d'abord estimons

$$W(B) = \int_{\{x\in\mathbf{R}^{+F'}|(**)\}} \frac{1}{\prod_{f\in F'} x_f}\prod_{f\in F'} dx_f.$$

Lemme 8.4.3. —

$$W(B)\sim(n+1)\alpha_c(V)b_0^{t-1} \text{ *quand* } B\to+\infty.$$

Démonstration. — Posons $\lambda_i=(n+1)\log c_i^0$ pour $0\leqslant i\leqslant n$ et faisons le changement de variables $y_f=\log x_f$. On trouve

$$W(B)=\operatorname{Vol}(\mathscr{W}_B)$$

où $\mathscr{W}_B$ est le polyèdre de $\mathbf{R}^{F'}$ défini par

$$\begin{cases} y_I\geqslant 0 \text{ pour } I\in F'\\ (n+1)\sum_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} y_I\leqslant b_0-\lambda_i+\sum_{I\in F'}(\#I-1)y_I \text{ si } 0\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

Par conséquent

$$W(B)\sim b_0^{t-1}\operatorname{Vol}(\mathscr{W}')$$

où $\mathscr{W}'$ est l'ensemble des $y\in\mathbf{R}^{F'}$ tels que

$$\begin{cases} y_I\geqslant 0 \text{ pour } I\in F'\\ (n+1)\sum_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} y_I-\sum_{I\in F'}(\#I-1)y_I\leqslant 1 \text{ pour } 0\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

La correspondance entre les idéaux d_I et les diviseurs L_I introduite dans la section 8.2 amène à considérer les y_I comme un système de coordonnées sur l'hyperplan défini par $x([\omega_V^{-1}]) = 0$ dans $(\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee$. Plus précisément, une base de $\mathrm{NS}(V)$ est donnée par $[\Lambda]$ et les $[L_I]$ pour $I \in F'$. On note (Y, Y_I) le système de coordonnées correspondant à la base duale. L'équation $x([\omega_V^{-1}]) = 1$ s'écrit

$$(n+1)Y - \sum_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I = 1.$$

La relation $x([L_I]) > 0$ s'écrit $Y_I > 0$ pour $I \in F'$ et $x([L_i]) > 0$ s'écrit

$$Y - \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} Y_I > 0.$$

Par conséquent le domaine

$$\mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \bigcap C_{\mathrm{eff}}^\vee(V) = \left\{ x \in (\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } D \text{ effectif } x([D]) > 0 \\ x(\omega_V^{-1}) = 1 \end{array} \right. \right\}$$

a pour équations

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)Y - \sum\limits_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I = 1 \\ Y_I > 0 \text{ pour } I \in F' \\ 1 + \sum\limits_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I - (n+1) \sum\limits_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} Y_I > 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n. \end{array} \right.$$

Le domaine $\mathscr{W}'$ est donc la projection de $\mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\mathrm{eff}}^\vee(V)$ sur l'hyperplan $Y = 0$. Par conséquent

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{W}') = (n+1)\alpha_c(V). \quad \square$$

Suite de la démonstration du lemme 8.4.2. — Nous allons maintenant majorer la différence entre A_1 et $W(B)$.

$$\begin{aligned} \sum_{d \in \mathscr{P}_B} \frac{1}{\prod\limits_{I \in F'} d_I} &= \sum_{d \in \mathscr{P}_B} \prod_{I \in F'} (\log(d_I + 1) - \log d_I) \\ &\quad + \sum_{d \in \mathscr{P}_B} \left(\prod_{I \in F'} \frac{1}{d_I} - \prod_{I \in F'} (\log(d_I + 1) - \log d_I) \right). \end{aligned}$$

Notons $A_{1,1}$ la première somme et $A_{1,2}$ la seconde. On a la relation

$$A_{1,1} = \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{d\in\mathscr{P}_B}\prod_{I\in F'}[\log d_I, \log(d_I+1)]\right)$$

et on en déduit que

$$|A_{1,1} - W(B)| < \mathrm{Vol}\left(\bigcup \prod_{I\in F'}[\log d_I, \log(d_I+1)]\right)$$

où la réunion est prise sur les $(d_I)_{I\in F'}$ tels que

$$\prod_{I\in F'}[\log d_I, \log(d_I+1)] \bigcap \mathscr{S}_B \neq \varnothing$$

$\mathscr{S}_B$ désignant la surface du polyèdre $\mathscr{W}_B$ défini ci-dessus. Mais le diamètre de la boîte $\prod_{I\in F'}[\log d_I, \log(d_I+1)]$ est bornée par $\sqrt{t-1}$. Donc

$$\begin{aligned}|A_{1,1} - W(B)| &\leqslant \mathrm{Vol}(\{x \mid d(x, \mathscr{S}_B) \leqslant \sqrt{t-1}\})\\ &\leqslant C_5 h_0^{t-2} \text{ pour } B \text{ assez grand}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$A_{1,1} \sim W(B) \sim (n+1)\alpha_c(V) h_0^{t-1}.$$

Majorons maintenant $A_{1,2}$. Pour tout $a \in \mathbf{N}^+$ on a les inégalités

$$\frac{1}{2a^2} \geqslant \frac{1}{a} - (\log(a+1) - \log(a)) \geqslant 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}|A_{1,2}| &\leqslant C_6 \sum_{d\in[1,B_0]^{F'}}\left(\sum_{f\in F'}\frac{1}{d_f^2\prod_{g\neq f}d_g}\right)\\ &\leqslant (t-1)C_6\sum_{d\in[1,B_0]^{F'}}\frac{1}{d_{\{0,1\}}^2\prod_{g\neq\{0,1\}}d_g}\\ &\leqslant (t-1)C_6\frac{\pi^2}{6}(\log(B_0)+1)^{t-2}\end{aligned}$$

donc

$$A_1 \sim (n+1)\alpha_c(V)\log^{t-1} B.$$

• Majorons maintenant A_2. On a les inégalités

$$\left|R\left(c(d), B_0 \prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\right)\right| \leqslant C_7 B^{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(\prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}}{\prod_{j\neq i} \prod_{\substack{I\in F'\\ j\in I}} d_I}\right)$$

où on a posé

$$C_7 = C_1 \left(\sum_{i=0}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{1}{c_j^0}\right) \left(\prod_{I\in F'} b_I^{0\,\#I-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

et on obtient

$$|A_2| \leqslant (n+1) C_7 B^{\frac{n}{n+1}} \sum_{d\in \mathscr{P}'_B} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I^{(\#I-1)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)} \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\#I-(\#I-1)\frac{n}{n+1}}}$$

où $\mathscr{P}'_B$ désigne l'ensemble des $d \in \mathbf{N}^{+F'}$ tels que

$$\prod_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} d_I \leqslant B_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{I\in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n.$$

La dernière somme est donc majorée par

$$\begin{aligned} &(n+1) \sum_{\begin{cases} \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I \leqslant B_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{I\in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \\ \prod_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} d_I \leqslant \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I \text{ pour } 0\leqslant i\leqslant n \end{cases}} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{1+\frac{\#I-1}{n+1}}} \\ &= (n+1) \sum_{\begin{cases} \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I^{n+2-\#I} \leqslant B_0 \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\#I-1} \\ \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\#I} \leqslant \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I^{n+1-\#I} \end{cases}} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \prod_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{1+\frac{\#I-1}{n+1}}}. \end{aligned}$$

En sommant sur $d_{\{0,1\}}$ on obtient que la dernière somme est majorée par

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{1-\frac{1}{n+1}} \sum_{\substack{\prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\# I} \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I\\ I\neq\{0,1\}}} d_I^{\# I-n-1} \\ \leqslant B_0 \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\# I-1} \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I\\ I\neq\{0,1\}}} d_I^{\# I-n-2}}} \frac{\left(B_0 \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{\# I-1} \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I\\ I\neq\{0,1\}}} d_I^{\# I-n-2}\right)^{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}}{\prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I\\ I\neq\{0,1\}}} d_I^{\frac{\# I-1}{n+1}} \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\notin I}} d_I^{1+\frac{\# I-1}{n+1}}}\\
&\leqslant 2\frac{n+1}{n} B_0^{\frac{1}{n+1}} \sum_{\prod\limits_{\substack{I\in F'\\ I\neq\{0,1\}}} d_I \leqslant B_0} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{I\in F'\\ I\neq\{0,1\}}} d_I}\\
&\leqslant 2\frac{n+1}{n} B_0^{\frac{1}{n+1}} (2\log B_0+1)^{t-2}.
\end{aligned}
$$

En conclusion

$$A_2 = O(B\log^{t-2} B).$$

- Nous allons maintenant majorer le terme A_3. D'après le lemme 8.3.2, si $c_0^0 \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I \geqslant B_0^{\frac{1}{n+1}} (\prod\limits_{I\in F'} d_I^{\# I-1})^{\frac{1}{n+1}}$, on a

$$\left| m_{c(d)}\left(B_0 \prod_{I\in F'} d_I^{\# I-1}\right)\right| \leqslant C_8 \frac{B^{1+\frac{1}{n-1}} \left(\prod\limits_{I\in F'} d_I^{\# I-1}\right)^{1+\frac{1}{n-1}}}{\left(\prod\limits_{\substack{I\in F'\\ 0\in I}} d_I\right)^{2+\frac{2}{n-1}} \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{I\in F'\\ i\in I}} d_I}$$

où on a posé

$$C_8 = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} \frac{C_2 \left(\prod_{I \in F'} b_I^{0\,\#I-1} \right)^{1+\frac{1}{n-1}}}{(c_i^0)^{2+\frac{2}{n-1}} \prod_{j \neq i} c_j^0}.$$

En outre, s' il existe $I \in F'$ tel que $d_I \geqslant B\,\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) \frac{B}{\prod_{i=0}^{n} b_i^0 \prod_{I \in F'} b_I^0 d_I} < 1$$

et par conséquent

$$m_{c(d)}\left(B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) = 0.$$

On en déduit, en posant $B_0' = \inf_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{B_0}{c_i^{0^{n+1}}}$,

$$\begin{aligned}
A_3 &\leqslant (n+1)C_8 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\substack{1\leqslant d_I\leqslant \mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 B \\ \prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I \geqslant B_0'^{\frac{1}{n+1}} \prod_{I\in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}}}} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I^{2-\frac{\#I-3}{n-1}} \prod_{\substack{I\in F'\\0\notin I}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leqslant (n+1)C_8 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\substack{1\leqslant d_I\leqslant \mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 B \\ \prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I^{n+2-\#I} \geqslant B_0' \prod_{\substack{I\in F'\\0\notin I}} d_I^{\#I-1}}} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I^{2-\frac{\#I-3}{n-1}} \prod_{\substack{I\in F'\\0\notin I}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leqslant C_9 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{1\leqslant d_I\leqslant \mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 B \mathrm{si} I\neq\{1,2\}} \frac{\left(\left(B_0' \prod_{\substack{I\in F'\\0\notin I\\I\neq\{1,2\}}} d_I^{\#I-1}\right)^{-1} \prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I^{n+2-\#I}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod_{\substack{I\in F'\\0\in I}} d_I^{2-\frac{\#I-3}{n-1}} \prod_{\substack{I\in F'\\0\notin I\\I\neq\{1,2\}}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leqslant C_{10} B \sum_{1\leqslant d_I\leqslant \mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 B \mathrm{si} I\neq\{1,2\}} \frac{1}{\prod_{\substack{I\in F'\\I\neq\{1,2\}}} d_I} \\
&\leqslant C_{11} B(\log B+1)^{t-2}.
\end{aligned}$$

On obtient également

$$A_3 = O(B\log^{t-2} B).$$

• Majorons maintenant $P_{b,d}(B)$ de manière uniforme. S' il existe $I\in F'$ tel que $d_I \geqslant B\,\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$m_{c(d)}\left(B_0 \prod_{I\in F'} d_I^{\#I-1}\right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} P_{b^0}(B) &\leqslant \operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod\limits_{I\in F} b_I^0}\sum_{1\leqslant d_I\leqslant B\operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)}\frac{1}{\prod\limits_{I\in F'} d_I} \\ &\leqslant \operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B(\log B+\log\operatorname{Vol}(\mathscr{D}_1)+1)^{t-1}}{\prod\limits_{I\in F} b_I^0}. \quad\square \end{aligned}$$

8.5. Formule d'inversion. — Notre but est maintenant de construire l'analogue de la formule d'inversion de Möbius. Si $\mathfrak{b}\in\mathscr{B}$, on note

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod\limits_{f\in F} N(\mathfrak{b}_f)},$$

et pour tout $\mathfrak{p}\in M_f$,

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f))_{f\in F}.$$

Pour tout $\mathfrak{p}\in M_f$, on pose également si $n=(n_g)_{g\in F}\in\mathbf{N}^F$, $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_g})_{g\in F}$ et si $\mathfrak{b}\in\mathscr{B}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$. Si B est un sous-ensemble de $\mathscr{B}$, sa fonction caractéristique est notée χ_B.

Lemme 8.5.1. — *Il existe une unique fonction $\mu:\mathscr{B}\to\mathbf{Z}$ telle que*

(a) $\chi_{\mathscr{H}'} = \sum\limits_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})\chi_{(\mathfrak{b})}$.

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes

(b) $\mu(\mathfrak{b}) = \prod\limits_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ *pour tout* $\mathfrak{b}\in\mathscr{B}$,

(c) $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^F}\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n) = \dfrac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1,\operatorname{Pic}\overline{V})}$,

(d) $\sum\limits_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}}|\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})|<+\infty$.

Démonstration. — • Si $\mathfrak{b},\mathfrak{b}'\in\mathscr{B}$, on note $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$ si et seulement si $\mathfrak{b}'\in(\mathfrak{b})$. Une fonction μ vérifie (a) si et seulement si

$$\forall\mathfrak{b}\in\mathscr{B},\ \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}}\mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathscr{B},\ \mu(\mathfrak{b}) = \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{b}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de μ.

• Montrons (b) par récurrence sur $\#\{\mathfrak{b}' \in \mathscr{B} \mid \mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\}$. On remarque tout d'abord que pour tout $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$,

$$\chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}).$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}$, on a

$$\mu(\mathfrak{b}') = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}})\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) + \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\leqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})} \mu(\mathfrak{p}^n) - \sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}})\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}).
\end{aligned}$$

• Démontrons (c). Soit $n \in \mathbf{N}^F$. Montrons tout d'abord par récurrence sur $|n| = \sum_{g\in F} n_g$ que s'il existe $f \in F$ tel que $n_f \geqslant 2$ alors $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$. Soit n' défini par

$$\begin{cases} n'_g = n_g \text{ si } g \neq f\\ n'_f = n_f - 1.\end{cases}$$

Alors on a

$$\chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{p}^n) = \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{p}^{n'})$$

et

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{p}^n) &= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{b}\neq\mathfrak{p}^n}} \mu(\mathfrak{b}) \\
&= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^{n'}} \mu(\mathfrak{b}) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n \\ k\neq n \\ k_f=n_f}} \mu(\mathfrak{p}^k).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\mu(\mathfrak{p}^k) = 0$ si $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n$, $k \neq n$ et $k_f = n_f > 1$. Donc $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$.

- A toute application $\phi : \{0,1\}^F \to \mathbf{Z}$ on associe le polynôme

$$S_F(\phi)(T) = \sum_{n\in\{0,1\}^F} \phi(n) T^{|n|}.$$

La somme que nous voulons calculer s'exprime alors de la manière suivante

$$\sum_{n\in\{0,1\}^F} \mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n) = S_F(\mu)\left(\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)$$

où on note également $\mu : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^F & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \mu(\mathfrak{p}^n) \end{array}$. On introduit sur $\{0,1\}^F$ l'ordre suivant $n|m$ si et seulement si pour tout $f \in F$, $n_f \leqslant m_f$. On a donc

$$\chi_{\mathscr{H}'}(n) = \sum_{m|n} \mu(m)$$

et donc

$$\begin{aligned}
S_F(\chi_{\mathscr{H}'})(T) &= \sum_{n\in\{0,1\}^F} \chi_{\mathscr{H}'}(n)T^{|n|}\\
&= \sum_{n\in\{0,1\}^F} \sum_{m|n} \mu(m)T^{|n|}\\
&= \sum_{m\in\{0,1\}^F} \mu(m)T^{|m|}\sum_{m|n} T^{|n|-|m|}\\
&= \sum_{m\in\{0,1\}^F} \mu(m)T^{|m|}\sum_{i\leqslant \#F-|m|} C^i_{\#F-|m|}T^i\\
&= \sum_{m\in\{0,1\}^F} \mu(m)T^{|m|}(1+T)^{\#F-|m|}\\
&= (1+T)^{\#F}\sum_{m\in\{0,1\}^F} \mu(m)\left(\frac{T}{1+T}\right)^{|m|}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$\begin{aligned}
S_F(\mu)(T) &= (1-T)^{\#F}S_F(\chi_{\mathscr{H}'})\left(\frac{T}{1-T}\right)\\
&= (1-T)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,V}T^{\dim V}\sum_{n\in\{0,1\}^F} \chi_{\mathscr{H}'}(n)\left(\frac{1-T}{T}\right)^{\dim V-|n|}.
\end{aligned}$$

Lemme 8.5.2. —

$$\sum_{n\in\{0,1\}^F} \chi_{\mathscr{H}'}(n)\,(N(\mathfrak{p})-1)^{\dim V-|n|} = \#V(\mathbf{F}_\mathfrak{p}).$$

Démonstration. — Soit $\gamma : \mathscr{V}(\mathbf{F}_\mathfrak{p}) \to \{0,1\}^F$ l'application qui à x associe la fonction caractéristique de $\{f \mid x\in L_f\}$. L 'application γ induit une surjection

$$\mathscr{V}(\mathbf{F}_\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathscr{H}}' = \{n\in\{0,1\}^F \mid \chi_{\mathscr{H}'}(n)=1\}.$$

En outre on vérifie que l'image réciproque par γ d'un point n de $\tilde{\mathscr{H}}'$ est isomorphe à

$$(\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}-\{0\})^{\dim V-|n|}.\quad \square$$

L'interprétation de la valeur locale dans le cas particulier où $n = 2$ m'a été indiquée par Manin à qui elle avait été montrée par Beukers.

Fin de la démonstration du lemme 8.5.1. — • Nous allons maintenant démontrer (d). Si $n \in \mathbf{N}^F$ vérifie $|n| = 1$ alors

$$\chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{p}^n) = 1 = \chi_{\mathscr{H}'}(\mathfrak{p}^0)$$

et $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$. Par conséquent

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \leqslant 1 + \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)| \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}$$

On note $C_{12} = \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)|$ Donc pour tout $\mathfrak{b}_0 \in \mathscr{B}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{b}_0}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| &= \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{b}_0}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} |\mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})| \beta(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}) \\
&= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \leqslant \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_0)} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \\
&\leqslant \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \\
&\leqslant \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 + \frac{C_{12}}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \\
&< +\infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Il faut remarquer que c'est la sommation de la section 8.4 qui introduit pour l'assertion (c) le facteur $\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V}$ et rend convergente la série ci-dessus.

La formule d'inversion implique le lemme suivant valable sur tout corps de nombres et qui va nous permettre d'utiliser l'estimation du lemme 8.4.2.

Lemme 8.5.3. —

$$wN_\mathfrak{a}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b}) P_\mathfrak{b}(B).$$

Démonstration. — Ceci résulte des lemmes 8.2.1 et 8.5.1. □

8.6. Enoncé du résultat

Théorème 8.6.1. — *Soit V la variété torique obtenue en éclatant successivement pour m variant de n à 2 les relevés stricts des sous-espaces de $\mathbf{P}^n_k$ définis par les équations $X_i = 0$ pour $i \in I$ où I décrit les parties de cardinal m de $\{0, \dots, n\}$ Soit U le*

complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices alors

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \textit{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V = 2^{n+1} - n - 2$.

Démonstration. — Sur un corps de nombres quelconque on a

$$n_U(B) = \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} N_{\mathfrak{a}}(B) = \frac{1}{w} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k) \\ \mathfrak{b} \in \mathscr{B}}} \mu(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(B).$$

Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a posé $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et, d'après le lemme 8.4.2, on a l'équivalence

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \sim C'' B \log^{t-1} B \beta(\mathfrak{b})$$

où

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{\sqrt{d}^n h} \lim_{s \to 1} (s-1)^t \zeta_{\mathbf{Q}}^t(s) \omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

et la majoration

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \leqslant \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 B (\log B + C_4)^{t-1} \beta(\mathfrak{b}).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, soit $I \subset \mathscr{B}$ fini tel que

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} - I} |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1/2C'' + \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1)}.$$

Soit B_0 tel que $B \geqslant B_0$ implique

$$\forall \mathfrak{b} \in I, \quad |P_{\mathfrak{b}}(B) - C'' B \log^{t-1} B \beta(\mathfrak{b})| < \frac{\varepsilon}{2\# I} B \log^{t-1} B$$

et

$$B(\log B + C_4)^{t-1} \leqslant 2 B \log^{t-1} B.$$

Alors $B \geqslant B_0$ implique

$$\begin{aligned}
&\left| n_U(B) - \frac{h}{w} C'' B \log^{t-1} B \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b}) \right| \\
&\leqslant \left(\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} - I} \left(\frac{2}{2} \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 + \frac{h}{w} C'' \right) |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| + \sum_{\mathfrak{b} \in I} \frac{\varepsilon}{2\# I} \right) B \log^{t-1} B \\
&\leqslant \varepsilon B \log^{t-1} B.
\end{aligned}$$

Donc

$$n_U(B) \sim C' B \log^{t-1} B$$

où

$$\begin{aligned} C' &= \frac{h}{w}\alpha_c(V)\frac{w}{\sqrt{d}^n h}\lim_{s\to 1}(s-1)^t\zeta_{\mathbf{Q}}^t(s)\omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}(\omega_{\mathfrak{p}}(V(\mathbf{Q}_{\mathfrak{p}}))) \\ &= C_H(V). \quad \square \end{aligned}$$

Dans le cas d'un corps de nombres quelconque, la constante obtenue serait également, d'après la remarque suivant le lemme 8.4.2, la constante $C_H(V)$.

9. Cas de l'éclatement en un point rationnel

Comme dans le cas précédant, les démonstrations sont faites dans la mesure du possible sur un corps de nombres quelconque. En outre les démonstrations étant similaires, nous n'en indiquerons que les points clefs.

9.1. Construction de la hauteur. — La lettre V désigne ici la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant le point

$$P = (0:0:1)$$

sur $\mathbf{P}^2_k$. On note L le diviseur au-dessus de P. En ce cas, le complémentaire des sous-variétés accumulatrices est l'ouvert $U = V - L$ et on peut prendre $-K = 3\Lambda - L$. La hauteur peut être prise de la forme

$$H((x_1:x_2:x_3)) = \prod_{v\in M_k}\sup(|x_1|_v^3, |x_2|_v^3, |x_1x_3^2|_v, |x_2x_3^2|_v).$$

9.2. Réécriture de la hauteur. — On fixe un idéal $\mathfrak{a}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. On utilise le domaine fondamental Δ_H défini dans la partie 7.1 et on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ des éléments $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{O}_k^3$ vérifiant les conditions suivantes

(9.2.1) $$(x_1,x_2,x_3) = \mathfrak{a}$$

(9.2.2) $$H((x_1:x_2:x_3)) \leqslant B$$

(9.2.3) $$(x_1,x_2) \neq (0,0)$$

(9.2.4) $$j(x) \in \Delta_H.$$

En outre comme la contribution des droites $x_i = 0$ sont des $O(B)$ et donc négligeables devant $B\log B$, on peut remplacer la condition (3) par la condition

((9.2.3′)) $$x_i \neq 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3.$$

Par ailleurs la hauteur peut se mettre sous la forme

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N(\mathfrak{a})^2 N((x_1, x_2))}.$$

On note également

$$\mathscr{H}_{\mathfrak{a}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3\}$$

et $\mathscr{H}'$ l'ensemble des quadruplets $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on ait

$$((\mathrm{C}_{\mathfrak{p}})) \qquad \begin{cases} \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_3), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_3)) = 0 \\ \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \end{cases}$$

et on définit $\rho : \mathscr{H}_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{H}'$ par $\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$ avec

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{d}_3 & = & (x_1, x_2)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 & = & x_1 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 & = & x_2 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 & = & x_3 \mathfrak{a}^{-1}. \end{array}$$

On note $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ un quadruplet $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$. On note $n_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}(B)$ le cardinal de l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ qui vérifient

$$((9.2.1')) \qquad \begin{array}{l} (x_1) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3 \\ (x_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_3 \\ (x_3) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3 \end{array}$$

ainsi que

$$((9.2.2')) \qquad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_3)$$

$$((9.2.4)) \qquad j(x) \in \Delta_H.$$

***Lemme 9.2.1.* —**

$$\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{H}'} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

9.3. Estimations pour le corps des rationnels. — Comme dans le cas de trois points rationnels, on commence par estimer le nombre $m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}(B)$ des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ tels que $x_i \neq 0$ et $H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B$. On note

$$\mathscr{D}_B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Delta_H \text{ et } H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B\}.$$

Lemme 9.3.1. — *Si $k = \mathbf{Q}$, il existe une constante C_1 telle que*

$$\frac{\operatorname{Vol}\mathscr{D}_B}{c_1c_2c_3} - C_1\left(\frac{1}{c_1c_2}+\frac{1}{c_2c_3}+\frac{1}{c_3c_1}\right)B^{2/3} \leqslant m_{c_1,c_2,c_3}(B) \leqslant \frac{\operatorname{Vol}\mathscr{D}_B}{c_1c_2c_3}.$$

En outre $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$ est nul si $\sup(c_1,c_2) > B^{1/3}$.

Démonstration. — la première assertion se démontre comme dans le cas de trois points rationnels. La seconde résulte du fait que

$$H_\infty(x_1,x_2,x_3) = \sup(|x_1^3|,|x_2^3|,|x_1x_3^2|,|x_2x_3^2|). \quad \square$$

9.4. Sommation sur les idéaux. — Comme dans la partie 8.4, on pose $\mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^4$ et on reprend la notation $(\mathfrak{b})$. On considère également

$$P_{\mathfrak{b}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{b}\in(\mathfrak{b}^0)} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

On montre comme précédemment

Lemme 9.4.1. —

$$P_{\mathfrak{b}^0,\mathfrak{d}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{d}_3\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)} m_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1^0\mathfrak{d}_3^0\mathfrak{d}_3,\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2^0\mathfrak{d}_3^0\mathfrak{d}_3,\mathfrak{a}\mathfrak{b}_3^0}(BN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_3^0\mathfrak{d}_3)).$$

Sur $\mathbf{Q}$, on obtient les résultats suivants

Lemme 9.4.2. —

$$P_{b,d}(B) \sim C''\frac{B\log B}{d_3b_1b_2b_3} \text{ quand } B \to +\infty$$

où $C'' = 3\alpha_c(V)\operatorname{Vol}\mathscr{D}_1\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_{\mathbf{Q}}(s)$ *et il existe une constante C_2 telle que*

$$P_{b,d}(B) \leqslant \operatorname{Vol}\mathscr{D}_1\frac{B(\log B + C_2)}{d_3b_1b_2b_3}.$$

Démonstration. — Dans ce cas $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$. Posons $B_0 = Bd_3^0$, $c_1^0 = d_3^0b_1^0$, $c_2^0 = d_3^0b_2^0$ et $c_3^0 = b_3^0$, $C_3 = \sup(c_1^0,c_2^0)$ et

$$A = \sum_{d_3\geqslant1} m_{c_1^0d_3,c_2^0d_3,c_3^0}(B_0d_3).$$

Alors $A = A_1 + A_2$ avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{1 \leqslant d_3 \leqslant \frac{B_0^{1/2}}{C_3^{3/2}}} \frac{1}{d_3} \\ &\sim \frac{1}{2} \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B \log B}{d_3^0 b_1^0 b_2^0 b_3^0} \end{aligned}$$

et $\frac{1}{2} = 3\alpha_c(V)$. Par ailleurs A_2 est négatif et

$$\begin{aligned} -A_2 &< B_1'(c^0) \sum_{1 \leqslant d_3 \leqslant B_0^{1/2}} (\frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_3}) B^{2/3} d_3^{2/3} \\ &= O(B) \end{aligned}$$

où $B_1'(c^0)$ est indépendant de d_3. La majoration uniforme s'obtient comme dans le cas de trois points rationnels. □

9.5. Formule d'inversion. — Si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, on note

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{4} N(\mathfrak{b}_i)}.$$

Lemme 9.5.1. — *Il existe une unique fonction* $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ *telle que*

(a) $\chi_{\mathscr{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}$.

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes

(b) $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})$ *pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$,

(c) $\sum_{n \in \mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n) = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1, \operatorname{Pic} \overline{V})}$,

(d) $\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| < +\infty$.

La démonstration est la même que dans la partie 8.5.

9.6. Enoncé du résultat. — Tous les éléments sont donc réunis pour reproduire la fin de la démonstration du cas précédant et démontrer la formule 2.2.1 dans ce cas.

Théorème 9.6.1. — *Soit V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un point rationnel sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Soit U le complémentaire dans V du diviseur exceptionnel. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) \log^{t-1} B$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V = 2$.

En outre, on vérifie aisément que si $N_v = 1$

$$\omega_v(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}) = 16$$

et si $N_v = 2$

$$\omega_v(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}) = 4(2\pi)^2.$$

10. Cas de l'éclatement en deux points rationnels

10.1. Construction de la hauteur. — Dans toute cette partie, V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points

$$P_1 = (0:0:1) \text{ et } P_2 = (0:1:0)$$

sur $\mathbf{P}^2_k$. On note L_i les diviseurs au-dessus de P_i et $L_{1,2}$ le diviseur au-dessus de la droite $X_1 = 0$. On note U l'ouvert $V - L_1 - L_2 - L_{1,2}$. Un diviseur canonique est donné par

$$K = L_1 + L_2 - 3\Lambda$$

et la hauteur peut être prise de la forme

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{v \in M_k} \sup(|x_1|_v^3, \sup_{\substack{i \neq j \\ j \neq 1}} |x_i x_j^2|_v).$$

10.2. Réécriture de la hauteur. — On fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. Comme d'habitude, on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ des éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant les conditions

(10.2.1) $$(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

(10.2.2) $$H((x_1 : x_2 : x_3)) \leqslant B$$

(10.2.3) $$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant 3$$

(10.2.4) $$j(x) \in \Delta_H.$$

En outre

$$H((x_1:x_2:x_3)) = \frac{H_\infty(x_1,x_2,x_3)}{N(\mathfrak{a})N((x_1,x_2)(x_1,x_3))}.$$

On note $\mathscr{H}_\mathfrak{a}$ l'ensemble des $(x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant les conditions (10.2.1) et (10.2.3) ci-dessus et $\mathscr{H}'$ l'ensemble des $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3)$ tels que, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on ait

$$(\mathrm{C}_\mathfrak{p}) \qquad \begin{cases} \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_i)) = 0 \text{ pour } i = 2,3 \\ \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_2), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3)) = 0 \\ \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_1), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \\ \inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_1), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_3)) = 0. \end{cases}$$

On définit $\rho : \mathscr{H}_\mathfrak{a} \to \mathscr{H}'$ par $\rho(x_1,x_2,x_3) = (\mathfrak{b},\mathfrak{d})$ avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= (x_1,x_2)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{d}_2 &= (x_1,x_3)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 &= (x_1)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 &= (x_2)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 &= (x_3)\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour tout $(\mathfrak{b},\mathfrak{d}) \in \mathscr{H}'$, on note $n_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}(B)$ le cardinal de l'ensemble des $x \in \mathscr{H}_\mathfrak{a}$ qui vérifient

$$(10.2.1) \qquad \begin{cases} (x_1) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2 \\ (x_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_3 \\ (x_3) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3\mathfrak{d}_2 \end{cases}$$

ainsi que

$$(10.2.2') \qquad H_\infty(x) \leqslant BN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2)$$

$$(10.2.4) \qquad j(x) \in \Delta_H.$$

Lemme 10.2.1. —

$$\#\mathscr{N}'_\mathfrak{a}(B) = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{H}'} n_\mathfrak{b}(B).$$

10.3. Estimations sur le corps des rationnels. — On utilise des notations analogues à celles de la section 8.3.

Lemme 10.3.1. — *Si $k = \mathbf{Q}$, il existe une constante C_1 telle que*

$$\frac{\operatorname{Vol} \mathscr{D}_B}{c_1c_2c_3} - C_1\left(\frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_2c_3} + \frac{1}{c_3c_1}\right)B^{2/3} \leqslant m_{c_1,c_2,c_3}(B) \leqslant \frac{\operatorname{Vol} \mathscr{D}_B}{c_1c_2c_3}.$$

En outre, $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$ est nul si $c_1 > B^{1/3}$.

10.4. Sommation sur les idéaux

Lemme 10.4.1. — *Avec les notations usuelles,*

$$P_{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{d}_0}(B) = \sum_{\mathfrak{d}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^2} m_{\mathfrak{c}_1^0\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3,\mathfrak{c}_2^0\mathfrak{d}_3,\mathfrak{c}_3^0\mathfrak{d}_2}(B_0N(\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3))$$

où

$$\begin{aligned} B_0 &= BN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_2^0\mathfrak{d}_3^0)\\ \mathfrak{c}_1^0 &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1^0\mathfrak{d}_2^0\mathfrak{d}_3^0\\ \mathfrak{c}_2^0 &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2^0\mathfrak{d}_3^0\\ \mathfrak{c}_3^0 &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3^0\mathfrak{d}_2^0. \end{aligned}$$

Lemme 10.4.2. — *Sur $\mathbf{Q}$, on a l'équivalence*

$$P_{b,d}(B) \sim C'' \frac{B\log^2 B}{b_1b_2b_3d_2d_3} \text{ quand } B \to +\infty$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V) \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \lim_{s\to1}(s-1)^2\zeta_{\mathbf{Q}}^2(s)$$

et il existe une constante C_2 telle que

$$P_{b,d}(B) \leqslant \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B(\log B + C_2)^2}{b_1b_2b_3d_2d_3}.$$

Remarque 10.1. — Si le lemme 10.3.1 se généralisait à un corps de nombres quelconque, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = \alpha_c(V)\frac{w}{h\sqrt{d}^2}\lim_{s\to1}(s-1)^3\zeta_k^3(s)\prod_{v\in M_\infty}\omega_v(V_v).$$

Démonstration. — Ici $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$, $B_0 = Bd_2^0d_3^0$, $c_1^0 = b_1^0d_2^0d_3^0$, $c_2^0 = b_2^0d_3^0$ et $c_3^0 = b_3^0d_2^0$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(d_2,d_3)\in(\mathbf{N}^+)^2} m_{c_1^0d_2d_3,c_2^0d_3,c_3^0d_2}(B_0d_2d_3)\\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{\substack{(d_2,d_3)\in(\mathbf{N}^+)^2 \\ d_2 d_3 \leqslant \frac{B_0^{1/2}}{c_1^{0\,3/2}}}} \frac{1}{d_2 d_3} \\
&\sim \frac{\lim_{s\to 1}(s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 B \log^2 B}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0} \operatorname{Vol}\{x \in \mathbf{R}^{+2} \mid x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{2}\} \\
&\sim \frac{3\alpha_c(V) \lim_{s\to 1}(s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 B \log^2 B}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0}.
\end{aligned}$$

En outre, $A_2 = O(B \log B)$. La majoration uniforme s'obtient comme dans les cas précédants. □

10.5. Formule d'inversion. — Comme dans les cas précédants, on démontre le lemme suivant

Lemme 10.5.1. — *Il existe une unique fonction $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ telle que*

(a) $\chi_{\mathscr{H}'} = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})\chi_{(\mathfrak{b})}$.

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes

(b) $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ *pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$,

(c) $\sum_{n\in\mathbf{N}^F} \mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n) = \dfrac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic}\overline{V})}$,

(d) $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| < +\infty$.

10.6. Enoncé du résultat

Théorème 10.6.1. — *Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant deux points distincts sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Soit U le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V = 3$.

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème 8.6.1.

11. Cas de l'éclatement en deux points conjugués

11.1. Construction de la hauteur. — On note V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un zéro-cycle D de $\mathbf{P}^2_k$ tel que D s'écrive comme somme de deux points sur $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Il existe donc un élément $a \in \mathscr{O}_k$ tel que $D = P_1 + P_2$ sur $K = k(\sqrt{a})$. On suppose que $a \notin k^{*2}$ et on note $\bar{\cdot}$ le générateur de Gal(K/k) et α une racine carrée de a dans K. On peut se ramener à

$$P_1 = (0 : 1 : \alpha) \text{ et } P_2 = (0 : 1 : -\alpha).$$

Dans la suite, on fera les hypothèses suivantes

- $(a, 2) = \mathscr{O}_k$,
- $\mathscr{O}_K = \mathscr{O}_k[\alpha]$,
- $\forall \mathfrak{p} \in M_f$, $\mathfrak{p}|2a \Rightarrow a \notin k^2_{\mathfrak{p}}$,
- si $\mathfrak{p}|2$ alors $k_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_2$ est non ramifiée.

On note S l'ensemble des places ramifiées par l'extension K/k et

$$S_K = \{\mathfrak{B} \in M_K \mid \mathfrak{B}|\mathfrak{p}\}.$$

Soit L le diviseur de V au-dessus de D, L' le diviseur au-dessus de la droite D' définie par $X_0 = 0$ et U leur complémentaire que l'on identifie avec son image dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Un diviseur canonique est défini par

$$-K = 3\Lambda - L.$$

Sur le corps K, on note

$$Z_0 = X_0,\ Z_1 = X_2 - \alpha X_1 \text{ et } Z_2 = X_2 + \alpha X_1.$$

Une base de $\Gamma(V_K, \omega^{-1}_{V_K})$ est donc donnée par les monômes en Z_0, Z_1, Z_2 distincts de Z_1^3 et de Z_2^3. La famille $(s'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 12}$ définie par les polynômes

$$\begin{array}{llll} Y'_1 = X_0^3, & Y'_2 = X_0^2 Z_1, & Y'_3 = X_0^2 Z_2, & Y'_4 = X_0^2 X_1, \\ Y'_5 = X_0^2 X_2, & Y'_6 = X_0 Z_1 Z_2, & Y'_7 = X_0 Z_1 X_1, & Y'_8 = X_0 Z_1 X_2, \\ Y'_9 = X_0 Z_2 X_1, & Y'_{10} = X_0 Z_2 X_2, & Y'_{11} = X_1 Z_1 Z_2, & Y'_{12} = X_2 Z_1 Z_2 \end{array}$$

est donc une famille génératrice de $\Gamma(V_K, \omega^{-1}_{V_K})$. Par ailleurs une base de $\Gamma(V, \omega^{-1}_V)$ est donnée par les polynômes

$$\begin{array}{llll} Y_1 = X_0^3, & Y_2 = X_0^2 X_1, & Y_3 = X_1^2 X_0, & Y_4 = X_2^2 X_0, \\ Y_5 = X_0^2 X_2, & Y_6 = X_1(X_2^2 - aX_1^2), & Y_7 = X_2(X_2^2 - aX_1^2), & Y_8 = X_0 X_1 X_2. \end{array}$$

Pour tout $v \in M_k$, on définit une métrique $\|.\|_v$ sur $\omega_{V_v}^{-1}$ de la manière suivante pour tout $x \in V(k_v)$ et tout $s \in \Gamma(V_v, \omega_{V_v}^{-1})$ tel que $s(x) \neq 0$,

$$\|s(x)\|_v = \begin{cases} \left(\prod_{\substack{v' \in M_K \\ v' | v}} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 12} \sqrt{\left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}} \right)^{-1} & \text{si } v \in M_{f,k}, \\ \prod_{\substack{v' \in M_K \\ v' | v}} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}^{\frac{2}{[k_{v'}:k_v]}} \right)^{-\frac{[k_{v'}:k_v]}{4}} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}, \\ \prod_{\substack{v' \in M_K \\ v' | v}} \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}}^{-1} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

Cela définit bien une métrique adélique. En effet, comme $\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} | 2a\} \subset S$, pour tout $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$, on a l'égalité

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leqslant i \leqslant 12)\mathscr{O}_{S_K} = (Y_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leqslant i \leqslant 8)\mathscr{O}_{S_K}.$$

En dehors de S la métrique $\|.\|_v$ est donc la métrique associée à la base définie par les polynômes Y_i. La hauteur correspondante est alors donnée par

$$\forall P \in V(k), H(P) = \prod_{v \in M_k} \|s(x)\|_v^{-1}$$

où s est une section de ω_V^{-1} non nulle en x.

11.2. Réécriture de la hauteur. — Jusqu'à la section 11.5, on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. On se ramène à estimer le cardinal de l'ensemble $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ des $x \in \mathscr{O}_k^3$ tels que

$$(x_0, x_1, x_2) = \mathfrak{a}, \tag{11.2.1}$$

$$H(x) \leqslant B, \tag{11.2.2}$$

$$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant 2, \tag{11.2.3}$$

$$j(x) \in \Delta_H. \tag{11.2.4}$$

Pour tout $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$, on a la relation

$$H(x_0 : x_1 : x_2) = \frac{H_\infty(x_0, x_1, x_2)}{N((Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leqslant i \leqslant 12))^{\frac{1}{2}}}$$

avec

$$H_\infty(x_0, x_1, x_2) = \prod_{v \in M_\infty} H_v(x_0, x_1, x_2)$$

où $H_v(x_0, x_1, x_2)$ est défini par

$$\begin{cases} \sqrt{(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)(x_0^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(x_0^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2)} & \text{si } k_v \tilde{\to} \mathbf{R} \\ (|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|x_0|^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(|x_0|^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2) & \text{si } k_v \tilde{\to} \mathbf{C}. \end{cases}$$

De plus

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2)_{1 \leqslant i \leqslant 12}) = (x_0, x_1, x_2)(x_0, x_2 - \alpha x_1)(x_0, x_2 + \alpha x_1).$$

Nous allons donc faire jouer à l'idéal $\mathfrak{d} = (x_0, x_2 - \alpha x_1)$ le rôle tenu par $\mathfrak{d}_1$ dans la partie 10. On considère l'ensemble

$$\mathscr{H}_\mathfrak{a} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \\ x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \end{array} \right. \right\}$$

et $\mathscr{H}'$ l'ensemble des triplets $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k) \times \mathscr{I}(\mathscr{O}_K)^2$ vérifiant pour tout $\mathfrak{P}$ dans $M_{f,K} - S_K$ la condition suivante

$$((\mathrm{C}_\mathfrak{P})) \qquad \begin{cases} \inf(v_\mathfrak{P}(\mathfrak{d}), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_1), v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_0 \mathscr{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_0 \mathscr{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_1), v_\mathfrak{P}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \end{cases}$$

et pour tout $\mathfrak{P} \in S_K$,

$$((\mathrm{C}_\mathfrak{P})) \qquad \begin{cases} v_\mathfrak{P}(\mathfrak{d}) \leqslant 1 \\ \inf(v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_1), v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_0 \mathscr{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_\mathfrak{P}(\mathfrak{d}), v_\mathfrak{P}(\mathfrak{b}_1)) = 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{B}$ le monoïde $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k) \times \mathscr{I}(\mathscr{O}_K)^2$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ un élément $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$ de $\mathscr{B}$. Pour tout $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathscr{B}$, on note $n_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}(B)$ le cardinal de l'ensemble des

$$(x_0, x_1, x_2) \in (\mathscr{O}_k - \{0\})^3$$

tels que

((11.2.1′)) $$\begin{cases} (x_0) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \\ (x_2+\alpha x_1) = \mathfrak{a}\mathscr{O}_K \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \end{cases}$$

((11.2.2′)) $$H_\infty(x_0,x_1,x_2) \leqslant BN(\mathfrak{a})^3 N(\mathfrak{d})$$

((11.2.3)) $$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant 2$$

((11.2.4)) $$j(x) \in \Delta_H.$$

(11.2.5)

Lemme 11.2.1. —
$$w\#\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})\in\mathscr{H}'} n_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}(B).$$

Démonstration. — On considère l'application
$$\tilde{\rho} : \mathscr{H}_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{I}(\mathscr{O}_k) \times \mathscr{I}(\mathscr{O}_K)^2$$
définie par $\rho(x) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$ avec
$$\begin{cases} \mathfrak{d} = (x_0, x_2-\alpha x_1)(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K)^{-1} \\ \mathfrak{b}_0 = (x_0) N_{K/k}(\mathfrak{d})^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 = (x_2+\alpha x_1)\bar{\mathfrak{d}}^{-1}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K)^{-1}. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$. Comme dans les cas précédents on montre que si $\mathfrak{P} \in M_{f,K} - S_K$ alors $\tilde{\rho}(x)$ vérifie $(C_{\mathfrak{P}})$. Soit $\mathfrak{P} \in S_K$ et $\mathfrak{p}$ la place induite sur k. Comme par hypothèse $\mathscr{O}_K = \mathscr{O}_k[\alpha]$ et a est premier à 2, deux cas sont possibles soit $\mathfrak{p}|a$ et alors $v_{\mathfrak{p}}(a) = 1$ ou bien $\mathfrak{p}|2$ et alors une uniformisante pour $K_{\mathfrak{P}}$ est donnée par $\pi = \alpha + u$ avec $u \in \mathscr{O}^*_{k_{\mathfrak{p}}}$.

Supposons que $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) \geqslant 2$. Alors $v_{\mathfrak{P}}(x_0) \geqslant v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K) + 1$. En outre,
$$v_{\mathfrak{P}}(x_2+\alpha x_1) = v_{\mathfrak{P}}(x_2-\alpha x_1) \geqslant v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K) + 2.$$
Si $\mathfrak{P}|\alpha$ alors on obtient que $v_{\mathfrak{P}}(x_2) \geqslant v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K) + 2$, donc
$$v_{\mathfrak{P}}(x_1) = v_{\mathfrak{P}}(\alpha x_1) - 1 \geqslant v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K) + 1$$
Ceci implique que $\inf(v_{\mathfrak{p}}(x_1), v_{\mathfrak{p}}(x_2), v_{\mathfrak{p}}(x_3)) \geqslant v_{\mathfrak{p}}(a) + 1$ ce qui est en contradiction avec $x \in \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$. Si $\mathfrak{p}|2$, nous posons $x'_0 = x_0$, $x'_1 = x_1$ et $x'_2 = x_2 + ux_1$ où $u \in \mathscr{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$ est défini comme ci-dessus. Alors
$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{P}}(x'_2+\pi x'_1) &= v_{\mathfrak{P}}(x'_2-\pi x'_1), \\ v_{\mathfrak{P}}(x_2-\alpha x_1) &= v_{\mathfrak{P}}(x'_2-\pi x'_1) \end{aligned}$$

et

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \inf(v_{\mathfrak{p}}(x_0'), v_{\mathfrak{p}}(x_1'), v_{\mathfrak{p}}(x_2')).$$

Un raisonnement analogue fournit donc la contradiction recherchée. Le fait que

$$\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0\mathscr{O}_K)) = 0$$

est immédiat. Si $\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d})) \geqslant 1$ alors

$$v_{\mathfrak{P}}(x_2 + \alpha x_1) \geqslant \qquad v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_K) + 2$$

et

$$v_{\mathfrak{p}}(x_0) \geqslant \qquad v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) + 1.$$

Ceci contredit également $x \in \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$. On note $\rho : \mathscr{H}_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{H}'$ l'application induite.

Par définition de ρ, si $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$ alors x vérifie (11.2.1′). Il reste à vérifier que si $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathscr{H}'$ et si x vérifie (11.2.1′) alors $x \in \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ et $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$. Les conditions ($\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}$) impliquent que

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}} & \nmid & \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathscr{O}_K + \mathfrak{b}_1\overline{\mathfrak{d}} & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est sindé dans } K/k, \\ \mathfrak{P} & \nmid & \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathscr{O}_K + \mathfrak{b}_1\overline{\mathfrak{d}} & \text{si } [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}] = 2 \text{ et } \mathfrak{p} \notin S_K, \\ \mathfrak{P}^2 & \nmid & \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathscr{O}_K + \mathfrak{b}_1\overline{\mathfrak{d}} & \text{si } \mathfrak{P} \in S_K \end{array}$$

Par conséquent pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} v_{\mathfrak{p}}(x_i) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. L'égalité se montre comme dans les cas précédents lorsque $\mathfrak{p} \notin S$. Soit maintenant $\mathfrak{p} \in S$ et $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{a}$ alors $\mathfrak{p}^k|x_0$ et $\mathfrak{P}^{2k}|x_2 + \alpha x_1$. Donc, dans le cas où $\mathfrak{p}|a$

$$\mathfrak{P}^{2k}|x_2 \text{ et } \mathfrak{P}^{2k-1}|x_1$$

Donc $\mathfrak{p}^k|x_2$ et $\mathfrak{p}^k|x_1$. On raisonne de façon similaire avec x_0, x_1 et $x_1 + ux_2$ si $\mathfrak{p}|2$. Enfin les conditions ($\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}$) impliquent directement l'égalité $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$.

On a donc démontré $n_{(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}(B) = \#\rho^{-1}(\{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})\})$. □

11.3. Estimations dans un cas particulier. — Etant donné $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k) \times \mathscr{I}(\mathscr{O}_K)$, on veut estimer le nombre $m_{\mathfrak{c}}(B)$ des points $(x_0, x_2 + \alpha x_1) \in$

$\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$ tels que

$$H_\infty(x) \leqslant B \tag{(11.2.2')}$$
$$x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant 2 \tag{(11.2.3)}$$
$$j(x) \in \Delta_H. \tag{(11.2.4)}$$

On note

$$\mathscr{D}_B = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_0, x_1, x_2) \in \Delta_h \text{ et } H_\infty(x_0, x_1, x_2) \leqslant B\}.$$

Lemme 11.3.1. — *Si $k = \mathbf{Q}$ et $a = -1$ alors pour tout $c_0 \in \mathbf{N}^+$ et tout $c_1 \in \mathbf{Z}[i] - \{0\}$, on a*

$$\frac{B \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1}{c_0 N((c_1))} - C_2 B^{2/3}\left(\frac{1}{|c_1| c_0} + \frac{1}{N((c_1))}\right) \leqslant m_{c_0,c_1}(B) \leqslant \frac{B \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1}{c_0 N((c_1))} + C_2 \frac{B^{2/3}}{|c_1| c_0}$$

et $m_{c_0,c_1}(B)$ est nul si $c_0 > B^{1/3}$ ou $N(c_1) > B^{2/3}$.

Remarque 11.1. — Dans le cas général, il faudrait pouvoir majorer

$$\left| m_{(\mathfrak{c}_0,\mathfrak{c}_1)}(B) - \frac{B \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1}{\operatorname{Det}(M)} \right|$$

où M est l'image de $\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$ dans $\prod_{v \in M_\infty} k_v^3$ par l'application induite par l'isomorphisme de groupes $\mathscr{O}_k \times \mathscr{O}_k[\alpha] \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_k^3$ et

$$\operatorname{Det}(M) = \frac{N(\mathfrak{c}_0) \times N(\mathfrak{c}_1) \sqrt{d}^{\,3}}{2^{3r_2}}.$$

Démonstration. — Dans ce cas particulier, notre choix de la norme pour la place réelle donne

$$H_\infty(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$$

ce qui implique la deuxième assertion.

On note $H_\infty(x_0, x_2 + ix_1) = H_\infty(x_0, x_1, x_2)$. On a alors les majorations

$$
\begin{aligned}
& m_{(c_0,c_1)}(B) \\
& = 8\#\left\{ (n_0, n_1, n_2) \in \mathbf{N}^3 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} H_\infty(n_0c_0, n_2c_1 + in_1c_1) \leqslant B \\ n_0 \neq 0 \\ n_2 \neq 0 \end{array} \right. \right\} \\
& \leqslant \tfrac{8}{c_0 N((c_1))} \mathrm{Vol}\left\{ x \in \mathbf{R}^{+3} \,\middle|\, H_\infty\left(c_0 E\left(\tfrac{x_0}{c_0}\right) + c_0, c_1 E\left(\tfrac{x_2}{|c_1|}\right) + ic_1 E\left(\tfrac{x_1}{|c_1|}\right) + (1+i)c_1 \right) \leqslant B \right\} \\
& \qquad + 8\#\{(n_0, n_1) \in \mathbf{N}^{+2} \mid H_\infty(n_0c_0, n_1c_1) \leqslant B\} \\
& \leqslant \frac{\mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_B}{c_0 N((c_1))} + C_2 \frac{B^{2/3}}{|c_1| c_0}.
\end{aligned}
$$

La minoration se montre comme dans les cas précédants. □

11.4. Sommation sur les idéaux. — Comme précédemment, on définit $(\mathfrak{b})$ et $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(B)$.

Lemme 11.4.1. — *Soit* $(\mathfrak{b}^0_0, \mathfrak{b}^0_1, \mathfrak{d}^0) \in \mathscr{B}$, *soient* $\mathfrak{c}^0_0 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^0_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}^0)$ *et* $\mathfrak{c}^0_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^0_1\overline{\mathfrak{d}^0}$.

$$P_{(\mathfrak{b}^0,\mathfrak{d}^0)}(B) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_K)} m_{(\mathfrak{c}^0_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}), \mathfrak{c}^0_1 \overline{\mathfrak{d}})}(BN(\mathfrak{a}^3)N(\mathfrak{d}^0\mathfrak{d})).$$

Lemme 11.4.2. — *Si* $k = \mathbf{Q}$ *et* $a = -1$ *alors on a l'équivalence*

$$P_{(b^0,d^0)}(B) \sim C'' \frac{B \log B}{b^0_0 N(b^0_1) N(d^0)}$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V)\,\mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 \lim_{s \to 1} \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)(s-1)$$

et, pour $B > 1$, *la majoration*

$$P_{(b^0,d^0)}(B) \leqslant C_3 \frac{B(\log B + C_4)}{b^0_0 N(b^0_1) N(d^0)}$$

où C_3 *et* C_4 *sont des constantes indépendantes de* B, *de* b^0 *et de* d^0.

Remarque 11.2. — Si le lemme 11.3.1 se généralisait au cas général, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = 3\alpha_c(V)\,\mathrm{Vol}\,\mathscr{D}_1 \lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_K(s).$$

Démonstration. — Comme dans la partie 10.4, on décompose la somme en deux facteurs $P_b(B) = A_1 + A_2$.

- Nous commençons par estimer A_1

$$A_1 = \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) \frac{B}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \sum_{\substack{\mathfrak{d} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_{\mathbf{Q}(i)}) \\ N(\mathfrak{d}) \leqslant B^{1/3} N(\mathfrak{d})^{1/3}}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})}.$$

Par le théorème d'Hardy-Littlewood-Karamata (cf. [**Te**, théorème II.7.8]),

$$A_1 \sim \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) \frac{B}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \left(\frac{\log B}{2} \lim_{s \to 1} (s-1) \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) \right).$$

- Nous allons maintenant majorer A_2.

$$|A_2| \leqslant C_2 B^{2/3} 2 \sum_{N(\mathfrak{d}) \leqslant B^{1/2}} \frac{N(\mathfrak{d})^{2/3}}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leqslant B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})^{1/3}} &\leqslant 1 + \int_{r \leqslant B^{1/4}} \frac{1}{r^{2/3}} r \, dr \, d\theta \\ &\leqslant 1 + \tfrac{3}{2} \pi B^{1/3} \end{aligned}$$

- Majorons maintenant $P_{(b^0, d^0)}$ de manière uniforme.

$$m_{c_0, c_1}(B) \leqslant (\mathrm{Vol}\, \mathscr{D}_1 + C_2) \frac{B}{c_0 N(c_1)}.$$

Par conséquent,

$$P_{(b^0, d^0)}(B) \leqslant C_5 B \frac{1}{c_0^0 N(c_1^0)} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leqslant B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or il existe des constantes C_6 et C_7 telles que

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \leqslant C_6 \log B + C_7. \quad \square$$

Lemme 11.4.3. —

$$\zeta_{K, S_K}(s) = \frac{L_S(s, \mathrm{Pic}\, \overline{V})}{\zeta_{k,S}(s)}.$$

Démonstration. — Si $\mathfrak{p}$ est scindé par K, alors

$$\begin{aligned}\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^2} \\ &= L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right).\end{aligned}$$

Sinon

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}}\right)} = L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right). \quad \square$$

Lemme 11.4.4. —

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{6}.$$

Démonstration. — $\operatorname{Pic} V$ a pour base $[\Lambda]$, $[L]$. Le domaine

$$\left\{x \in \operatorname{Pic} V^\vee \otimes \mathbf{R} \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l}\forall C \text{ effectif } x([C]) > 0 \\ x(\omega_V^{-1}) = 1\end{array}\right.\right\}$$

a donc pour équation

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\theta_{\omega_V^{-1}}(C_{\text{eff}}^\vee(V) \bigcap \mathscr{H}_{\omega_V^{-1}}(1)) = \frac{1}{6}. \quad \square$$

On obtient donc le lemme suivant

Lemme 11.4.5. —

$$C'' = \alpha_c(V)\frac{w}{h\sqrt{d}^2}\prod_{\mathfrak{p}\in S}\zeta_{k,\mathfrak{p}}(1)\prod_{\mathfrak{P}\in S_K}\zeta_{K,\mathfrak{P}}(1)\lim_{s\to 1}(s-1)^2 L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\prod_{v\in M_\infty}\omega_v(V_v).$$

11.5. Formule d'inversion. — On utilise des notations $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$, $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ et $\beta(\mathfrak{b})$ analogues à celles de la partie 8.5. Si $\mathfrak{p} \in M_f$, on note

$$\mathscr{B}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} \mid v_{\mathfrak{p}'}(\mathfrak{b}) = 0 \text{ si } \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}\}.$$

Lemme 11.5.1. — *Il existe une unique fonction $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ telle que*

(a) $\chi_{\mathscr{H}'} = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})\chi_{(\mathfrak{b})}$.

Cette fonction vérifie en outre

(b) *Pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})$,

(c) *Si* $\mathfrak{p} \notin S$, $\displaystyle\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b}) = \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1, \operatorname{Pic}\overline{V})}$,

(d) *Si* $\mathfrak{p} \in S$, *on note* $\mathfrak{P} \in S_K$ *l'idéal au-dessus de* $\mathfrak{p}$,

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})\zeta_{K,\mathfrak{P}}(1)\zeta_{k,\mathfrak{p}}(1) = \omega_\mathfrak{p}(V_\mathfrak{p}),$$

(e) $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| < +\infty$.

Démonstration. — • Les assertions (a) et (b) se démontrent comme dans la partie 8.5.

• Démontrons (c) en distinguant les cas où $\mathfrak{p}$ est scindé et le cas où il ne l'est pas. Si $\mathfrak{p}$ est scindé, soient $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ les idéaux au-dessus de $\mathfrak{p}$. Si $n \in \mathbf{N}^5$, on note

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}_1^{n_2}\mathfrak{P}_2^{n_3}, \mathfrak{P}_1^{n_4}\mathfrak{P}_2^{n_5})$$

la fonction $n \mapsto \mu(\mathfrak{p}^n)$ est la même que celle qui apparaît dans le cas scindé. Dans ce cas (c) résulte donc de l'assertion (c) du lemme 10.5.1.

Dans le cas contraire, on note $\mathfrak{P}$ l'idéal au-dessus de $\mathfrak{p}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^3$

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathfrak{P}^{n_3}).$$

L'entier $\mu(\mathfrak{p}^n)$ est nul si un des n_i est supérieur où égal à 2. En outre

$$\begin{array}{ll} \mu(0,0,0) = 1, & \mu(0,0,1) = -1, \\ \mu(1,1,0) = -1, & \mu(1,1,1) = 1 \end{array}$$

et μ est nul pour les autre valeurs de n. En définitive,

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbf{N}^3} \beta(\mathfrak{p}^n)\mu(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^5} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)\left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \end{aligned}$$

Mais

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = L_\mathfrak{p}(1, \operatorname{Pic}(\overline{V}))^{-1}$$

et

$$\left(1+\frac{1}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)=d_{\mathfrak{p}}(V).$$

• Démontrons l'assertion (d).Dans ce cas $\mathfrak{p}$ est ramifié dans l'extension K/k. Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal au-dessus de $\mathfrak{p}$. On note μ l'application $\mathbf{N}^3 \to \mathbf{Z}$ définie par

$$\mu(n)=\mu(\mathfrak{p}^{n_1},\mathfrak{P}^{n_2},\mathfrak{P}^{n_3}).$$

On a alors

$$\begin{array}{lll} \mu(0,0,0)=1, & \mu(0,0,2)=-1, & \mu(0,1,1)=-1 \\ \mu(1,1,0)=-1, & \mu(1,1,1)=1, & \mu(0,1,2)=1. \end{array}$$

et les autres valeurs de μ sont nulles. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbf{N}^3}\beta(\mathfrak{p}^n)\mu(\mathfrak{p}^n) &= 1-\frac{3}{N(\mathfrak{p})^2}+\frac{2}{N(\mathfrak{p})^3} \\ &= \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^2\left(1+\frac{2}{N(\mathfrak{p})}\right) \end{aligned}$$

et le terme de gauche de l'assertion (d) vaut $1+\frac{2}{N(\mathfrak{p})}$. Le terme de droite est obtenu de la manière suivante

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}})=\int_{k_{\mathfrak{p}}\times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1,x_1,x_2))N_{K_{\mathfrak{P}}}((1,x_2+\alpha x_1))dx_1\,dx_2.$$

Or une uniformisante pour $K_{\mathfrak{P}}$ s'écrit $\pi=\alpha+u$ avec $u\in\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^*\bigcup\{0\}$. On se ramène donc à

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}})=\int_{k_{\mathfrak{p}}\times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1,x_1,x_2))N_{K_{\mathfrak{P}}}((1,x_2+\pi x_1))dx_1\,dx_2.$$

Soit $P\in\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})$ et $(\bar{x}_0:\bar{x}_1:\bar{x}_2)$ des coordonnées homogènes pour le point P. L'entier $N_{K_{\mathfrak{P}}}(x_0,x_2+\pi x_1)$ est indépendant des relevés choisis dans $k_{\mathfrak{p}}$. On le

note $\phi(P)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) &= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{P\in\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})} \phi(P) \\
&= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{\substack{P\in\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \\ P\neq(0:1:0)}} 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} N(\mathfrak{p}) \\
&= 1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}.
\end{aligned}$$

• L'assertion (e) se démontre comme dans les cas précédants. □

11.6. Enoncé du résultat. — Comme dans les cas précédants, on obtient

***Théorème 11.6.1.** — Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points conjugués $(0 : 1 : i)$ et $(0 : 1 : -i)$ sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Soit U le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V = 2$.

Je tiens à remercier J.-L. Colliot-Thélène, Y. Manin, C. Soulé et Y. Tschinkel pour les discussions et les indications qui ont permis la réalisation de ce texte.

Références

[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), n° 1, 89–108.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bl] S. Bloch, *A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.

[BoTi] A. Borel et J. Tits, *Compléments à l'article : ≪ groupes réductifs ≫*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 253–276.

[Bor] M. V. Borovoi, *On weak approximation in homogeneous spaces of simply connected algebraic groups*, Preprint 89–86, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1989.

[Bki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.

[Car] P. Cartier, *Representations of* $\mathfrak{p}$*-adic groups : a survey*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 111–155.

[Cas] W. Casselman, *The unramified principal series of* $\mathfrak{p}$*-adic groups I. The spherical function*, Compositio Math. **40** (1980), n° 3, 387–406.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.

[HB] D. R. Heath-Brown, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails*, Math. Comp. **59** (1992), 613–623.

[Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Mac] I. G. Macdonald, *Spherical functions on a group of* $\mathfrak{p}$*-adic type.*, Publications of the Ramanujan Institute, vol. 2, 1971.

[Ma] Y. I. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math **85** (1993), 37–55.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Ro] M. Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984–988.

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ———, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne)*, Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446.

[Se3] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan, Vandœuvre lès Nancy, 1990.

[Th] J. L. Thunder, *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.

[Tit] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33 Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 29–69.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

1995

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

TERME PRINCIPAL DE LA FONCTION ZÊTA DES HAUTEURS ET TORSEURS UNIVERSELS*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soient V une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs d'Arakelov définissant un accouplement entre le groupe de Picard $\operatorname{Pic} V$ et les points rationnels de V à valeur dans $\mathbf{R}$. Soit $\zeta_{\mathbf{H}}$ la fonction zêta associée sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin et Tschinkel ont conjecturé que cette fonction est holomorphe sur un cône de sommet le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Il est en outre possible de donner une expression conjecturale du terme principal de cette fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ au voisinage de ce sommet. Le but de ce texte est de montrer comment cette expression conjecturale peut s'écrire naturellement en passant aux torseurs universels au-dessus de V.

Abstract. — Let V be a Fano variety and $\mathbf{H}$ a system of Arakelov's heights which defines a pairing between the Picard group $\operatorname{Pic} V$ and the set of rational points of V with values in $\mathbf{R}$. Let $\zeta_{\mathbf{H}}$ be the corresponding zeta function on $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin and Tschinkel conjectured that this function is holomorphic on a cone with appex at the anticanonical sheaf ω_V^{-1}. Moreover it is possible to give a conjectural formula for the principal term of this function in a neighbourhood of this point. The aim of this paper is to give new evidence for this formula by lifting it to the universal torsors over V.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — primaire 14G05; secondaires 14L30, 11D72.

*Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque 251, SMF, Paris, 259–298

1. Introduction

Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k telle que $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ soit nul pour $i = 1$ ou 2 et telle que la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} soit à l'intérieur du cône effectif. On suppose en outre que les points rationnels de V sont Zariski denses. Soit $\mathbf{h}$ une hauteur sur V correspondant à la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ où L est un fibré en droites dont la classe est dans le cône effectif et $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ un système adélique de métriques sur L. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in U(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}$$

où U est un ouvert dense de V.

A la connaissance de l'auteur, dans les exemples considérés à ce jour ce comportement est de la forme

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \sim CH^a (\log H)^{b-1}$$

où C est une constante réelle strictement positive, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$. Diverses conjectures à des degrés de précision divers ont été faites sur a et b par Batyrev et Manin (cf. [**FMT**], [**BM**] et [**Ma**]) puis, lorsque L est le faisceau anticanonique, sur C (cf. [**Pe**]). Les principales familles de variétés pour lesquelles des résultats ont été effectivement démontrés peuvent être regroupées en deux groupes : d'une part les intersections complètes lisses de grande dimension sur $\mathbf{Q}$, pour lesquelles on dispose de la méthode du cercle (cf. [**Bir**], [**FMT**]) et d'autre part les variétés sur lesquelles agissent des groupes algébriques avec une orbite ouverte pour lesquelles on utilise des techniques d'analyse harmonique fine (cf. [**FMT**], [**BT1**] et [**BT3**]). Peu de cas ont été traités en dehors de ces deux grands groupes, faute d'avoir une autre méthode générale. Toutefois Salberger a montré une majoration de la forme souhaitée pour la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}$, surface qui ne rentre dans aucun des deux groupes indiqués. La méthode qu'il utilise souligne le rôle du torseur universel pour attaquer le problème en général.

Ces torseurs universels, introduits par Colliot-Thélène et Sansuc en liaison avec les problèmes du principe de Hasse et de l'approximation faible (cf. [**CTS1**] et [**CTS2**]) apparaissent implicitement dans le cas des intersections complètes lisses en tant que cône au-dessus de la variété ainsi que dans des démonstrations directes de la formule asymptotique dans quelques cas particuliers de variétés toriques (cf. [**Pe**] et [**Ro**]). Tout récemment, Salberger a démontré dans [**Sal**] comment la constante $\#H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V})\tau_{\mathbf{h}}(V)$ où $\tau_{\mathbf{h}}(V)$ a été défini dans [**Pe**], constante qui apparaît dans la plupart des cas considérés à ce jour, pouvait s'interpréter comme somme de nombres de Tamagawa associés aux torseurs universels ayant un point rationnel.

Le but de ce texte est similaire : il s'agit de montrer comment la conjecture actuellement la plus précise sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

$$\zeta_{\mathbf{H}} : \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

peut s'exprimer de manière naturelle comme passage d'une sommation sur les points rationnels à une intégrale sur un domaine de type adélique muni d'une mesure canonique.

Les outils développés permettent également d'interpréter la conjecture de Manin raffinée sur $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ pour une hauteur $\mathbf{h}$ associée a ω_V^{-1} en termes des torseurs universels.

Dans la partie 2, nous introduisons les notations qui nous sont nécessaires puis rappelons la formule empirique obtenue pour le terme principal de la fonction zêta des hauteurs. La partie 3 est consacrée à des rappels sur les torseurs universels.

La partie 4 décrit le relèvement de divers objets à ces torseurs. Enfin la partie 5 contient les deux résultats principaux et leurs démonstrations.

2. Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

2.1. Notations. — Nous allons tout d'abord fixer un certain nombre de notations qui seront utilisées dans l'ensemble du texte.

Notations 2.1.1. — Pour tout corps E, on note $\overline{E}$ une clôture algébrique de E et E^s la clôture séparable de E dans $\overline{E}$. Pour tout $\mathrm{Gal}(E^s/E)$-module discret M, on désigne par $H^i(E,M)$ le groupe de cohomologie $H^i(\mathrm{Gal}(E^s/E),M)$.

Dans la suite k désigne un corps de nombres, $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers et d son discriminant. L'ensemble des places de k est noté M_k, l'ensemble des places finies M_f et l'ensemble des places archimédiennes M_∞. Pour tout $v \in M_k$, on note k_v le complété de k en v, $|.|_v$ la norme associée normalisée par

$$\forall v|p, \quad \forall x \in k_v, \quad |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si v appartient à M_f, $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau des entiers de k_v et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel. Pour tout v de M_∞ tel que $[k_v : \mathbf{R}] = 2$, on fixe un isomorphisme de k_v sur $\mathbf{C}$. Pour toute place v, la mesure de Haar dx_v sur k_v est normalisée comme dans [**We**, § 2.1.1] ; autrement dit,

- si $v \in M_f$, alors $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$,
- si $k_v = \mathbf{R}$, alors dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors $dx_v = i\,dz\,d\bar{z} = 2\,dx\,dy$.

Soit $\mathcal{V}$ un schéma sur un anneau A. Alors pour toute A-algèbre B, $\mathcal{V}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathcal{V})$ et $\mathcal{V}_B$ le produit $\mathcal{V} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si V est défini sur k et $v \in M_k$, on note V_v le schéma V_{k_v}.

Si V est une variété lisse sur un corps E, son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic}\,V$, son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ et son faisceau canonique ω_V. On note également $C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône dans $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs. Si V est une variété sur k, $V(\boldsymbol{A}_k)$ désigne l'espace adélique associé (cf. [**We**, § 1]).

Si A est une partie de B, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice.

Hypothèses 1. — Dans la suite V désigne une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2,

(ii) $\mathrm{Pic}\,\overline{V} = \mathrm{NS}\,\overline{V}$ est sans torsion,

(iii) ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C_{\text{eff}}(V)$ et
(iv) $V(k)$ est Zariski dense dans V.

Ces hypothèses suffisent pour définir les objets décrits dans [**Pe**]. Toutefois nous serons amenés par la suite à supposer que la variété vérifie d'autres conditions plus techniques.

2.2. Hauteurs. — Dans la suite nous utiliserons les hauteurs d'Arakelov qui sont définies de la manière suivante :

Définitions 2.2.1. **—** Soit X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k, L un faisceau inversible sur X. Pour toute place v de k, une *métrique v-adique* sur L est une application qui à tout point x de $X(k_v)$ associe une norme $\|.\|_v$ sur $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k_v$ de sorte que pour tout ouvert W de X et toute section s de L sur W l'application

$$x \longmapsto \|\mathrm{s}(x)\|_v$$

soit continue.

Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ de sorte qu'il existe un ensemble fini $S \subset M_f$, un modèle projectif et lisse $\mathscr{X}$ de X sur $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{X}$ de sorte que pour tout $v \in M_f - S$, pour tout $x \in X(k_v)$, correspondant à $\tilde{x} \in \mathscr{X}(\mathcal{O}_v)$, la norme $\|.\|_v$ sur $L(x)$ soit définie à l'aide d'un générateur y_0 du $\mathcal{O}_v$-module de rang un $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ par la formule

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v .$$

Une *hauteur d'Arakelov* $\mathbf{h}$ sur X est la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$ où L est un fibré en droites et $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ une métrique adélique sur le fibré en droites L. Si $\mathbf{h}$ est une hauteur sur X et si x est un point rationnel de X, alors la *hauteur de x relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\mathbf{h}(x) = \prod_{v\in M_k} \|\mathrm{s}(x)\|_v^{-1}$$

où s est une section de L sur un voisinage de x avec $\mathrm{s}(x) \neq 0$. Par la formule du produit cela est indépendant du choix de la section.

Pour tout sous-espace constructible W de V et tout $H > 0$ on pose

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

Remarques 2.2.1. — (i) Si $[L]$ appartient à l'intérieur du cône effectif, alors il existe un ouvert non vide U de X tel que $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ soit fini pour tout H.

(ii) On a une notion évidente de produit tensoriel de hauteurs et

$$\forall x \in X(k), \quad \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2(x) = \mathbf{h}_1(x)\mathbf{h}_2(x).$$

2.3. Mesures de Tamagawa. — Nous allons maintenant rappeler comment toute métrique adélique sur ω_V^{-1} définit une mesure sur $V(\boldsymbol{A}_k)$.

Notations 2.3.1. — Soit $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ une hauteur sur V. Pour toute place v de k, on lui associe la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation (cf. [**We**], [**Pe**, § 2.2.1])

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v dx_{1,v} \dots dx_{n,v} \tag{2.3.1}$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point x de $V(k_v)$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ est vu comme section locale de ω_V^{-1}.

Comme dans [**Pe**, Lemme 2.1.1], il existe un ensemble fini de places $S_0 \subset M_f$ et un modèle projectif et lisse $\mathcal{V}$ de V sur $\mathcal{O}_{S_0}$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S_0$, il existe un isomorphisme de $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ sur $\mathrm{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ compatible aux actions des groupes de Galois et tel que pour tout nombre premier l non divisible par $\mathfrak{p}$ la partie l-primaire du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ soit finie.

On considère alors les termes locaux de la fonction L associée à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$, définis pour toute place $\mathfrak{p} \in M_f - S_0$ par

$$L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}\,\overline{V}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s}\,\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}\,\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ désigne le Frobenius géométrique en $\mathfrak{p}$. La fonction L globale est alors définie par le produit eulérien

$$L_{S_0}(s, \mathrm{Pic}\,\overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S_0} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}\,\overline{V}).$$

Comme dans [**Pe**, lemme 2.2.5], on montre que ce produit converge absolument pour $\mathrm{Re}\,s > 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,V$ en 1.

On utilise les facteurs de convergences $(\lambda_v)_{v\in M_k}$ définis par

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic} \overline{V}) & \text{si } v \in M_f - S_0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte alors des conjectures de Weil démontrées par Deligne que la mesure adélique $\prod_{v\in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ converge (cf. [**Pe**, proposition 2.2.2]).

Remarque 2.3.1. — Il est également possible d'utiliser la série L associée au groupe de cohomologie $H^2_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Q}_l(1))$ comme le propose Swinnerton-Dyer dans [**SD**].

Définition 2.3.2. — Avec les notations qui précèdent, la *mesure de Tamagawa* associée à $\mathbf{h}$ est donnée par

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}} = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_{S_0}(s, \operatorname{Pic} \overline{V})\right) \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}} \prod_{v\in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v},$$

où t est le rang de $\operatorname{Pic} V$. Elle est indépendante du choix de S_0.

On pose également

$$\tau_{\mathbf{h}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}\left(\overline{V(k)}\right).$$

2.4. Notions de répartition. — Une des premières questions qu'on est amené à se poser lorsqu'on étudie le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur une variété est la question de la répartition asymptotique des points rationnels. Ce phénomène peut être considéré à différents niveaux de précision.

La notion la plus stricte, introduite par Manin, est celle de sous-variété accumulatrice.

Définition 2.4.1. — Soit F un sous-espace constructible de V. Alors pour toute hauteur $\mathbf{h} = (L, (||\cdot||_v)_{v\in M_k})$ avec $[L]$ appartenant à l'intérieur du cône $C_{\text{eff}}(V)$, on note

$$a_F(L) = \varlimsup_{H\to+\infty} \log(n_{F,\mathbf{h}}(H))/\log H \leqslant +\infty$$

qui donne la puissance de H apparaissant dans le comportement asymptotique de $n_{F,\mathbf{h}}(H)$.

Un fermé irréductible F de V est dit *L-accumulateur* (ou simplement *accumulateur* quand $L = \omega_V^{-1}$) si et seulement si, pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V avec $a_W(L) > a_U(L)$.

Remarques 2.4.1. — (i) Par [**BM**, proposition 1.4.a], le fait d'être L-accumulateur ne dépend pas du choix de la métrique adélique sur L.

(ii) A la connaissance de l'auteur, dans les exemples étudiés à ce jour, si $[\omega_V^{-1}]$ appartient à l'intérieur de $C_{\mathrm{eff}}(V)$, le complémentaire des sous-variétés $[L]$-accumulatrices dans V est un ouvert de Zariski non vide de V.

(iii) Batyrev et Manin ont défini dans [**BM**, §2.5] une notion de sous-variété géométriquement accumulatrice de la manière suivante : on considère pour toute sous-variété irréductible F de V, une normalisation $\overline{F}$ de F d'ouvert lisse $\overline{F}_0$; si $\phi : \overline{F}_0 \to V$ est l'application induite, on pose

$$a_F^{\text{géo}}(L) = \inf \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}_{>0} \,\middle|\, \Gamma(\overline{F}_0, \phi^*(L)^{\otimes p} \otimes \omega_{\overline{F}_0}^{\otimes q} \neq \{0\} \right\}$$

et la sous-variété est dite géométriquement accumulatrice si $a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$. Il est envisageable que les deux notions coïncident lorsque le corps est suffisamment gros (i. e. contient un sous-corps fixé).

En ce qui concerne les sous-variétés accumulatrices, le faisceau anticanonique ne joue pas un rôle vraiment particulier. Il n'en est plus de même lorsqu'on considère la notion suivante :

Définition 2.4.2. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur dont le fibré est à l'intérieur de $C_{\mathrm{eff}}(V)$. Un fermé irréductible strict F de V est dit *modérément accumulateur* pour $\mathbf{h}$ si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim_{H \to +\infty}} \frac{n_{W,\mathbf{h}}(H)}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} > 0$$

Remarques 2.4.2. — (i) Si pour une hauteur $\mathbf{h} = (L, (||.||_v)_{v \in M_k})$, pour tout ouvert U de V et tout nombre reel $B > 0$

$$\underline{\lim}_{H \to +\infty} n_{U,\mathbf{h}}(BH)/n_{U,\mathbf{h}}(H) > 0,$$

ce qui est vérifié si $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ est de la forme $CH^a(\log H)^{b-1}$ avec $a > 0$ alors un fermé est modérément accumulateur pour $\mathbf{h}$ si et seulement s'il l'est pour toute hauteur $\mathbf{h}'$ correspondant à une métrique sur L.

(ii) Il est aisé d'obtenir des variétés V telles que si $[L] \notin \mathbf{R}_{>0}[\omega_V^{-1}]$, alors les sous-variétés modérément accumulatrices pour L sont Zariski denses. Ainsi pour $V = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ et $L = \mathcal{O}(m, m')$ avec $m > m' > 0$, toutes les fibres de la projection sur le premier facteur sont modérément accumulatrices pour L.

(iii) Lorsque $L = \omega_V^{-1}$, on ne connaît pas d'exemple où l'on ait montré que les sous-variétés modérément accumulatrices sont Zariski denses. Toutefois, dans le contre-exemple à la conjecture de Batyrev et Manin sur la puissance du logarithme, construit par Batyrev et Tschinkel dans [**BT2**] et qui est une variété fibrée en surfaces cubiques, il est vraisemblable que toutes les fibres dont le groupe de Picard est de rang 7 sur k sont faiblement accumulatrices. Or ces fibres sont Zariski denses.

(iv) Si F est une sous-variété lisse et si $0 < a_F^{\text{géo}}(L) < +\infty$, on peut également définir $b_F^{\text{géo}}(L)$ comme la codimension de la face du cône $[\omega_F^{-1}] + C_{\text{eff}}(F)$ contenant $a_F^{\text{géo}}(L)\left[L_{|F}\right]$ dans $\mathrm{NS}(F)$. On peut alors se poser la question de savoir si les sous-variétés modérément accumulatrices minimales sont données par les conditions :

$$a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L),$$

auquel cas la sous-variété est géométriquement accumulatrice, ou

$$a_F^{\text{géo}}(L) = a_V^{\text{géo}}(L) \quad \text{et} \quad b_F^{\text{géo}}(L) \geqslant b_V^{\text{géo}}(L).$$

Il faut noter que le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel est basé sur cette idée géométrique.

Si le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices est un ouvert de Zariski U non vide de V, ce qui semble être assez général pour $L = \omega_V^{-1}$, lorsque V vérifie les hypothèses 1, on peut se demander comment sont répartis les points rationnels d'un point de vue adélique. Une réponse semble être donnée à cette question par la notion d'équidistribution, définie dans [**Pe**, § 3] de la manière suivante :

Définition 2.4.3. — On dit qu'un ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ est *bon* si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ correspondant à une métrique sur ω_V^{-1} telle que $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\partial W) = 0$ où ∂W désigne $\overline{W} - W$. Cela est alors vrai pour toute métrique.

On dit alors que les points de V sont *équidistribués* sur U ouvert de Zariski de V si et seulement s'il existe une métrique adélique sur ω_V^{-1} telle que pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$

$$\frac{\#\{x \in U(k) \cap W \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} \underset{H \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(W \cap \overline{V(k)})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)})}$$

Remarques 2.4.3. — (i) Dans [**Pe**], on montre que les points de V sont équidistribués sur V si c'est une variété de drapeau généralisée, c'est-à-dire de la forme $P\backslash G$ où G est un groupe algébrique linéaire semi-simple et P un k-sous-groupe parabolique de G, ou si V est une intersection complète lisse définie par m polynômes homogènes de degré d en $N+1$ variables avec

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1).$$

(ii) Comme dans [**Pe**, remarque 3.1], on montre que si les points sont équidistribués dans U alors cet ouvert est inclus dans le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices pour la hauteur correspondante.

On peut alors poser la question suivante :

Question 2.4.4. — *Fixons une hauteur* $\mathbf{h}$ *définie par une métrique sur le faisceau* ω_V^{-1}. *Si U, le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices de V est un ouvert de Zariski non vide, les points rationnels de V sont-ils équidistribués dans U ?*

Hypothèse 2. — Dans la suite on suppose en outre que le complémentaire U des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur relative à ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide de V.

2.5. Fonction zêta des hauteurs

Définition 2.5.1. — On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de hauteurs d'Arakelov modulo la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par

$$\forall (\lambda_v)_{v\in M_k} \in \bigoplus_{v\in M_k} \mathbf{R}_{>0}, \prod_{v\in M_k} \lambda_v = 1 \Rightarrow (L, (\|.\|_v)_{v\in M_k}) \sim (L, (\lambda_v \|.\|_v)_{v\in M_k}).$$

L'ensemble $\mathscr{H}(V)$ muni du produit tensoriel est un groupe commutatif et on a un morphisme canonique $\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \operatorname{Pic}(V)$.

On appelle *système de hauteurs* un morphisme $\mathbf{H} : \operatorname{Pic} V \to \mathscr{H}(V)$ qui est une section du morphisme d'oubli : $\boldsymbol{o}\circ\mathbf{H} = \mathrm{Id}_{\operatorname{Pic} V}$.

Remarques 2.5.1. — (i) Si on se donne une base $([L_i])_{1\leqslant i\leqslant t}$ de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$ où pour tout i, L_i est un faisceau très ample sur V et si on fixe des métriques m_i sur L_i données par des bases de $\Gamma(V, L_i)$ (cf. [**Pe**, page 107]), alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \{[L_i], 1 \leqslant i \leqslant t\} & \to & \mathscr{H}(V) \\ [L_i] & \mapsto & [(L_i, m_i)] \end{array}$$

s'étend de manière unique en un système de hauteurs sur V.

(ii) Si $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (||.||_v)_{v\in M_k})$ est un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V^{-1}])$, on notera, par abus de langage, $n_{U,\mathbf{H}}$ pour $n_{U,\mathbf{h}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}$ pour $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}$, etc. Il faut noter que, par la formule du produit, cela est indépendant du choix du représentant.

Définition 2.5.2. — ([**Ar**, page 408], [**FMT**, §2.1]) Soit $\mathbf{H}$ un système de hauteurs sur V, il induit un accouplement $\mathbf{H} : \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C} \times V(k) \to \mathbf{C}$ qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que

$$\forall L \in \operatorname{Pic} V, \quad \forall x \in V(k), \quad \mathbf{H}(L,x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

La fonction zêta des hauteurs associée au système $\mathbf{H}$ est définie par

$$\forall s \in \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}, \quad \zeta_{\mathbf{H}}(s) = \sum_{x \in U(k)} \mathbf{H}(s,x)^{-1}$$

qui converge absolument dans un cône ouvert de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$.

2.6. Une question optimiste

Notations 2.6.1. — Comme dans [**BT1**, §2.4], on utilise la *fonction caractéristique* du cône effectif, qui remonte à [**Kö**], définie par

$$\forall s \in \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}, \quad \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle s,y\rangle}\,dy$$

où $C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C_{\mathrm{eff}}(V)$, c'est-à-dire

$$C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{x \in (\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})^\vee \mid \forall y \in C_{\mathrm{eff}}(V), \langle x,y\rangle \geqslant 0\}$$

et dy est la mesure de Haar sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$ normalisée par le dual du réseau naturel de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$.

On pose également $\alpha(V) = \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})/(t-1)!$ où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ qui coïncide avec la constante définie dans [**Pe**, définition 2.4] et, comme dans [**BT1**, corollary 1.4.16], $\beta(V) = \#H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V})$.

Les divers exemples connus amènent à se poser la question suivante qui est une version raffinée d'une conjecture de Batyrev et Manin [**BM**, conjecture B′] :

Question 2.6.1 **(corrigée).** — *Pour quelles variétés V vérifiant les hypothèses 1 et 2, existe-t-il un système de hauteurs* $\mathbf{H}$ *tel que la fonction zêta* $\zeta_{\mathbf{H}}$ *converge sur*

$$\mathscr{C} = \omega_V^{-1} + \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathrm{eff}}(V)}} + i \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

et tel que la fonction $s \mapsto \zeta_{\mathbf{H}}(s\omega_V^{-1})/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}((s-1)\omega_V^{-1})$ *s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant 1 et prenne la valeur* $\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)$ *en 1 ?*[1]

Remarques 2.6.2. — (i) Par un théorème taubérien standard (cf. [**BT1**, theorem 3.3.2]), une réponse positive à cette question implique que

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) \sim \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)H(\log H)^{t-1} \text{ quand } H \to +\infty,$$

où $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$.

(ii) Par [**FMT**, §2] et [**Pe**, théorème 6.2.2], la réponse est positive si V est une variété de drapeaux généralisée grâce aux travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein. Par [**BT1**] et [**BT3**] elle est également positive pour les variétés toriques lisses.

(iii) Dans [**BT1**], Batyrev et Tschinkel donnent un exemple où la fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ ne peut pas avoir d'extension méromorphe à $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$.

3. Rappels sur les torseurs universels

3.1. Les tores. — Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques notions sur les tores algébriques ainsi que le résultat d'Ono sur leur nombre de Tamagawa.

Définition 3.1.1. — Soit E un corps. Un *tore* sur E est un groupe algébrique commutatif T tel que

$$\overline{T} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{m,\overline{E}}^{\dim T}.$$

On dit qu'une extension F de E *déploie* T si et seulement s'il existe un isomorphisme $T_F \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m,F})^{\dim T}$. Par [**Ono2**, proposition 1.2.1], il existe une telle extension de E qui est séparable et finie.

Théorème 3.1.1. — *(cf.* [**Ono2**, remark 1.2.1]*) Il existe une équivalence de catégories entre les tores algébriques sur un corps E et les* $\mathrm{Gal}(E^s/E)$*-réseaux, c'est-à-dire les* $\mathrm{Gal}(E^s/E)$*-modules qui sont libres et de rang fini en tant que* $\mathbf{Z}$*-modules. Cette*

---

1. Comme me l'a fait remarquer Yuri Tschinkel, la fonction

$$s \mapsto \zeta_{\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$$

ne peut pas s'étendre en un voisinage de ω_V^{-1} en raison des zéros du numérateur de $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$. En particulier cela est faux pour les variétés toriques lisses en général. La question posée dans Astérisque est donc affaiblie ici.

équivalence de catégories est donnée par le foncteur contravariant qui à T associe le groupe des caractères de T

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}_{E^s}(T_{E^s}, \mathbf{G}_m).$$

Définition 3.1.2. — Soit $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant \dim T}$ une base de $X^*(T)$ alors la forme différentielle

$$\omega_T = \bigwedge_{i=1}^{\dim T} \xi_i^{-1} d\xi_i$$

est, au signe près, indépendante du choix de la base. Elle est invariante sous l'action de T et définie sur E. On l'appelle la *forme canonique* de T.

Passons maintenant au cas des tores sur le corps de nombres k.

Notations 3.1.3. — Soit T un tore sur k et K une extension séparable finie qui déploie T. Soit $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, $X^*(T)_k = X^*(T)^{\mathscr{G}}$, et $X_*(T)$ le $\mathscr{G}$-réseau dual $\mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z})$.

Pour toute place v de k, soit $\mathscr{G}_v \subset \mathscr{G}$ le groupe de décomposition de v, $X^*(T)_v$ le groupe $X^*(T)^{\mathscr{G}_v}$ et $X_*(T)_v = X_*(T)^{\mathscr{G}_v}$. Par abus de notations, le sous-groupe compact maximal de $T(k_v)$ est noté $T(\mathcal{O}_v)$. On a alors une injection canonique (cf. [**Ono2**, §2.1]).

$$\log_v : T(k_v)/T(\mathcal{O}_v) \to X_*(T)_v \otimes \mathbf{R}$$

définie par $\forall r \in T(k_v)$, $\forall \xi \in X^*(T)_v$, $|\xi(r)|_v = q_v^{\log_v([r])(\xi)}$, où $q_v = \#\mathbf{F}_v$ si $v \in M_f$, $q_v = e$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $q_v = e^2$ sinon. Par [**Ono2**, §2.1], $\log_v$ est un isomorphisme si v est archimédienne, d'après [**Dr**, page 449] l'image de $\log_v$ est $X_*(T)_v$ si v est finie et non ramifiée dans K/k et c'est un sous-module d'indice fini de $X_*(T)_v$ dans le cas restant.

L'espace adélique associé, $T(\boldsymbol{A}_k)$ est, par définition, le produit restreint des $T(k_v)$ relativement aux $T(\mathcal{O}_v)$.

On note $K_T = \prod_{v \in M_k} T(\mathcal{O}_v)$, $W(T) = K_T \cap T(k)$ et

$$T^1(\boldsymbol{A}_k) = \{ (r_v)_{v \in M_k} \in T(\boldsymbol{A}_k) \mid \forall \xi \in X^*(T)_k, \prod_{v \in M_k} |\xi(r_v)| = 1 \}.$$

Si S est une partie finie de M_k, on note

$$T_S(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v \in S} T(k_v) \times \prod_{v \in M_k - S} T(\mathcal{O}_v) \subset T(\boldsymbol{A}_k).$$

Proposition 3.1.2 **(Ono,** [**Ono1**, theorem 4] **et** [**Ono2**, pages 120–122]**)**

On conserve les notations qui précèdent. On a alors :

(i) $T(\boldsymbol{A}_k)/T^1(\boldsymbol{A}_k) \xrightarrow{\sim} (X^*(T)_k)^\vee \otimes \mathbf{R}$,

(ii) $T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k)$ *est compact,*

(iii) $W(T)$ *est le groupe fini des éléments de torsion dans* $T(k)$,

(iv) Il existe un ensemble fini de places S_1 *contenant* M_∞, *tel que pour tout* S *contenant* S_1

$$T_S(\boldsymbol{A}_k).T(k) = T(\boldsymbol{A}_k).$$

Autrement dit, il existe S_1 *tel que l'application naturelle*

$$T(k) \to \bigoplus_{v \in M_k - S_1} X_*(T)_v$$

soit surjective,

(v) Soit S *comme dans* (iv) *et* $\mathcal{O}_S$ *l'anneau des* S*-entiers. On a une suite exacte*

$$0 \to W(T) \to T(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\log_S} \prod_{v \in S} X_*(T)_v \otimes \mathbf{R}$$

et l'image de $\log_S$ *est un réseau du noyau du morphisme naturel*

$$\begin{array}{rcl} \prod_{v \in S} X^*(T)_v^\vee \otimes \mathbf{R} & \to & X^*(T)_k^\vee \otimes \mathbf{R} \\ (\lambda_v)_{v \in S} & \mapsto & \sum_{v \in S} (\log q_v)\lambda_v. \end{array}$$

Nous passons maintenant à la définition du nombre de Tamagawa de T.

Notations 3.1.4. **—** Pour toute place v de k, soit $\boldsymbol{\omega}_{T,v}$ la mesure de Haar sur $T(k_v)$ définie par la forme différentielle ω_T (cf. [**We**]).

Soit S un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes, les places ramifiées dans K/k et vérifiant l'assertion (iv) de la proposition. Pour tout $v \in M_f - S$, le terme local de la fonction L associé à $X^*(T)$ est défini par

$$L_v(s, X^*(T)) = \frac{1}{\det(1 - (\#\mathbf{F}_v)^{-s} \operatorname{Fr}_v \mid X^*(T))}$$

où Fr_v est un morphisme de Frobenius en v. La fonction L globale associée est donnée par

$$L_S(s, X^*(T)) = \prod_{v \in M_f - S} L_v(s, X^*(T)).$$

Comme dans [**Ono2**, §3.3], on utilise les facteurs de convergence

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, X^*(T))^{-1} & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on considère la mesure adélique

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg} X^*(T)_k} L_S(s, X^*(T))\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim T}} \prod_{v\in M_f} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{T,v}$$

qui est indépendante du choix de S. En outre le réseau $X^*(T)_k^\vee$ fournit une mesure canonique $\boldsymbol{\omega}_{T/T^1}$ sur $X^*(T)_k^\vee \otimes \mathbf{R}$. Il existe alors une unique mesure $\boldsymbol{\omega}_{T^1}$ sur $T^1(\boldsymbol{A}_k)$ telle qu'on ait la formule

$$\int_{T(\boldsymbol{A}_k)/T^1(\boldsymbol{A}_k)} \boldsymbol{\omega}_{T/T^1}(x) \int_{xT^1(\boldsymbol{A}_k)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{T^1}(y) = \int_{T(\boldsymbol{A}_k)} f(y)\boldsymbol{\omega}_T(y).$$

Définition 3.1.5. — Le *nombre de Tamagawa* de T est alors défini par

$$\tau(T) = \boldsymbol{\omega}_{T^1}(T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k))$$

où on note également $\boldsymbol{\omega}_{T^1}$ la mesure induite sur $T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k)$.

Notations 3.1.6. — On définit

$$Ш^1(k, T) = \operatorname{Ker}(H^1(k, T) \to \prod_{v\in M_k} H^1(k_v, T))$$

et on pose $h(T) = \#H^1(k, X^*(T))$ et $i(T) = \#Ш^1(k, T)$.

***Théorème 3.1.3* (Ono, [Ono3, §5]).** — *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\tau(T) = h(T)/i(T).$$

3.2. Cônes et structures associées. — Dans ce paragraphe, on se donne en outre un cône dans $X^*(T)$, ce qui correspond à une variété torique affine pour T. Dans cette situation diverses notions qui nous seront utiles ont été introduites par Draxl dans [**Dr**].

Notations 3.2.1. — Soit T un tore sur le corps de nombres k déployé par une extension finie K et soit C un cône rationnel polyédrique strictement convexe de l'espace vectoriel $X^*(T) \otimes \mathbf{R}$; c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $X^*(T)$ telle que $C = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_{\geqslant 0}\xi_i$ et $C \cap -C = \{0\}$. On suppose en outre

que C est invariant sous l'action du groupe de galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et que C est d'intérieur non vide.

Par la théorie des variétés toriques (cf. [**Da**, chapter 1]) cela correspond à la variété torique affine $\mathbf{A}_{C,k}$ sur k définie par

$$\mathbf{A}_{C,k} = \mathrm{Spec}(\overline{k}[C \cap X^*(T)])^{\mathcal{G}}$$

où $\overline{k}[C \cap X^*(T)]$ est l'algèbre associée au monoïde $C \cap X^*(T)$. Cette variété a un modèle naturel, à savoir le schéma affine

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{k}}[C \cap X^*(T)])^{\mathcal{G}}$$

où $\mathcal{O}_{\overline{k}}$ désigne l'anneau des entiers algébriques.

D'autre part pour toute place $\mathfrak{p}$ de k, Draxl définit [**Dr**, page 447]

$$T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) \cap T(k_{\mathfrak{p}})$$

où $\mathfrak{P}$ désigne une place de K au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ est défini par

$$T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) = \{ r \in T(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall \xi \in C \cap X^*(T), \ \xi(r) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \}.$$

Lemme 3.2.1. — *Il existe un entier N tel que si A est une $\mathcal{O}_k$-algèbre dans laquelle N est inversible, alors les A-points de $\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}$ sont donnés par*

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}(C \cap X^*(T), (A \otimes \mathcal{O}_K, .))$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}$ désigne l'ensemble des homomorphismes de monoïdes invariants sous le groupe $\mathrm{Gal}(K/k)$. En particulier, pour toute place v de k ne divisant pas N,

$$T(C, \mathcal{O}_v) = \mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(\mathcal{O}_v) \cap T(k_v).$$

Démonstration. — Le schéma $\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}$ peut aussi se décrire comme

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)}.$$

Comme il existe une base de K sur k invariante sous l'action de Galois, il existe un entier N_0 tel que $\mathcal{O}_K[1/N_0]$ ait une base invariante sur $\mathcal{O}_k[1/N_0]$. D'autre part il résulte du lemme sans nom qu'il existe un isomorphisme naturel

$$K[C \cap X^*(T)]^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes_k K \xrightarrow{\sim} K[C \cap X^*(T)]$$

il existe donc un entier N_1 tel que

$$\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)]^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_K[1/N_1] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[1/N_1][C \cap X^*(T)].$$

Si N est un multiple de N_0 et N_1, et si N est inversible dans A, alors on a une suite d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}(C \cap X^*(T), (A \otimes \mathcal{O}_K, .)) \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[1/N][C \cap X^*(T)], A \otimes \mathcal{O}_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)} \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}((\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes \mathcal{O}_K[1/N], A \otimes \mathcal{O}_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)} \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_k}((\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)}, A) \\
&\quad = \mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(A),
\end{aligned}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde s'en déduit à partir des définitions. □

Définition 3.2.2. — Soient T et C comme ci-dessus. Pour toute place finie v de k, on définit un accouplement

$$\langle .,. \rangle_v : X^*(T)_v \otimes \mathbf{C} \times T(k_v) \to \mathbf{C}^\times$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que pour tout ξ de $X^*(T)_v$ et tout r de $T(k_v)$ on ait

$$\langle \xi \otimes 1, r \rangle_v = |\xi(r)|_v.$$

La *fonction L associée à C* est alors définie pour tout s de $(\mathring{C} + iX^*(T) \otimes \mathbf{R})^{\mathscr{G}_v}$ par la formule

$$L_v(s,T,C) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_{T,v}(T(\mathcal{O}_v))} \int_{T(C,\mathcal{O}_v)} \langle s, r \rangle_v \, \boldsymbol{\omega}_{T,v}(r).$$

Il résulte de [**Dr**, proposition 2] que cette intégrale converge bien sur le domaine indiqué.

Cette fonction L peut également s'exprimer de la manière suivante :

Proposition 3.2.2 **(Draxl,** [**Dr**, proposition 4]**).** — *Si v est une place finie non ramifiée dans l'extension K/k alors*

$$L_v(s,T,C) = \sum_{y \in C^\vee \cap X_*(T)_v} (\#\mathbf{F}_v)^{-\langle y,s \rangle}.$$

Définition 3.2.3. — La fonction L globale associée est alors définie par le produit eulérien

$$L_S(s,T,C) = \prod_{v \in M_f - S} L_v(s,T,C)$$

pour tout ensemble fini de places S.

Théorème 3.2.3 **(Draxl,** [**Dr**, proposition 5]**). —** *On considère le domaine* $\mathcal{D}(C)$ *de l'espace vectoriel* $X^*(T)_k \otimes \mathbf{R}$ *défini comme l'ensemble des* y *tels que*

$$\forall x \in C^\vee - \{0\} \cap X_*(T), \quad \langle x, y \rangle > 1$$

où $C^\vee$ *est le cône dual de* C *dans* $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$. *Alors le produit eulérien définissant la fonction* $L_S(s, T, C)$ *converge sur* $\mathcal{D}(C) + iX^*(T)_k \otimes \mathbf{R}$.

3.3. Torseurs universels. — La notion de torseur universel a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS1**] et [**CTS2**] en liaison avec le principe de Hasse et l'approximation faible. Nous allons en rappeler la définition et en donner quelques propriétés. Nous nous restreindrons ici au cas où le groupe de Picard géométrique est sans torsion.

***Définition 3.3.1.* —** Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E, X et Y deux variétés sur E, $\pi : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat et $\mu : G \times X \to X$ une action de G sur X, alors X est appelé un *G-torseur* ou *espace principal homogène sous G* au-dessus de Y si et seulement si l'application $(g, x) \mapsto (gx, x)$ définit un isomorphisme de variétés de $G \times_E X$ sur $X \times_Y X$.

Si $\eta : G \to H$ est un morphisme de groupes algébriques et X un G-torseur au-dessus de Y, on peut considérer le produit contracté $X \times^G H$ qui est un H-torseur au-dessus de Y et qu'on notera $\eta_*(X)$.

Par [**Mi**, III, 3.9], si G est lisse et abélien, les G-torseurs au-dessus de Y sont classifiés à isomorphisme près par le groupe de cohomologie $H^1_{\text{ét}}(Y, G)$.

Proposition 3.3.1 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS2**, (2.0.2), §2.2]**)**

Si E est un corps, X une E-variété algébrique propre, lisse et géométriquement intègre et T un tore sur E, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(E, T) \to H^1_{\text{ét}}(X, T) \xrightarrow{\rho} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Gal}(E^s/E)}(X^*(T), \operatorname{Pic} X_{E^s}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, T)$$

où l'application ρ est définie de la manière suivante : pour tout torseur $\mathcal{T}$ et tout caractère ξ de T, $\rho(\mathcal{T})(\xi)$ est la classe du $\mathbf{G}_m$-torseur $\xi_*(\mathcal{T})$ dans $\operatorname{Pic} X_{E^s}$. *En outre δ est nulle si X a un point rationnel.*

Définition 3.3.2 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS2**, (2.0.4)]**)**

Un *torseur universel* pour une variété X propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps E de groupe de Picard de type fini et sans torsion sur E^s est

un torseur $\mathscr{T}$ au-dessus de X sous le tore T_{NS} associé au $\mathscr{G}$-module $\operatorname{Pic} X_{E^s}$ et tel que $\rho(\mathscr{T}) = \mathrm{Id}_{\operatorname{Pic} X_{E^s}}$.

Par la proposition de tels torseurs existent si la variété X a en outre un point rationnel. En outre, par [**CTS1**, proposition 2], si E est un corps de nombres les classes d'isomorphismes de torseurs universels ayant un point rationnel sont en nombre fini.

Nous allons maintenant en donner quelques exemples.

Exemple 3.3.1. — Soit X une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}^N_E$. Par [**SGA2**, exposé XII, corollaire 3.7], le groupe de Picard de X_{E^s} est de rang 1 engendré par $\mathcal{O}_X(1)$. Soit $\mathscr{T}$ le cône épointé de $\mathbf{A}^{N+1}_E$ au-dessus de X muni de l'action naturelle de $\mathbf{G}_m$. Le cône $\mathscr{T}$ est un $\mathbf{G}_m$-torseur au-dessus de X.

On identifie $X^*(\mathbf{G}_m)$ avec $\operatorname{Pic} X$ en envoyant $\mathrm{Id}_{\mathbf{G}_m}$ sur $\mathcal{O}_X(-1)$. Le morphisme $\rho(\mathscr{T})$ envoie alors $\mathcal{O}_X(-1)$ sur la classe de $\mathscr{T}$ donc $\rho(\mathscr{T}) = \mathrm{Id}$ et $\mathscr{T}$ représente l'unique classe d'isomorphisme de torseurs au-dessus de X.

Exemple 3.3.2. — De même si $X \subset \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i}_E$ est intersection normale d'hypersurfaces définies par des équations multihomogènes en les variables

$$((X_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant N_i})$$

de sorte qu'on ait un isomorphisme

$$\operatorname{Pic} \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i}_E \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X$$

alors l'unique torseur universel au-dessus de X est obtenu comme l'image inverse de X dans $\prod_{i=1}^m (\mathbf{A}^{N_i+1}_E - \{0\})$, l'action de $(\mathbf{G}_m)^m$ se faisant composante par composante.

Exemple 3.3.3. — Si X est une variété torique propre et lisse pour un tore T dont l'orbite ouverte a un point rationnel, autrement dit une compactification équivariante lisse du tore T, alors il résulte de [**Sal**, §8] qu'un torseur universel au-dessus de X est donné par un ouvert d'un espace affine dont la construction remonte à Delzant [**Del**]. Plus précisément, soit $D(X)$ le $\mathbf{Z}$-module libre ayant pour base les T_{E^s}-orbites dans X_{E^s} de codimension 1, ou encore, ce qui revient au même, les cônes de dimension 1 dans l'éventail de $X_*(T)$ correspondant à X (cf. [**Da**, §6.5] ou [**Oda1**]). On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(T) \to D(X) \to \operatorname{Pic} X_{E^s} \to 0.$$

En passant aux tores correspondants on a une injection $T_{\mathrm{NS}} \to T(D(X))$. Soit C le cône de $D(X) \otimes \mathbf{R}$ engendré par la base ci-dessus. Alors le tore T_{NS} agit sur l'espace affine $\mathbf{A}_{C,k} = \operatorname{Spec}(E^s(C \cap D(X))^{\mathrm{Gal}(E^s/E)})$. Soit $\mathscr{T}$ l'ouvert de $\mathbf{A}_{C,k}$ correspondant aux points dont l'orbite est de dimension maximale. Alors, par [**Del**] ou [**Oda2**], le quotient de $\mathscr{T}$ par T_{NS} est isomorphe à X, cet isomorphisme dépendant du choix d'un point rationnel dans l'orbite ouverte de X. Les différents torseurs universels au-dessus de X sont obtenus en faisant varier ce point rationnel dans l'orbite ouverte.

Exemple 3.3.4 **(Skorobogatov, [Sk1] et [Sk2]).** — On considére maintenant la surface X obtenue en éclatant les quatre points $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$ et $P_4 = (1:1:1)$ dans $\mathbf{P}^2_E$. Alors $\operatorname{Pic} X$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^5$. On considére alors $\mathrm{Gr}(2,5)$, la Grassmanienne des sous-espaces de dimension 2 dans E^5. On a un plongement de $\mathrm{Gr}(2,5)$ dans $\mathbf{P}(\Lambda^2(E^5))$ par les coordonnées de Plücker. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ la base canonique de E^5 et pour tout $J \subset \{1,\dots,5\}$, soit M_J le sous espace $\bigoplus_{j\in J} Ee_j$. Soit $W(2,5)$ l'ouvert de $\mathrm{Gr}(2,5)$ correspondant aux sous-espaces M tels que

$$\dim(M \cap M_J) \leqslant (2/5)\#J$$

et soit $\mathscr{T}$ le cône de $\Lambda^2(E^5)$ au-dessus de $W(2,5)$. Or les diviseurs exceptionnels de X sont les éclatés des quatres points P_i que l'on note $F_{i,5}$ et les relevés stricts des droites (P_iP_j) notés $F_{l,m}$ si $\{i,j,l,m\} = \{1,2,3,4\}$. On identifie les $F_{i,j}$ pour $i<j$ avec la base naturelle de $\Lambda^2(E^5)$. L'épimorphisme du $\mathbf{Z}$ module libre de base $F_{i,j}$ sur $\operatorname{Pic} X$ induit un morphisme $T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m^{10}$ et une action de T_{NS} sur $\mathscr{T}$. Le quotient $\mathscr{T}/T_{\mathrm{NS}}$ est naturellement isomorphe à X donnant ici l'unique torseur universel au-dessus de X à isomorphisme près.

Du point de vue arithmétique un des intérêts des torseurs universels provient de l'annulation des obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour ces variétés, lorsque X est une variété algébrique propre, lisse et géométriquement intègre et rationnelle (cf. [**CTS2**, théorème 2.1.2]). Cela amène à envisager les hypothèses arithmétiques suivantes sur la variété V :

Hypothèses 3. — Désormais, on suppose en outre que

(i) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse, c'est-à-dire pour tout torseur universel $\mathscr{T}$ on a l'implication

$$(\forall v \in M_k,\ \mathscr{T}(k_v) \neq \varnothing) \Rightarrow \mathscr{T}(k) \neq \varnothing,$$

(ii) les torseurs universels au-dessus de V vérifient l'approximation faible, c'est-à-dire, pour tout ensemble fini S de places de k, $\mathscr{T}(k)$ est dense dans le produit $\prod_{v\in S}\mathscr{T}(k_v)$.

4. Montée aux torseurs universels

4.1. Les hauteurs

Notations 4.1.1. — Dans ce paragraphe, on fixe un torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus d'une variété vérifiant les hypothèses 1 à 3. On suppose en outre que $\mathscr{T}$ a un point rationnel y_0.

Si K/k est une extension finie et $\mathbf{H}_K$ un système de hauteurs pour V_K, alors pour tout fibré en droites L sur V, on a une métrique adélique définie par

$$\forall \mathfrak{p}\in M_k,\ \forall x\in V(k_\mathfrak{p}),\ \forall y\in L(x),\ \|y\|_\mathfrak{p}=\left(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}\|y\|_\mathfrak{P}\right)^{\frac{1}{[K:k]}} \tag{4.1.1}$$

si $[(L,(\|.\|_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P}\in M_K})]=\mathbf{H}_K([L])$ et on obtient ainsi un système de hauteurs $\mathbf{H}$ sur V appelé *système induit.*

Dans la suite, on note K une extension galoisienne finie de k de sorte que $\operatorname{Pic}V_K$ soit isomorphe à $\operatorname{Pic}\overline{V}$ et on choisit un système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K. On désignera par $\mathbf{H}$ le système induit sur V. Le système $\mathbf{H}_K$ permet également d'obtenir des métriques $\|.\|_\mathfrak{p}$ pour les fibrés en droites sur $V_\mathfrak{p}$ bien définies à une constante multiplicative près.

Soit $\mathfrak{P}$ une place de K et L un fibré en droites sur $V_{K_\mathfrak{P}}$. Le morphisme $\mathbf{Z}\to\operatorname{Pic}\overline{V}$ envoyant 1 sur $[L]$ induit un morphisme $\phi_L : T_{\mathrm{NS}}\to\mathbf{G}_m$; le $\mathbf{G}_m$-torseur $\phi_{L*}(\mathscr{T})$ est isomorphe au $\mathbf{G}_m$-torseur $L^\times$ obtenu en ôtant à L la section nulle. On obtient ainsi un morphisme $\psi_L : \mathscr{T}\to L^\times$ compatible avec ϕ_L. On fixe une place $\mathfrak{p}_0$ de k. La fonction $\|.\|^L_\mathfrak{P}$ qui envoie un élément y de $\mathscr{T}(K_\mathfrak{P})$ sur $\|\psi_L(y)\|_\mathfrak{P}/\|\psi_L(y_0)\|_\mathfrak{P}$ si $\mathfrak{P}$ ne divise pas $\mathfrak{p}_0$ et sur la même expression multipliée par $\mathbf{H}_K(L,\pi(y_0))^{-[K_\mathfrak{P}:k_{\mathfrak{p}_0}]/[K:k]}$ sinon est alors indépendante du choix de

l'isomorphisme de $\phi_*(\mathscr{T})$ sur $L^\times$ et du choix du représentant $(L, (\|.\|_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ de $\mathbf{H}_K([L])$, mais dépend du choix de y_0 et de $\mathfrak{p}_0$ [2].

On note $\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}$ l'application $(\operatorname{Pic} V_K \otimes \mathbf{C}) \times \mathscr{T}(K_{\mathfrak{P}}) \to \mathbf{C}^\times$ qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et telle que

$$\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L, y) = (\|y\|^L_{\mathfrak{P}})^{-1}.$$

on définit de manière similaire $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}} : \operatorname{Pic} V_{\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{C} \times \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \to \mathbf{C}^\times$.

Remarque 4.1.1. — Soit $\pi : \mathscr{T} \to V$ l'application quotient. Pour tout point y de $\mathscr{T}(k)$ et tout L de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$, on a la relation

$$\mathbf{H}(L, \pi(y)) = \prod_{v\in M_k} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, y). \tag{4.1.2}$$

4.2. Un espace de type adélique. — Le but de ce paragraphe est d'utiliser le cône des diviseurs effectifs dans le groupe $\operatorname{Pic} V$ pour construire sur le torseur universel une structure adélique qui, fibre à fibre, est donnée par la construction de Draxl (cf §3.2). Nous en donnerons tout d'abord une construction pratique pour la descente avant d'en donner une interprétation plus intrinsèque. Pour cela, on fera l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4. — Le cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est un cône polyédrique rationnel de l'espace vectoriel $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$.

Remarque 4.2.1. — Par la théorie de Mori, cela est vérifié pour les surfaces de Del Pezzo. En outre, aucun contre-exemple ne semble être connu pour une variété vérifiant les hypothèses 1.

Notations 4.2.1. — Pour tout torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus de V ayant un point rationnel y_0 et pour tout système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K, on note pour

---

2. En dehors d'un ensemble fini S de places de k pour tout σ de $\mathrm{Gal}(K/k)$, pour tout fibré en droites L sur V_K, toute place $\mathfrak{P}$ de K ne divisant pas une place de S, et tout y de $L(K_{\mathfrak{P}})$, on a

$$\|y\|^L_{\mathfrak{P}} = \|\sigma(y)\|^{\sigma(L)}_{\sigma(\mathfrak{P})}$$

En effet si on fixe une famille $L_1, \ldots, L_t$ de fibrés en droites sur V_K de sorte que leur classes $[L_i]$ forment une base de $\operatorname{Pic}(V_K)$, pour tout σ de $\mathrm{Gal}(K/k)$, on peut écrire $[\sigma(L_i)] = \sum_{j=1}^t m^\sigma_{i,j}[L_j]$. Notons $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ des modèles de $L_1, \ldots, L_t$. En dehors d'un nombre fini de places, la metrique sur $\sigma(L_i)$ est définie par $\prod_{j=1}^t \mathscr{L}_j^{\otimes m^\sigma_{i,j}}$.

toute place $\mathfrak{P}$ de K

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) = \{y \in \mathscr{T}(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V_{K_{\mathfrak{P}}}),\ \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L,y) \leqslant 1\}$$

et pour toute place $\mathfrak{p}$ de k,

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}).$$

Définition 4.2.2. — *L'espace adélique associé à $\mathscr{T}$ et $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$* est alors défini comme le produit restreint des $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}})$ relativement aux $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. On le notera temporairement $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{A}_k)$.

Nous allons maintenant justifier cette terminologie en montrant qu'il s'agit de l'intersection d'un espace adélique avec $\prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v)$. L'idée de la construction est donnée par le paragraphe 3.2.

Proposition 4.2.2. — *Soit $\widehat{\mathscr{T}}$ le produit contracté $\mathscr{T} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k}$ et $\widetilde{\mathscr{T}}$ un $\mathcal{O}_k$-modèle de $\widehat{\mathscr{T}}$. Alors il existe un ensemble fini de places S_2 contenant les places archimédiennes tel que pour tout $\mathfrak{p}$ de $M_k - S_2$, $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ coïncide avec $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.*

Démonstration. — Par définition de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$, il suffit de démontrer le résultat sur K. On peut donc supposer que $\operatorname{Pic} V = \operatorname{Pic} \overline{V}$.

Soit L un fibré en droites sur V tel que $\Gamma(V,L) \neq \{0\}$. L'application de $\mathbf{Z}$ dans $\operatorname{Pic} V$ qui envoie 1 sur $-[L]$ induit un morphisme du monoïde $\mathbf{N}$ dans le monoïde $-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}$ et donc un morphisme d'algèbres

$$\bar{k}[\mathbf{N}] \to \bar{k}[-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}].$$

D'où un morphisme $\hat{\phi}_L : \mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k} \to \mathbf{A}^1_k$ compatible avec le morphisme de tores $T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$. En prenant le produit contracté par $\mathscr{T}$ relativement à T_{NS}, on obtient un morphisme $\hat{\psi}_{L^\vee} : \widehat{\mathscr{T}} \to L^\vee$ qui étend le morphisme $\psi_{L^\vee}$ défini au paragraphe précédent.

Soient $L_1, \dots, L_m$ des fibrés en droites tels que les classes d'isomorphismes $[L_i]$ forment un système de générateurs du monoïde $C_{\mathrm{eff}}(V) \cap \operatorname{Pic} V$. Alors on a

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = \{y \in \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \mid \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant m \Rightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}}(L_i, y) \leqslant 1\}.$$

Soit S_2 un ensemble fini de places tel que pour toute place $\mathfrak{p}$ de $M_k - S_2$, les métriques sur les fibrés $L_i^\vee$ soient définies par un modèle $\mathscr{L}_i^\vee$ défini sur $\mathcal{O}_{S_2}$ et

tel que pour tout i le morphisme $\hat{\psi}_{L_i^\vee}$ s'étende en un morphisme

$$\tilde{\psi}_{L_i^\vee} : \widetilde{\mathscr{T}} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2} \to \mathscr{L}_i^\vee.$$

Si $\mathfrak{p} \in M_k - S_2$ et $y \in \mathscr{T}(k_\mathfrak{p}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, alors pour tout i compris entre 1 et m, $\tilde{\psi}_{L_i^\vee}(y)$ appartient à $\mathscr{L}_i^\vee(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ et par conséquent $\|\psi_{L_i^\vee}(y)\|_\mathfrak{p} \leqslant 1$. Quitte à augmenter S_2, on peut également supposer que $\|\psi_{L_i^\vee}(y_0)\|_\mathfrak{p} = 1$ et que $\mathfrak{p}_0$ appartient à S_2. Il résulte alors des définitions que $x \in \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. On a donc montré l'inclusion

$$\mathscr{T}(k_\mathfrak{p}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \subset \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}).$$

D'autre part le morphisme $\bigoplus_{i=1}^m \hat{\psi}_{L_i^\vee} : \widehat{\mathscr{T}} \to \bigoplus_{i=1}^m L_i^\vee$ est une immersion fermée. En effet il suffit de le démontrer pour l'application

$$\bigoplus_{i=1}^m \hat{\phi}_{L_i^\vee} : \mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k} \to \bigoplus_{i=1}^m \mathbf{A}_k^1.$$

Mais ceci résulte du fait que le choix des L_i donne une surjection

$$\mathop{\times}_{i=1}^m \mathbf{N} \to -C_{\mathrm{eff}}(V) \cap \operatorname{Pic} V.$$

Quitte à augmenter S_2, on peut supposer que $\widetilde{\mathscr{T}} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2}$ est l'adhérence de $\widehat{\mathscr{T}}$ dans $(\bigoplus_{i=1}^m \mathscr{L}_i^\vee) \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2}$. Soit $\mathfrak{p} \in M_k - S_2$ et $y \in \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Alors pour tout i entre 1 et m, $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}}(L_i, y) \leqslant 1$ entraîne que $\|\psi_{L_i^\vee}(y)\|_v \leqslant 1$ et donc $\hat{\psi}_{L_i^\vee}(y) \in \mathscr{L}_i^\vee(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Donc

$$\bigoplus_{i=1}^m \hat{\psi}_{L_i^\vee}(y) \in (\bigoplus_{i=1}^m \mathscr{L}_i^\vee)(\mathcal{O}_\mathfrak{p}).$$

Par conséquent $y \in \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. □

Corollaire 4.2.3. — *L'espace adélique $\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\boldsymbol{A}_k)$ est indépendant du choix du système de hauteurs et du choix de y_0.*

Notation 4.2.3. — Dans la suite, on notera $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ cet espace adélique.

Remarque 4.2.4. — Il faut noter qu'en général $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ ne définit pas un éventail régulier. Le nombre de raies extrêmales peut, par exemple, être supérieur au

rang de $\operatorname{Pic}\overline{V}$. La variété $\mathbf{A}_{-C_{\text{eff}}(\overline{V}),k}$ est alors singulière et il en est a fortiori de même de la variété $\widehat{\mathcal{T}}$.

Exemple 4.2.1. — Soit X une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}^N_k$ et $\mathcal{T}$ le cône épointé de $\mathbf{A}^{N+1}_k$ au-dessus de X. Par l'exemple 3.3.1, $\mathcal{T}$ est, à isomorphisme près, l'unique torseur universel au-dessus de X. On peut en outre choisir comme système de hauteurs celui induit par le système générateur $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$. Autrement dit, pour toute place v de k, tout x de $X(k_v)$ et toute section s de $\mathcal{O}_X(1)$ correspondant à une forme linéaire l sur k^{N+1},

$$||\mathrm{s}(x)||_v = \inf_{X_i(x)\neq 0} \left|\frac{l}{X_i}(x)\right|_v .$$

On suppose qu'il existe $\boldsymbol{y}_0 \in \mathcal{T}(k)$. Le morphisme $\psi_{\mathcal{O}(1)}$ envoie le point $\boldsymbol{y}$ de coordonnées $(y_0,\ldots,y_N)$ de $\mathcal{T}(k)$ sur $1/y_i X_i(y_0 : \ldots : y_N)$ pour un i tel que $y_i \neq 0$. On a donc

$$\left\|\psi_{\mathcal{O}(1)}(\boldsymbol{y})\right\|_v = \inf_{y_i\neq 0}\left|\frac{1}{y_i}\right|_v = \frac{1}{\sup_{0\leqslant i\leqslant N}|y_i|_v}.$$

Donc $\check{\mathbf{H}}_{\mathcal{T},v}(\mathcal{O}(1), \boldsymbol{y}) = \sup_{0\leqslant i\leqslant N}|y_i|_v / \sup_{0\leqslant i\leqslant N}\left|y_{0,i}\right|_v$ si $v \neq \mathfrak{p}_0$. Par conséquent pour presque toute place v de k

$$\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v) = \mathbf{A}^{N+1}_{\mathcal{O}_k}(\mathcal{O}_v) \cap \mathcal{T}(k_v)$$

et l'espace adélique considéré est égal à $\mathbf{A}^{N+1}_k(\boldsymbol{A}_k) \cap \prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v)$. C'est donc celui utilisé pour la méthode du cercle.

Exemple 4.2.2. — Plus généralement, si $X \subset \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i+1}_k$ est donnée comme intersection normale d'hypersurfaces définies par des équations multihomogènes et si

$$\mathbf{Z}^m = \operatorname{Pic}(\prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i+1}_k)$$

est isomorphe à $\operatorname{Pic}\overline{X}$, l'unique torseur universel $\mathcal{T}$ au-dessus de X est l'image inverse de X dans $\prod_{i=1}^m (\mathbf{A}^{N_i+1}_k - \{0\})$. Le cône effectif est donné par $\mathbf{R}^m_{\geqslant 0} \subset \mathbf{R}^m$ et comme dans le cas précédent, on vérifie que

$$\mathcal{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \mathbf{A}^{\sum_{i=1}^m (N_i+1)}(\boldsymbol{A}_k) \cap \prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v).$$

Remarque 4.2.5. — Une des raisons de l'apparition du cône $-C_{\text{eff}}$ plutôt que C_{eff} dans les construction précédentes est donnée par les exemples 4.2.1 et 4.2.2 : dans ces cas les structures adéliques usuelles sur les cônes sont induites par celle de $\mathbf{A}^{N+1}$ vu au-dessus de $\mathbf{P}^N$ et correspondent donc à $\mathcal{O}(-1)$ et non à $\mathcal{O}(1)$.

Exemple 4.2.3. — Considérons le cas où V est une compactification lisse d'un tore T sur k. Soit $D(V)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base les $\overline{T}$-orbites $(T_j)_{j\in J}$ de codimension 1 dans $\overline{V}$, soit C le cône naturel dans ce module et $\mathbf{A}_{C,k}$ l'espace affine correspondant. La suite exacte

$$0 \to X^*(T) \xrightarrow{j} D(V) \to \operatorname{Pic} \overline{V} \to 0$$

induit une action de T_{NS} sur $\mathbf{A}_{C,k}$. Dans ce cas, par l'exemple 3.3.3, les torseurs universels au-dessus de V sont isomorphes en tant que variété à un ouvert $\mathscr{T}$ de $\mathbf{A}_{C,k}$ et les morphismes $\pi : \mathscr{T} \to V$ sont paramétrés par le choix d'un point x_0 de l'orbite ouverte de V et donnés comme les uniques extensions du morphisme équivariant de $T(D(V))$ dans V envoyant l'élément neutre sur x_0.

On prend pour y_0 l'image de l'élément neutre de $T(D(V))$ dans $\mathscr{T}$. En outre, on choisit l'extension K/k de sorte que K trivialise le $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$-ensemble J. Soit F_j l'adhérence de T_j pour $j \in J$. On se donne un ensemble fini $S \subset M_f$ et un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$. On peut supposer que S contient les places ramifiées dans l'extension K/k et que, S_K désignant les places de K au-dessus de celles de S, il existe des modèles $\mathscr{L}_j$ des fibrés associés à F_j pour j décrivant J, de sorte que les métriques sur ces fibrés soient définies en dehors de S_K par les $\mathscr{L}_j$. Enfin on suppose que l'on a $\|\psi_{[F_j]}(y_0)\|_v = 1$ en dehors de S et que l'adhérence $\mathscr{F}_j$ de F_j dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{S_K}}$ est définie comme le lieu des zéros d'une section s_j de $\mathscr{L}_j$.

La description de l'espace $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ nous amène à considérer des multiplicités d'intersection. Soit $\mathfrak{P}$ une place finie de K en dehors de S_K et $i \in J$. Pour tout $x \in V(K_\mathfrak{P})$ n'appartenant pas à F_i, on note $m_i(x)$ la multiplicité d'intersection de l'adhérence $\tilde{x}$ de x dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_\mathfrak{P}}$ avec $(\mathscr{F}_i)_{\mathcal{O}_\mathfrak{P}}$. Cette intersection étant de dimension 0 par hypothèse, on peut utiliser la formule de Serre (cf. [**Se**, page V-32])

$$m_i(x) = \sum_{y \in (\mathscr{V}_{\mathcal{O}_\mathfrak{P}})_{(0)}} \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j l \operatorname{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}}(\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}/\mathscr{I}_{y,\tilde{x}}, \mathcal{O}_{\mathscr{V},y}/\mathscr{I}_{y,\mathscr{F}})$$

où $\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}$ désigne $\mathcal{O}_{\mathscr{V}_{\mathcal{O}_\mathfrak{P}},y}$ et pour tout sous-schéma fermé Y de $\mathscr{V}$, $\mathscr{I}_{y,Y}$ désigne l'idéal associé à Y dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}$ et l la longueur d'un $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$-module.

Dans ce cas particulier, la formule se réduit à

$$m_i(x) = l_{\mathbf{F}_{\mathfrak{P}}}(\mathscr{L}_i(\tilde{x})/(\mathrm{s}_i(x))).$$

De manière plus intuitive, on peut également décrire $m_i(x)$ comme le plus grand entier j tel que, modulo $\mathfrak{P}^j$, $\tilde{x}$ appartienne à $\mathscr{F}_i$.

Soit $\mathfrak{p} \in M_f - S$. On a $k_{\mathfrak{p}} \otimes K = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{P}}$. Comme $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifiée dans K/k, on peut choisir des uniformisantes $\pi_{\mathfrak{P}}$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ pour $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ de sorte que $(\pi_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}$ soit invariant sous l'action du groupe de Galois. On considère alors pour tout $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ l'application

$$\eta_{K_{\mathfrak{P}}} : T(D(V))(K_{\mathfrak{P}}) \to T(D(V))(K_{\mathfrak{P}})$$

qui à $\boldsymbol{y} = (y_j)_{j\in J}$ associe $(y_j/\pi_{\mathfrak{P}}^{v_{\mathfrak{P}}(y_j)-m_j(\pi(\boldsymbol{y}))})_{j\in J}$. On obtient alors que pour tout j de J, l'entier $v_{\mathfrak{P}}(\eta_{K_{\mathfrak{P}}}(\boldsymbol{y})_j)$ vaut $m_j(\pi(\boldsymbol{y}))$. Le produit $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \eta_{K_{\mathfrak{P}}}$ définit par passage aux invariants une application

$$\eta_{\mathfrak{p}} : T(D(V))(k_{\mathfrak{p}}) \to T(D(V))(k_{\mathfrak{p}}).$$

Proposition 4.2.6. — *Avec les notations qui précèdent, pour tout élément $\boldsymbol{y}$ de l'ensemble $T(D(V))(k_{\mathfrak{p}})$, l'intersection de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ avec la fibre de π en $\pi(\boldsymbol{y})$ est donnée par*

$$T(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y}).$$

Démonstration. — Toutes les définitions étant obtenues par descente galoisienne à partir de K, il suffit de montrer le résultat dans le cas où le $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-ensemble J est trivial.

Notons tout d'abord que la formule $m_j(x) = l_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}(\mathscr{L}_j(\tilde{x})/(\mathrm{s}_j(x)))$ se réécrit également

$$\left\|\mathrm{s}_j(x)\right\|_{\mathfrak{p}} = (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{-m_j(x)}. \tag{4.2.1}$$

Vérifions que, pour tout $\boldsymbol{y}$ de $T(D(V))(k_{\mathfrak{p}})$, on a $\pi(\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y})) = \pi(\boldsymbol{y})$. Pour cela, on étend l'application $F_j \mapsto y_j$ en un morphisme $u_{\boldsymbol{y}} : D(V) \to k_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Alors $\pi(\boldsymbol{y})$ est caractérisé par les relations $\xi(\pi(\boldsymbol{y})) = u_{\boldsymbol{y}}(\xi)$ où ξ décrit $X^*(T)$. Il nous faut donc calculer $u_{\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y})}(\xi)$. Mais la fonction $F_j \mapsto \left\|\mathrm{s}_j(\boldsymbol{y})\right\|_{\mathfrak{p}}$ s'étend également en un morphisme $w_{\boldsymbol{y}} : D(V) \to \mathbf{R}_{>0}$ qui vérifie

$$\forall \xi \in X^*(T), \quad w_{\boldsymbol{y}}(\xi) = |\xi(\pi(\boldsymbol{y}))|_{\mathfrak{p}}$$

et, par conséquent, les morphismes $D(V) \to \mathbf{Z}$ qui étendent les applications $F_j \mapsto m_j(\pi(\boldsymbol{y}))$ et $F_j \mapsto v_{\mathfrak{p}}(y_j)$ coïncident sur $X^*(T)$ et, par définition de $\eta_{\mathfrak{p}}$, on obtient que $u_{\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y})}(\xi) = u_{\boldsymbol{y}}(\xi)$ pour tout caractère ξ de T.

Pour montrer la proposition, il reste à montrer que pour tout j, on a

$$\left\|\psi_{[F_j]}(\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Mais il découle des définitions que l'on peut choisir $\psi_{[F_j]}$ de sorte que $\boldsymbol{y}$ soit envoyé sur $y_j^{-1}\mathrm{s}_j(\pi(y))$ et il résulte de (4.2.1) que

$$\left\|\psi_{[F_j]}(\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = \left\|y_j^{-1}\pi_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(y_j)-m_j(\pi(\boldsymbol{y}))}\mathrm{s}_j(\pi(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = 1. \quad \square$$

***Cas particulier* . —** Si V est la variété torique obtenue en éclatant 3 points rationnels P_1, P_2 et P_3 en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, alors les diviseurs F_j sont les images inverses E_1, E_2 et E_3 des points ainsi que les relevés stricts $E_{1,2}$, $E_{2,3}$ et $E_{3,1}$ des droites (P_1P_2), (P_2P_3) et (P_3P_1). On note $(y_1, y_2, y_3, y_{1,2}, y_{2,3}, y_{3,1})$ les coordonnées naturelles sur $D(V)^\vee \otimes k$ et $(x_1 : x_2 : x_3)$ des coordonnées sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ de sorte que $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$ et $P_3 = (0:0:1)$. Soit U le complémentaire des diviseurs F_j que l'on peut identifier avec son image dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Au-dessus de U le morphisme $\pi : \mathscr{T} \to V$ est donné par

$$x_1 = y_{2,3}y_2y_3, \quad x_2 = y_{1,3}y_1y_3 \quad \text{et} \quad x_3 = y_{1,2}y_1y_2.$$

Considérons la section ensembliste $s : U(\mathbf{Q}) \to \pi^{-1}(U)(\mathbf{Q})$ qui apparaît notamment dans [**BM**, §5] et [**Pe**, §7.1.2] et définie par, si $(x_1, x_2, x_3) = 1$,

$$s(x_1 : x_2 : x_3) = (y_1, y_2, y_3, y_{1,2}, y_{2,3}, y_{3,1}),$$

où $y_i = (x_j, x_l)$ et $y_{i,j} = x_l y_i^{-1} y_j^{-1}$ pour $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Il est aisé de vérifier que pour tout nombre premier p, et pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1 : x_2 : x_3)$, les valuations en p des coordonnées de son image par s coïncident avec les multiplicités d'intersection de $\boldsymbol{x}$ avec les diviseurs correspondants dans V_p. On en déduit comme dans le cas général que l'intersection de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$ avec la fibre en $\boldsymbol{x}$ est le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathbf{Z}_p).s(\boldsymbol{x}).$$

Mais $\operatorname{Pic} V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\Lambda] \oplus \mathbf{Z}[E_1] \oplus \mathbf{Z}[E_3]$ où Λ est le relevé d'une droite ne contenant aucun des points éclatés et pour la décomposition correspondante

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(V), \mathbf{Z}_p) = \left\{ (r, r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{G}_m^4 \,\middle|\, \begin{cases} r_i \in \mathbf{Z}_p & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ r r_i^{-1} r_j^{-1} \in \mathbf{Z}_p & \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant 3 \end{cases} \right\}.$$

Or, pour tout nombre premier p,

$$s(\pi(p, p, 1, 1, 1, 1)) = s(p : p : p^2) = s(1 : 1 : p) = (1, 1, 1, p, 1, 1)$$

et donc $(p, p, 1, 1, 1, 1) \notin \mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$. L'espace adélique $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ est donc différent de l'intersection de $\prod_v \mathscr{T}(\mathbf{Q}_v)$ avec l'espace adélique associé à l'espace affine.

Exemple 4.2.4. — On reprend les notations de l'exemple 3.3.4. On considére donc la surface de Del Pezzo V obtenue en éclatant les quatre points de coordonnées $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ et $(1:1:1)$ dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et l'unique torseur universel au-dessus de V est décrit comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 k^5$ au-dessus de l'image de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5)$ (cf. [**Sk1**], [**Sk2**] et l'exemple 3.3.4). Ce cône est donné par les équation de Plücker :

$$\begin{cases} y_{1,2}y_{3,4} - y_{1,3}y_{2,4} + y_{1,4}y_{2,3} = 0, \\ y_{1,2}y_{3,5} - y_{1,3}y_{2,5} + y_{1,5}y_{2,3} = 0, \\ y_{1,2}y_{4,5} - y_{1,4}y_{2,5} + y_{1,5}y_{2,4} = 0, \\ y_{1,3}y_{4,5} - y_{1,4}y_{3,5} + y_{1,5}y_{3,4} = 0, \\ y_{2,3}y_{4,5} - y_{2,4}y_{3,5} + y_{2,5}y_{3,4} = 0. \end{cases}$$

Soit W l'image inverse dans $\mathscr{T}$ du complémentaire des diviseurs exceptionnels. Alors, comme dans le cas des variétés toriques, on peut définir des applications

$$\eta_p : W(k_{\mathfrak{p}}) \to W(k_{\mathfrak{p}})$$

avec $\pi \circ \eta_p = \pi$ et telles que, si $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, la composante en i, j de $\eta_p(y)$ ait pour valuation la multiplicité d'intersection de $\pi(y)$ avec le diviseur exceptionnel $F_{i,j}$. On montre alors aisément que l'intersection de la fibre en $\pi(y)$ avec $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$ est donnée par le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathbf{Z}_p).\eta_p(y).$$

Remarque 4.2.7. — Pour presque toute place $\mathfrak{P}$ de K, on peut également décrire l'ensemble $\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}})$ comme le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}).\mathscr{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$$

où $\mathscr{T}$ est un modèle de $\mathcal{T}$. Cette description est sous-jacente dans les exemples 4.2.3 et 4.2.4, puisque les applications $\eta_{\mathfrak{p}}$ ont en fait leur image dans $\mathscr{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ pour des modèles bien choisis de $\mathcal{T}$.

4.3. Un domaine fondamental sous $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)$. — Comme dans le cas de l'espace projectif étudié par Schanuel dans [**Sc**], ou plus généralement celui des intersections complètes lisses (cf. [**Pe**, §5.1]), le passage aux torseurs universels nécessite la construction d'un domaine fondamental sous l'action des unités. L'objet de ce paragraphe est de définir ce domaine à l'aide des fonctions $\check{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}$ introduites dans le paragraphe 4.1.

***Notations 4.3.1.* —** Dans la suite S désigne un ensemble fini de places contenant l'ensemble S_0 défini au paragraphe 2.3 ainsi que l'ensemble S_2 défini dans la démonstration de la proposition 4.2.2, les places archimédiennes, les places ramifiées dans l'extension K/k, et tel que les conditions (iv) et (v) de la proposition 3.1.2 soient vérifiées pour le tore T_{NS} associé au groupe de Picard.

On a donc, d'une part, une surjection

$$\log'_S : T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v \notin S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$$

et, d'autre part, une suite exacte

$$0 \to W(T_{\mathrm{NS}}) \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\log_S} \prod_{v \in S} (X_*(T_{\mathrm{NS}})_v) \otimes \mathbf{R}.$$

Soit M l'image de $\log_S$. Le $\mathbf{Z}$-module M est un réseau dans le noyau de l'application canonique

$$\prod_{v \in S} X^*(T_{\mathrm{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R} \to X^*(T_{\mathrm{NS}})_k^\vee \otimes \mathbf{R}.$$

Soit Δ un domaine fondamental pour M dans ce noyau, donné par une base de M, et pr une projection de $\prod_{v \in S} X^*(T_{\mathrm{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R}$ sur ce noyau.

Dans la section 4.1, on a construit des fonctions

$$\check{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v} : \operatorname{Pic} V_v \otimes \mathbf{C} \times \mathscr{T}(k_v) \to \mathbf{C}^\times$$

pour tout torseur $\mathscr{T}$ ayant un point rationnel. Elles induisent des fonctions

$$\check{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v} : \mathscr{T}(k_v) \to (\operatorname{Pic} V_v)^\vee \otimes \mathbf{R}$$

données par

$$\forall y \in \mathscr{T}(k_v),\ \forall L \in \operatorname{Pic} V_v,\ \check{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(y, L) = q_v^{\check{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y)(L)}$$

où $q_v = \#\mathbf{F}_v$ si $v \in M_f$, $q_v = e$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $q_v = e^2$ sinon [(3)]. On définit alors un domaine $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ par

$$\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \prod_{v \in S} \mathscr{T}(k_v) \,\middle|\, \mathrm{pr}((\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y_v))_{v \in S}) \in \Delta \right\}.$$

Proposition 4.3.1. — *L'ensemble $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ est un domaine fondamental de $\prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v)$ sous l'action de $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)/W(T_{\mathrm{NS}})$. Autrement dit, il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ est stable sous l'action de $W(T_{\mathrm{NS}})$,

(ii) $\forall r \in T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) - W(T_{\mathrm{NS}})$, $r.\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) \cap \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \varnothing$,

(iii) $\bigcup_{r \in T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)} r.\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v)$.

Démonstration. — Notons tout d'abord que pour toute place v de k on a

$$\begin{aligned}\forall L \in \operatorname{Pic} V_v,\ \forall y \in \mathscr{T}(k_v),\ \forall r \in T_{\mathrm{NS}}(k_v),\ \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, ry) &= (\|ry\|_v^L)^{-1} \\ &= |L(r)|_v^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, y).\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction

$$(y_v)_{v\in S} \mapsto (\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y_v))_{v \in S}$$

est compatible avec les actions de $T(\mathcal{O}_S)$, l'action de ce groupe sur $\prod_{v\in S} (\operatorname{Pic} V_v)^\vee \otimes \mathbf{R}$ étant donnée par $-\log_S$.

L'assertion (i) résulte alors du fait que $W(T_{\mathrm{NS}})$ est contenu dans le noyau de $\log_S$ et les assertions (ii) et (iii) du fait que Δ est un domaine fondamental pour l'image de $\log_S$. □

Exemple 4.3.1. — Si V est l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$, alors on peut prendre pour S l'ensemble des places archimédiennes et pour métriques celles associées à la base

3. On peut également définir des fonctions analogues $\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T}_K,\mathfrak{P}}$ sur K. En utilisant la note (2), en dehors d'un nombre fini de places, ces fonctions sont compatibles avec l'action du groupe de Galois. Autrement dit, l'application

$$\mathscr{T}(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{P}}) \to \bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (\operatorname{Pic} V_K)^\vee \otimes \mathbf{R}$$

est covariante, l'action de Galois sur $\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (\operatorname{Pic} V_K)^\vee \otimes \mathbf{R}$ étant vue comme induite de $\mathscr{G}_v$. Quitte à agrandir S, la restriction de cette application à $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}})$ est à valeur dans $\operatorname{Pic}(V_v)$ et coïncide avec $\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}$.

usuelle de l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$. Le domaine fondamental coïncide alors avec celui construit par Schanuel [**Sc**].

Plus généralement, si V est une intersection complète lisse de dimension supérieure à 3 et si on prend $S = M_\infty$, alors, en utilisant les métriques obtenues par restriction à partir de $\mathbf{P}^n_k$, le domaine fondamental est celui décrit dans [**Pe**, §5.1].

En particulier si $k = \mathbf{Q}$ on a simplement dans ce cas

$$\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{T}) = \prod_{v \in S} \mathcal{T}(\mathbf{Q}_v).$$

4.4. Mesures sur les torseurs universels. — Notre but dans cette section est de construire une mesure adélique canonique sur les torseurs universels. Là encore, notre fil conducteur sera le cas des intersections complètes lisses pour lesquelles on dispose de la mesure induite par la forme différentielle de Leray (cf. [**Lac**, page 148], [**Pe**, page 130]). Comme pour la mesure introduite par Salberger [**Sal**], il ne sera pas nécessaire d'introduire des facteurs de convergence, ce qui est un des avantages du passage aux torseurs universels. Toutefois l'espace adélique considéré par Salberger diffère de celui utilisé ici. En outre la mesure utilisée ici n'est pas invariante sous l'action du tore T_{NS}.

Notations 4.4.1. — Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Pour toute place v de k et tout point x de $V(k_v)$ au-dessus duquel le torseur $\mathcal{T}$ a un point rationnel sur k_v, on considère la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x, v}$ définie par la relation :

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(r)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(r) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} f(r.y)\|r.y\|_v^{\omega_V} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r) \tag{4.4.1}$$

où f est une fonction sur $\mathcal{T}_x(k_v)$ et y un point fixé de $\mathcal{T}_x(k_v)$, où $\|.\|_v^{\omega_V}$ a été défini au paragraphe 4.1 et où $\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}$ est la mesure canonique sur $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$, dont la définition a été rappelée dans le paragraphe 3.1.

On considère alors la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ définie sur $\mathcal{T}(k_v)$ par la relation :

$$\int_{\mathcal{T}(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y) = \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y).$$

Remarque 4.4.1. — (i) Pour ces notations on fixe $(\omega_V, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$, un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V])$. Ce choix n'intervient que dans les termes locaux de la mesure.

(ii) En termes de celle de Salberger, cette mesure peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(r) = \|r\|_v^{\omega_V}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Salberger},v}(r).$$

Hypothèse 5. — Désormais on suppose en outre que le faisceau ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(V))$ défini dans le théorème 3.2.3.

Proposition 4.4.2. — *Avec les notations ci-dessus, le produit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ définit une mesure adélique sur l'espace $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$.*

Démonstration. — Il nous faut montrer que, quitte à élargir S, le produit

$$\prod_{v \notin S} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v))$$

converge. Mais on a les relations

$$\begin{aligned}\forall v \in M_f,\ \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) &= \int_{\mathscr{T}(k_v)} \mathbf{1}_{\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}\\ &= \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(x) \int_{\mathscr{T}_x(k_v)} \mathbf{1}_{\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}(y) \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_x,v}(y).\end{aligned}$$

Par [**CTS2**, lemme 3.2.3], quitte à augmenter S, pour tout v de $M_f - S$, l'application $\mathscr{T}(k_v) \to V(k_v)$ est surjective.

En outre, quitte à augmenter S, on peut supposer qu'il existe un modèle $\mathscr{T}$ de $\mathscr{T}$ sur $\mathcal{O}_S$ de sorte que pour toute place $\mathfrak{P}$ ne dominant pas un élément de S, tout y de $\mathscr{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ et tout $L \in \operatorname{Pic} V_K$, on ait

$$\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L, y) = 1.$$

Quitte à augmenter S, si v appartient à $M_f - S$ et x à $V(k_v)$, il existe un élément y de $\mathscr{T}_x(k_v)$ provenant de $\mathscr{T}(\mathcal{O}_v)$ [4]. Mais alors

$$\int_{\mathscr{T}_x(k_v)} \mathbf{1}_{\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}(y) \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_x,v}(y) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} \mathbf{1}_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)} \left|\omega_V(r)\right|_v \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r).$$

4. En effet, quitte à augmenter S, en utilisant la note 3 et la surjectivité de $T_{\mathrm{NS}}(k_v) \to \operatorname{Pic}(V_v)$, on obtient un élément y de $\mathscr{T}_x(k_v)$ tel que, pour toute place $\mathfrak{P}$ de K au-dessus de $\mathfrak{p}$,

$$\forall L \in \operatorname{Pic}(V_K), \quad \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L, y) = 1.$$

On obtient donc les égalités

$$\begin{aligned}
&\prod_{v\in M_k-S} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v))\\
&\qquad = \prod_{v\in M_k-S}\left[\int_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)} \left|\omega_V(r)\right|_v \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r)\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v))\right]\\
&\qquad = \left[\prod_{v\in M_k-S} L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_{\overline{V}}^{-1})\right]\\
&\qquad\qquad \times \left[\prod_{v\in M_k-S} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v))L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})\right]\\
&\qquad\qquad \times \left[\prod_{v\in M_k-S} L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v))\right].
\end{aligned}$$

La convergence du premier terme résulte des travaux de Draxl, (cf. théorème 3.2.3) et de l'hypothèse 5, la convergence du second des travaux de Weil et Ono et celle du troisième se démontre comme dans [**Pe**, proposition 2.2.2]. □

Il résulte de la preuve qu'il est possible de prendre la convention suivante :

Convention 4.4.2. — Dans la suite, on augmente S de façon à ce que pour tout $\mathfrak{p}$ de $M_k - S$ et tout x de $V(k_\mathfrak{p})$, il existe $y \in \mathscr{T}_x(k_\mathfrak{p})$ tel que

$$\forall \mathfrak{P}|\mathfrak{p},\ \forall L \in \operatorname{Pic} V_K,\ \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L,y) = 1.$$

Lemme 4.4.3. — *Le produit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ est indépendant du choix du système de hauteurs.*

Démonstration. — Soient $\mathbf{H}^1$ et $\mathbf{H}^2$ deux systèmes de métriques correspondant à deux métriques adéliques $(\|.\|_v^1)_{v\in M_k}$ et $(\|.\|_v^2)_{v\in M_k}$ sur $\omega_{\overline{V}}^{-1}$. La seconde peut alors s'écrire comme $(f_v\|.\|_v^1)_{v\in M_k}$ où les fonctions f_v sont continues, partout non nulles et presque toutes constantes et égale à 1 sur $V(k_v)$. Par la formule (2.3.1), la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$ est multipliée par f_v. Mais par (4.4.1) et la définition de $\|.\|_v^{\omega_V}$, les mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_x,v}$ sur $\mathscr{T}_x(k_v)$ sont divisées par $f_v\lambda_v$ où $(\lambda_v)_{v\in M_k}$ est une famille de réels presque tous égaux à 1 et telle que $\prod_{v\in M_k}\lambda_v = 1$. La mesure $\prod_{v\in M_k}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ est donc inchangée. □

Définition 4.4.3. — On définit alors la mesure adélique canonique $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}$ sur l'espace adélique $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}} = \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim \mathscr{T}}} \prod_{v \in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}.$$

Remarque 4.4.4. — Il est en fait également possible de définir cette mesure en termes d'une section partout non nulle de $\omega_{\mathscr{T}}$, mais la description donnée ici est plus pratique du point de vue de la descente.

Exemple 4.4.1. — Si V est une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}_k^N$ définie par l'annulation de m polynômes homogènes f_i de degré d_i et si $\mathscr{T}$ est le cône épointé au-dessus de V dans $\mathbf{A}_k^{N+1}$, alors la forme différentielle de Leray ω_{L} sur $\mathscr{T}$ est définie par la relation suivante : si y est un point rationnel de $\mathscr{T}$ et si $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{l_j}}(y)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ est inversible pour $l_1 < \cdots < l_m$, alors

$$\omega_{\mathrm{L}}(y) = (-1)^{Nm - \sum_{j=1}^m l_j} \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{l_j}}(y)\right)^{-1}_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$$
$$dX_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_{l_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_{l_m}} \wedge \cdots \wedge dX_N.$$

Cette forme définit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$ sur $\mathscr{T}(k_v)$ pour toute place v de k. D'autre part le choix des équations $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ définit un isomorphisme de ω_V^{-1} sur $\mathcal{O}_V(\delta)$ où $\delta = N + 1 - \sum_{i=1}^m d_i$. De manière plus explicite un polynôme homogène g de degré δ correspond à la forme $\omega(g)$ définie en $\boldsymbol{x} = (1 : x_1 : \ldots : x_N)$ par la formule (cf. [**Pe**, page 134])

$$\omega(g)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \det \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(\boldsymbol{x})\right)_{\substack{N-m+1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \frac{\partial}{\partial X_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial X_{N-m}}.$$

Par ailleurs, le système de hauteurs est défini par le choix d'une métrique adélique sur $\mathcal{O}_V(1)$.

Proposition 4.4.5. — *Pour tout choix de la métrique sur $\mathcal{O}_V(1)$ et toute place v de k la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ coïncide avec la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat au-dessus d'un ouvert W de $V(k_v)$ pour la topologie v-adique sur lequel X_0 et $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ ne s'annulent pas. Soit $\rho : W \to \mathscr{T}$ l'application qui envoie $\boldsymbol{x}$ de coordonnées $(1 : x_1 : \ldots : x_N)$ sur $(1, x_1, \ldots, x_N)$. Alors par [**Pe**, Lemme 5.4.4], l'image de la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$ sur $\rho(W)$ est donnée par

$$\rho_*\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} = \frac{1}{\|y\|_v^{\omega_V}\left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(y)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\right|_v} dX_{1,v}\ldots dX_{N-m,v}.$$

Par définition, la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ s'exprime par la formule suivante

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v} = \frac{1}{\left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(y)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\right|_v} dX_{1,v}\ldots dX_{N-m,v}$$

qui coïncide avec $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$. □

5. Deux résultats de descente

5.1. Une fonction de comptage. — Comme pour la méthode du cercle, il semble raisonnable de chercher à comparer dans certains cas des sommations du type

$$\sum_{y\in\mathscr{T}(k)} \Phi(y)$$

avec des intégrales de la forme

$$\int_{\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}$$

où Φ est une fonction sur l'espace $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$. Or les différentes conjectures sur le nombre de points de hauteur bornée sur la variété V peuvent s'interpréter à l'aide de comparaisons de ce type.

A titre d'exemple, nous allons décrire comment la question 2.6.1 peut se relever. Il nous faut pour cela décrire les fonctions pour lesquelles devraient être effectuées les comparaisons.

Notations 5.1.1. — Si $\mathscr{T}$ est un torseur universel au-dessus de V avec $\mathscr{T}(k) \neq \varnothing$ et si s appartient à $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$, on définit $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}$ par le produit

$$\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}(s,y) = \frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},S}(s,y). \prod_{v \in M_k - S} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,y_v)$$

où pour tout v en dehors de S, $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,.)$ est la fonction indicatrice de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)$ et $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},S}(s,\cdot)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble donné par

$$\left\{ (y_v)_{v\in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) \,\middle|\, \begin{cases} \forall v \in S, \pi(y_v) \in U(k_v) \\ \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V), \prod_{v\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L,y_v) \geqslant 1 \end{cases} \right\}$$

multipliée par la fonction $\prod_{v\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,y_v)^{-1}$ où U désigne le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices.

5.2. La descente pour la fonction zêta des hauteurs. — Nous nous placerons sous les hypothèses suivantes, qui contiennent toutes les hypothèses déjà effectuées.

Hypothèses . — La lettre V désigne une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2,
(2) $\operatorname{Pic} \overline{V} = \operatorname{NS} \overline{V}$ est sans torsion,
(3) ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) \subset C_{\mathrm{eff}}(V)$,
(4) $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est un cône polyédrique rationnel,
(5) $V(k)$ est Zariski dense dans V,
(6) le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur de fibré ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide de V,
(7) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible.

Remarque 5.2.1. — Les hypothèses 1 à 4 sont de nature géométrique alors que les conditions 5 à 7 sont de nature arithmétique. Comme indiqué précédemment, l'auteur ne connaît pas de variété vérifiant les conditions 1 à 3 sans vérifier la condition 4 ; la condition 7 a été étudiée par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS2**, §3.8] et là encore aucun contre-exemple ne semble être connu lorsque V vérifie les conditions 1 à 3. Il n'en est peut-être pas de même de la condition 6 qui pourrait être fausse pour certaines variétés de Fano (cf. l'exemple de Batyrev et Tschinkel [**BT2**]).

Pour simplifier l'énoncé des résultats, nous supposerons que le système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in V(K), \quad \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}, \quad \mathbf{H}_K(L,x) \geqslant 1$$

situation à laquelle on peut toujours se ramener.

Théorème 5.2.2. — *Soit V une variété vérifiant les conditions ci-dessus, K une extension galoisienne de k telle que* $\operatorname{Pic} V_K \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} \overline{V}$, $\mathbf{H}_K$ *un système de hauteurs sur V_K satisfaisant à la condition qui précède, soit $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille de représentants des classes d'isomorphismes de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Alors, pour tout s appartenant à un cône ouvert de* $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$

$$\sum_{i\in I} \sum_{y \in \mathscr{T}_i(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(s,y) = \zeta_{\mathbf{H}}(s) L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})).$$

Démonstration. — On se fixe un élément s de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$ pour lequel les suites qui définissent $\zeta_{\mathbf{H}}(s)$ et $L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))$ convergent. Soit alors x un point rationnel de U et i l'unique élément de I tel que $\mathscr{T}_i$ ait un point rationnel au-dessus de x. Il nous faut donc démontrer la formule suivante :

$$\sum_{y \in \mathscr{T}_{i_x}(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(s,y) = \mathbf{H}(s,x)^{-1} L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})). \tag{5.2.1}$$

Par définition des fonctions $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}$ et par la formule (4.1.2), le terme de gauche s'écrit également

$$\frac{1}{\# W(T_{\mathrm{NS}})} \sum_{y \in \mathscr{F}_x} \prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(s,y)^{-1} = \frac{1}{\# W(T_{\mathrm{NS}})} \sum_{y \in \mathscr{F}_x} \frac{\prod_{v \in M_k - S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(s,y)}{\mathbf{H}(s,x)}$$

où $\mathscr{F}_x$ est l'ensemble des y de $\mathscr{T}_{i_x}(k)$ vérifiant les conditions suivantes

(i) $\forall \mathfrak{P} \in M_K - S_K$, $\forall L \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$, $\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T}_i,\mathfrak{P}}(L,y) \leqslant 1$,

(ii) $\forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V)$, $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,\mathfrak{p}}(L,y) \geqslant 1$,

(iii) $(y_v)_{v\in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}_i)$.

Mais l'hypothèse faite sur $\mathbf{H}_K$ et la formule (4.1.2) entraînent que la première assertion implique la seconde. Il suffit donc de considérer la première et la dernière.

Il résulte de la convention 4.4.2 que si $v \in M_k - S$, il existe $y_{0,v} \in \mathscr{T}_{i_x}(k_v)$ tel que pour tout L de $\operatorname{Pic} V_K$ on ait

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(L, y_{0,v}) = 1. \tag{5.2.2}$$

Mais comme le morphisme

$$T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$$

est surjectif, il existe en fait $y_0 \in \mathscr{T}_{i_x}(k)$ tel que, pour tout v de $M_k - S$, l'image de y_0 dans $\mathscr{T}_{i_x}(k_v)$ vérifie (5.2.2). Considérons alors la bijection

$$\begin{array}{rcl} \theta : T_{\mathrm{NS}}(k) & \to & \mathscr{T}_{i_x}(k) \\ r & \mapsto & r.y_0. \end{array}$$

La somme $\sum_{y\in\mathscr{F}_x} \prod_{v\in M_k-S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(s,y)$ s'écrit alors

$$\sum_{\left\{ r\in T_{\mathrm{NS}}(k) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} \forall v\in M_k-S, r\in T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v) \\ ry_0\in\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) \end{array} \right. \right\}} \prod_{v\in M_k-S} \langle s,r\rangle_v$$

$$= \#W(T_{\mathrm{NS}}) \sum_{\{r\in T_{\mathrm{NS}}(k) | \forall v\in M_k-S, r\in T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)\}/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)} \prod_{v\in M_k-S} \langle s,r\rangle_v$$

où l'égalité résulte de la proposition 4.3.1. Mais par la proposition 3.1.2, on a une suite exacte

$$0 \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \to T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v\in M_k-S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \to 0$$

et donc la somme ci-dessus coïncide avec

$$\prod_{v\in M_k-S} \sum_{x\in -C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})\cap X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} (\#\mathbf{F}_v)^{\langle x,s\rangle}$$

qui par le résultat de Draxl, (cf. proposition 3.2.2) est égale à $L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))$. □

5.3. La descente pour l'analogue intégral

Théorème 5.3.1. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2.2, pour tout s appartenant à un cône ouvert de* Pic $V \otimes \mathbf{C}$, *on a la formule*

$$\sum_{i\in I} \int_{\mathscr{T}_{i\, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y)$$
$$= \#H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{V}).\tau_{\mathbf{H}}(V).\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})L_S(\omega_V^{-1}, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})).$$

Démonstration. — On fixe un élément s de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$ pour lequel $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$ est bien définie. Par définition, le terme de gauche du théorème s'écrit de la manière suivante

$$\sum_{i\in I}\int_{\mathcal{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,y)\prod_{v\in M_k-S}\mathbf{1}_{\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}\frac{1}{\sqrt{d}^{\dim\mathcal{T}_i}}\prod_{v\in M_k}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})\sqrt{d}^{\dim\mathcal{T}_i}}\sum_{i\in I}\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v))\int_{\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,x)\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(x).$$

Soit v une place de k en dehors de S, i un élément de I et x un point de $V(k_v)$. On peut alors choisir dans la fibre un point y_0 tel que

$$\forall L\in\operatorname{Pic}\overline{V},\quad \|y_0\|_v^L = 1.$$

On obtient la formule

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}_{i\,x}(k_v)\cap\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v} &= \int_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)}\left|\omega_V(r)\right|_v\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r)\\ &= \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)).L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})\end{aligned}$$

et donc

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) = \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v))L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v)).$$

En prenant le produit sur les places v en dehors de S, on obtient

$$\begin{aligned}\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) &= \left[\prod_{v\in M_k-S}L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})\right]\\ &\quad\times\left[\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v))L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})\right]\\ &\quad\times\left[\prod_{v\in M_k-S}L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v))\right].\end{aligned}$$

Soit i un élément de I et $(x_v)_{v\in S}$ un point de l'image de $\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)$. Comme, par la proposition 3.1.2 (i), le morphisme de $T_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)$ vers $(\operatorname{Pic} V)^\vee\otimes\mathbf{R}$ est

surjectif, il existe un élément y_0 de $\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)$ tel que pour tout L de $\operatorname{Pic} V$ on ait $\prod_{v\in S}\|y_0\|_v^L = 1$. On a alors la relation

$$
\begin{aligned}
&\#W(T_{\mathrm{NS}})^{-1}\int_{\prod\limits_{v\in S}\mathcal{T}_{ix_v}(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,y)\left(\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_{ix_v},v}\right)(y)\\
&\quad=\int_{\prod\limits_{v\in S}T_{\mathrm{NS}}(k_v)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)}\mathbf{1}_{\{(r_v)_{v\in S}\mid\forall\xi\in C_{\mathrm{eff}}(V),\ \prod\limits_{v\in S}|\xi(r_v)|_v\leqslant 1\}}\prod_{v\in S}\langle s-\omega_V^{-1},r_v\rangle_v\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r_v).
\end{aligned}
$$

Notons $T^1_{\mathrm{NS}}(\prod_{v\in S}k_v)$ l'ensemble

$$
\{(r_v)_{v\in S}\in\prod_{v\in S}T_{\mathrm{NS}}(k_v)\mid\forall\xi\in\operatorname{Pic} V,\ \prod_{v\in S}|\xi(r_v)|_v=1\}.
$$

Comme dans le paragraphe 3.1, on définit une mesure $\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}$ sur ce groupe. Le terme ci-dessus est alors donné par la formule

$$
\int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee}e^{-\langle s-\omega_V^{-1},y\rangle}dy.\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\left(T^1_{\mathrm{NS}}\left(\prod_{v\in S}k_v\right)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\right).
$$

On obtient donc l'égalité

$$
\begin{aligned}
\#W(T_{\mathrm{NS}})^{-1}&\int_{\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,y)\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y_v)\\
&\qquad=\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\left(T^1_{\mathrm{NS}}\left(\prod_{v\in S}k_v\right)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\right)\\
&\qquad\qquad\times\left(\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}\right)\left(\pi\left(\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Or il résulte de la proposition 3.1.2 qu'on a un isomorphisme

$$
T^1_{\mathrm{NS}}\left(\prod_{v\in S}k_v\right)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\times\prod_{v\in M_k-S}T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)\xrightarrow{\ \sim\ }T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k).
$$

En réunissant le terme obtenu pour les bonnes places à celui obtenu aux mauvaises, on obtient la formule

$$\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y) = \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}}}(T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k))\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}\Big(\pi\Big(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v)\Big)\Big).$$

Par le théorème d'Ono,

$$\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}}}(T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k)) = \#H^1(k,\operatorname{Pic}\overline{V})/\#\text{Ш}^1(k,T_{\mathrm{NS}}).$$

D'autre part si $x\in V(k)$, alors le nombre de classes d'isomorphisme de torseurs universels au-dessus de V qui ont un point adélique au-dessus de l'image de x dans $V(\boldsymbol{A}_k)$ est précisément $\text{Ш}^1(k,T_{\mathrm{NS}})$. Et il résulte de l'hypothèse (7) du paragraphe précédent que

$$\pi\Big(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v)\Big)\subset\overline{V(k)}.$$

En sommant sur les différents torseurs universels, on obtient la formule recherchée. □

5.4. Conclusion. — En définitive on obtient que, sous les hypothèses faites à la section 5.2, la question optimiste 2.6.1, à savoir la comparaison entre $\zeta_{\mathbf{H}}(s)$ et

$$\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)$$

au voisinage de ω_V^{-1} se ramène, au niveau des torseurs universels à des majorations de termes de la forme

$$\left|\sum_{y\in\mathscr{T}_i(k)}\Phi(s,y)-\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)}\Phi(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y)\right|$$

où, par le corollaire 4.2.3 et le lemme 4.4.3, $\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}$ sont des structures canoniques associées au torseur universel.

De même la conjecture de Manin raffinée (cf. [**Pe**, conjecture 2.3.1] et [**BT1**]) qui relie $n_{U,\mathbf{H}}(H)$ à

$$\alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)H(\log H)^{t-1}$$

avec $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$, peut se ramener à des majorations similaires à l'aide des fonctions de comptage

$$\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H, \mathfrak{b}, y) = \Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,S}(H, \mathfrak{b}, y) \prod_{v \in M_k - S} \Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(H, \mathfrak{b}, y)$$

avec $H \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\mathfrak{b} \in \bigoplus_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$ où, pour tout v en dehors de S, $\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,v}(H, \mathfrak{b}, y)$ est la fonction indicatrice de $b_v \mathscr{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)$ pour un élément b_v de l'ensemble $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ tel que $\log_v(b_v) = \mathfrak{b}_v$ et où $\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,S}(H, .)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble défini par

$$\begin{cases} (y_v)_{v \in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}_i), \\ \forall v \in S,\ \pi(y_v) \in U(k_v), \\ \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V),\ \prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, y_v) \geqslant 1, \\ \prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(\omega_V^{-1}, y_v) \leqslant H. \end{cases}$$

Ces réductions sont des généralisations du passage de la variété au cône épointé pour les intersections complètes lisses.

L'étape suivante dans le développement d'une hypothétique machinerie générale serait de passer d'un torseur $\mathscr{T}$ à un espace affine. Pour cela, il nous faut tout d'abord trouver un plongement de $\mathscr{T}$ dans un espace affine qui joue le même rôle que celui considéré dans le cas des variétés multihomogènes (cf. exemple 3.3.2) ou torique (cf. exemple 3.3.3).

Dans ce but, donnons-nous une famille génératrice $([L_j])_{j \in J}$ de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ provenant de $\operatorname{Pic} \overline{V}$ et qui soit invariante sous l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ et soit $\mathscr{M}(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base J. C'est un module de permutation et on a un épimorphisme naturel

$$p : \mathscr{M}(\overline{V}) \twoheadrightarrow \operatorname{Pic} \overline{V}.$$

Le fibré vectoriel $\overline{E} = \bigoplus_{j \in J} L_j^\vee$ provient d'un unique fibré E sur V et l'unique torseur $\mathscr{R}$ sous $T(\mathscr{M}(\overline{V}))$ au-dessus de V dont l'invariant $\rho(\mathscr{R})$ est p est donné comme k-forme de $\times_{V\, j \in J} L_j^\times$.

L'application p induit un morphisme de tores

$$j : T_{\mathrm{NS}} \to T(\mathscr{M}(\overline{V}))$$

et on a un morphisme de $\mathscr{T}$ vers $j_*(\mathscr{T})$ qui est isomorphe à $\mathscr{R}$. On obtient ainsi un morphisme

$$\tilde{j} : \mathscr{T} \to \mathscr{R} \subset E.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 4.2.2, on peut montrer que

$$\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap E(\boldsymbol{A}_k).$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel A obtenu par descente galoisienne à partir de

$$\overline{A} = \bigoplus_{j\in J} \Gamma(\overline{V}, L_j)^\vee.$$

On a un morphisme naturel $\mathrm{ev} : E \to A$. On suppose dans la suite que cela définit un plongement de $\mathscr{T}$ dans A. Ce plongement a l'avantage que l'action de T_{NS} sur $\mathscr{T}$ s'étend en une action sur A.

Un premier problème auquel on se heurte est, comme dans le cas des variétés toriques, la différence entre $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et $\prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k)$. Plus précisément, soit v une place finie, $x \in V(k_v)$ au-dessus duquel $\mathscr{T}$ a un point y_0. En dehors de S, on peut choisir y_0 de sorte que

$$\forall L \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \quad \|y_0\|_v^L = 1.$$

et on a un isomorphisme naturel

$$\mathscr{T}_x(k_v)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v.$$

On se donne des bases $\mathrm{s}_{i,j}$ de $\Gamma(\overline{V}, L_j)$. Quitte à augmenter S, on peut supposer que l'image de $\mathscr{T}_x(K_{\mathfrak{P}}) \cap A(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$, qui est invariante sous $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$, est donnée par

$$\{\, \xi \in X_*(T_{\mathrm{NS}}) \mid \forall j \in J,\ \langle \xi, L_j\rangle \geqslant \sup\Big(\log_{q_{\mathfrak{P}}} \big\|\mathrm{s}_{i,j}(x)\big\|^j_{\mathfrak{P}}\Big) \,\}$$

où $(L_j, (\|.\|^j_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ représente $\mathbf{H}(L_j)$ pour $j \in J$. Il s'agit d'une réunion finie de translatés de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee$ qui n'est autre que l'image de $\mathscr{T}_x(K_{\mathfrak{P}}) \cap \mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}})$. En outre le terme

$$\sup(\log_{q_{\mathfrak{P}}} \big\|\mathrm{s}_{i,j}(x)\big\|^j_{\mathfrak{P}})$$

est d'autant plus important que x est proche des points bases des faisceaux L_j, qui, dans plusieurs exemples, coïncident avec les sous-variétés accumulatrices.

Cette difficulté résolue, il faudrait alors passer de $\prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k)$ à $A(\boldsymbol{A}_k)$ et de $\mathscr{T}(k)$ à $A(k)$ ce qui devrait être réalisable en s'inspirant des travaux d'Igusa lorsque $\mathscr{T}$ est donné comme intersection complète dans A, puis majorer

sur l'analogue des arcs majeurs les différences

$$\sum_{y \in A(k)} \phi(x) - \int_{A(\boldsymbol{A}_k)} \phi$$

pour les fonctions ϕ obtenues. Toutefois il n'est pas clair a l'heure actuelle que l'on puisse obtenir des généralisations du cœur de la méthode du cercle à savoir obtenir des majorations suffisamment fines de sommes d'exponentielles.

Je tiens à remercier Per Salberger et Yuri Tschinkel pour plusieurs dicussions qui ont permis la rédaction de cet article.

Références

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[Da] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspekhi. Mat. Nauk **33** (1978), n° 2, 85–134; English transl. in Russian Math. Surveys **33** (1978), n° 2, 97–154.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.

[Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im* $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.

[Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.

[Ma] Y. I. Manin, *Problems on rational points and rational curves on algebraic varieties*, Surveys in differentiable geometry **2** (1995), 214–245.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Oda1] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.

[Oda2] ———, *Recent topics on toric varieties*, Selected papers on number theory and algebraic geometry (K. Nomizu, ed.), Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 172, AMS, Providence, 1996, pp. 77–91.

[Ono1] T. Ono, *On some arithmetic properties of linear algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), n$^{\mathrm{o}}$ 2, 266–290.

[Ono2] ———, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), n$^{\mathrm{o}}$ 1, 101–139.

[Ono3] ———, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n$^{\mathrm{o}}$ 1, 47–73.

[Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n$^{\mathrm{o}}$ 1, 101–218.

[Ro] M. Robbiani, *Rational points of bounded height on Del Pezzo surfaces of degree six*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 403–422.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Algèbre locale, multiplicités (Troisième édition)*, Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1975.

[Sk1] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n$^{\mathrm{o}}$ 3, 429–440.

[Sk2] ———, *Partial exceptional heights and descent on rational surfaces*, Unpublished text (1993).

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

1998

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

TORSEURS UNIVERSELS ET MÉTHODE DU CERCLE*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Ce texte décrit les premières étapes d'une généralisation de la méthode du cercle au cas d'une hypersurface lisse dans une variété presque de Fano.

En effet, sous certaines conditions, il est possible d'exprimer dans ce cas les deux membres d'une version raffinée de la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée de l'hypersurface en termes du torseur universel de la variété ambiante qui joue, dans ce cadre, le rôle de l'espace affine.

Abstract. — This paper presents the first steps of a generalization of the circle method for smooth hypersurfaces in almost Fano varieties.

Indeed it is possible, under some conditions, to express both sides of a refined version of Manin's conjecture on the asymptotic behavior of the number of points with bounded height on the hypersurface in terms of the universal torsor of the variety, which plays here the rôle of the affine space.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — primaire 14G05.

*Rational points on algebraic varieties, Progress in math. 199, Birkhäuser, Basel, 221–274

1. Introduction

L'objet de ce texte est le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur des variétés dont le faisceau anticanonique vérifie certaines conditions de positivité.

De nombreux progrès ont été réalisés dans la compréhension de ce comportement asymptotique. Une interprétation géométrique de la puissance et de la puissance du logarithme qui interviennent a été proposée dans les articles de Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**] et de Batyrev et Manin [**BM**]. Des descriptions adéliques de la constante ont été proposées lorsque la hauteur est associée au faisceau anticanonique dans [**Pe1**] puis dans un cadre plus général par Batyrev et Tschinkel dans [**BT3**].

Plusieurs stratégies ont été développées pour attaquer ces conjectures.

Une première famille de méthodes est basée sur des techniques d'analyse harmonique fine qui s'appliquent notamment lorsque la variété est équipée d'une action non triviale d'un groupe algébrique. Parmi les cas traités par ce type de méthodes, on peut citer celui des variétés de drapeaux généralisées étudiées dans [**FMT**] et [**Pe1**] à l'aide des travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein, le cas des variétés toriques considéré par Batyrev et Tschinkel dans [**BT1**], [**BT2**] et [**BT4**] et celui des fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisées par Strauch et Tschinkel [**ST**], ainsi que diverses compactifications de l'espace affine dues à Chambert-Loir et Tschinkel [**CLT1**], [**CLT2**].

Parallèlement des techniques de descente ont été mises au point dans ce cadre. Elles apparaissent de manière implicite dans le cas des intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^n$ et dans l'étude de quelques variétés toriques (cf. [**Pe1**] et [**Ro**]). Salberger les a rendues explicites dans [**Sal**], redémontrant ainsi en partie les résultats de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques. La méthode introduite par Salberger fut ensuite exploitée par de la Bretèche qui put, à l'aide d'outils d'analyse complexe, améliorer les estimations pour les variétés toriques [**Bre**].

Une autre famille de méthodes, issue de la méthode du cercle, qui a depuis longtemps prouvée son efficacité pour les intersections complètes dans l'espace projectif, a été tout récemment utilisée par Robbiani pour l'étude d'un cas sortant de ce cadre, à savoir celui d'une hypersurface dans $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^m$ définie par l'annulation d'une section de $\mathscr{O}(1,1)$. Bien que la variété considérée par Robbiani soit une variété de drapeaux pour laquelle la conjecture de Manin avait été démontrée, le fait qu'il ait étendu la méthode du cercle à ce cas laisse espérer que celle-ci puisse également s'appliquer à des cas où le rang du groupe de Picard n'est pas égal à un.

Le but de ce texte est d'étendre à un cadre plus général quelques étapes de la méthode du cercle en exploitant un principe de descente présenté dans [**Pe2**]. Il reste toutefois un important et difficile travail à faire concernant le cœur même de la méthode du cercle, à savoir la majoration de sommes d'exponentielle.

Le paragraphe 2 de ce texte rappelle la description conjecturale du comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Le troisième a pour objet le passage aux torseurs universels au niveau desquels le problème se décrit naturellement comme passage d'une somme à une intégrale. Dans le quatrième nous décrivons comment, dans le cas d'une hypersurface vérifiant certaines conditions, on peut passer du torseur universel de la variété ambiante à celui de la sous-variété à l'aide de formules inspirées de la formule d'inversion de Fourier.

2. Une version raffinée d'une conjecture de Manin

2.1. Variétés presque de Fano. — Nous utiliserons dans ce texte les notations suivantes :

***Notations 2.1.1.* —** Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur un anneau commutatif A et B une A-algèbre commutative, $\mathscr{X}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit de schémas $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si C est un monoïde, alors $A[C]$ désigne la A-algèbre associée. Si X est une variété lisse sur un corps E,

son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic}\, X$, son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ et son faisceau canonique ω_X. On désigne par $C_{\mathrm{eff}}(X)$ le cône des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$. On note $\overline{E}$ une clôture algébrique de E et E^s sa clôture séparable dans $\overline{E}$. On pose alors $\overline{X} = X_{\overline{E}}$ et $X^s = X_{E^s}$.

Le dual d'un module M est noté $M^\vee$.

Définition 2.1.2. — Une variété V sur un corps k de caractéristique nulle sera dite presque de Fano si elle est projective, lisse et géométriquement intègre et si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2,

(ii) le groupe de Néron-Severi géométrique, qui sous l'hypothèse (i) coïncide avec $\mathrm{Pic}\, \overline{V}$, est sans torsion,

(iii) la classe $[\omega_V^{-1}]$ de ω_V^{-1} dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ appartient à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs.

Exemple 2.1.3. — Si V est une variété de Fano, alors V est presque de Fano. En effet, par le théorème de Kodaira, la condition (i) est vérifiée, la condition (ii) résulte de [**Pe1**, lemme 1.2.1] et (iii) découle du fait que, par définition ω_V^{-1} est ample.

Exemple 2.1.4. — Si V est une variété torique projective et lisse, alors par [**Da**, corollary 7.4], les groupes $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i > 0$, et par [**Oda**, lemma 2.3] tout fibré en droites a une base de sections équivariantes sous l'action du tore et donc le cône des diviseurs effectifs dans $\mathrm{Pic}\, \overline{V} \otimes \mathbf{R}$ est engendrée par les $[D]$ où D décrit l'ensemble des sous-variétés irréductibles invariantes de codimension 1 dans $\overline{V}$. La classe $[\omega_V^{-1}]$ étant la somme de ces $[D]$ par [**Oda**, page 70, example], il est à l'intérieur du cône et la condition (iii) est vérifiée. La variété V est donc presque de Fano.

Proposition 2.1.5. — *Soit X une compactification équivariante projective et lisse d'un tore T sur $\mathbf{C}$, $L_1, \dots, L_m$ des faisceaux inversibles amples sur X et $s_1, \dots, s_m$ des sections non nulles de ces faisceaux. On note $X_T^{(1)}$ l'ensemble des sous-variétés irréductibles invariantes de codimension un de X. On suppose que* $\dim X \geqslant m + 3$, *que*

$$\left[\sum_{D \in X_T^{(1)}} D - \sum_{i=1}^{m} L_i\right] \in \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathrm{eff}}(X)}},$$

que les hypersurfaces définies par les s_i *se coupent transversalement, que leurs intersections successives sont connexes et qu'elles coupent proprement les diviseurs* D *de* $X_T^{(1)}$.

Alors la sous variété V *définie par l'annulation des* s_i *est presque de Fano. En outre, la restriction induit un isomorphisme*

$$\operatorname{Pic} X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} V$$

qui envoie $C_{\mathrm{eff}}(X)$ *dans* $C_{\mathrm{eff}}(V)$ *et la classe de* $\sum_{D \in X_T^{(1)}} D - \sum_{i=1}^m L_i$ *sur celle de* ω_V^{-1}.

Démonstration. — Nous allons démontrer par récurrence sur n que V vérifie les assertions de la proposition et que si $L = \sum_{j=1}^m \varepsilon_i L_j$ avec $\varepsilon_j \in \mathbf{Z}$ et $\varepsilon_j \leqslant 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$, alors le groupe $H^i(V, L)$ est nul si $0 < i < \dim V$.

Si $m = 0$, l'énoncé de la proposition résulte de l'exemple précédent, l'assertion de nullité pour $\mathcal{O}_V$ résulte de [**Da**, corollary 7.4] et celle pour les sommes de fibrés L_i de [**Da**, theorem 7.5.2] et du théorème de dualité de Serre (cf. [**Ha**, corollary III.7.7]).

Supposons le résultat démontré pour $m - 1$ et soit V' la sous-variété de X définie par l'annulation de $s_1, \dots s_{m-1}$. La variété V' vérifie alors les assertions ci-dessus.

La variété V est alors définie dans V' comme lieu des zéros de s_m. Par l'hypothèse de transversalité, V est lisse et étant connexe, elle est intègre. Par définition elle est projective. Par ailleurs, on a une suite exacte de faisceaux de Zariski sur V'

$$0 \to L_m^{-1} \otimes \mathcal{O}_{V'} \to \mathcal{O}_{V'} \to \mathcal{O}_V \to 0. \tag{2.1.1}$$

D'où une suite exacte longue de cohomologie (cf. [**Ha**, lemma III.2.10])

$$H^i(V', L_m^{-1}) \to H^i(V', \mathcal{O}_{V'}) \to H^i(V, \mathcal{O}_V) \to H^{i+1}(V', L_m^{-1}).$$

On obtient donc que $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ est nul pour $0 < i < \dim V = \dim V' - 1$. Comme $\dim V \geqslant 3$, cela entraîne l'assertion (i) de la définition. De même, on obtient l'annulation des groupes de cohomologie de l'hypothèse de récurrence. Par le théorème de Lefschetz classique [**Bo**, corollary, page 212] on a un isomorphisme :

$$H^2(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(V'(\mathbf{C}), \mathbf{Z}).$$

En utilisant la suite exacte de faisceaux analytiques

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_V \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_V^{\times} \to 0$$

et des théorèmes de comparaison entre géométrie algébrique et géométrie algébrique, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1(V',\mathcal{O}_{V'}^{\times}) & \xrightarrow{\sim} & H^2(V'(\mathbf{C}),\mathbf{Z}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \to & H^1(V,\mathcal{O}_V{}^{\times}) & \xrightarrow{\sim} & H^2(V(\mathbf{C}),\mathbf{Z}) & \to & 0 \end{array}$$

et on obtient que la restriction de $\operatorname{Pic} V'$ à $\operatorname{Pic} V$ est un isomorphisme.

Le cône des classes de diviseurs effectifs de X étant engendré par les classes des diviseurs D de $X_T^{(1)}$, l'assertion sur les cônes effectifs résulte de l'hypothèse sur la propreté des intersections avec ces diviseurs.

Enfin $[\omega_{V'}^{-1}] = \sum_{D\in X_T^{(1)}}[D] - \sum_{i=1}^{m-1}[L_i]$ et l'assertion correspondante pour V résulte de [**Ha**, proposition II.8.20]. □

Remarque 2.1.6. — A priori le cône des diviseurs effectifs de V pourrait être plus grand que celui de X. Toutefois, si X est de la forme $\prod_{i=1}^{t}\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n_i}$ et si $m < \inf_{1\leqslant i\leqslant t} n_i$, alors il y a égalité entre les cônes de diviseurs. En effet la formule de Künneth implique que

$$\forall L\in \operatorname{Pic} X,\quad H^i(X,L)=0 \quad \text{si} \quad 0<i<\inf_{1\leqslant i\leqslant t} n_i.$$

On obtient alors par récurrence sur m que

$$\forall L\in \operatorname{Pic} V,\quad H^i(V,L)=0 \quad \text{si} \quad 0<i<\inf_{1\leqslant i\leqslant t} n_i - m.$$

et la suite exacte (2.1.1) tensorisée par L fournit une suite exacte

$$H^0(V',L)\to H^0(V,L)\to H^1(V',L\otimes L_m^{-1})$$

ce qui implique que les deux cônes coïncident.

2.2. Hauteurs d'Arakelov. — La donnée naturelle pour construire des fonctions de comptage sur l'ensemble des points rationnels de variétés propres est une hauteur d'Arakelov dont nous allons rappeler la définition.

Notations 2.2.1. — Dans la suite, k désigne un corps de nombres, $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers, d son discriminant, M_k l'ensemble de ses places, M_f celui de ses places finies et M_∞ celui de ses places archimédiennes. Pour toute place v de k, on note k_v le complété correspondant et $|.|_v$ la norme sur k_v normalisée par

$$\forall v|p,\quad \forall x\in k_v,\quad |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si v est une place finie, $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de k_v et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel.

Définition 2.2.2. — Soit V une variété projective lisse et géométriquement intègre sur k, L un faisceau inversible sur V. Si v est une place de k, une *métrique v-adique* sur L est une application associant à un point x de $V(k_v)$ une norme $\|.\|_v$ sur $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{V,x}} k_v$ de sorte que pour toute section s de L définie sur un ouvert W de V l'application

$$x \mapsto \|\mathrm{s}(x)\|_v$$

soit continue pour la topologie v-adique.

Si v est un place finie de k, $\mathcal{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur $\mathcal{O}_v$ et $\mathcal{L}$ un modèle de L, alors on peut lui associer une métrique v-adique sur L de la manière suivante : tout point x de $V(k_v)$ définit un point $\tilde{x}$ de $\mathcal{V}(\mathcal{O}_v)$ et $\tilde{x}^*(\mathcal{L})$ fournit une $\mathcal{O}_v$-structure sur $L(x)$ dont on peut choisir un générateur y_0 ; la norme d'un élément y de L est alors donnée par la formule

$$\|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ telle qu'il existe un ensemble fini de places finies S, un modèle projectif et lisse $\mathcal{V}$ de V sur l'anneau $\mathcal{O}_S$ des S-entiers et un modèle $\mathcal{L}$ de L sur cet anneau tel que pour tout v de $M_f - S$, $\|.\|_v$ soit la métrique définie par $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{V}} \mathcal{O}_v$.

Nous appellerons *hauteur d'Arakelov* sur V la donné d'une paire

$$\mathbf{h} = (L, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$$

où L est un faisceau inversible sur V et $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ une métrique adélique sur ce fibré.

Pour toute hauteur $\mathbf{h}$ sur V et tout point rationnel x de V, la *hauteur de x relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\forall y \in L(x), \quad \mathbf{h}(x) = \prod_{v\in M_k} \|y\|_v^{-1}.$$

Remarque 2.2.3. — La formule du produit assure que le produit ci-dessus est indépendant de y.

Rappelons quelques exemples de hauteurs (cf. également [**Sal**, exemples 1.7]).

Exemple 2.2.4. — Si $\mathbf{h}_i = (L_i, (\|.\|_v^{\,i})_{v\in M_k})$ pour $i = 1$ ou 2 sont deux hauteurs d'Arakelov, leur produit tensoriel $\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2$ est $(L_1 \otimes L_2, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$ où

$$\forall v \in M_k,\ \forall x \in V(k_v),\ \forall y \in L_1(x),\ \forall z \in L_2(x),\ \|y \otimes z\|_v = \|y\|_v^1\,\|z\|_v^2.$$

On en déduit immédiatement l'égalité

$$\forall x \in V(k), \quad \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2(x) = \mathbf{h}_1(x)\mathbf{h}_2(x).$$

Exemple 2.2.5. — Soit $\mathbf{h} = (L, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$ une hauteur sur V et $\boldsymbol{f} = (f_v)_{v\in M_k}$ une famille de fonctions strictement positives sur $V(k_v)$ telle que pour presque toute place v de k la fonction f_v soit constante et égale à 1, alors

$$\boldsymbol{f}.\mathbf{h} = (L, (f_v\|.\|_v)_{v\in M_k})$$

est une hauteur sur V. Réciproquement, si $\mathbf{h}' = (L, (\|.\|'_v)_{v\in M_k})$ est une autre hauteur sur V relative au même faisceau, alors pour toute place v de k le quotient $\|.\|'_v/\|.\|_v$ définit une fonction f_v sur $V(k_v)$ qui, pour presque toute place, est constante et égale à 1. On a bien sûr $\mathbf{h}' = \boldsymbol{f}.\mathbf{h}$.

Exemple 2.2.6. — Si $\phi : V \to W$ est un morphisme de variétés projectives lisses et géométriquement intègres et $\mathbf{h} = (L, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$ une hauteur sur W alors $\phi^*(\mathbf{h})$ est la hauteur $(\phi^*L, (\|\phi(.)\|_v)_{v\in M_k})$ où l'on note également ϕ l'application induite $\phi^*L(x) \to L(\phi(x))$ pour tout x de V.

En particulier si L est un faisceau inversible très ample, il définit un morphisme

$$\phi : V \to \mathbf{P}(\Gamma(V, L)^\vee)$$

de sorte que $L = \phi^*(\mathcal{O}(1))$ et tout système de métriques sur $\mathcal{O}(1)$ induit une hauteur sur V.

Exemple 2.2.7. — Si K/k est une extension de corps de nombres, V une variété projective lisse et géométriquement intègre sur k, L un faisceau inversible sur V et $\mathbf{h}_K = (L \otimes K, (\|.\|_v)_{v\in M_K})$ une hauteur sur V_K, alors la hauteur induite $\mathbf{h} = (L, (\|.\|'_v)_{v\in M_k})$ est définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_k, \quad \forall x \in V(k_\mathfrak{p}), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|'_\mathfrak{p} = \Bigl(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \|y_\mathfrak{P}\|_\mathfrak{P}\Bigr)^{[K:k]^{-1}}.$$

Cela permet également d'associer à tout hauteur $\mathbf{h}$ relative à un faisceau inversible L sur V_K une hauteur $N_{K/k}\mathbf{h}$ relative au faisceau $N_{K/k}L$ sur V.

Exemple 2.2.8. — Soit $\mathscr{V}$ un schéma plat projectif et régulier sur $\mathcal{O}_k$ et $(\mathscr{L}, h)$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{V}$ (cf. [**BGS**, §2.1.2]), $\mathscr{L}$ désigne donc un fibré inversible sur $\mathscr{V}$ et h une forme hermitienne C^∞ sur le fibré en droites holomorphe $L_{\mathbf{C}}$ sur $\prod_{\sigma:k\to\mathbf{C}} \mathscr{V}(\mathbf{C})$ invariante sous l'action de la conjugaison.

On suppose que h s'écrit comme produit tensoriel de formes hermitiennes C^∞ que l'on notera h_σ et telles que $h_{\overline{\sigma}}$ soit la conjuguée de h_σ.

Pour toute place finie v de k, $\mathscr{L}$ induit comme ci-dessus une métrique $||.||_v$ sur $L = \mathscr{L} \otimes k$ et pour toute place archimédienne v de k, on a un plongement σ de k dans $\mathbf{C}$ et la forme hermitienne h_σ définit une métrique v-adique $||.||_v$ sur L. Par définition, $\mathbf{h} = (L, (||.||_v)_{v\in M_k})$ est une hauteur sur V, et la hauteur d'un point rationnel est donné par la formule

$$\forall x \in V(k), \quad \mathbf{h}(x) = \exp\left(\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\mathscr{L})|\overline{x})\right)$$

où $\overline{x}$ est l'adhérence de x dans $\mathscr{V}$, $\hat{c}_1(\mathscr{L})$ le caractère de Chern arithmétique de $\mathscr{L}$ (cf. [**BGS**, page 932]), $(.|.)$ l'accouplement

$$\widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathscr{V}) \times Z_*(\mathscr{V}) \to \widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k)_{\mathbf{Q}}$$

défini par Bost, Gillet et Soulé (cf. [**BGS**, §2.3]) et $\widehat{\deg}$ l'application degré sur le groupe de Chow arithmétique $\widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k)$.

En effet par [**BGS**, §3.1.2.1 et (2.1.15)],

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\mathscr{L})|\overline{x}) &= \widehat{\deg}\tilde{x}^*(\mathscr{L}) \\ &= \log(\#(\tilde{x}^*\mathscr{L}/\mathcal{O}_k y)) - \sum_{\sigma:k\to\mathbf{C}} \log h_\sigma(y,y)^{1/2}\end{aligned}$$

où $\tilde{x} : \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k \to \mathscr{V}$ est définie par x et y un élément de $\tilde{x}^*(\mathscr{L}) \subset L(x)$. En suivant les définition on obtient

$$\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\mathscr{L})|\overline{x}) = -\sum_{v\in M_k} \log ||y||_v.$$

Définition 2.2.9. — On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de hauteurs d'Arakelov quotienté par la relation d'équivalence définie par

$$(L, (||.||_v)_{v\in M_k}) \sim (L, (\lambda_v ||.||_v)_{v\in M_k})$$

pour toute famille de réels $(\lambda_v)_{v\in M_k} \in \bigoplus_{v\in M_k} \mathbf{R}_{>0}$ telle que $\prod_{v\in M_k} \lambda_v = 1$.

L'ensemble $\mathscr{H}(V)$ est un groupe pour le produit tensoriel des hauteurs, il est muni d'une structure de $\mathbf{R}_{>0}$-ensemble donnée par

$$\lambda.(L, (||.||_v)_{v\in M_k}) = (L, (\lambda_v ||.||_v)_{v\in M_k})$$

si $(\lambda_v)_{v\in M_k} \in \bigoplus_{v\in M_k} \mathbf{R}_{>0}$ vérifie $\prod_{v\in M_k} \lambda_v = \lambda$. On dispose d'un morphisme d'oubli $\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \operatorname{Pic} V$. Si $\phi : V \to W$ est un morphimes de variétés projectives, lisses et géométriquement intègres sur k, alors ϕ^* définit un morphisme $\mathscr{H}(W) \to \mathscr{H}(V)$ qui s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(W) & \longrightarrow & \mathscr{H}(V) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \operatorname{Pic}(W) & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(V). \end{array}$$

Enfin si K/k est une extension de corps de nombres on dispose d'un morphisme de norme

$$N_{K/k} : \mathscr{H}(V_K) \to \mathscr{H}(V).$$

Remarque 2.2.10. — Si x est un point rationnel et $\mathbf{h}$ une hauteur, $\mathbf{h}(x)$ ne dépend que de la classe de $\mathbf{h}$ dans $\mathscr{H}(V)$. On notera ev_x le morphisme $\mathscr{H}(V) \to \mathbf{R}_{>0}$ obtenu.

Exemple 2.2.11. — Si $V = \operatorname{Spec} k$, alors une hauteur d'Arakelov est la donnée d'un espace vectoriel L de dimension un sur k et d'une famille de normes $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_k}$ sur L telle qu'il existe une $\mathcal{O}_k$-structure de $\mathscr{L}$ de L de sorte que pour tout place finie v de k en-dehors d'un ensemble fini S, on ait

$$\forall y \in \mathscr{L}, \quad \|y\|_v = (\#(\mathcal{O}_v y/\mathscr{L} \otimes \mathcal{O}_v))^{-1}.$$

Cette description explicite montre que le morphisme $\mathrm{ev}_{\operatorname{Spec} k}$ est un isomorphisme.

Notons qu'en outre on a pour toute variété V projective lisse et géométriquement intègre sur k et tout point x de $V(k)$ un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(V) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} & \mathbf{R}_{>0} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x^*} & & \Big\| \\ \mathscr{H}(\operatorname{Spec} k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}_{>0}. \end{array}$$

Définition 2.2.12. — On appelle système de hauteurs une section de l'application composée

$$\mathscr{H}(V) \xrightarrow{\boldsymbol{o}} \operatorname{Pic} V \to \mathrm{NS}(V).$$

Un système de hauteurs $\mathbf{H}$ sur V induit un accouplement

$$\mathbf{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(k) \to \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et telle que

$$\forall L \in \mathrm{NS}(V), \quad \forall x \in V(k), \quad \mathbf{H}(L,x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

Comme l'ont souligné Batyrev et Manin [**BM**], l'existence de sous-variétés accumulatrices susceptibles d'occulter certains phénomènes globaux dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée amène à se restreindre à un ouvert non vide assez petit de la variété. On utilisera donc la définition qui suit.

Définition 2.2.13. — Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k et W un sous-espace localement fermé de V. Alors pour toute hauteur $\mathbf{h}$ sur V et tout nombre réel H strictement positif

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}.$$

Si $\mathbf{H}$ est un système de hauteurs sur V alors la fonction zêta associée est définie par

$$\forall s \in \mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}, \quad \zeta_{\mathbf{H}}(s) = \sum_{x \in W(k)} \mathbf{H}(s,x)^{-1}.$$

Remarque 2.2.14. — Si $[\boldsymbol{o}(\mathbf{h})]$ appartient à l'intérieur de $C_{\mathrm{eff}}(V)$, alors il existe un ouvert U de V tel que $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ soit fini pour tout H.

2.3. Mesure de Tamagawa. — Dans la suite V désigne une variété presque de Fano sur k. Dans ce cas toute métrique adélique sur le fibré anticanonique ω_V^{-1} définit une mesure de Tamagawa qui permet de donner un interprétation conjecturale du terme principal du nombre de points de hauteur bornée.

Notations 2.3.1. — Si X est un variété sur k, $X(\boldsymbol{A}_k)$ désigne l'espace adélique qui lui est associé. (cf. [**We**, §1]).

Pour toute place v de k, la mesure de Haar $\mathrm{d}x_v$ sur k_v est normalisée de la manière suivante :

- Si v est finie, alors $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$,
- si $k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, alors $\mathrm{d}x_v = i\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$.

Soit $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_k})$ une hauteur sur une variété presque de Fano V. En toute place v de k on lui associe la mesure borélienne $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation (cf. [**We**], [**Pe1**, §2.2.1])

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v}$$

où $x_1,\dots,x_n$ désignent des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point x de $V(k_v)$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}$ est vu comme section locale de ω_V^{-1}.

D'après [**Pe1**, lemme 2.1.1], on peut se donner un ensemble fini S de places finies et un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour toute place finie $\mathfrak{p}$ en-dehors de S, le groupe de Picard géométrique $\operatorname{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$ soit isomorphe à $\operatorname{Pic}\overline{V}$ de façon compatible aux actions des groupes de Galois et la partie l-primaire du groupe de Brauer $\operatorname{Br}(\overline{V})$ soit finie pour tout nombre premier l n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$.

Pour tout $\mathfrak{p}$ de $M_k - S$, le terme local de la fonction L associée à $\operatorname{Pic}\overline{V}$ est défini par

$$L_\mathfrak{p}(s,\operatorname{Pic}\overline{V}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1-(\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s}\operatorname{Fr}_\mathfrak{p}\mid \operatorname{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}\otimes\mathbf{Q})}$$

où $\operatorname{Fr}_\mathfrak{p}$ est le Frobenius en $\mathfrak{p}$. La fonction L globale est définie par le produit eulérien

$$L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f - S} L_\mathfrak{p}(s,\operatorname{Pic}\overline{V})$$

qui par [**Pe1**, lemme 2.2.5] converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$ en 1.

Les facteurs de convergence $(\lambda_v)_{v\in M_k}$ pour la mesure de Tamagawa sont définis par

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V}) \text{ si } v\in M_f - S\\ 1 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Les conjectures de Weil montrées par Deligne impliquent la convergence de la mesure adélique $\prod_{v\in M_k}\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ (cf. [**Pe1**, proposition 2.2.2]).

Définition 2.3.2. — Avec les notation qui précèdent, la *mesure de Tamagawa associée à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{h} = \lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}}\prod_{v\in M_k}\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}.$$

Remarque 2.3.3. — Par construction elle est indépendante du choix de S et ne dépend que de l'image de $\mathbf{h}$ dans $\mathscr{H}(V)$.

Exemple 2.3.4. — Si $\boldsymbol{f} = (f_v)_{v\in M_k}$ est une famille de fonction comme dans l'exemple 2.2.5, alors

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}.\mathbf{h}} = \Big(\prod_{v\in M_k} f_v\Big)\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}.$$

Notation 2.3.5. — On pose $\tau_{\mathbf{h}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}\big(\overline{V(k)}\big)$ où $\overline{V(k)}$ désigne l'adhérence des points rationnels de V dans $V(\boldsymbol{A}_k)$.

2.4. Enoncé d'une question. — Pour énoncer notre question qui est une version raffinée d'une conjecture de Manin [**BM**, conjecture C′], nous utiliserons la notion d'accumulation qui suit :

Définition 2.4.1. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur d'Arakelov sur V telle que $[\boldsymbol{o}(\mathbf{h})]$ appartienne à l'intérieur du cône effectif. Un fermé irréductible strict F de V est dit modérément accumulateur pour $\mathbf{h}$ si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{H\to+\infty} \frac{n_{W,\mathbf{h}}(H)}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} > 0.$$

Nous renvoyons à [**BT3**] et [**Pe2**, §2.4] pour des exemples de telles sous-variétés.

Notation 2.4.2. — Si V est une variété presque de Fano, on considère l'hyperplan affine $\mathscr{P}$ de $\mathrm{NS}(V)^\vee \otimes \mathbf{R}$ d'équation $\langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1$. Cet hyperplan est muni d'une mesure canonique θ définie par ω_V^{-1} (cf. [**Pe1**, page 120]). On note $C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ le cône dual de $C_{\mathrm{eff}}(V)$ défini par

$$C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{y \in \mathrm{NS}(V)^\vee \otimes \mathbf{R} \mid \forall x \in C_{\mathrm{eff}}(V), \langle x, y\rangle > 0\}$$

et on pose

$$\alpha(V) = \theta(C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \cap \mathscr{P}).$$

On note également

$$\beta(V) = \# H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}).$$

Remarque 2.4.3. — La constante $\alpha(V)$ définie par Batyrev et Tschinkel [**BT1**] est obtenue en multipliant par $(t-1)!$ celle considérée ici.

Question 2.4.4. — *Soit V une variété presque de Fano sur k et $\mathbf{h}$ une hauteur sur V définie par une métrique adélique sur ω_V^{-1}. On suppose que $V(k)$ est dense pour la topologie de Zariski et que le complémentaire U dans V des sous-variétés modérément*

accumulatrices est un ouvert de Zariski non vide de V. A quelle condition a-t-on l'équivalence

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \sim \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)H(\log H)^{t-1} \tag{2.4.1}$$

lorsque H tend vers l'infini ?

Remarques 2.4.5. — (i) L'introduction du facteur $\beta(V)$ est due à Batyrev et Tschinkel [**BT1**].

(ii) L'équivalence (2.4.1) est compatible avec le produit de variétés [**FMT**, §1.2, proposition], [**Pe1**, corollaire 4.3].

(iii) Elle est vérifiée dans les cas suivants :

- Si V est une intersection complète lisse dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ définie par m équations homogènes de degré $d \geqslant 2$ si
$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$$
[**Bir**], [**Pe1**, proposition 5.5.3],
- Si V est une variété de drapeaux généralisée [**FMT**], [**Pe1**, théorèmes 6.1.1 et 6.2.2],
- Si V est une variété torique lisse [**Pe1**, §8-11], [**BT1**], [**BT4**], [**Sal**],
- pour certains fibrés en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisées [**ST**].

(iv) Comme me l'a signalé Tschinkel, la question 2.6.1 dans [**Pe2**] est mal posée. En général on peut seulement espérer que la fonction

$$s \mapsto \zeta_{\mathbf{H}}(s\omega_V^{-1})/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}((s-1)\omega_V^{-1})$$

s'étende en une fonction holomorphe au voisinage de 1 et prenne la valeur $\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)$ en ce point.

3. Passage au torseur universel

L'objectif de ce paragraphe est de relever au torseur universel chaque coté de (2.4.1). C'est l'objet des propositions 3.4.2 et 3.5.2.

3.1. Structures sur les torseurs universels. — Nous allons commencer par rappeler la définition des torseurs universels qui est due à Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS1**] [**CTS3**].

Définition 3.1.1. — Soient G un groupe algébrique linéaire sur un corps E et Y une variété sur E. Un *G-torseur au-dessus de Y* est la donnée d'un morphisme

fidèlement plat $\pi : X \to Y$ au-dessus de E et d'une action $\mu : X \times G \to X$ de G sur X au-dessus de Y telle que l'application

$$(g, x) \mapsto (gx, x)$$

définisse un isomorphisme de variétés de $G \times_E X$ sur $X \times_Y X$.

Par [**Mi**, théorème III.3.9 et corollaire III.4.7], si G est lisse et abélien, les classes d'isomorphismes de G-torseurs au-dessus de Y sont classifiées par le groupe de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(Y, G)$ et par [**CTS3**, (2.0.2) et proposition 2.2.8], si T est un tore sur E, c'est-à-dire une E-forme de $\mathbf{G}_m^n$ et si X est une variété propre, lisse et géométriquement intègre ayant un point rationnel sur E, alors on dispose d'une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(E, T) \to H^1_{\text{ét}}(X, T) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E^s/E)}(X^*(T), \mathrm{Pic}\, X_{E^s}) \to 0$$

où $X^*(T)$ désigne le groupe des caractères de T^s et où pour tout torseur $\mathscr{T}$ et tout caractère ξ de T, $\rho(\mathscr{T})(\xi)$ est la classe du $\mathbf{G}_m$-torseur $\xi_*(\mathscr{T})$ dans $\mathrm{Pic}\, X_{E^s}$ qui est isomorphe à $H^1_{\text{ét}}(X_{E^s}, \mathbf{G}_m)$.

Soit X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps E. On suppose que le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}\, X^s$ est de type fini et sans torsion. On note alors T_{NS} le tore dont le groupe de caractère est le $\mathrm{Gal}(E^s/E)$-module $\mathrm{Pic}\, X^s$. Un *torseur universel* pour X est un T_{NS}-torseur $\mathscr{T}$ au-dessus de X dont l'invariant $\rho(\mathscr{T})$ coïncide avec $\mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(X^s)}$.

Remarque 3.1.2. — Nous renvoyons à [**CTS3**, §2.5, §2.6] et [**Pe2**, §3.3] pour des exemples de torseurs universels. Rappelons seulement qu'il résulte de [**CTS1**, proposition 6] et de [**Sal**, §8] qu'un torseur universel au-dessus d'une compactification équivariante lisse d'un tore T est un ouvert d'un espace affine.

Si Y est une intersection complète lisse dans une variété presque de Fano X ayant un point rationnel et si la restriction de $\mathrm{Pic}\, X^s$ à $\mathrm{Pic}\, Y^s$ est un isomorphisme, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1(E, T_{\mathrm{NS}}) & \to & H^1_{\text{ét}}(X, T_{\mathrm{NS}}) & \to & \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E^s/E)}(\mathrm{Pic}\, X^s) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle j^*} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} & & \\
0 & \to & H^1(E, T_{\mathrm{NS}}) & \to & H^1_{\text{ét}}(Y, T_{\mathrm{NS}}) & \to & \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(E^s/E)}(\mathrm{Pic}\, Y^s) & \to & 0
\end{array}$$

où j désigne le plongement de Y dans X. Il en résulte que les torseurs universels au-dessus de Y sont obtenus en prenant l'image inverse de Y dans les torseurs universels au-dessus de X. On dispose donc de diagrammes commutatifs de la

forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_Y & \longrightarrow & \mathscr{T}_X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

où l'application du haut est une immersion fermée de T_{NS}-ensembles. Si, en outre, X est une compactification équivariante lisse d'un tore, alors $\mathscr{T}_X$ se plonge comme ouvert dans un espace affine $\mathbf{A}_E^N$ et l'action de T_{NS} s'étend à cet espace affine.

A chaque torseur universel au-dessus d'une variété presque de Fano sont associées deux structures canoniques, à savoir un espace d'adèles et une mesure sur cet espace. Ces structures ont été définies dans [**Pe2**, §4.2 et 4.4] mais nous allons maintenant en redonner une construction intrinsèque.

Notation 3.1.3. — On pose

$$\delta(V) = \inf\{\langle x, \omega_V^{-1}\rangle, x \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee \cap \operatorname{Pic} \overline{V}^\vee - \{0\}\}.$$

Hypothèses 3.1.4. — Dans la suite V désigne une variété presque de Fano sur k dont le cône des diviseurs effectifs $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est un cône polyédral rationnel de $\operatorname{Pic} \overline{V} \otimes \mathbf{R}$. On suppose en outre que $\delta(V) > 1$.

On note U une ouvert non vide de V.

Remarque 3.1.5. — La condition (iii) dans la définition 2.1.2 assure que pour toute variété presque de Fano $\delta(V) > 0$ et donc $\delta(V) \geqslant 1$.

Exemple 3.1.6. — Si V est une intersection complète lisse dans $\mathbf{P}^N$ définie par m équations $f_1, \ldots, f_m$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m$, alors

$$\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V\left(N + 1 - \sum_{i=1}^m d_i\right)$$

et la condition s'écrit $\delta(V) - 1 = N - \sum_{i=1}^m d_i > 0$, qui est exactement l'hypothèse faite dans [**Pe1**, page 131]. La raison pour laquelle cette condition apparaît dans [**Pe1**] est exactement la même qu'ici : elle assure la convergence de sommations liées à la formule d'inversion de Möbius.

Exemple 3.1.7. — Si V est une compactification équivariante lisse d'un tore T sur k et $\overline{V}_T^{(1)}$ désigne l'ensemble des sous-variétés irréductibles invariantes de

codimension un de $\overline{V}$, on a une suite exacte canonique

$$0 \to X^*(T) \xrightarrow{j} \bigoplus_{D \in \overline{V}^{(1)}_T} \mathbf{Z}D \xrightarrow{\pi} \operatorname{Pic} \overline{V} \to 0 \tag{3.1.1}$$

où $X^*(T)$ désigne le groupe des $\overline{k}$-caractères de T ; le cône $C_{\text{eff}}(\overline{V})$ est engendré par les $\pi(D)$ pour $D \in \overline{V}^{(1)}_T$ et

$$\omega_V^{-1} = \sum_{D \in \overline{V}^{(1)}_T} \pi(D).$$

Supposons qu'il existe λ de $C_{\text{eff}}(\overline{V})^\vee \cap \operatorname{Pic} \overline{V}^\vee - \{0\}$ vérifiant $\langle \lambda, \omega_V^{-1} \rangle = 1$. On a alors

$$\left\langle \lambda, \sum_{D \in \overline{V}^{(1)}_T} \pi(D) \right\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall D \in \overline{V}^{(1)}_T,\ \langle \lambda, \pi(D) \rangle \geqslant 0$$

et donc il existe $D_0 \in \overline{V}^{(1)}_D$ tel que

$$\langle \lambda, \pi(D) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } D = D_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on considère la suite exacte duale de (3.1.1),

$$0 \to \operatorname{Pic} \overline{V}^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} \bigoplus_{P \in \overline{V}^{(1)}_T} \mathbf{Z}D^\vee \xrightarrow{j^\vee} X^*(T)^\vee \to 0,$$

on obtient que $D_0^\vee = \pi^\vee(\lambda)$ et donc $D_0^\vee \in \operatorname{Ker} j^\vee$. Mais il résulte de [**Da**, §6] que, par définition de j, l'application $j^\vee$ est non nulle en D_0, ce qui est contradictoire. Par conséquent les variétés toriques projectives et lisses vérifient les conditions ci-dessus.

Exemple 3.1.8. — Si V est le surface obtenue en éclatant quatre points en position générale sur $\mathbf{P}^2_k$, alors

$$\operatorname{Pic} \overline{V} = \mathbf{Z}\Lambda \oplus \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbf{Z}E_i$$

où on note Λ le relevé strict d'une droite de $\mathbf{P}^2_k$ et E_i les diviseurs obtenus par éclatement. Le cône effectif est engendré par les diviseurs $F_{i,5} = E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$

et $F_{k,l} = \Lambda - E_i - E_j$ pour $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ et le faisceau canonique est donné par

$$\omega_V^{-1} = 3\Lambda - \sum_{i=1}^{4} E_i = 2F_{1,2} + F_{3,4} + F_{3,5} + F_{4,5}.$$

Comme le groupe des automorphismes de $\overline{V}$ agit transitivement sur les diviseurs $F_{i,j}$, on obtient que pour tout i, j avec $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, $\omega_V^{-1} - 2F_{i,j}$ appartient au cône effectif. Par conséquent cette surface vérifie également le condition précédente.

Notation 3.1.9. — On note $\mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k}$ le schéma affine

$$\mathrm{Spec}(\overline{k}[-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap X^*(T_{\mathrm{NS}})]^{\mathscr{G}})$$

où $\mathscr{G}$ désigne le groupe de Galois absolu de k. Pour tout torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus de V, on note $\widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ le produit contracté

$$\mathscr{T} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k}.$$

On dispose d'une immersion ouverte $\mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$, l'action de T_{NS} s'étend à $\widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ et on a une fibration $\widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})} \to V$ en variétés toriques affines géométriquement isomorphes à la variété $\mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),k}$.

On appelle espace adélique associé à $\mathscr{T}$ et $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ l'intersection

$$\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \Big(\prod_{v \in M_k} \mathscr{T}(k_v)\Big) \cap \widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$$

qui peut être explicitement décrit comme produit restreint des $\mathscr{T}(k_v)$ (cf. également [**Pe2**, §4.2]).

Nous allons maintenant démontrer la trivialité de $\omega_{\mathscr{T}}$.

Lemme 3.1.10. — *Si Y est une variété lisse sur un corps algébriquement clos E et si $\pi : X \to Y$ est un T-torseur où T est un tore, alors il existe un isomorphisme*

$$\omega_X \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega_Y).$$

En outre cet isomorphisme est canonique au signe près.

Remarque 3.1.11. — Ce lemme est en fait un généralisation facile de l'existence d'une forme volume naturelle, bien définie, au signe près, sur le tore T.

Démonstration. — Soit $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant t}$ une base de $X^*(T)$. Comme E est algébriquement clos, cette base induit un isomorphisme de T sur $\mathbf{G}_m^t$. Les classes d'isomorphismes de T-torseurs sur Y sont classifiés par

$$H^1_{\text{ét}}(Y,T) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{G}_m)^t \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{Zar}}(Y,\mathbf{G}_m)^t.$$

Par conséquent π est localement triviale pour la topologie de Zariski. Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de Y sur lequel π se trivialise, c'est-à-dire sur lequel il existe une section $s : U \to X$ de π, l'isomorphisme correspondant $\phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times T$ étant caractérisé par

$$\phi \circ s(y) = (y, e).$$

Soit $X_i = \xi_i \circ \phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{G}_m$. On a donc que X_i appartient à $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)^\times$. Alors, par [**Ha**, remarque 8.9.2 et exemple 8.11.1] la famille $(\frac{\mathrm{d}X_i}{X_i})_{1\leqslant i\leqslant t}$ est une base de $\Omega^1_{X/Y}$ en tant que $\mathcal{O}_X$ module et donc $\wedge_{i=1}^t \frac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ fournit une trivialisation de $\det(\Omega^1_{X/Y})$ sur $\pi^{-1}(U)$. D'autre part on a une suite exacte de fibrés vectoriels (cf. [**Ha**, proposition 8.11])

$$0 \to \pi^*\Omega^1_{Y/E} \xrightarrow{j} \Omega^1_{X/E} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0,$$

où l'injectivité résulte de l'hypothèse de lissité. Par conséquent on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/E} \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega_{Y/E}) \otimes \det(\Omega^1_{X/Y}).$$

Donc $\wedge_{i=1}^t \frac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ fournit un isomorphisme

$$\omega_{X/E|\pi^{-1}(U)} \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega_{Y/E})_{|\pi^{-1}(U)}. \tag{3.1.2}$$

Si s' est une autre section trivialisante de π et $X_i' : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{G}_m$ les fonctions correspondantes, on a alors $X_i' = a_i X_i$ où a_i est définie par

$$a_i = X_i' \circ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times = A^\times.$$

On obtient que

$$\frac{\mathrm{d}X_i'}{X_i'} = \frac{\mathrm{d}a_iX_i}{a_iX_i} = \frac{(\mathrm{d}a_i)X_i + a_i(\mathrm{d}X_i)}{a_iX_i} = \frac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$$

puisque $da_i = 0$ dans $\Omega^1_{B/A}$ où $B = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$. Donc l'isomorphisme (3.1.2) est indépendant de la section choisie et, par recollement, définit un isomorphisme

$$\omega_{X/E} \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega_{Y/E})$$

Si $(\xi'_i)_{1\leqslant i\leqslant t}$ est une autre base de $X^*(T)$, alors on note $M \in GL_n(\mathbf{Z})$ la matrice de changement de base. La section $\wedge_{i=1}^t \frac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ sera remplacée par $\det(M) \wedge_{i=1}^t \frac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ ce qui montre qu'au signe près l'isomorphisme est indépendant de la base choisie. □

Lemme 3.1.12. — *Avec les notations ci-dessus, le fibré canonique $\omega_{\mathcal{T}}$ est trivial.*

Démonstration. — On a une suite exacte

$$0 \to H^1(k, \overline{k}[\mathcal{T}]^\times) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{T}})$$

Mais il découle de [**CTS3**, proposition 2.1.1] que

$$\Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^\times) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V^\times) = k^\times.$$

Et, par le théorème d'Hilbert 90, $\mathrm{Pic}(\mathcal{T})$ s'injecte dans $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{T}})$ et il suffit de montrer le résultat sur $\overline{k}$. Mais par le lemme précédent, on a un isomorphisme

$$\omega_{\overline{\mathcal{T}}} \xrightarrow{\sim} \pi^*(\omega_{\overline{V}}).$$

En appliquant à nouveau [**CTS3**, proposition 2.1.1], l'application π^* de $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ à $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{T}})$ est triviale et, par conséquent, $\omega_{\overline{\mathcal{T}}}$ est triviale. □

Notation 3.1.13. — Par conséquent, il existe une section $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ de $\omega_{\mathcal{T}}$ partout non nulle et, comme $\Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^\times) = k^\times$, cette section est unique à une constante multiplicative près. Par [**We**, §2] cette section $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ définit pour toute place v de k une mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ sur $\mathcal{T}(k_v)$.

Le résultat suivant est annoncé dans [**Pe2**, remarque 4.4.4].

Lemme 3.1.14. — *Avec les hypothèses ci-dessus, si $\mathcal{T}$ a un point rationnel, le produit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ converge et coïncide avec la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}$ définie dans* [**Pe2**, définition 4.4.3].

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'on peut choisir la section $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ de sorte que la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ coïncide avec celle définie dans [**Pe2**, notations 4.4.1]. Or, par définition, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ est localement donnée par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v} = \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \breve{\omega}_{\mathcal{T}} \right\rangle \right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{N,v}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ désignent des coordonnés locales analytiques au voisinage d'un point x de $V(k_v)$.

D'un autre coté, la mesure $\boldsymbol{\omega}'_{\mathcal{T},v}$ définie par [**Pe2**, notations 4.4.1] est construite de la manière suivante : on note $\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}$ la mesure définie par la forme différentielle canonique $\breve{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}}$ sur T_{NS} et on se donne un morphisme $\psi_{\omega_V^{-1}}$ de $\mathcal{T}$ dans ω_V^{-1} dont l'image ne rencontre pas la section nulle et qui est compatible avec le morphisme de tore de $T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$ induit par l'injection $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} V$ envoyant 1 sur la classe de ω_V^{-1}. Pour tout point x de $V(k_v)$, on considère sur la fibre $\mathcal{T}_x(k_v)$ la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}$ donnée par

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(r)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(r) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} f(r.y) \left\| \psi_{\omega_V^{-1}}(r.y) \right\|_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r)$$

où y est un point arbitraire de $\mathcal{T}_x(k_v)$. La mesure $\boldsymbol{\omega}'_{\mathcal{T},v}$ est alors définie par la relation

$$\int_{\mathcal{T}(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}'_{\mathcal{T},v}(y) = \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y).$$

Mais, par la démonstration du lemme 3.1.10, $\breve{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}}$ fournit une trivialisation $\tilde{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}}$ du faisceau $\det(\Omega^1_{\mathcal{T}/V})$ et donc un isomorphisme $\omega_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} \pi^*\omega_V$. Par conséquent, $\psi^{\vee}_{\omega_V^{-1}} : \mathcal{T} \to \omega_V$ fournit une section partout non nulle de $\omega_{\mathcal{T}}$, qu'on peut supposer égale à $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$. D'autre part, on peut choisir des coordonnés locales $x_1, \dots, x_n$ sur un ouvert W de $V(k_v)$ sur lequel $\mathcal{T}$ se trivialise et fixer cette trivialisation

$$\mathcal{T}(k_v)_{|W} \xrightarrow{\sim} W \times T_{\mathrm{NS}}(k_v).$$

Des coordonnées locales $x_{n+1}, \dots, x_N$ sur $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ fournissent alors des coordonnées locales sur $\mathcal{T}(k_v)$. On a alors les relations

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}'_{\mathcal{T},v} &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \|\psi_{\omega_V^{-1}}(x_1, \dots, x_N)\|_v^{-1} \\
&\qquad \times \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \breve{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}} \right\rangle \right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{N,v} \\
&= \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \psi^{\vee}_{\omega_V^{-1}}(x_1, \dots, x_N) \otimes \tilde{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}}(x_1, \dots, x_N) \right\rangle \right|_v \\
&\qquad \times \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{N,v} \\
&= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}. \quad \square
\end{aligned}$$

Définition 3.1.15. — La mesure

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}} = \prod_{v \in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$$

est, par la formule du produit, indépendante du choix de $\breve{\omega}_{\mathscr{T}}$. On l'appelle *mesure canonique de* $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$.

Exemple 3.1.16. — Si V est une intersection complète dans une variété X, définie par l'annulation de sections $\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_m$ de fibrés en droites $L_1, \dots, L_m$ de sorte que la restriction donne un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{V})$$

et que X et V vérifient la convention 3.1.4 et si V a un point rationnel, alors par la remarque 3.1.2, un torseur universel $\mathscr{T}_V$ est l'image inverse de V dans un torseur universel $\pi : \mathscr{T}_X \to X$. Comme les faisceaux inversibles $\pi^*(L_i)$ sont triviaux pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathscr{T}_V$ est donc défini dans $\mathscr{T}_X$ par l'annulation de m fonctions $f_1, \dots, f_m$ qui vérifient

$$\forall y \in \mathscr{T}_X(\overline{k}), \quad \forall t \in T_{\mathrm{NS}}(\overline{k}), \quad f_i(t.y) = [L_i](t) f_i(y),$$

où $[L_i] \in \mathrm{Pic}\,\overline{V} = X^*(T_{\mathrm{NS}})$. Si $\breve{\omega}_{\mathscr{T}_X}$ est une trivialisation de $\omega_{\mathscr{T}_X}$, On dispose alors d'une forme différentielle de Leray $\breve{\omega}_{\mathrm{L},\mathscr{T}_V}$ section de $\omega_{\mathscr{T}_V}$ et définie par la relation

$$\forall y \in \mathscr{T}_V(\overline{k}), \quad \breve{\omega}_{\mathrm{L},\mathscr{T}_V}(y) \wedge \boldsymbol{f}^* \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \mathrm{d}x_i \right)(y) = \breve{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y).$$

Cette forme différentielle est une section partout non nulle de $\omega_{\mathscr{T}_V}$ on peut donc poser $\breve{\omega}_{\mathscr{T}_V} = \breve{\omega}_{\mathrm{L},\mathscr{T}_V}$.

Si, en outre, X est une compactification projective lisse d'un tore T, alors $\mathscr{T}_X$ est un ouvert d'un espace affine $\mathbf{A}_k^N$ et on peut prendre

$$\breve{\omega}_{\mathscr{T}_X} = \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_N.$$

La forme pour $\mathscr{T}_V$ est alors donnée localement, au signe près, par l'expression explicite

$$\breve{\omega}_{\mathrm{L},\mathscr{T}_V}(x) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{l_j}}(x) \right)^{-1}_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \mathrm{d}x_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_{l_1}} \wedge \dots \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_{l_m}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_N$$

pour $1 \leqslant l_1 < \dots < l_m \leqslant N$.

3.2. Fonctions de comptage. — Nous souhaitons maintenant expliciter et démontrer la description en termes des torseurs universels de la formule asymptotique (2.4.1) telle qu'elle est annoncée dans [**Pe2**, §5.4].

Le passage au torseur universel nécessite la construction d'un domaine fondamental dans le produit $\prod_{v\in S}\mathscr{T}(k_v)$ sous l'action de $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)$, qui permettra en fait de construire un domaine fondamental de $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ sous l'action de $T_{\mathrm{NS}}(k)$. Nous allons rappeler la construction d'un tel domaine donnée dans [**Pe2**].

On peut rapprocher cette construction du lien entre systèmes de métriques et sections des applications quotients

$$\mathscr{T}(\boldsymbol{A}_k)/K_{T_{\mathrm{NS}}} \to V(\boldsymbol{A}_k),$$

où $K_{T_{\mathrm{NS}}}$ est le sous-groupe maximal de $T_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)$, indiquée par Salberger [**Sal**, page 94].

Notations 3.2.1. — Pour tout tore T sur k, on note $X_*(T)$ le $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-réseau dual de $X^*(T)$ et pour tout place v de k, $X_*(T)_v$ le groupe $X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{k_v}/k_v)}$. En outre $T(\mathcal{O}_v)$ désigne le sous-groupe compact maximal de $T(k_v)$ et on pose

$$K_T = \prod_{v\in M_k} T(\mathcal{O}_v) \quad \text{et} \quad W(T) = K_T \cap T(k).$$

Le groupe $W(T)$ est le groupe fini des éléments de torsion dans $T(k)$. On dispose d'une injection canonique

$$\log_v : T(k_v)/T(\mathcal{O}_v) \to X_*(T)_v \otimes \mathbf{R}.$$

Quitte à augmenter l'ensemble des mauvaises places S, on peut supposer qu'il contient les places archimédiennes et les places ramifiées dans une extension galoisienne fixée K/k qui déploie le tore T_{NS}. Par [**Ono1**, theorem 4] et [**Ono2**, §3], on peut en outre supposer que l'application naturelle

$$T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$$

est surjective et qu'on a une suite exacte

$$0 \to W(T_{\mathrm{NS}}) \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\log_S} \prod_{v\in S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \otimes \mathbf{R}$$

où $\log_S$ est induite par les applications $\log_v$ pour $v \in S$. En outre l'image M de $\log_S$ est un réseau dans le noyau du morphisme

$$\prod_{v \in S} X^*(T_{\mathrm{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R} \to X^*(T_{\mathrm{NS}})_k^\vee \otimes \mathbf{R}$$

où $X^*(T_{\mathrm{NS}})_k = X^*(T_{\mathrm{NS}})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$. On fixe une base de M et on note Δ le domaine fondamental correspondant de M dans ce noyau et pr une projection du groupe de gauche sur ce noyau.

On se donne alors un système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur K et on note $\mathbf{H}$ le système de hauteurs défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(V) & \xrightarrow{[K:k]\mathbf{H}} & \mathscr{H}(V) \\ \big\downarrow & & \big\uparrow N_{K/k} \\ \mathrm{NS}(V_K) & \xrightarrow{\mathbf{H}_K} & \mathscr{H}(V_K). \end{array}$$

On suppose en outre que $\mathbf{h} = \mathbf{H}([\omega_V^{-1}])$ et que

$$\forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V) \cap \operatorname{Pic} V, \quad \forall x \in V(k), \quad \mathbf{H}(L, x) \geqslant 1. \tag{3.2.1}$$

Soit $\mathscr{T}$ un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel y_0. Si L est un fibré en droites sur V_K, $L^\times$ désigne le complémentaire de la section nulle dans L. Le morphisme $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} V_K$ envoyant 1 sur la classe de L induit un morphisme $\phi_L : T_{\mathrm{NS}K} \to \mathbf{G}_{m,K}$ et $\phi_{L*}(\mathscr{T})$ est isomorphe à $L^\times$. On note $\psi_L : \mathscr{T} \to L$ un morphisme partout non nul obtenu de cette manière. On fixe une place $\mathfrak{p}_0$ de k, et on suppose que la hauteur $(L, (\|.\|_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in M_K})$ représente $\mathbf{H}_K([L])$, on note alors

$$\forall \mathfrak{P} \in M_K,\ \forall y \in \mathscr{T}(K_{\mathfrak{P}}),\ \|y\|_{\mathfrak{P}}^L = \begin{cases} \dfrac{\|\psi_L(y)\|_{\mathfrak{P}}}{\|\psi_L(y_0)\|_{\mathfrak{P}}} \text{ si } \mathfrak{P} \not| \mathfrak{p}_0 \\ \dfrac{\|\psi_L(y)\|_{\mathfrak{P}}}{\|\psi_L(y_0)\|_{\mathfrak{P}}} \mathbf{H}_K(L, \pi(y_0))^{\frac{[K_{\mathfrak{P}}:k_{\mathfrak{p}_0}]}{[K:k]}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions $\|.\|_{\mathfrak{P}}^L$ ne dépendent que de $\mathbf{H}_K([L])$, de y_0 et de $\mathfrak{p}_0$. Elles induisent des fonctions $\|.\|_v^L$ pour toute place v de k et tout L de $\operatorname{Pic} V_v$. On obtient des fonctions

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v} : \mathscr{T}(k_v) \to (\operatorname{Pic} V_v)^\vee \otimes \mathbf{R}$$

caractérisées par les relations

$$\forall y \in \mathscr{T}(k_v), \quad \forall L \in \operatorname{Pic} V_v, \quad \|y\|_v^L = q_v^{-\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y)(L)}$$

où $q_v = \#\mathbf{F}_v$ si $v \in M_f$, $q_v = e$ si k_v est isomorphe à $\mathbf{R}$ et $q_v = e^2$ sinon.

On considère alors

$$\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \left\{ y \in \prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v) \,\middle|\, \operatorname{pr}\Big((\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y_v))_{v\in S}\Big) \in \Delta \right\} \tag{3.2.2}$$

qui, par [**Pe2**, proposition 4.3.1] est, sous réserve d'une augmentation de S, un domaine fondamental de $\prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v)$ sous $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)/W(T_{\mathrm{NS}})$.

Nous pouvons maintenant définir les fonctions de comptage.

Notations 3.2.2. — Quitte à agrandir S, on peut fixer un modèle lisse $\widehat{\mathscr{T}}$ de $\widehat{\mathscr{T}}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$. Pour toute place $\mathfrak{p}$ de k en-dehors de S, on note

$$\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = \widehat{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \cap \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}).$$

et on considère

$$\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),S}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v) \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

Pour tout élément $\mathfrak{b}$ de $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_{\mathfrak{p}}$, on note $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ la composante de $\mathfrak{b}$ dans $X_*(T_{\mathrm{NS}})_{\mathfrak{p}}$ et on pose

$$T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) = \{ t \in T_{\mathrm{NS}}(k_{\mathfrak{p}}) \mid \forall y \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} V_{\mathfrak{p}},\ v_{\mathfrak{p}}(y(t)) \leqslant \langle y, \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \rangle \}$$

Notons que

$$T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), 0).T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) = T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$$

et si $b_{\mathfrak{p}} \in T_{\mathrm{NS}}(k_{\mathfrak{p}})$ est tel que $\log_{\mathfrak{p}}(b_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$, alors

$$T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) = b_{\mathfrak{p}} T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), 0)$$

et

$$T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}).\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = b_{\mathfrak{p}}.\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

En réalité les $T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ vont jouer le rôle d'idéaux dans notre cadre. On considère alors

$$\mathfrak{b}.\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),S}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in S} \mathscr{T}(k_v). \prod_{\mathfrak{p}\notin S} T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

La fonction de comptage sur le torseur universel $\mathscr{T}$ associée au système de hauteurs $\mathbf{H}_K$, au nombre réel positif H et à l'élément $\mathfrak{b}$ de $\bigoplus_{v\in M_k-S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$ est alors la fonction $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}(H,\mathfrak{b},.)$ indicatrice de l'ensemble des $\boldsymbol{y}=(y_v)_{v\in M_k}$ de $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ vérifiant les conditions qui suivent :

$$\forall v\in S,\quad \pi(y_v)\in U(k_v), \tag{3.2.3}$$

$$(y_v)_{v\in S}\in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}), \tag{3.2.4}$$

$$\forall L\in C_{\mathrm{eff}}(V),\quad \prod_{v\in S}\|y_v\|_v^L\leqslant 1, \tag{3.2.5}$$

$$\prod_{v\in S}\left(\|y_v\|_v^{\omega_V^{-1}}\right)^{-1}\leqslant H, \tag{3.2.6}$$

$$\boldsymbol{y}\in \mathfrak{b}.\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),S}(\boldsymbol{A}_k). \tag{3.2.7}$$

3.3. Fonctions de Möbius. — Nous aurons besoin dans le prochain paragraphe de fonctions de Möbius que nous allons maintenant définir et étudier.

Notations 3.3.1. — Soit M un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini et $C\subset M\otimes\mathbf{R}$ un cône polyédral rationnel strictement convexe, c'est-à-dire de la forme

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbf{R}_{\geqslant 0}m_i$$

avec $m_i\in M$ et tel que $C\cap -C=\{0\}$. Si R est un anneau commutatif, on note $R[[C]]$ (respectivement $R((C))$) l'ensemble des fonctions $M\to R$ dont le support est contenu dans C (respectivement dans un translaté de C). On dispose sur ces R-modules d'un produit (de convolution) défini par

$$\forall x\in M,\quad fg(x)=\sum_{y+z=x}f(y)g(z).$$

En effet si $\mathrm{Supp}(f)\subset m+C$ et $\mathrm{Supp}(g)\subset n+C$ alors le support de fg est contenu dans $m+n+C$. La fonction δ_0 indicatrice de $\{0\}$ est une unité pour ce produit. Si A est une partie de M, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice.

Exemple 3.3.2. — Si C est un cône régulier c'est-à-dire de la forme

$$\sum_{i=0}^{m}\mathbf{R}_{\geqslant 0}m_i$$

où $(m_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ peut être complété en une base de M, alors on a des isomorphismes évidents

$$\mathbf{Z}[[C]] = \mathbf{Z}[[T_1,\dots,T_m]] \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}((C)) = \mathbf{Z}[[T_1,\dots,T_m]][T_1^{-1},\dots,T_m^{-1}]$$

où $T_1,\dots,T_m$ sont des indéterminées.

Remarque 3.3.3. — Géométriquement, $\mathbf{Q}[[C]]$ peut être vu comme complété de l'anneau local à l'origine de la variété torique affine

$$\operatorname{Spec}\mathbf{Q}[C\cap M]$$

pour la topologie définie par l'idéal maximal, l'origine étant définie par l'annulation des fonctions correspondant aux éléments de $C\cap M - \{0\}$.

Notations 3.3.4. — On a un plongement canonique $R[M]\subset R((C))$ et on pose

$$R[C] = R[M]\cap R[[C]]$$

qui coïncide en fait avec l'algèbre du monoïde $C\cap M$. On note T une indéterminée. Si $m\in M$, T^m désigne l'élément correspondant de $R[M]$. Si $f\in R[[C]]$, on pose

$$\sum_{m\in M} f(m)T^m = f.$$

Si $\phi : M\to M'$ est un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini envoyant C dans un cône polyédral rationnel strictement convexe C' de $M'\otimes\mathbf{R}$ et tel que $\operatorname{Ker}\phi\cap C = \{0\}$, alors on dispose d'un morphisme de R-modules

$$\phi_* : R((C))\to R((C'))$$

envoyant $R[[C]]$ dans $R[[C']]$ défini par

$$\forall x\in M', \quad \phi_* f(x) = \sum_{\phi(y)=x} f(y).$$

Lemme 3.3.5. — *Avec les notation ci-dessus, ϕ_* est un morphisme d'anneau.*

Démonstration. — Si $f,g\in R((C))$ et $x\in M'$, on a les relations

$$\begin{aligned}
\phi_*(fg)(x) &= \sum_{\phi(y)+\phi(z)=x} f(y)g(z)\\
&= \sum_{y+z=x}\Big(\sum_{\phi(y')=y} f(y')\Big)\Big(\sum_{\phi(z')=z} g(z')\Big)\\
&= (\phi_* f)(\phi_* g)(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.6. — Si $\lambda \in M^\vee$ appartient à l'intérieur du cône $C^\vee$ défini par

$$C^\vee = \{x \in M^\vee \otimes \mathbf{R} \mid \forall y \in C,\ \langle x, y\rangle \geqslant 0\}$$

alors $\lambda : M \to \mathbf{Z}$ envoie C dans $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ et on dispose d'un morphisme

$$\lambda_* : R((C)) \to R((T)).$$

Lemme 3.3.7. — *Avec les notations qui précèdent, si R est intègre, alors $R((C))$ est un anneau intègre.*

Démonstration. — Soient f et g deux éléments non nuls de $R((C))$. On peut choisir λ de $M^\vee$ à l'intérieur de $C^\vee$, $x_0 \in \operatorname{Supp} f$ et $y_0 \in \operatorname{Supp} g$ de sorte que

$$\forall x \in \operatorname{Supp} f - \{x_0\}, \lambda(x) > \lambda(x_0) \quad \text{et} \quad \forall y \in \operatorname{Supp} g - \{y_0\}, \lambda(y) > \lambda(y_0).$$

On en déduit que $\lambda_*(f)$ et $\lambda_*(g)$ sont non nuls et le lemme découle de l'intégrité de $R((T))$. □

Lemme 3.3.8. — *Avec les notations ci-dessus, si R est intègre et si $f \in R[[C]]$ vérifie $f(0) \in R^\times$, alors f est inversible dans $R[[C]]$.*

Démonstration. — La fonction g est un inverse de f si et seulement si elle vérifie la relation

$$\forall y \in M, \quad \sum_{x \in C} g(y-x) f(x) = \delta_0(y)$$

Soit $C^\times = C - \{0\}$, alors cette équation s'écrit également

$$\forall y \in M, \quad g(y) = f(0)^{-1}\Big(\delta_0(y) - \sum_{x \in C^\times} g(y-x) f(x)\Big). \tag{3.3.1}$$

Or pour tout m de $M^\vee$ à l'intérieur du cône $C^\vee$, on a

$$\forall x \in C^\times, \quad \langle x, m\rangle > 0.$$

Un récurrence sur $\langle x, m\rangle$ montre alors que (3.3.1) défini une fonction g dont le support est contenu dans C. □

Notation 3.3.9. — On note $\boldsymbol{\mu}_C$ l'inverse de $\mathbf{1}_C$ dans $R[[C]]$.

Lemme 3.3.10. — *En conservant les notations qui précèdent, Il existe $P \in \mathbf{Z}[C]$ et une famille finie $(m_j)_{j \in J}$ d'éléments de M tels que*

$$\mathbf{1}_C = \frac{P}{\prod_{j \in J} (1 - T^{m_j})}.$$

Démonstration. — Si C est un cône régulier de la forme $\sum_{i=0}^{m} \mathbf{R}_{\geqslant 0} m_i$, la fonction $\mathbf{1}_C$ peut s'écrire

$$\mathbf{1}_C = \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m} T^{\sum_{i=1}^{m} n_i m_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (1 - T^{m_i})}.$$

Dans le cas général (cf. par exemple [**Oda**, page 23]), on écrit C comme support d'un éventail régulier Σ, c'est-à-dire que Σ est un ensemble de cônes polyédraux rationnels strictement convexes de $M \otimes \mathbf{R}$ tel que

(i) si $\sigma \in \Sigma$ et σ' est un face de σ, alors $\sigma' \in \Sigma$,
(ii) si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face de σ et de σ',
(iii) $C = \cup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$,
(iv) tout σ de Σ est régulier.

La fonction $\mathbf{1}_C$ s'écrit alors

$$\mathbf{1}_C = \sum_{\sigma \in \Sigma} \alpha_\sigma \mathbf{1}_\sigma$$

avec $\alpha_\sigma \in \mathbf{Z}$ et le résultat découle du cas précédent. □

Proposition 3.3.11. — *Pour tout élément λ de $M^\vee$ à l'intérieur de $C^\vee$, il existe une constante R telle que*

$$\forall x \in C, \quad |\boldsymbol{\mu}_C(x)| < R^{\langle \lambda, x \rangle}.$$

Démonstration. — L'élément P de $\mathbf{Z}[C]$ du lemme 3.3.10 peut s'écrire

$$P = 1 + \sum_{m \in C^\times} \alpha_m T^m$$

On pose $Q = 1 + \sum_{m \in C^\times} -|\alpha_m| T^m$. La relation (3.3.1) montre alors que les coefficients de P^{-1} vérifient

$$\forall x \in M, \quad \left| P^{-1}(x) \right| \leqslant Q^{-1}(x).$$

Mais par le lemme 3.3.10 la fonction de Möbius s'écrit

$$\boldsymbol{\mu}_C = P^{-1} \prod_{j \in J} (1 - T^{m_i})$$

et donc

$$\forall x \in C, \quad |\boldsymbol{\mu}_C(x)| \leqslant \left(Q^{-1} \prod_{j \in J} (1 + T^{m_i}) \right)(x).$$

on en déduit l'inégalité

$$\forall x \in C, \quad |\mu_C(x)| \leqslant \lambda_* \Big(Q^{-1} \prod_{j\in J} (1+T^{m_j}) \Big) (\lambda(x)).$$

Soit R_0 l'inverse de la plus petite des valeurs absolues des racines de $\lambda_* Q$. Dans $\mathbf{C}((T))$ si $\lambda_* Q$ s'écrit $u\prod_{i=1}^d (1-\alpha_i T_i)$ alors

$$\lambda_* \Big(Q^{-1} \prod_{j\in J} (1+T^{m_j}) \Big) = u \prod_{j\in J} (1+T^{\lambda(m_j)}) \times \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{n\geqslant 0} \alpha_i^n T^n \Big).$$

Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on obtient que les coefficients de la série vérifient

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\lambda_* \Big(Q^{-1} \prod_{j\in J} (1+T^{m_j}) \Big)(x)}{(R_0+\varepsilon)^x} & \to & 0 \\ x & \to & +\infty \end{array}$$

en outre $\mu_C(0) = 1$ et le lemme est démontré. □

Remarque 3.3.12. — L'utilisation de fonction de Moebius dans des situations similaires apparaît dans [**Sc**], [**Pe1**] et [**Sal**, §11].

3.4. Montée du nombre de points. — Notre but est maintenant d'exprimer le nombre $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ en termes des torseurs universels.

Notations 3.4.1. — Une famille de représentants des classes d'isomorphisme de torseurs universels ayant un point rationnel au-dessus de V, qui est finie par [**CTS2**, proposition 2], est notée $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$.

Pour toute place v de $M_f - S$, on considère le cône

$$C_v = \{x \in X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \mid \forall y \in C_{\mathrm{eff}}(V_v),\ \langle x, y\rangle \leqslant 0\}.$$

On pose $\mu_v = \mu_{C_v}$ et

$$\mu = \prod_{v\in M_k - S} \mu_v : \bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \to \mathbf{R}.$$

Proposition 3.4.2. — *Avec les notations qui précèdent, quitte à augmenter S, pour tout nombre réel positif H, on a la relation :*

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) = \frac{1}{\# W(T_{\mathrm{NS}})} \sum_{i\in I} \sum_{\mathfrak{b} \in \bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{y \in \mathscr{T}_i(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H, \mathfrak{b}, y).$$

Remarques 3.4.3. — (i) Les sommations du terme de droite ne font intervenir qu'un nombre fini de termes non nuls.

(ii) Si on remplace ω_V^{-1} par un autre fibré en droites L à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$ dans la condition (3.2.6) de la définition des fonctions de comptage, la démonstration reste valide et on obtient une expression de $n_{U,\mathbf{H}(L)}$ en termes des torseurs universels.

Démonstration. — Soit x un point rationnel de U et i l'unique élément de I pour lequel $\mathcal{T}_i$ a un point rationnel au-dessus de x. Il nous faut montrer que :
(3.4.1)
$$\frac{1}{\#W(T_{\text{NS}})} \sum_{\mathfrak{b}\in \bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\text{NS}})_v} \boldsymbol{\mu}(\mathfrak{b}) \sum_{y\in\mathcal{T}_i(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(H,\mathfrak{b},y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbf{h}(x) \leqslant H, \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Mais, pour S assez gros, il résulte de [**Pe2**, proposition 4.2.2] que $\mathcal{T}_{i\,C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ peut être décrit de la manière suivante :
$$\mathcal{T}_{i\,C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) = \{y\in\mathcal{T}_i(k_\mathfrak{p}) \mid \forall \mathfrak{P}\in\{\mathfrak{P}\in M_K \mid \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\},\ \forall L\in C_{\text{eff}}(\overline{V}),\ \|y\|^L_\mathfrak{P}\geqslant 1\}.$$
Il en résulte que
$$\sum_{\mathfrak{b}\in X_*(T_{\text{NS}})_\mathfrak{p}} \boldsymbol{\mu}_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}) \mathbf{1}_{T_{\text{NS}}(-C_{\text{eff}}(\overline{V}),\mathfrak{b}).\mathcal{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})}$$
est la fonction indicatrice de
$$\{y\in\mathcal{T}_i(k_\mathfrak{p}) \mid \forall\mathfrak{P}|\mathfrak{p},\ \forall L\in C_{\text{eff}}(\overline{V}),\ \|y\|^L_\mathfrak{P} = 1\}.$$
Le terme de gauche de (3.4.1) est donc $\#W(T_{\text{NS}})^{-1}$ fois la somme des valeurs de la fonction caractéristique de l'ensemble des y de $\mathcal{T}_{i\,x}(k)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(y_v)_{v\in S}\in\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{T}_i), \tag{3.4.2}$$
$$\forall L\in C_{\text{eff}}(V),\quad \prod_{v\in S}\|y_v\|^L_v\leqslant 1, \tag{3.4.3}$$
$$\prod_{v\in S}(\|y_v\|_v^{\omega_V^{-1}})^{-1}\leqslant H, \tag{3.4.4}$$
$$\forall\mathfrak{P}\in M_K - S_K,\quad \forall L\in C_{\text{eff}}(\overline{V}),\quad \|y_\mathfrak{P}\|^L_\mathfrak{P} = 1, \tag{3.4.5}$$

où S_K désigne l'ensemble des places de K au-dessus de S. Comme, par (3.2.1)

$$\prod_{v \in M_k} \|y_v\|_v^L = \mathbf{H}(L, \pi(y))^{-1} \leqslant 1, \tag{3.4.6}$$

la condition (3.4.5) implique (3.4.3). Mais on a une suite exacte

$$0 \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \to T_{\mathrm{NS}}(k) \to \prod_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \to 0$$

et donc les conditions (3.4.2) et (3.4.5) définissent, d'après (3.2.2) un domaine fondamental pour l'ensemble $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ sous $T_{\mathrm{NS}}(k)/W(T_{\mathrm{NS}})$. D'autre part la condition (3.4.4), compte tenu de (3.4.5) et de (3.4.6), peut être remplacée par $\mathbf{h}(\pi(y)) \leqslant H$. □

3.5. Montée de la constante. — Nous allons maintenant montrer l'analogue intégral du résultat précédent.

Hypothèses 3.5.1. — Dans la suite nous supposons également que les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible.

Proposition 3.5.2. — *Avec les notations qui précèdent, sous les hypothèses 3.1.4 et 3.5.1 il existe S tel que pour tout nombre réel positif H on ait*

$$\begin{aligned}\alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)&\int_0^{\log H} u^{t-1}e^u \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\sum_{i\in I}\sum_{\mathfrak{b}\in\bigoplus_{v\in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} \mu(\mathfrak{b})\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H,\mathfrak{b},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y).\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Remarques 3.5.3. — (i) Le terme principal de $\int_0^{\log H} u^{t-1}e^u\mathrm{d}u$ est $H(\log H)^{t-1}$; c'est en fait le seul ayant une signification pour le comportement asymptotique.

(ii) L'intégrale converge par le lemme 3.1.14. Il résultera de la démonstration que la sommation sur $\mathfrak{b}$ converge absolument.

(iii) En rapprochant la proposition 3.4.2 de la proposition précédente, on constate que la question 2.4.4 se ramène à des majorations de la forme

$$\left|\sum_{y\in\mathscr{T}_i(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H,\mathfrak{b},y) - \int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H,\mathfrak{b},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y)\right|$$

comme c'était le cas dans [**Pe2**] pour les fonctions zêta associées.

Notons que l'équivalence entre ces deux termes lorsque H tend vers l'infini est l'analogue, dans notre cadre, de la notion de variété strictement d'Hardy-Littlewood introduite par Borovoi et Rudnick dans [**BR**].

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si v est une place de k, $\mathscr{T}$ un torseur au-dessus de V, b un élément de $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ et U un ouvert de $\mathscr{T}(k_v)$, alors par le lemme 3.1.14 et [**Pe2**, (4.4.1)]

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(bU) = \left|[\omega_V^{-1}](b)\right|_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(U).$$

On en déduit que

$$\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H,\mathfrak{b},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y) = \frac{1}{\prod\limits_{\mathfrak{p}\in M_k-S} \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\langle \omega_V^{-1},-\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\rangle}} \int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}(H,0,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y).$$

Mais par l'hypothèse 3.1.4,

$$\forall x \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^{\vee} \cap \operatorname{Pic}\overline{V}^{\vee} - \{0\}, \quad \langle x, \omega_V^{-1}\rangle > 1$$

et, C_v étant l'opposé du cône dual de $C_{\mathrm{eff}}(V_v)$, il en résulte que

$$\forall v \in M_f - S, \quad \forall \mathfrak{b} \in C_v - \{0\}, \quad \langle \mathfrak{b}, \omega_V\rangle \geqslant 2. \tag{3.5.2}$$

Or il découle du lemme 3.3.7 et de la proposition 3.3.11 que pour toute place v $\boldsymbol{\mu}_{C_v}$ est supportée par C_v et il existe une constante R_v telle que

$$\forall \mathfrak{b} \in C_v, \quad \left|\boldsymbol{\mu}_{C_v}(\mathfrak{b})\right| < R_v^{\langle \mathfrak{b},\omega_V\rangle}.$$

En outre, l'ensemble décrit par les paires $(X_*(T_{\mathrm{NS}})_v, C_v)$ étant fini, on peut choisir une constante R indépendante de v. Quitte à agrandir S, la série

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\bigoplus X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} \boldsymbol{\mu}_v(\mathfrak{b})(\#\mathbf{F}_v)^{\langle \mathfrak{b},\omega_V^{-1}\rangle}$$

converge absolument et par (3.5.2), il existe une constante R' telle que

$$\left| 1 - \sum_{\mathfrak{b}\in X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} |\boldsymbol{\mu}_v(\mathfrak{b})|(\#\mathbf{F}_v)^{\langle \mathfrak{b},\omega_V^{-1}\rangle} \right| < \sum_{\mathfrak{b}\in C_v-\{0\}} (R\#\mathbf{F}_v{}^{-1})^{\langle \mathfrak{b},\omega_V\rangle} < R'\#\mathbf{F}_v{}^{-2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\bigoplus X_*(T_{\mathrm{NS}})_v\\ v\in M_k-S}} \boldsymbol{\mu}(\mathfrak{b}) \prod_{v\in M_k-S} (\#\mathbf{F}_v)^{\langle \omega_V^{-1},\mathfrak{b}_v\rangle}$$

converge absolument et le terme de droite de (3.5.1) se met sous la forme

$$(3.5.3)\qquad \frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\prod_{\mathfrak{p}\in M_k-S}\left(\sum_{\mathfrak{b}\in X_*(T_{\mathrm{NS}})_{\mathfrak{p}}}\frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}{}^{\langle\omega_V^{-1},-\mathfrak{b}\rangle}}\right)\frac{1}{\sqrt{d}^{\dim\mathscr{T}_i}}$$
$$\times\sum_{i\in I}\int_{\prod_{v\in S}\mathscr{T}_i(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,S}(H,y)\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i,v}(y)\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i,v}(\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_v))$$

où $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i,S}(H,x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble des y de $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}_i)$ tels que

$$\prod_{v\in S}(\|y_v\|_v^{\omega_V^{-1}})^{-1}\leqslant H \quad \text{et} \quad \forall L\in C_{\mathrm{eff}}(V),\quad \prod_{v\in S}(\|y_v\|_v^{L})\leqslant 1.$$

Mais la relation $\boldsymbol{\mu}_v\mathbf{1}_{C_v}=\delta_0$ implique que

$$(3.5.4)\qquad \sum_{\mathfrak{b}\in X_*(T_{\mathrm{NS}})_v}\frac{\boldsymbol{\mu}_v(\mathfrak{b})}{\#\mathbf{F}_v{}^{\langle\omega_V^{-1},-\mathfrak{b}\rangle}}=\left(\sum_{\mathfrak{b}\in -C_v}\frac{1}{\#\mathbf{F}_v{}^{\langle\omega_V^{-1},\mathfrak{b}\rangle}}\right)^{-1}$$
$$=L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})^{-1}$$

où $L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})$ désigne le terme local de la fonction L de Draxl [**Dr**, proposition 4]. D'autre part, il résulte de la démonstration de [**Pe2**, théorème 5.3.1, page 293] qu'on a la relation

(3.5.5)

$$\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i,v}(\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_v))=\left[\prod_{v\in M_k-S}L_v(T_{\mathrm{NS}},C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\omega_V^{-1})\right]$$
$$\times\left[\prod_{v\in M_k-S}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v))L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})\right]$$
$$\times\left[\prod_{v\in M_k-S}L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}(V(k_v))\right].$$

Fixons un élément i de I et $(x_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S} V(k_v)$ un point appartenant à l'image de l'ensemble $\prod_{v\in S} \mathcal{T}_i(k_v)$. Il découle de [**Ono2**, pages 120-122] qu'on a une suite exacte

$$0 \to T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S} k_v\Big) \to \prod_{v\in S} T_{\mathrm{NS}}(k_v) \to (\operatorname{Pic} V)^\vee \otimes \mathbf{R} \to 0$$

qui définit le groupe $T^1_{\mathrm{NS}}(\prod_{v\in S} k_v)$. Il existe donc un élément y_0 de $\prod_{v\in S} \mathcal{T}_i(k_v)$ tel qu'on ait $\prod_{v\in S} \|y_0\|_v^L = 1$ pour tout L de $\operatorname{Pic} V$. En utilisant la démonstration du lemme 3.1.14 on obtient comme dans la démonstration de [**Pe2**, théorème 5.3.1] que

$$\begin{aligned}(3.5.6)\quad & \int_{\prod_{v\in S} \mathcal{T}_i(k_v)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(H,y) \prod_{v\in S} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i,v}(y) \\ &= \#W(T_{\mathrm{NS}}) \int_{\{y\in C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y,\omega_V^{-1}\rangle \leqslant \log H\}} e^{\langle \omega_V^{-1},y\rangle} \mathrm{d}y \\ &\quad \times \boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\Big(T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S} k_v\Big)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\Big)\Big(\prod_{v\in S} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}\Big)\Big(\pi\Big(\prod_{v\in S} \mathcal{T}_i(k_v)\Big)\Big)\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}$ est la mesure induite par la forme canonique sur $T^1_{\mathrm{NS}}(\prod_{v\in S} k_v)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)$. Mais on obtient directement l'égalité

$$(3.5.7)\qquad \int_{\{y\in C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y,\omega_V^{-1}\rangle \leqslant \log H\}} e^{\langle \omega_V^{-1},y\rangle} \mathrm{d}y = \alpha(V) \int_0^{\log H} u^{t-1} e^u \mathrm{d}u$$

et on déduit du théorème d'Ono [**Ono3**, main theorem] l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(3.5.8)\quad \frac{\#H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V})}{\#\text{Ш}^1(k, T_{\mathrm{NS}})} &= \frac{1}{\sqrt{d}^{\,t}} \Big[\lim_{s\to 1} (s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic} \overline{V})\Big]^{-1} \\ &\quad \boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\Big(T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S} k_v\Big)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\Big) \\ &\quad \prod_{v\in M_k - S} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)) L_v(1, \operatorname{Pic} \overline{V})\end{aligned}$$

où

$$\text{Ш}^1(k, T_{\mathrm{NS}}) = \operatorname{Ker}\Big(H^1(k, T_{\mathrm{NS}}) \to \prod_{v\in M_k} H^1(k_v, T_{\mathrm{NS}})\Big).$$

En réunissant les formules (3.5.3) à (3.5.8), on obtient que le terme de droite de la proposition peut se réecrire

$$\alpha(V)\beta(V)\sum_{i\in I}\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}\Big(\pi\Big(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v)\Big)\Big)}{Ш^1(k,T_{\mathrm{NS}})}.$$

Mais il résulte de l'hypothèse 3.5.1 sur les torseurs universels que tout point de $\overline{V(k)}$ appartient exactement à $\#Ш^1(k,T_{\mathrm{NS}})$ ensembles de la forme $\pi(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v))$. La somme coïncide donc avec $\tau_{\mathbf{h}}(V)$. □

4. Intersections complètes

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où V est une intersection complète dans une variété X et on cherche à écrire la somme (resp. l'intégrale) obtenue pour $\mathscr{T}_V$ en termes de celle de $\mathscr{T}_X$. C'est l'objet de la proposition 4.1.4 et du théorème 4.7.2.

4.1. Encerclement du nombre de points. —

Hypothèses 4.1.1. — Dans ce paragraphe, on suppose que V est une intersection complète dans une variété X presque de Fano sur k de sorte que V elle-même soit presque de Fano et qu'on ait un isomorphisme

$$\operatorname{Pic}\overline{X}\xrightarrow{\sim}\operatorname{Pic}\overline{V}$$

qui envoie le cône des diviseurs effectifs de $\overline{X}$ exactement sur celui de $\overline{V}$. On suppose en outre que

$$\forall L\in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee\cap(\operatorname{Pic}\overline{V}^\vee-\{0\}),\quad \langle L,\omega_V^{-1}\rangle>1.$$

Remarque 4.1.2. — Si V est une intersection complète dans une variété torique projective et lisse sur k vérifiant les hypothèses de la proposition 2.1.5 alors les conditions qui précèdent, à l'exception des deux dernières sont automatiquement vérifées.

Notations 4.1.3. — On fixe un torseur universel $\mathscr{T}_V$ au-dessus de V et on suppose V définie par l'annulation de m sections $s_1,\dots,s_m$ de fibrés $[L_i]\in\operatorname{Pic}X$.

D'après l'exemple 3.1.16, on a un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_V \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[d, "\pi_V"] & \mathscr{T}_X \arrow[d, "\pi_X"] \\ V \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

où $\tilde{j}$ est une immersion fermée de sorte que $\mathscr{T}_V$ soit défini par l'annulation de m sections $f_1, \ldots, f_m$ du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{T}_X}$, vérifiant les relations

$$(4.1.1) \qquad \forall y \in \mathscr{T}_X(\overline{k}), \quad \forall t \in T_{\mathrm{NS}}(\overline{k}), \quad f_i(t.y) = [L_i](t) f_i(y).$$

On note $\boldsymbol{f} : \mathscr{T}_X \to \mathbf{A}_k^m$ l'application induite. On peut noter que l'application $\boldsymbol{f}$ s'étend au schéma $\widehat{\mathscr{T}_X} = \widehat{\mathscr{T}_X}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}$.

Soit χ le caractère de Tate $\boldsymbol{A}_k/k \to \mathbf{S}^1$. Il est défini par

$$\xi \mapsto e^{2i\pi\Lambda(\xi)}$$

où $\Lambda = \sum_{v \in M_k} \Lambda_v$ et $\Lambda_v : k_v \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est donnée par $\Lambda_v = \Lambda_p \circ \mathrm{Tr}_{k_v/\mathbf{Q}_p}$ où p est l'unique place de $\mathbf{Q}$ sous v, $\mathrm{Tr}_{k_v/\mathbf{Q}_p}$ l'application trace et Λ_p le caractère défini par :

- si $\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}$, $\lambda_p(x) = [-x]$, la classe de $-x$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$,
- sinon, Λ_p est la composée des applications naturelles

$$\mathbf{Q}_p \to \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Par [**Ta**, theorem 4.1.4], l'application qui à un élément x de k associe $\xi \mapsto \chi(x\xi)$ définit un isomorphisme de k sur le groupe $\widehat{\boldsymbol{A}_k/k}$ des caractères de $\boldsymbol{A}_k/k$, et par [**Ta**, theorem 4.1.1], l'application qui à un élément η de $\boldsymbol{A}_k$ associe $\xi \mapsto \chi(\eta\xi)$ définit un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_k$ sur son groupe des caractères $\widehat{\boldsymbol{A}_k}$. On obtient donc des dualités

$$\mathbf{e}(\langle .,. \rangle) : (\boldsymbol{A}_k/k)^m \times k^m \to \mathbf{S}^1 \text{ et } \mathbf{e}(\langle .,. \rangle) : \boldsymbol{A}_k{}^m \times \boldsymbol{A}_k{}^m \to \mathbf{S}^1.$$

On note également $\mathbf{e}_v$ le caractère défini par $\xi \mapsto e^{2i\pi\Lambda_v(\xi)}$. Par [**Ta**, §2.2], la mesure autoduale $\mathrm{d}\xi_v$ sur k_v pour $\mathbf{e}_v$ est donnée par

$$\mathrm{d}\xi_v = \begin{cases} \mathrm{d}x_v \text{ si } v \in M_\infty, \\ \#(\mathcal{O}_v/\mathfrak{d}_v)^{-1/2} \mathrm{d}x_v \text{ sinon,} \end{cases}$$

où, pour toute place finie v de k, $\mathfrak{d}_v$ désigne la différente absolue de k_v. On note $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ la mesure autoduale $\prod_{v \in M_k} \mathrm{d}\xi_v = \frac{1}{\sqrt{d}} \prod_{v \in M_k} \mathrm{d}x_v$ sur $\boldsymbol{A}_k$.

On fixe un système de hauteurs $\mathbf{H}_X$ sur X et on note $\mathbf{H}_V$ le système induit sur V, on note U_X un ouvert de X et $U_V = U_X \cap V$ que l'on supposera dense. On remplacera dans la suite U par U_X (respectivement U_V) dans la définition des fonctions $\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, .)$ (respectivement $\Phi^{\mathbf{H}_V}_{\mathscr{T}_V}(H, \mathfrak{b}, .)$) ainsi que ω_X^{-1} par ω_V^{-1} dans celle de $\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, .)$. On se donne également une fonction $\rho : \boldsymbol{A}_k{}^m \to \mathbf{R}$ continue, qui envoie 0 sur 1 et dont l'introduction sera justifiée au paragraphe 5.

Proposition 4.1.4. — *Avec les notations et conventions qui précèdent, pour tout* $\mathfrak{b}$ *du produit* $\prod_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$ *et tout* $H \in \mathbf{R}_{>0}$, *on a la relation*

$$\sum_{y \in \mathscr{T}_V(k)} \Phi^{\mathbf{H}_V}_{\mathscr{T}_V}(H, \mathfrak{b}, y) = \int_{\boldsymbol{A}_k{}^m/k^m} \sum_{y \in \mathscr{T}_X(k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(\boldsymbol{f}(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{f}(y)\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Démonstration. — Soit g la fonction de k^m dans $\mathbf{R}$ définie par

$$g(z) = \rho(z) \sum_{\{y \in \mathscr{T}_X(k) \mid \boldsymbol{f}(y) = z\}} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y).$$

Alors, comme $\{y \in \mathscr{T}_X(k) \mid \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y) \neq 0\}$ est fini, $\boldsymbol{f}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur cet ensemble et donc g est à support fini. Par la formule d'inversion de Fourier, on a donc

$$g(0) = \int_{\boldsymbol{A}_k{}^m/k^m} \sum_{z \in k^m} g(z)\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, z\rangle)\mathbf{e}(-\langle \boldsymbol{\xi}, 0\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

La proposition s'obtient alors à l'aide de la définition de g. □

4.2. Encerclement de la constante : introduction. — Notre objectif est maintenant d'obtenir un analogue intégral du résultat précédent, c'est-à-dire une formule de la forme

$$\int_{\mathscr{T}_{V\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_V}_{\mathscr{T}_V}(H, \mathfrak{b}, y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_V}(y) =$$
$$\int_{\boldsymbol{A}_k{}^m} \int_{\mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(\boldsymbol{f}(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{f}(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Nous allons nous inspirer pour cela du travail d'Igusa [**Ig2**, §IV.6]. Pour cela il nous faut tout d'abord construire l'analogue intégral de g et nous utiliserons la définition suivante :

Définition 4.2.1. — Soit $\boldsymbol{z}$ un élément de ${k_v}^m$; soit $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}$ la sous-variété de $\mathscr{T}_{X\,k_v}$ définie par le système d'équations

$$\boldsymbol{f}(y) = \boldsymbol{z}.$$

On considère alors la forme différentielle $\breve{\omega}_{\boldsymbol{z}}$ définie par la relation :

$$\breve{\omega}_{\boldsymbol{z}}(y) \wedge \boldsymbol{f}^*\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} \mathrm{d}x_i\Big)(y) = \breve{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y)$$

dans $\omega_{\mathscr{T}_X | \mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}}$.

Remarque 4.2.2. — Comme indiqué dans l'exemple 3.1.16, si $\boldsymbol{z} = 0$ alors $\breve{\omega}_{\boldsymbol{z}}$ coïncide avec la mesure $\breve{\omega}_{\mathscr{T}_V}$.

Exemple 4.2.3. — Si X est en outre une compactification équivariante projective lisse d'un tore T, alors $\mathscr{T}_X$ est un ouvert d'un espace affine $\mathbf{A}_k^N$ et la forme obtenue coïncide avec la forme de Leray usuelle.

Définition 4.2.4. — On note $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z},v}$ la mesure sur $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}(k_v)$ définie par la forme différentielle $\breve{\omega}_{\boldsymbol{z}}$.

Remarque 4.2.5. — Si $\boldsymbol{z}$ est un élément de k^m et si $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}$ est une variété non-singulière sur k, ce qui résulte de nos hypothèses si $m = 1$, alors il résulte de [**We**, theorem 2.2.5] que pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de k, on a la relation

$$\int_{\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z},v} = \frac{\#\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}(\mathbf{F}_v)}{\#{\mathbf{F}_v}^{\dim \mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}}}$$

où $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}$ désigne un modèle de $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}$ sur $\mathcal{O}_S$.

Avant de passer à la formule adélique, il convient de considérer la formule locale correspondante qui s'écrit pour une fonction Φ convenable de $\mathscr{T}_X(k_v)$ dans $\mathbf{R}$:

$$\int_{\mathscr{T}_V(k_v)} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_V,v}(y) = \int_{k_v^m} \int_{\mathscr{T}_X(k_v)} \Phi(y)\mathbf{e}_v(\langle \boldsymbol{\xi}_v, \boldsymbol{f}(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_v. \tag{4.2.1}$$

Pour cela nous étudions la fonction $g_v : {k_v}^m \to \mathbf{R}$ définie par la relation :

$$g_v(\boldsymbol{z}) = \int_{\{y \in \mathscr{T}_X(k_v) | \boldsymbol{f}(y) = \boldsymbol{z}\}} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z},v}(y).$$

Comme dans [**Ig2**, §IV.6], cette étude comprend deux parties indépendantes et de natures différentes. D'une part il faut montrer que g_v est continue en 0, ce qui se ramène à un problème de nature géométrique. D'autre part, il faut déterminer

si la transformation de Fourier de g_v appartient à $L^1({k_v}^m)$, qui est un problème analytique associé à des majorations de sommes d'exponentielles.

Finalement le passage du local à l'adélique nécessite la construction pour tout $\boldsymbol{z}$ de ${\boldsymbol{A}_k}^m$ d'une mesure $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}}$ sur le produit restreint des $\mathscr{T}_X^{z_v}(k_v)$ relativement aux

$$\mathscr{T}_X^{z_v}(k_v) \cap \mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\mathcal{O}_v).$$

La convergence de cette mesure passe également par une majoration de la transformée de Fourier de g_v.

Le prochain paragraphe est consacré à l'aspect géométrique de la question, à savoir l'étude de ce qu'Igusa nomme "données numériques".

4.3. Aspect géométrique. — Dans [**Ig2**, §IV.6], la partie géométrique est liée à des résolutions des singularités ; ici ce rôle est joué par des plongements équivariants de $\mathscr{T}_X$.

Pour cette étude nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèses 4.3.1. — La variété V est une hypersurface de X.

Remarque 4.3.2. — (i) On peut a priori se ramener à cette hypothèse par un argument d'itération.

(ii) Cette hypothèse entraîne que la variété $\mathscr{T}_X^z$ est lisse pour tout z de $\overline{k}$. Cela résulte de l'hypothèse sur V si $z = 0$ et de la formule (4.1.1) sinon.

Définition 4.3.3. — On dira que V *vérifie l'hypothèse* (G) s'il existe une désingularisation $\mathbf{A}_\Sigma$ de $\mathbf{A}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}$ qui est équivariante sous l'action de T_{NS}.

Remarque 4.3.4. — L'existence d'une telle désingularisation a été annoncée par Brylinski [**Bry**].

Proposition 4.3.5. — *Si V vérifie l'hypothèse* (G) *et si Φ est une fonction continue à support compact dans $\widehat{\mathscr{T}_X}(k_v)$, alors la fonction*

$$\begin{array}{rcl} g_v : k_v & \to & \mathbf{R} \\ z & \mapsto & \int_{\{y\in\mathscr{T}_X(k_v) | f(y)=z\}} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{z,v}(y) \end{array}$$

est continue.

Démonstration. — La continuité en-dehors de 0 est immédiate. Pour $z = 0$, il nous faut désingulariser $\widehat{\mathscr{T}_X}$. On considère donc une désingularisation équivariante $\mathbf{A}_\Sigma$ de $\mathbf{A}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}$ qui correspond à un éventail régulier Σ dont $C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})^\vee$ est le support (cf. [**Oda**, §1.5] et la démonstration du lemme 3.3.10). L'ensemble

$\Sigma(1)$ des générateurs des cônes de dimension un dans Σ est en bijection avec l'ensemble des $\overline{k}$-hypersurfaces $\overline{T}_{\mathrm{NS}}$-invariantes de $\mathbf{A}_\Sigma$ et on pose

$$\delta_\Sigma(V) = \inf_{\sigma\in\Sigma(1)} \langle \sigma, \omega_V^{-1}\rangle.$$

Comme $\Sigma(1) \subset C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee \cap \operatorname{Pic} \overline{V}^\vee - \{0\}$, on a

$$\delta_\Sigma(V) \geqslant \delta(V) > 1.$$

Le produit contracté

$$\mathscr{T}_{X,\Sigma} = \mathscr{T}_X \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{A}_\Sigma$$

définit alors une désingularisation de la variété $\widehat{\mathscr{T}_X}$ et on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_X & \xrightarrow{\hat{\jmath}} & \mathscr{T}_{X,\Sigma} \\ & \searrow^{j} & \downarrow \pi \\ & & \widehat{\mathscr{T}_X} \end{array}$$

où j et $\hat{\jmath}$ sont des immersions ouvertes. Les composantes géométriques irréductibles du complémentaire de $\mathscr{T}_X$ dans $\mathscr{T}_{X,\Sigma}$ sont en bijection avec les éléments de $\Sigma(1)$. Pour chaque σ de $\Sigma(1)$, on définit comme dans [**Ig2**, §III.2.2], les données numériques (N_σ, ν_σ) le long du diviseur correspondant D_σ dans $\mathscr{T}_{X,\Sigma}$ de la manière suivante : on se place sur une extension K_v de k_v sur laquelle D_σ est défini, N_σ désigne la multiplicité de f sur D_σ et si $X_1, \dots, X_N$ sont des coordonnées v-adiques au voisinage d'un point x_0 de D_σ, en-dehors des intersections $D_\sigma \cap D_{\sigma'}$ pour $\sigma' \neq \sigma$, de sorte que D_σ ait pour équation $X_1 = 0$ au voisinage de x_0, alors la forme $\pi^*\breve{\omega}_{\mathscr{T}_X}$ s'écrit

$$\eta X_1^{\nu_\sigma - 1} \bigwedge_{i=1}^{N} \mathrm{d}X_i \tag{4.3.1}$$

au voisinage de x_0, où η désigne une fonction localement inversible au voisinage de x_0.

Supposons que Φ soit à valeurs positives ou nulles. Lorsque z tend vers 0, la fonction g_v tend vers

$$\int_{\mathscr{T}_{X,\Sigma}} \Phi \circ \pi(y) \boldsymbol{\omega}_{(0,v)}(y) \leqslant +\infty$$

où $\boldsymbol{\omega}_{(0,v)}$ est une mesure supportée par

$$\overline{\hat{\jmath}(\mathscr{T}_V)} \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma(1)} D_\sigma.$$

La restriction à chacun des diviseurs D_σ est donnée par

$$\left|\frac{\eta Y_1^{\nu_\sigma-1}}{\frac{\partial f\circ\pi}{\partial Y_1}}\right|_{|Y_1=0}\bigwedge_{i=2}^{N}\mathrm{d}Y_i.$$

Elle est donc finie si $N_\sigma-1\leqslant\nu_\sigma-1$ et nulle si $\nu_\sigma-N_\sigma>0$. Par conséquent, si $\nu_\sigma-N_\sigma>0$ pour tout σ de $\Sigma(1)$, la fonction g_v est continue en 0.

Il reste à déterminer ν_σ et N_σ, ce qui peut être fait dans une fibre au-dessus de X. Fixons donc un élément σ de $\Sigma(1)$ et donnons-nous une base $\xi_1,\dots,\xi_r$ de $X^*(T_{\mathrm{NS}})$, de sorte que $\sigma(\xi_i)=\delta_{1,i}$. A une constante multiplicative inversible près la mesure sur cette fibre correspond à la forme différentielle

$$\prod_{i=1}^{n}\xi_i^{\langle\xi_i^\vee,\omega_X^{-1}\rangle}\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\xi_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\xi_n}{\xi_n}$$

où $(\xi_1^\vee,\dots,\xi_r^\vee)$ est la base duale de $(\xi_1,\dots,\xi_r)$. Comme D_σ est donné par $\xi_1=0$ et $\sigma=\xi_1^\vee$, on obtient par (4.3.1) que

$$\nu_\sigma=\langle\sigma,\omega_X^{-1}\rangle.$$

Par ailleurs, par la relation (4.1.1), la restriction de $f\circ\pi$ à la fibre est, à une constante éventuellement nulle près, de la forme

$$\prod_{i=1}^{r}\xi_i^{\langle\xi_i^\vee,L\rangle}$$

où $L=L_1$. On obtient donc l'égalité

$$N_\sigma=\langle\sigma,L\rangle$$

donc

$$\nu_\sigma-N_\sigma=\langle\omega_X^{-1}-[L],\sigma\rangle=\langle\omega_V^{-1},\sigma\rangle.\quad\square$$

4.4. Aspect analytique. — Le but de ce paragraphe est de donner un exemple pour la condition analytique suivante :

Définition 4.4.1. — On se place dans les hypothèses du paragraphe précédent. On dira que la paire (X,V) *vérifie la condition* (A) si et seulement s'il existe $\sigma>2$ tel que, quitte à agrandir S, pour toute place finie v de k et tout sous-ensemble W ouvert compact de $\widehat{\mathscr{T}_X}(k_v)$ on ait

$$\forall\xi\in k_v-\mathcal{O}_v,\quad\left|\int_{\mathscr{T}_X(k_v)\cap W}\mathbf{e}_v(\xi f(x))\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(x)\right|\leqslant C|\xi|_v^{-\sigma}$$

pour une constante C égale à 1 si $v \notin S$ et $W \subset \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)$.

Remarque 4.4.2. — Il s'agit en fait d'une majoration de somme d'exponentielles.

Nous allons maintenant décrire un cas particulier où cette condition est impliquée par le cas classique des hypersurfaces projectives.

Proposition 4.4.3. — *Si en outre X est un produit d'espaces projectifs $\prod_{i=0}^{m} \mathbf{P}^{n_i}_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, f est alors donné par un polynôme multihomogène dont le degré total est noté d. On suppose que la dimension de V est supérieure ou égale à 4 et que*

$$\inf_{0\leqslant i\leqslant m} n_i \geqslant 2^d d.$$

Alors la condition (A) *est vérifiée pour* (X, V).

Démonstration. — On pose $N = \sum_{i=0}^{m} n_i + 1$. Par [**Pe2**, exemple 4.2.2], on sait que l'ensemble $\mathscr{T}_X(\mathbf{Q}_p) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathbf{Z}_p)$ coïncide avec $\prod_{i=0}^{m}(\mathbf{Z}_p^{n_i+1} - \{0\})$. Mais la fonction indicatrice d'un ouvert compact de $\prod_{i=0}^{m} \mathbf{A}^N(\mathbf{Q}_p)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'indicatrices d'images de $\mathbf{Z}_p^N$ par des homothéties-translations. On est donc ramené à la majoration classique

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_p^N} \mathbf{e}(\xi f(x))\mathrm{d}x \right|.$$

Mais les singularités de $f(x) = 0$ sont contenues dans la réunion

$$\bigcup_{i=0}^{m} \{0\} \times \prod_{j\neq i} \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n_j+1}.$$

La codimension du lieu singulier est donc minorée par le plus petit des entiers $n_i + 1$. La proposition résulte alors de [**Ig1**, lemma 6, page 63]. □

4.5. Transformation de Fourier locale. — Dans ce paragraphe nous étudions la validité de la formule locale (4.2.1) sous les conditions décrites dans les deux paragraphes qui précèdent.

Proposition 4.5.1. — *Si V vérifie l'hypothèse* (G) *et si la paire* (X, V) *satisfait la condition* (A), *alors pour toute place v de k et toute fonction complexe Φ sur $\widehat{\mathscr{T}_X}(k_v)$*

continue, à support compact, C^∞ si v est archimédienne et localement constante si v est finie, on a la relation

$$\int_{\mathscr{T}_V(k_v)} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_V,v}(y) = \int_{k_v}\int_{\mathscr{T}_X(k_v)} \Phi(y)\mathbf{e}_v(\xi_v f(y))\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y)\mathrm{d}\xi_v.$$

Démonstration. — Il résulte de la proposition 4.3.5 que la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_v : k_v & \to & \mathbf{R} \\ z & \mapsto & \int_{\{y\in\mathscr{T}_X(k_v) \mid f(y)=z\}} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{z,v}(y) \end{array}$$

est continue. Elle est en outre nulle en dehors de l'image par f du support de Φ, et donc à support compact. A fortiori, g_v appartient à $L^1(k_v)$. La transformée de Fourier $\widehat{g_v}$ de g_v est bien définie et se met sous la forme

$$\begin{aligned} \widehat{g_v}(\xi) &= \int_{k_v} g_v(z)\mathbf{e}_v(\xi z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathscr{T}_X(k_v)} \mathbf{e}_v(\xi f(y))\Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y). \end{aligned}$$

Mais par hypothèse si $v \in M_f$, Φ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ensembles ouverts compacts W_i de $\widehat{\mathscr{T}_X}$. Cette transformée de Fourier se récrit donc

$$\begin{aligned} \widehat{g_v}(\xi) &= \sum_{i\in J}\lambda_i \int_{\mathscr{T}_X(k_v)\cap W_i} \mathbf{e}(\xi f(y))\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y) \\ &\leqslant C|\xi|_v^{-\sigma} \end{aligned}$$

avec $\sigma > 2$. Donc $\widehat{g_v}$ est une fonction L^1. Si v est réelle, en passant à la désingularisation $\mathscr{T}_{X,\Sigma}(k_v)$, on obtient que g_v est C^∞ à support compact et, par conséquent, $\hat{g}_v \in L^1(k_v)$.

Dans tous les cas on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier et on obtient

$$g_v(0) = \int_{k_v} \widehat{g_v}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

et par conséquent

$$\int_{\mathscr{T}_V(k_v)} \Phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_V,v}(y) = \int_{k_v}\int_{\mathscr{T}_X(k_v)} \Phi(y)\mathbf{e}_v(\xi f(y))\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y)\mathrm{d}\xi. \quad \square$$

4.6. Mesures adéliques. — Pour passer de la transformation de Fourier sur k_v à celle sur les adèles, il nous faut démontrer la convergence de certaines mesures adéliques.

Notation 4.6.1. — Si $\boldsymbol{z}$ est un élément de $\boldsymbol{A}_k$, on note $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{A}_k)$ le produit restreint de $\mathscr{T}_X^{z_v}(k_v)$ relativement aux intersections

$$\mathscr{T}_X^{z_v}(k_v) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)$$

où $\widehat{\mathscr{T}_X}$ est un modèle de $\widehat{\mathscr{T}_X}$.

Proposition 4.6.2. — *Si V vérifie la condition* (G) *et si la paire* (X, V) *vérifie la propriété* (A), *alors pour tout $\boldsymbol{z}$ de $\boldsymbol{A}_k$, le produit des mesures*

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}} = \prod_{v \in M_k} \boldsymbol{\omega}_{z_v, v}$$

converge sur $\mathscr{T}_X^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{A}_k)$ où $\boldsymbol{\omega}_{z_v,v}$ a été définie au paragraphe 4.2.

Cette proposition repose sur le lemme suivant, analogue du lemme 6.6 de [**Ig2**, page 165].

Lemme 4.6.3. — *Si V vérifie* (G) *et s'il existe $\sigma > 2$ tel que pour presque tout $v \in M_f - S$ on ait*

$$\left| \int_{\mathscr{T}_X(k_v) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \mathbf{e}_v(\xi f(y)) \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X, v}(y) \right| < |\xi|_v^{-\sigma},$$

alors pour presque toute place v de $M_f - S$ on a

$$\left| \int_{\mathscr{T}_X^{z_v}(k_v) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X, v}(y) - 1 \right| < C q_v^{-(\sigma - 1)} + C' q_v^{-\frac{3}{2}}$$

où C et C' sont indépendantes de v et $q_v = \#\mathbf{F}_v$.

Remarque 4.6.4. — Il résulte du lemme précédent que la proposition 4.6.2 est valide sous la condition analytique plus faible notée (AF) qui suit : il existe un ensemble S_1 de places et un nombre réel $\sigma > 2$, tel que pour tout $v \in M_f - S_1$ on ait

$$\left| \int_{\mathscr{T}_X(k_v) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \mathbf{e}_v(\xi f(y)) \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X, v}(y) \right| < |\xi|^{-\sigma}.$$

Démonstration du lemme 4.6.3. — On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_v : k_v & \to & \mathbf{R} \\ z & \mapsto & \int_{\mathcal{T}_X^{z_v}(k_v)\cap\widehat{\mathcal{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{z,v}. \end{array}$$

Il résulte de la démonstration de la proposition 4.5.1 qu'on a les relations

$$\begin{aligned} g_v(z_v) &= \int_{k_v}\int_{\mathcal{T}_X(k_v)\cap\widehat{\mathcal{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \mathbf{e}_v(\xi_v(f(y)-z_v))\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_X,v}(y)\mathrm{d}\xi_v \\ &= \int_{k_v} \widehat{g_v}(\xi_v)\mathbf{e}_v(-\xi_v z_v)\mathrm{d}\xi_v. \end{aligned}$$

Mais, en-dehors d'un nombre fini de places, si $\xi \in \mathcal{O}_v$, on a

$$\begin{aligned} \hat{g}_v(\xi) &= \int_{\mathcal{T}_X(k_v)\cap\widehat{\mathcal{T}_X}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_X} \\ &= L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_X^{-1})L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}(\omega_X^{-1}),v}(X(k_v)) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de [**Pe2**, démonstration du théorème 5.3.1].

Il résulte alors de l'hypothèse 3.1.4 et de [**Dr**, proposition 3] que

$$|L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_V^{-1}) - 1| \leqslant C_1 q_v^{-2}$$

et de [**Pe1**, page 117] que

$$\left| \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}(\omega_X^{-1}),v}(X(k_v))}{L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})} - 1 \right| < C_2 q_v^{-3/2}.$$

Par conséquent $\hat{g}_v(\xi)$ est constant pour $\xi \in \mathcal{O}_v$ et vérifie sur cet ensemble

$$|\hat{g}_v(\xi) - 1| < C q_v^{-3/2}.$$

On en déduit les inégalités

$$\begin{aligned} |g_v(z_v) - 1| &\leqslant C q_v^{-3/2} + \int_{k_v - \mathcal{O}_v} |\xi_v|^{-\sigma}\mathrm{d}\xi_v \\ &\leqslant C q_v^{-3/2} + (1 - 2^{-(\sigma-1)})^{-1} q_v^{-(\sigma-1)} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est donnée par [**Ig2**, page 164]. □

4.7. Transformation adélique et encerclement de la constante. — Nous pouvons maintenant énoncer un des principaux résultats de ce texte.

Théorème 4.7.1. — *Soit X une variété presque de Fano vérifiant les hypothèses 3.1.4 ainsi que la condition* (G)*. Soit V une hypersurface de X vérifiant également ces conditions et telle qu'en outre la restriction induise un isomorphisme*

$$\operatorname{Pic}\overline{X} \to \operatorname{Pic}\overline{V}$$

envoyant le cône effectif de X sur celui de V. Soit $\mathcal{T}_V$ un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel et s'inscrivant dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_V & \longrightarrow & \mathcal{T}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

On suppose que la paire (X, V) vérifie (A)*. On fixe en outre une fonction continue $\rho_S : \prod_{v \in S} k_v \to \mathbf{R}$ envoyant 0 sur 1 et telle que l'application*

$$(y_v)_{v \in S \cap M_f} \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \rho_\infty^{\boldsymbol{x}} : \prod\limits_{v \in S \cap M_\infty} k_v & \to & \mathbf{R} \\ (x_v)_{v \in S \cap M_\infty} & \to & \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{array} \right)$$

soit localement constante à valeurs dans les fonctions C^∞. On note $\rho : \boldsymbol{A}_k \to \mathbf{R}$ la fonction induite. Alors pour toute fonction

$$\Phi = \Phi_\infty . \prod_{v \in M_f} \Phi_v : \mathcal{T}_{X\, C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k) \to \mathbf{R}$$

où Φ_∞ est C^∞ à support compact dans $\prod_{v \in M_\infty} \widehat{\mathcal{T}_X}(k_v)$, et Φ_v localement constante pour v finie et coïncide avec la fonction caractéristique de $\mathcal{T}_X(k_v) \cap \widehat{\mathcal{T}_X(\mathcal{O}_v)}$ pour presque toute place finie, on a la relation

(4.7.1)
$$\int_{\mathcal{T}_{V\, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi(y) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_V}(y) = \int_{\boldsymbol{A}_k} \int_{\mathcal{T}_{X\, C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi(y) \rho(f(y)) \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi} f(y)) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_X}(y) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Démonstration. — On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \boldsymbol{A}_k & \to & \mathbf{R} \\ \boldsymbol{z} & \mapsto & \rho(\boldsymbol{z}) \int_{\mathcal{T}_X^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi(y) \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}}(y). \end{array}$$

La fonction g est à support compact et donc a fortiori $g \in L^1(\boldsymbol{A}_k)$. Il résulte de la proposition 4.3.5 et de la démonstration de la convergence de $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{z}}$ que la fonction g est continue.

Sa transformée de Fourier est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\hat{g}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \rho(f(y))\Phi(y)\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y)\\ &= \prod_{v\in M_f - S} \int_{\mathscr{T}_X(k_v)} \Phi_v(y)\mathbf{e}_v(\xi_v f(y))\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y)\\ &\quad\times \int_{\prod_{v\in S}\mathscr{T}_X(k_v)} \rho_S(f(y))\Phi_S(y)\mathbf{e}_S(\xi_S f(y)) \prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X,v}(y)\end{aligned}$$

où Φ_S et $\mathbf{e}_S$ sont définis par produit sur les places de S. Il en résulte que

$$|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C' \left(\prod_{|\xi_v|_v > 1} |\xi_v|_v^{-\sigma}\right)\left(\prod_{v\in M_f} (1 + C\#\mathbf{F}_v{}^{-3/2})\right)$$

où $\sigma > 2$ et donc $\hat{g}$ est une fonction L^1. En appliquant le formule d'inversion de Fourier, on obtient (4.7.1) □

Théorème 4.7.2. — *On suppose que X, V et ρ vérifient les hypothèses du théorème précédent, que* $\dim V > 2[k : \mathbf{Q}]$ *et on considère les fonctions* $\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, .)$ *définies au paragraphe 4.2. On suppose en outre que pour toute place archimédienne v de k les métriques choisies sur $X(k_v)$ sont C^∞ et la fonction définie sur $X(k_v)$ par*

$$\tilde{f}_v : y \mapsto \frac{|f(y)|_v}{\|y\|_v^L}$$

est telle qu'en tout point en lequel $\mathrm{d}\tilde{f}_v = 0$ *la forme quadratique* $\mathrm{d}^2\tilde{f}_v$ *est non dégénérée. Alors pour tout* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{R}_{>0}$ *et tout* $\mathfrak{b}$ *de* $\bigoplus_{v\in M_f - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$*, on a*

$$(4.7.2)\quad \begin{aligned}&\int_{\mathscr{T}_{V\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_V}_{\mathscr{T}_V}(H, \mathfrak{b}, y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_V}(y)\\ &\qquad= \int_{\boldsymbol{A}_k}\int_{\mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Rappelons que la fonction $\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, .)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathscr{E}$ défini par

$$\forall v \in S, \quad \pi_X(y_v) \in U_X(k_v), \tag{4.7.3}$$

$$(y_v)_{v \in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}_X), \tag{4.7.4}$$

$$\forall L \in C_{\text{eff}}(V), \quad \prod_{v \in S} \|y_v\|_v^L \leqslant 1, \tag{4.7.5}$$

$$\prod_{v \in S} (\|y_v\|_v^{\omega_V^{-1}})^{-1} \leqslant H, \tag{4.7.6}$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathfrak{b}.\mathscr{T}_{X\,C_{\text{eff}}(\overline{V}),S}(\boldsymbol{A}_k). \tag{4.7.7}$$

Elles s'écrivent donc

$$\Phi_S \times \prod_{v \notin S} \Phi_v$$

où les fonctions Φ_v sont localement constantes, à support compact et coïncident pour presque toute place v avec la fonction caractéristique de $\mathscr{T}_X(k_v) \cap \widehat{\mathscr{T}_X}(\mathcal{O}_v)$. D'autre part, la fonction Φ_S est à support compact dans $\prod_{v \in S} \widehat{\mathscr{T}_X}(k_v)$. En effet il résulte des conditions (4.7.4), (4.7.5) et (4.7.6) qui précèdent que l'image par $\prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T}_X, v}$ du domaine $\mathscr{E}$ est bornée dans

$$\prod_{v \in S} X^*(T_{\text{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R}.$$

En outre la fonction

$$(x_v)_{v \in M_f \cap S} \mapsto \Phi^{\boldsymbol{x}}_\infty = ((y_v)_{v \in M_\infty} \mapsto \Phi_S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))$$

est localement constante. Compte tenu de la démonstration du théorème précédent, il suffit de montrer que pour $\boldsymbol{x} = (x_v)_{v \in M_f \cap S}$ fixé la fonction

$$\begin{aligned} g_\infty : \prod_{v \in \infty} k_v \quad &\to \quad \mathbf{R} \\ \boldsymbol{z} = (z_v)_{v \in M_\infty} \quad &\mapsto \quad \int_{\prod_{v \in M_\infty} \mathscr{T}_X^{z_v}(k_v)} \Phi^{\boldsymbol{x}}_\infty(y) \rho^{\boldsymbol{x}}_\infty(f(y)) \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X, \infty}(y) \end{aligned}$$

est $C^{1+[k:\mathbf{Q}]}$ ce qui entraînera que sa transformée de Fourier admet une majoration de la forme $C\|\boldsymbol{\xi}\|^{-(1+[k:\mathbf{Q}])}$ et donc que la fonction $\hat{g}$ définie dans la démonstration précédente appartient à $L^1(\boldsymbol{A}_k)$.

Mais il résulte des hypothèses faites sur les métriques réelles que l'ensemble $\mathscr{E}_\infty^{\boldsymbol{x}}$ défini par les conditions (4.7.4), (4.7.5) et (4.7.6) peut être décrit comme l'image inverse par l'application C^∞ dominante $\prod_{v\in M_\infty}\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T}_X,v}$ d'un polyèdre $P_{\boldsymbol{x}}$ de $\prod_{v\in M_\infty}X^*(T_{\mathrm{NS}})_v\otimes\mathbf{R}$. On considére l'application

$$\prod_{v\in M_\infty}\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T}_X,v}\times\prod_{v\in M_\infty}\tilde{f}_v:\prod_{v\in M_\infty}\mathscr{T}_X(k_v)\to\prod_{v\in M_\infty}X^*(T_{\mathrm{NS}})_v\otimes\mathbf{R}\times\prod_{v\in M_\infty}\mathbf{R}.$$

Au voisinage d'un point en lequel les $\mathrm{d}\tilde{f}_v$ ne s'annulent pas, on peut à l'aide de paramétrisations C^∞ se ramener à l'intersection d'un domaine de la forme

$$P_x\times\prod_{v\in M_\infty}\mathbf{R}\subset\prod_{v\in M_\infty}X^*(T_{\mathrm{NS}})_v\otimes\mathbf{R}\times\prod_{v\in M_\infty}\mathbf{R}$$

avec un espace affine dépendant de $(z_v)_{v\in M_\infty}$ donné par un système d'équations de la forme

$$z_v l_v(t)=y_v\quad\text{pour}\quad v\in M_\infty$$

où l_v est une forme linéaire sur $\prod_{v\in M_\infty}X^*(T_{\mathrm{NS}})_v\otimes\mathbf{R}$. Au voisinage d'un point en lequel $\mathrm{d}\tilde{f}_v$ s'annule, une réduction analogue amène à considérer en la place v une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{[k_v:\mathbf{R}]\dim X}\varepsilon_i y_{i,v}^2=z_v l_v(t).$$

avec $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$. Notons que ce cas ne peut pas se produire lorsque $z_v=0$ puisqu'on a supposé V lisse et que l'adhérence du domaine choisi est contenue dans $\prod_{v\in M_\infty}\mathscr{T}_X(k_v)$. Dans tous les cas, l'assertion de dérivabilité résulte de l'hypothèse sur la dimension de V et de calculs de volumes élémentaires.

On obtient donc que $\hat{g}$ est L^1 et la fin de la démonstration est similaire à celle du théorème précédent. □

Corollaire 4.7.3. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a les relations*

(4.7.8) $$\#W(T_{\mathrm{NS}})n_{U,\mathbf{H}}(H)$$
$$=\sum_{\substack{i\in I\\ \mathfrak{b}\in\bigoplus_{v\in M_f-S}X_*(T_{\mathrm{NS}})_v}}\mu(\mathfrak{b})\int_{\boldsymbol{A}_k/k}\sum_{y\in\mathscr{T}_{i,X}(k)}\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_{i,X}}(H,\mathfrak{b},y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle\boldsymbol{\xi},f(y)\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

$$(4.7.9)\quad \#W(T_{\mathrm{NS}})\alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)\int_0^{\log H} u^{t-1}e^u \mathrm{d}u$$
$$= \sum_{\substack{i\in I\\ \mathfrak{b}\in \bigoplus_{v\in M_f - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v}} \boldsymbol{\mu}(\mathfrak{b})\int_{\boldsymbol{A}_k}\int_{\mathscr{T}_{i,X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_{i,X}}(H,\mathfrak{b},y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_{i,X}}(y)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Corollaire 4.7.4. — *Si $X = \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{n_i}_{\mathbf{Q}}$ et f est donnée par un polynôme homogène de degré total d de sorte que*

$$\inf_{1\leqslant i\leqslant m} n_i \geqslant 2^d d,$$

si V est lisse de dimension supérieure ou égale à 4 et si les métriques sont choisies de manière à vérifier les conditions ci-dessus, alors on pose $N = \sum_{i=1}^m n_i + 1$ et on a les relations

(4.7.10)
$$n_{U,\mathbf{H}}(H) = \frac{1}{2^m}\sum_{\mathfrak{b}\in \bigoplus_{v\in M_f - S}\mathbf{Z}^m} \boldsymbol{\mu}(\mathfrak{b})\int_{\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}\sum_{y\in\mathbf{Q}^N}\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\boldsymbol{A}^N_{\mathbf{Q}}}(H,\mathfrak{b},y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle\boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

$$(4.7.11)\quad \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)\int_0^{\log H}u^{t-1}e^u\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2^m}\sum_{\mathfrak{b}\in \bigoplus_{v\in M_f - S}\mathbf{Z}^m}\boldsymbol{\mu}(\mathfrak{b})\int_{\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}}\int_{\boldsymbol{A}^N_{\mathbf{Q}}}\Phi^{\mathbf{H}_X}_{\boldsymbol{A}^N_{\mathbf{Q}}}(H,\mathfrak{b},y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle\boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Démonstration. — Par la remarque 2.1.6, le cône des diviseurs effectifs de V est donné par celui de X. Il résulte de le proposition 4.4.3 que la paire (X,V) vérifie la condition (A). La condition (G) est automatique dans ce cas. □

5. Conclusion

Les deux derniers corollaires du paragraphe précédent permettent de se réduire à des majorations de différences de la forme

$$
(5.1)\quad \Big| \int_{\boldsymbol{A}_k/k} \sum_{y \in \mathscr{T}_X(k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\
- \int_{\boldsymbol{A}_k} \int_{\mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y)\mathrm{d}\,\xi \Big|
$$

En s'inspirant de la méthode du cercle, on est alors amené à décomposer l'espace quotient $\prod_{v \in M_f} \mathcal{O}_v \backslash \boldsymbol{A}_k/k$, qui est homéomorphe à un produit de cercles, en arcs majeurs et arcs mineurs puis à majorer sur les arcs mineurs chacun des deux termes obtenus ce qui passe par des majorations de sommes d'exponentielles comme celles qui sont au cœur de la méthode du cercle, et sur les arcs majeurs la différence entre ces termes. A ce propos il convient de noter que pour $\xi = 0$ et $\rho = 1$, majorer la différence

$$
(5.2)\quad \Big| \sum_{y \in \mathscr{T}_X(k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle) \\
- \int_{\mathscr{T}_{X\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{X})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}_X}_{\mathscr{T}_X}(H, \mathfrak{b}, y)\rho(f(y))\mathbf{e}(\langle \boldsymbol{\xi}, f(y)\rangle)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_X}(y) \Big|.
$$

revient à comparer $n_{U, \mathbf{H}_X(\omega_V^{-1})}$ avec une formule intégrale. On ne peut donc espérer que cette différence ne soit négligeable que si U_X est fortement saturé pour ω_V^{-1} au sens de Batyrev et Tschinkel [**BT3**, definition S_2], c'est à dire si pour tout fermé strict W de U_X, on a :

$$
\begin{array}{rcl} \dfrac{n_{W, \mathbf{H}_X(\omega_V^{-1})}(H)}{n_{U_X, \mathbf{H}_X(\omega_V^{-1})}(H)} & \to & 0 \\ H & \to & +\infty. \end{array}
$$

En particulier si V est une hypersurface de produits d'espaces projectifs, cela implique $L \in \mathbf{Q}\omega_X^{-1}$. Il est toutefois envisageable que ce problème puisse être évité par un choix judicieux de la fonction auxiliaire ρ.

Notons par contre que si $L \in \mathbf{Q}\omega_X^{-1}$, alors l'équivalence des deux termes de (5.2) pour $\xi = 0$ résulte de la conjecture pour X.

Références

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ______, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT3] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[BT4] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BR] M. Borovoi and Z. Rudnick, *Hardy-Littlewood varieties and semi-simple groups*, Invent. math. **119** (1995), 37–66.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

[Bo] R. Bott, *On a theorem of Lefschetz*, Mich. Math. J. **6** (1959), 211–216.

[Bre] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. of Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bry] J.-L. Brylinski, *Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **288** (1979), 137–139.

[CLT1] A. Chambert-Loir and Y. Tschinkel, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ______, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. of Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ______, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS3] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[Da] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspekhi. Mat. Nauk **33** (1978), n° 2, 85–134; English transl. in Russian Math. Surveys **33** (1978), n° 2, 97–154.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.

[Ig1] J.-I. Igusa, *Criteria for the validity of a certain Poisson formula*, Algebraic number theory (Kyoto, 1976) (S. Iyanaga, ed.), Japan society for the promotion of science, Tokio, 1977, pp. 43–65.

[Ig2] ———, *Lectures on forms of higher degree*, Tata institute of fundamental research, Bombay and Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Oda] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.

[Ono1] T. Ono, *On some arithmetic properties of linear algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), n° 2, 266–290.

[Ono2] ———, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), n° 1, 101–139.

[Ono3] ———, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n° 1, 47–73.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Ro] M. Robbiani, *Rational points of bounded height on Del Pezzo surfaces of degree six*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 403–422.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[ST] M. Strauch and Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[Ta] J. T. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic number theoy (J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic press, London, 1967, pp. 305–347.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

2001

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

TAMAGAWA NUMBERS OF DIAGONAL CUBIC SURFACES, NUMERICAL EVIDENCE*

by

Emmanuel Peyre & Yuri Tschinkel

Abstract. — A refined version of Manin's conjecture about the asymptotics of points of bounded height on Fano varieties has been developped by Batyrev and the authors. We test numerically this refined conjecture for some diagonal cubic surfaces.

Résumé. — Une version raffinée d'une conjecture de Manin sur le comportement asymptotique des points de hauteur bornée sur les variétés de Fano a été proposée par Batyrev et les auteurs. Nous testons numériquement cette conjecture pour diverses surfaces cubiques.

1. Introduction

The aim of this paper is to test numerically a refined version of a conjecture of Manin concerning the asymptotic for the number of rational points of bounded height on Fano varieties (see [**BM**] or [**FMT**] for Manin's conjecture and [**Pe1**] or [**BT3**] for its refined versions).

Let V be a smooth Fano variety over a number field F and ω_V^{-1} its anticanonical line bundle. Let $\mathrm{Pic}(V)$ be the Picard group and $\mathrm{NS}(V)$ the Néron-Severi group of V. We denote by $\mathrm{Val}(F)$ the set of all places of F and by F_v the v-adic completion of F. Let $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(F)}$ be an adelic metric on ω_V^{-1}. By definition, this is a family of v-adically continuous metrics on $\omega_V^{-1}\otimes F_v$ which for almost all valuations v are given by a smooth model of V (see [**Pe2**]). These data define a

2000 *Mathematics Subject Classification.* — primary 11D25; secondary 14G05, 14J25.

*Math. Comp. **70** (2000), n$^{\mathrm{o}}$ 233, 367–387

height $\mathbf{H}$ on the set of rational points $V(F)$ given by

$$\forall x \in V(F), \quad \forall y \in \omega_V^{-1}(x), \quad \mathbf{H}(x) = \prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} \|y\|_v^{-1}.$$

For every open subset $U \subset V$ and every real number H we have

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) = \#\{x \in U(F) \mid \mathbf{H}(x) \leqslant H\} < \infty.$$

The problem is to understand the asymptotic behavior of $n_{U,\mathbf{H}}(H)$ as H goes to infinity. It is expected that at least for Del Pezzo surfaces the following asymptotic formula holds:

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) = \theta_{\mathbf{H}}(V) H (\log H)^{t-1}(1 + o(1))$$

as $H \to \infty$, over appropriate finite extensions E/F of the groundfield. Here the open set U is the complement to exceptional curves, $\theta_{\mathbf{H}}(V) > 0$ and t is the rank of the Picard group of V over E. We have counter-examples to this conjecture in every dimension $\geqslant 3$ [**BT2**] (see [**BT3**] for a discussion of higher dimensional varieties).

In this paper we focus on the constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$. On the one hand, there is a theoretical description

$$\theta_{\mathbf{H}}(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V) \tag{1}$$

where $\tau_{\mathbf{H}}(V)$ is a Tamagawa number associated to the metrized anticanonical line bundle [**Pe1**], $\alpha(V)$ is a rational number defined in terms of the cone of effective divisors [**Pe1**] and the integer $\beta(V)$ is a cohomological invariant, which first appeared in asymptotic formulas in [**BT1**].

On the other hand, let us consider a diagonal cubic surface $V \subset \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ given by

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0,$$

with $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ and $abcd \neq 0$. Our counting problem can be formulated as follows: find all quadruples of integers (x, y, z, t) with

$$\text{g.c.d.}(x, y, z, t) = 1 \quad \text{and} \quad \max\{|x|, |y|, |z|, |t|\} \leqslant H$$

which satisfy the equation above. Quadruples differing by a sign are counted once. A *proof* of an asymptotic of the type (1) for smooth cubic surfaces seems to be out of reach of available methods, but one can numerically search for solutions of bounded height. The cubics with coefficients $(1, 1, 1, 2)$ and $(1, 1, 1, 3)$ and height $H \leqslant 2000$ were treated by Heath-Brown in [**HB**]. In both cases weak approximation fails. Swinnerton-Dyer made substantial progress towards an interpretation of the constant $\tau_{\mathbf{H}}(V)$ [**SD**]. In particular, he suggested that

the adelic integral defining $\tau_{\mathbf{H}}(V)$ should be taken over the closure of rational points $\overline{V(F)} \subset V(\boldsymbol{A}_F)$, rather than the whole adelic space.

Our goal is to compute the theoretical constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$ explicitely for certain diagonal cubic surfaces with and without obstruction to weak approximation and to compare the result with numerical data (with height $H \leqslant 100000$). We observe a very good accordance.

In section 2 we define the Tamagawa number. This definition is slightly different from the one in [**Pe1**], but the numbers coincide conjecturally. In sections 3, 4 and 5 we explain how to compute it. There is a subtlety at the places of bad reduction, notable at 3, overlooked previously. In section 6 we compute the Brauer-Manin obstruction to weak approximation. And in section 7 we present the numerical results. These computations were made using a program of Bernstein which is described in [**Be**].

2. Conjectural constant

Notations 2.1. — If $\mathscr{V}$ is a scheme over a ring A and B an A-algebra, we denote by $\mathscr{V}_B$ the product $\mathscr{V} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$ and by $\mathscr{V}(B)$ the set of B-points, that is $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} B, \mathscr{V})$. For any field E, we denote by $\overline{E}$ a fixed algebraic closure and by $\overline{V}$ the variety $V_{\overline{E}}$.

If F is a number field, we identify the set of finite places with the set of prime ideals in $\mathscr{O}_F$. We denote by d_F the absolute value of its discriminant. If $\mathfrak{p}$ is a finite place of F, then $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$ is the ring of integers in $F_{\mathfrak{p}}$ and $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ its residue field.

In the sequel we will always assume that V is a smooth projective geometrically integral variety over a number field F satisfying the following conditions:

(i) The group $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ is trivial for $i = 1$ or 2,

(ii) $\operatorname{Pic}(\overline{V})$ has no torsion,

(iii) ω_V^{-1} belongs to the interior of the cone of classes of effective divisors $\Lambda_{\text{eff}}(V)$.

Since V is projective, the adelic space $V(\boldsymbol{A}_F)$ of V coincides with the product

$$\prod_{v \in \operatorname{Val}(F)} V(F_v).$$

One says that *weak approximation* holds for V if the diagonal map from $V(F)$ to $V(\boldsymbol{A}_F)$ has a dense image. Our definition of the conjectural asymptotic constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$ uses the notion of the Brauer-Manin obstruction to weak approximation, which we now recall.

Notations 2.2. — Let $\mathrm{Br}(V)$ be the étale cohomology group $H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m)$. If A belongs to $\mathrm{Br}(V)$ and E is a field over F then, for any P in $V(E)$, we denote by $A(P)$ the evaluation of A at P. For any class A, there exists a finite set of places S of F such that

$$\forall v \notin S, \quad \forall P_v \in V(F_v), \quad A(P_v) = 0,$$

(see, for example, [**CT2**, lemma 1]). For any v in $\mathrm{Val}(F)$, let $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(F_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ be the invariant given by local class field theory normalized so that the sequence

$$0 \to \mathrm{Br}(F) \to \bigoplus_{v \in \mathrm{Val}(F)} \mathrm{Br}(F_v) \xrightarrow{\Sigma \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

is exact. Let ρ_A be the composite map

$$V(\boldsymbol{A}_F) \to \bigoplus_{v \in \mathrm{Val}(F)} \mathrm{Br}(F_v) \xrightarrow{\Sigma \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Then one defines

$$V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}} = \bigcap_{A \in \mathrm{Br}\, V} \ker(\rho_A) \subset V(\boldsymbol{A}_F).$$

The above exact sequence gives an inclusion $V(F) \subset V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}$. The *Brauer-Manin obstruction to weak approximation*, introduced by Manin in [**Ma1**] and by Colliot-Thélène and Sansuc in [**CTS**] is defined as the condition

$$V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V(\boldsymbol{A}_F).$$

Remark 2.1. — It is conjectured that the closure of the set of rational points $\overline{V(F)} \subset V(\boldsymbol{A}_F)$ in fact coincides with $V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}$, at least for Del Pezzo surfaces. This has been proved, for example, by Salberger and Skorobogatov for a smooth complete intersection of two quadrics in $\mathbf{P}^4$ if $V(F)$ is not empty (see [**SaSk**]). It would be very interesting to see an example of a cubic surface V with $t = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V) = 1$ where weak approximation holds, or where one could actually prove that $\overline{V(F)} = V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}$, assuming that $V(F)$ is Zariski dense, which by a result of B. Segre (see [**Ma2**, §29, §30]) is equivalent to $V(F) \neq \emptyset$.

Notations 2.3. — Let $(\|\cdot\|_v)_{v \in \mathrm{Val}(F)}$ be an adelic metric on ω_V^{-1} and $\mathbf{H}$ the associated height function on $V(F)$. The adelic metrization of the anticanonical line bundle yields for any place v of F a measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$ on the locally compact

space $V(F_v)$, given by the local formula

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_{1,v}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n,v}} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v}.$$

where $x_{1,v}, \ldots, x_{n,v}$ are local v-adic analytic coordinates, $\frac{\partial}{\partial x_{1,v}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n,v}}$ is seen as a section of ω_V^{-1} and the Haar measures $\mathrm{d}x_{j,v}$ (for $j = 1, \ldots, n$) are normalized by

- if v is a finite place then $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_{j,v} = 1$,
- if v is real then $\mathrm{d}x_{j,v}$ is the standard Lebesgue measure,
- if v is complex then $\mathrm{d}x_{j,v} = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$.

We choose a finite set S of bad places containing the archimedean ones and a smooth projective model $\mathscr{V}$ of V over the ring of S-integers $\mathscr{O}_S$. For any $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Val}(F) - S$, the local term of the L-function corresponding to the Picard group is defined by

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{-s}\,\mathrm{Fr} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Q})},$$

where Fr is the Frobenius map. The corresponding global L-function is given by

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Val}(F) - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})),$$

it converges for $\mathrm{Re}(s) > 1$ and has a meromorphic continuation to $\mathbf{C}$ with a pole of order $t = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V)$ at 1. The local convergence factors are defined by

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V})) & \text{if } v \in \mathrm{Val}(F) - S, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The Weil conjectures, proved by Deligne, imply that the adelic measure

$$\prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$$

converges on $V(\boldsymbol{A}_F)$ (see [**Pe1**, proposition 2.2.2]).

Definition 2.4. — The *Tamagawa measure* corresponding to $\mathbf{H}$ is defined by

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{\sqrt{d_F}^{\dim V}} \lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}.$$

The *Tamagawa number* is defined by

$$\tau_{\mathbf{H}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}).$$

The cohomological constant is given by

$$\beta(V) = \# H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V})).$$

Let $\mathrm{NS}(V)^\vee$ be the lattice dual to $\mathrm{NS}(V)$. It defines a natural Lebesgue measure $\mathbf{dy}$ on $\mathrm{NS}(V)^\vee \otimes \mathbf{R}$. Denote by $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V) \subset \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ the cone of effective divisors and by $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \subset \mathrm{NS}(V)^\vee \otimes \mathbf{R}$ the dual cone.

Definition 2.5. — We define

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!} \int_{\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{dy}.$$

Remarks 2.2. — (i) Of course, for nonsplit cubic surfaces with $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V) = 1$ the constant $\alpha(V) = 1$. However, it is a challenge to compute this constant for a split cubic surface with $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V) = 7$.

(ii) As Salberger, we use $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}})$ instead of $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(\overline{V(k)})$ in the definition of $\tau_{\mathbf{H}}(V)$. By remark 2.1 these numbers are conjecturally the same, but only the first one is computable for a general cubic. Also we use the convention of [**Pe1**, §2.2.5] for the definition of $\alpha(V)$.

Definition 2.6. — We define the constant corresponding to V and $\mathbf{H}$ as

$$\theta_{\mathbf{H}}(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V).$$

3. Measures and density

In this section we relate the local volumes of the variety with the density of solutions modulo $\mathfrak{p}^n$. Lemma 5.4.6 in [**Pe1**] relates the local volume for $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},\mathfrak{p}}$ to the volume for Leray's measure. We now compare the latter to the density modulo $\mathfrak{p}^n$.

Notations 3.1. — Let F be a number field and V a smooth complete intersection in $\mathbf{P}^N_F$ defined by m homogeneous polynomials f_i in the algebra $\mathscr{O}_F[X_0, \dots, X_N]$. Let $\delta = N + 1 - \sum_{i=1}^m \deg f_i$. We assume that $\delta \geqslant 1$. We denote

by $W \subset \mathbf{A}_F^{N+1} - \{0\}$ the cone above V and by $\boldsymbol{f} : \mathbf{A}_{\mathscr{O}_F}^{N+1} \to \mathbf{A}_{\mathscr{O}_F}^m$ the map induced by the f_i. Then the Leray form on W is defined locally by

$$(2) \quad \omega_L = (-1)^{Nm - \sum_{j=1}^m k_j} \left(\mathrm{Det}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{k_j}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \right)^{-1} \times \mathrm{d}X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}X_{k_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}X_{k_m}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}X_N$$

where $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_m \leqslant N$. For any v in $\mathrm{Val}(F)$, this form yields a measure $\boldsymbol{\omega}_{L,v}$ on $W(F_v)$.

The following result is well known in the setting of the circle method (see for example [**Lac**, proposition 1.14]) where it is generally proved using a Fourier inversion formula. It may also be deduced from a more general result of Salberger [**Sal**, theorem 2.13]. We prove it here in a direct and elementary way.

Proposition 3.1. — *We fix a finite place $v = v_{\mathfrak{p}}$ of F. If all f_i have the same degree, then*

$$\int_{\{x \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x)=0\}} \boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\#\{x \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^m\}}{(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{r \dim W}}.$$

This proposition follows from the next two lemmata. In fact, in the explicit computations, we shall only use lemma 3.2 and the first assertion of lemma 3.4.

Lemma 3.2. — *For any $r > 0$ we consider the set*

$$W^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r) = \{x \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1} - (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^m\}$$

and put $N^*(\mathfrak{p}^r) = \#W^*(\mathscr{O}/\mathfrak{p}^r)$. Then there is an integer $r_0 > 0$ such that

$$\int_{\{x \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} - \mathfrak{p}^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x)=0\}} \boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}} = \frac{N^*(\mathfrak{p}^r)}{(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{r \dim W}}$$

if $r \geqslant r_0$.

Remark 3.3. — It will follow from the proof that it is in fact sufficient to take r_0 to be

$$2 \inf\{r \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \forall x \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} - \mathfrak{p}^{N+1}, f(x) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^r \Rightarrow (\mathfrak{p}^r)^m \subset \mathrm{Im}(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_x)\} + 1.$$

Proof. — For any $r > 0$,

$$\int_{\{x\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}-\mathfrak{p}^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)=0\}}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}=\sum_{x\in(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}-(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}}\int_{\{y\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(y)=0\text{ and }[y]_r=x\}}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}(y)$$
$$=\sum_{x\in W^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)}\int_{\{y\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(y)=0\text{ and }[y]_r=x\}}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}(y)$$

where for any y in $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}$ we denote by $[y]_r$ its class modulo $\mathfrak{p}^r$. Since V is smooth, the cone W does not intersect the cone defined by the equations

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{k_j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}=0\quad\text{for}\quad 0\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant N.$$

Therefore, for r big enough and for any x in $(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}-(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}$ such that $\boldsymbol{f}(x)=0$ in $(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^m$ one has that

$$\inf_{(k_j)_j} v_{\mathfrak{p}}\left(\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{k_j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}\right)$$

is finite and constant on the class defined by x. Let c be its value. We may assume that $r > c$ and choose a family $0\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant N$ which realizes this minimum. We may assume that $k_j = N-m+j$. Then if $y\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}$ represents x and if z belongs to $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}$, one has

$$f_i(y+z)=f_i(y)+\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(y)z_j+\sum_{j,k=0}^{N}P_{i,j,k}(y,z)z_jz_k. \tag{3}$$

where the $P_{i,j,k}$ are polynomials in $2N+2$ variables with coefficients in $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$. Let L_y be the image of the linear map defined by $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(y)\right)$ on $(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})^{N+1}$, then one has the inclusions

$$(\mathfrak{p}^r)^m\subset(\mathfrak{p}^c)^m\subset L_y\subset(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})^m$$

and $\#((\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})^m/L_y)=(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^c$. In particular, for any z in $(\mathfrak{p}^r)^{N+1}$ one has $L_{y+z}=L_y$. We put $L=L_y$. By (3) we have that for any z in $(\mathfrak{p}^r)^{N+1}$,

$$\boldsymbol{f}(y+z)-\boldsymbol{f}(y)\in\mathfrak{p}^rL.$$

Therefore, the image of $\boldsymbol{f}(y)$ in $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^m/\mathfrak{p}^r L$ depends only on x and we denote it by $\boldsymbol{f}^*(x)$. If $\boldsymbol{f}^*(x) \neq 0$ then the set

$$\{u \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ and } [u]_r = x\}$$

is empty and the integral is trivial. On the other hand, the set

$$\{u \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^m \text{ and } [u]_r = x\}$$

is also empty. If $\boldsymbol{f}^*(x) = 0$ then it follows from Hensel's lemma that the coordinates $X_0, \ldots, X_{N-m}$ define an isomorphism from

$$\{u \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ and } [u]_r = x\}$$

to $(y_0, \ldots, y_{N-m}) + (\mathfrak{p}^r)^{N-m+1}$. Therefore, using (2) and the definition of c, we get that

$$\begin{aligned} \int_{\{y \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(y)=0 \text{ and } [y]_r = x\}} \boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}(y) &= \int_{(y_0,\ldots,y_{N-m})+(\mathfrak{p}^r)^{N-m+1}} (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^c \mathrm{d}u_{0,\mathfrak{p}} \ldots \mathrm{d}u_{N-m,\mathfrak{p}} \\ &= \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{c-r\dim W}. \end{aligned}$$

Let $x/\mathfrak{p}^{r+c}$ be the set

$$\{u \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^{N+1} \mid [u]_r = x\}.$$

Then $\boldsymbol{f}$ induces a map from $x/\mathfrak{p}^{r+c}$ to $(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^m$ given by

$$\boldsymbol{f}([y+z]_{r+c}) = [\boldsymbol{f}(y)]_{r+c} + \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial X_j}(y) z_j,$$

the image of which is $\mathfrak{p}^r L/(\mathfrak{p}^{r+c})^m$. Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} &\#\{u \in x/\mathfrak{p}^{r+c} \mid \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^m\} \\ &\qquad = \#(\mathfrak{p}^r L/(\mathfrak{p}^{r+c})^m)^{-1} \times \#(\mathfrak{p}^r/\mathfrak{p}^{r+c})^{N+1} \\ &\qquad = \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{c+c\dim W} \end{aligned}$$

and

$$\frac{\#\{u \in x/\mathfrak{p}^{r+c} \mid \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r+c})^m\}}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{(r+c)\dim W}} = \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{c-r\dim W}.$$

Finally, we get the result. □

Lemma 3.4. — *With notation as in proposition 3.1, one has*

$$\int_{\{x\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}-\mathfrak{p}^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)=0\}}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}=\left(1-\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\delta}}\right)\int_{\{x\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)=0\}}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}$$

and

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N^*(\mathfrak{p}^r)}{(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{r\dim W}}$$
$$=\left(1-\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\delta}}\right)\lim_{r\to+\infty}\frac{\#\{x\in(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)=0 \text{ in } (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^m\}}{(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{r\dim W}}.$$

Proof. — By definition, one has for any λ in $F_{\mathfrak{p}}^*$ the relation

$$\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}(\lambda U)=|\lambda|_{\mathfrak{p}}^{\delta}\boldsymbol{\omega}_{L,\mathfrak{p}}(U)$$

which implies the first assertion.

For the second one, let d be the common degree of the f_i. If $r\geqslant id+1$, one has the relations

$$\begin{aligned}
&\#\{x\in(\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^r)^{N+1}-(\mathfrak{p}^{i+1}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^r\}\\
&=\#\{x\in(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r-i})^{N+1}-(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{r-i})^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{r-id}\}\\
&=\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{(N+1)(d-1)i}\#\{x\in(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{r-id})^{N+1}-(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{r-id})^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{r-id}\}.
\end{aligned}$$

Thus we get

$$\begin{aligned}
\#\{x\in(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)=0 \text{ in } (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r)^m\}&\\
=\sum_{0\leqslant i\leqslant a}\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{(N+1)(d-1)i}N^*(\mathfrak{p}^{r-id})&\\
+\#\{x\in(\mathfrak{p}^{a+1}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}\mid \boldsymbol{f}(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^r\}&
\end{aligned}$$

where $r-r_0=ad+b$ with $b<d$. We have $a>(r-r_0-d)/d$ and $N+1-md\geqslant 1$. Thus

$$\#(\mathfrak{p}^{a+1}/\mathfrak{p}^r)^{N+1}\leqslant\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{(N+1)(r-(r-r_0)/d)}\leqslant\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{r(N+1-m-1/d)+(N+1)r_0/d}$$

Dividing by $\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{r\dim W}$ and using the previous lemma, we get that

$$\frac{\#\{x \in (\mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x) = 0 \text{ in } (\mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^m\}}{(\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{r\dim W}} = \left(1 - \frac{1}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^\delta}\right)^{-1} \frac{N^*(\mathfrak{p}^r)}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{r\dim W}} + O(\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-r/d}). \quad \square$$

The equations $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ define an isomorphism

$$\omega_V^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_V(\delta).$$

Therefore, for any place v of F the metric on $\mathscr{O}_V(\delta)$ induced by the monomials of degree δ defines a metric $\|\cdot\|_v$ on ω_V^{-1}. The height $\mathbf{H}$ defined by the corresponding metrized line bundle $(\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(F)})$ verifies

$$\forall x \in V(F), \quad \mathbf{H}(x) = \prod_{v\in\mathrm{Val}(F)} \sup_{0\leqslant i\leqslant N} (|x_i|_v)^\delta.$$

Corollary 3.5. — *With notations as in proposition 3.1 one has for any finite place $\mathfrak{p}$ of F*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},\mathfrak{p}}(V(F_\mathfrak{p})) = \frac{1-\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-\delta}}{1-\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-1}} \lim_{r\to+\infty} \frac{\#\{x\in(\mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^{N+1} \mid \boldsymbol{f}(x)=0 \text{ in } (\mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^r)^m\}}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{r\dim W}}.$$

Proof. — This follows from proposition 3.1 and [**Pe1**, lemme 5.4.6]. □

Remark 3.6. — In particular, a factor 1/3 is erroneously introduced in the first formula giving the constant $C_{\mathrm{HB}}(V)$ on page 148 in [**Pe1**] (see also [**SD**, p. 374]) and therefore a factor 3 is missing in proposition 5.6.1 of [**Pe1**]. In fact, if V is the cubic surface defined by the equation

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = kX_3^3$$

with $k = 2$ or 3, one gets the equality

$$\mathfrak{S}_k = \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V),$$

where $\mathfrak{S}_k$ is the constant defined by Heath-Brown in [**HB**]. Therefore, the numerical experiments made by Heath-Brown are compatible with the constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$ as in definition 2.6 and the remark 2.3.2 in [**Pe1**] has to be corrected accordingly.

4. Points on cubics over $\mathbf{F}_p$

We now describe explicitely the cardinal of $V(\mathbf{F}_p)$ when V is the diagonal cubic surface given by the equation

$$X_0^3 + q^2X_1^3 + qrX_2^3 + r^2X_3^3 = 0 \tag{4}$$

where $q, r \in \mathbf{Z}_{>1}$ are squarefree and coprime. We put $K_1 = \mathbf{Q}(q^{1/3})$, $K_2 = \mathbf{Q}(r^{1/3})$ and $K_3 = \mathbf{Q}((qr)^{1/3})$ and consider

$$\nu_{q,r}(p) = \#\{i \mid p \text{ is totally split in } K_i\}.$$

Proposition 4.1. — *if $p \nmid 3qr$, then*

$$\frac{\#V(\mathbf{F}_p)}{p^2} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3, \\ 1 + \frac{3\nu_{q,r}(p)-2}{p} + \frac{1}{p^2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.2. — By a result of Weil (see [**Ma2**, theorem 23.1]),

$$\frac{\#V(\mathbf{F}_p)}{p^2} = 1 + \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \operatorname{Pic} \overline{V})p + p^2$$

and the only difficulty is to determine $\operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \operatorname{Pic} \overline{V})$. We have chosen to avoid this computation by using a general formula valid for diagonal hypersurfaces.

Remark 4.3. — If $p \equiv 1 \bmod 3$ then $\mathbf{F}_p$ contains the cubic roots of 1. Therefore $\nu_{q,r}(p)$ is either 3, 1 or 0. In other words, the possible values in this case are

$$1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}, \quad 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}, \quad 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}.$$

Proof. — Let $N(p)$ be the number of solutions of (4) in $(\mathbf{F}_p)^4$. By [**IR**, §8.7, theorem 5], we have the formula

$$N(p) = p^3 + \sum \overline{\chi}_1(1)\overline{\chi}_2(q^2)\overline{\chi}_3(r^2)\overline{\chi}_4(qr)J_0(\chi_1, \dots, \chi_4)$$

where the sum is taken over the quadruples of nontrivial cubic characters χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 from $\mathbf{F}_p^*$ to $\mathbf{C}^*$ such that $\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4$ is the trivial character and where

$$J_0(\chi_1, \dots, \chi_4) = \sum_{t_1+\dots+t_4=0} \prod_{i=1}^{4} \chi_i(t_i),$$

with the convention $\chi_i(0) = 0$. If $p \equiv 2 \bmod 3$, then there are no nontrivial characters and we get that

$$\#V(\mathbf{F}_p) = \frac{N(p)-1}{p-1} = 1 + p + p^2.$$

Otherwise, there are exactly two nontrivial characters which are conjugate and will be denoted by χ and $\overline{\chi}$. By [**IR**, §8.5, theorem 4], we have

$$|J_0(\chi,\chi,\overline{\chi},\overline{\chi})| = p(p-1).$$

But, by definition, this complex number may be written as

$$\begin{aligned} J_0(\chi,\chi,\overline{\chi},\overline{\chi}) &= \sum_{t_1+\cdots+t_4=0} \chi(t_1t_2)\overline{\chi}(t_3t_4) \\ &= \sum_{a\in\mathbf{F}_p} \left| \sum_{t_1+t_2=a} \chi(t_1t_2) \right|^2 \end{aligned}$$

and is a positive real number. Finally we get

$$N(p) = p^3 + p(p-1)\sum \chi_1(q^2)\chi_2(r^2)\chi_3(qr),$$

where the sum is taken over all nontrivial cubic characters such that $\chi_1\chi_2\chi_3$ is nontrivial. This sum may be written as

$$\begin{aligned} \sum \chi_1(q^2)\chi_2(r^2)\chi_3(qr) &= \chi(q^2)\chi(r^2)\overline{\chi}(qr) + \chi(q^2)\overline{\chi}(r^2)\chi(qr) \\ &\quad + \overline{\chi}(q^2)\chi(r^2)\chi(rq) + \chi(q^2)\overline{\chi}(r^2)\overline{\chi}(qr) \\ &\quad + \overline{\chi}(q^2)\chi(r^2)\overline{\chi}(qr) + \overline{\chi}(q^2)\overline{\chi}(r^2)\chi(qr) \\ &= \chi(q) + \overline{\chi}(q) + \chi(r) + \overline{\chi}(r) + \chi(qr) + \overline{\chi}(qr). \end{aligned}$$

Observe that for any integer n prime to p, one has

$$\chi(n) + \overline{\chi}(n) = \begin{cases} -1 & \text{if } p \text{ is not split in } \mathbf{Q}(n^{1/3}), \\ 2 & \text{otherwise.} \quad \square \end{cases}$$

Lemma 4.4. — *With notation as above, if $p \equiv 2 \bmod 3$, $p \neq 2$, and $p|qr$ then*

$$\frac{N^*(p^t)}{p^{3t}} = 1 - \frac{1}{p} \quad \textit{if } t > 0.$$

Proof. — We may assume that $p|r$. Let $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ be a solution of the equation (4) in the set $(\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z})^4 - (p\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z})^4$. If $p|x_1$ then by the equation $p|x_0$ and then $\boldsymbol{x} \in (p)^4$ which gives a contradiction. Since the group of invertible

elements in $\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z}$ is isomorphic to $\mathbf{Z}/p^{t-1}(p-1)\mathbf{Z}$, any element in this group has a unique cubic root. Therefore, the set of solutions is parametrized by the $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z}$ such that $p \nmid x_1$. □

Lemma 4.5. — *With notations as above, if* $q \equiv \pm r \bmod 9$ *and* $3 \nmid qr$, *then the possible values for* $N^*(3^2)/3^6$ *are given by the following table:*

$q, r \bmod 9$	± 1	± 2	± 4
$N^*(3^2)/3^6$	2	$2^2/3$	$2/3$

Proof. — Up to multiplication by units, the equation in this case may be written over $\mathbf{Q}_3$ as

$$X^3 + q^2Y^3 + q^2Z^3 + q^2T^3 = 0$$

which is equivalent to

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + qT^3 = 0$$

and the result follows from [**HB**] or a direct computation. □

5. Convergence factors and residues

As in Heath-Brown [**HB**], for the explicit computation of the constant we need a family of convergence factors related to zeta functions of cubic extensions of $\mathbf{Q}$. If V is defined by (4), it follows from [**CTKS**, p. 12] that $t = \operatorname{rk}\operatorname{Pic} V = 1$.

Proposition 5.1. — *If* V *is the diagonal cubic given by the equation* (4) *and* K_i *are the fields defined in the previous paragraph, then the measure* $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}$ *coincides with the measure*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\prod_{i=1}^{3}\zeta_{K_i}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)^2}\prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})}\lambda'_v\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}.$$

where

$$\lambda'_p = \frac{\prod_{i=1}^{3}\prod_{\{\mathfrak{P}\in\operatorname{Val}(K_i)\,|\,\mathfrak{P}|p\}}(1-\#\mathbf{F}_{\mathfrak{P}}^{-1})}{(1-p^{-1})^2} \quad \textit{if } p \textit{ is a prime number and} \quad \lambda'_{\mathbf{R}} = 1.$$

Remark 5.2. — If p does not divide $3qr$, we can use the term $\lambda'_p\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},p}(V(\mathbf{Q}_p))$ which by lemma 3.2, lemma 3.4, and lemma 5.4.6 in [**Pe1**] coincides with

$\lambda'_p \# V(\mathbf{F}_p)/p^2$ (see also [**Pe1**, lemme 2.2.1]) and by proposition 4.1 is equal to

$$\begin{array}{ll}
\left(1-\frac{1}{p}\right)^7\left(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_{q,r}(p)=3\\
\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^2\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_{q,r}(p)=1\\
\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^3\left(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_{q,r}(p)=0\\
\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^3\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p\equiv 2 \bmod 3
\end{array}$$

and the good places yield a product $C_1C_2C_3$ where

$$C_1 = \prod_{\substack{p\nmid 3qr\\ p\equiv 1 \bmod 3\\ \nu_{q,r}(p)=3}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^7\left(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$$

$$C_2 = \prod_{\substack{p\nmid 3qr\\ p\equiv 1 \bmod 3\\ \nu_{q,r}(p)\neq 3}} \left(1-\frac{1}{p^3}\right)^3$$

$$C_3 = \prod_{\substack{p\nmid 3qr\\ p\equiv 2 \bmod 3}} \left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^3$$

Proof. — It follows from the proof of proposition 4.1 that, if $p\nmid 3qr$,

$$\frac{\#V(\mathbf{F}_p)}{p^2} = 1+\frac{a(p)}{p}+\frac{1}{p^2} \tag{5}$$

where

$$a(p)=\begin{cases} 1 \text{ if } p\equiv 2 \bmod (3),\\ 1+\chi(q)+\overline{\chi}(q)+\chi(r)+\overline{\chi}(r)+\chi(qr)+\overline{\chi}(qr) \text{ otherwise,}\end{cases} \tag{6}$$

where χ is a nontrivial cubic character of $\mathbf{F}_p$, if $p\equiv 1 \bmod 3$. It follows from a theorem of Weil (see [**Ma2**, theorem 23.1]) that, outside a finite set of places,

$$\#V(\mathbf{F}_p) = 1+\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}\,\overline{V})p+p^2.$$

Since the action of the Galois group on the Picard group splits over a finite extension of k, the eigenvalues of the Frobenius map for this action are roots of unity. Therefore we get that

$$L_p(s,\operatorname{Pic}(\overline{V}))^{-1} = 1 - \frac{a(p)}{p^s} + R_p\left(\frac{1}{p^s}\right) \tag{7}$$

where the R_p are polynomials of order at least 2 with uniformly bounded coefficients with respect to p.

But for any cubefree integer n, the zeta function of $\mathbf{Q}(n^{1/3})$ may be written as an Euler product with local terms $\zeta_{\mathbf{Q}(n^{1/3}),p}(s)$ which for $p \nmid 3n$ are given by

$$\zeta_{\mathbf{Q}(n^{1/3}),p}(s)^{-1} = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3 \\ \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(n)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\overline{\chi}(n)}{p^s}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

Thus, by (6), for almost all places, the local terms of the zeta functions verify

$$\left(\zeta_{\mathbf{Q},p}(s)\prod_{i=1}^{3}\frac{\zeta_{K_i,p}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q},p}(s)}\right)^{-1} = 1 - \frac{a(p)}{p^s} + Q_p\left(\frac{1}{p^s}\right)$$

where the Q_p are polynomials of order at least 2 with bounded coefficients. Using (5) we get that the product of measures given in the proposition defines a Borel measure on the adelic points of V and by (7) that the Euler product defining the quotient

$$L_S(s,\operatorname{Pic}(\overline{V})) \Bigg/ \frac{\prod_{i=1}^{3}\zeta_{K_i}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)^2}$$

converges absolutely in $s = 1$. Since $d_{\mathbf{Q}} = 1$, we get that

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}} &= \lim_{s\to 1}\Big((s-1)L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\Big) \prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} \\
&= \lim_{s\to 1}\Big((s-1)L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\Big) \prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \frac{\lambda_v^{-1}}{\lambda'_v} \prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \lambda'_v\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} \\
&= \lim_{s\to 1}\Big((s-1)L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\Big) \lim_{s\to 1} \frac{\left(\prod_{i=1}^{3}\zeta_{K_i}(s)\right)/\zeta_{\mathbf{Q}}(s)^2}{L_S(s,\operatorname{Pic}\overline{V})} \prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \lambda'_v\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} \\
&= \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\prod_{i=1}^{3}\zeta_{K_i}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)^2} \prod_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \lambda'_v\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}. \quad \square
\end{aligned}$$

6. Brauer-Manin obstruction to weak approximation

In this paragraph, using the work of Colliot-Thélène, Kanevsky and Sansuc [**CTKS**], we shall compute the quotient

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}})/\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})) \tag{8}$$

when V is the diagonal cubic defined by the equation (4) and $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$.

In the following, we assume that q and r are distinct prime numbers such that $3 \nmid qr$. It follows from [**CTKS**, p. 28] that $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$ if and only if the following condition is satisfied

$$(q \equiv 2 \bmod 3 \quad \text{or} \quad r \in \mathbf{F}_q^{*3}) \quad \text{and} \quad (r \equiv 2 \bmod 3 \quad \text{or} \quad q \in \mathbf{F}_r^{*3}) \tag{9}$$

Proposition 6.1. — *Under these assumptions, the value for the quotient* (8) *depends only on the classes of p and q modulo* 9*. These values are given in the following table:*

$r \backslash q$	1	2	4	5	7	8
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1/3	0	0	1/3	1
4	1	0	1/3	1/3	0	1
5	1	0	1/3	1/3	0	1
7	1	1/3	0	0	1/3	1
8	1	1	1	1	1	1

Proof. — Let j be a primitive third root of unity, $k = \mathbf{Q}(j)$ and $K = k(q^{1/3}, r^{1/3})$. We have the following diagram of fields

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
k(q^{1/3}) \arrow[dr, dash] & k((qr)^{1/3}) \arrow[d, dash] & k(r^{1/3}) \arrow[dl, dash] \\
& k \arrow[d, dash, "\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}"] & \\
& \mathbf{Q} &
\end{tikzcd}$$

and the group $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ may be described as the semi-direct product $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ where $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ acts by $-\mathrm{Id}$ on $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$. By [**CTKS**, proposition 1, p. 7], we have that

$$\mathrm{Br}(V \times_{\mathbf{Q}} k)/\,\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}.$$

But the Hochschild-Serre spectral sequence gives an exact sequence

$$\begin{aligned}0 \to H^1(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, (\mathrm{Pic}(\overline{V}))^{(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2}) \to H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V}))\\ \to (H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{V})))^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \to H^2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, (\mathrm{Pic}(\overline{V}))^{(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2}).\end{aligned}$$

By [**CTKS**, p. 12], $\mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} = \mathbf{Z}$ and, since a map from a group killed by 3 to one killed by 2 is trivial, we obtain an isomorphism

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{V}))^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}.$$

By the proof of [**CTKS**, lemme 3, p. 13], we have isomorphisms

$$H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{V}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus Q) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, Q)$$

where Q is the $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$-module defined by the exact sequence

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{N} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}] \to Q \to 0.$$

But for any cyclic group C and any C-module M there is canonical injection

$$H^1(C, M) \to \mathrm{Hom}(C, M_C)$$

where M_C denotes the group of coinvariants and which sends the class of a cocycle γ onto the induced morphism $\overline{\gamma}$ from C to M_C, so that the diagram

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\gamma} & M \\ \| & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\overline{\gamma}} & M_C \end{array}$$

commutes. If C is a normal subgroup of a group H then the above morphism is compatible with the natural actions of H/C on $H^1(C, M)$ and $\mathrm{Hom}(C, M_C)$. It follows from [**CTKS**, lemme 3] that $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ acts by $-\mathrm{Id}$ on the torsion part of $Q_{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$ and by the above description of G as a semi-direct product, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ acts by -1 on $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Therefore the action of $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ on $H^1(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, Q)$ is trivial and

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}.$$

For any prime p, the canonical pairing

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) \times V(\mathbf{Q}_p) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ ([A], P) & \mapsto & \mathrm{inv}_p(A(P)) \end{array}$$

defines an equivalence relation on $V(\mathbf{Q}_p)$ which is also denoted by Br. If V has good reduction in p, then by [**CT1**, theorem A (iii)] the rational equivalence on $V(\mathbf{Q}_p)$ is trivial and therefore the same is true of the Brauer equivalence. The condition (9) implies that if $p|qr$ then V is rational over $\mathbf{Q}_p$ (see [**CTKS**, lemme 8, p. 41]) and $\#V(\mathbf{Q}_p)/\mathrm{Br} = 1$. Using the same type of argument we get that $\#V(\mathbf{Q}_3)/\mathrm{Br} = 1$ if q, r or qr is a cube modulo 9, that is one of them is 1 or -1 modulo 9. On the other hand, it follows from [**CTKS**, §5, p. 41] that this cardinal is 3 at 3 otherwise. This explains the dichotomy between integral and nonintegral values in the table.

We have to find an element $A \in \mathrm{Br}(V)$ whose class spans $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$. Then the Brauer equivalence and the Brauer obstruction may be computed in terms of the functions

$$\begin{array}{rcl} i_p : V(\mathbf{Q}_p) & \to & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \\ P & \mapsto & \mathrm{inv}_p(A(P)). \end{array}$$

This is an intricate procedure. It is described in detail on pages 19-72 and summarized in an algorithm on pages 73-79 in [**CTKS**], which we are going to follow.

Let us first assume that q, r or qr is a cube modulo 9. Then all functions i_p are constant and A may be chosen so that the value $\boldsymbol{i}_p$ of the function i_p is trivial

except when p equals 3, q, or r. It remains to compute the constant values $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_q$, and $\boldsymbol{i}_r$ for such an A. To this end, we use the additive norm rest symbols $[.,.]_p$ from k_v^* to $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, for v in $\mathrm{Val}(k)$, dividing p (see [**CTKS**, p. 77]). They are biadditive, anticommutative and verify the relations

$$[j, p]_p = \frac{p-1}{3} \quad \text{if } p \equiv 1 \bmod 3$$

$$[j, p]_p = -\frac{p^2-1}{3} \quad \text{if } p \equiv 2 \bmod 3.$$

If r is a cube in $\mathbf{Q}_3$, we get that A may be chosen so that

$$\boldsymbol{i}_3 = 0, \quad \boldsymbol{i}_q = 0, \quad \boldsymbol{i}_r = [j, r]_r.$$

Since $r \equiv \pm 1 \bmod 9$, we have that $\boldsymbol{i}_r = 0$ and the Brauer-Manin obstruction is trivial. If q is a cube modulo 9 the result is similar and the quotient (8) equals 1.

If qr is a cube modulo 9 but q and r are not, then the situation is similar to the one considered in [**CTKS**, proposition 5, p. 67–69], and one writes the equation as

$$X^3 + qY^3 + q^2 rZ^3 + q^4 r^2 T^3 = 0$$

and, by [**CTKS**, §8], A may be chosen so that

$$\boldsymbol{i}_3 = 0, \quad \boldsymbol{i}_q = 0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{i}_r = [j, r]_r.$$

The values of $\boldsymbol{i}_r$ are given by the following table (see [**CTKS**, p. 78])

$r \bmod 9$	2	4	5	7
$[j, r]_r$	2	1	1	2

and in this case there is a Brauer-Manin obstruction to the Hasse principle and the quotient (8) is zero.

If none of the q, r and qr is a cube in $\mathbf{Q}_3$, then to complete the proof of proposition 6.1 we have only to prove that each class in $V(\mathbf{Q}_3)$ for the Brauer equivalence has the same volume for $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},3}$.

Up to permutation and change of sign, we may assume that $q \equiv r \equiv 2$ modulo 9 or $q \equiv r \equiv 4$ modulo 9. Therefore the equation modulo 9 may be written as

$$X^3 + 4Y^3 + 4Z^3 + 4T^3 = 0$$

or

$$X^3 + 16Y^3 + 16Z^3 + 16T^3 = 0.$$

Therefore on $\mathbf{Q}_3$ the equation is equivalent to

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 2T^3 = 0$$

or

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 4T^3 = 0$$

A direct computation modulo 9 shows that exactly one of the three first coordinates has to be divisible by 3. But in the first case, it follows from [**HB**, proof of theorem 1] that the classes for the Brauer equivalence are determined by the coordinate which vanishes modulo 3. By a symmetry argument the volumes of the equivalence classes are the same.

By [**CTKS**, p. 49], there is a choice of A so that the induced map i_3 over $V(\mathbf{Q}_3(j))$ is given as

$$i_3(x, y, z, t) = -[x + jy, v]_3, \tag{10}$$

where v is the coefficient of T^3. Using the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbf{Q}_3) & \xrightarrow{i_3} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \times 2 \\ V(\mathbf{Q}_3(j)) & \xrightarrow{i_3} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \end{array}$$

we get that the invariants for the second equation may be described, after reduction modulo 9, as the double of the ones for the first and we get a similar description of $V(\mathbf{Q}_3)/\mathrm{Br}$. This implies the result in this case. □

7. Numerical tests

The numerical tests for the number of points with bounded heights have been conducted using an efficient program of Dan Bernstein [**Be**]. We considered the following cubic surfaces

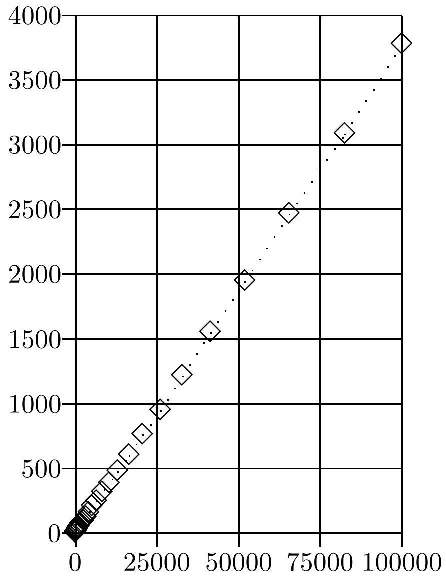
$$X_0^3 + 17^2X_1^3 + 17 \times 53X_2^3 + 53^2X_3^3 = 0 \tag{S_1}$$

$$X_0^3 + 71^2X_1^3 + 71 \times 53X_2^3 + 53^2X_3^3 = 0 \tag{S_2}$$

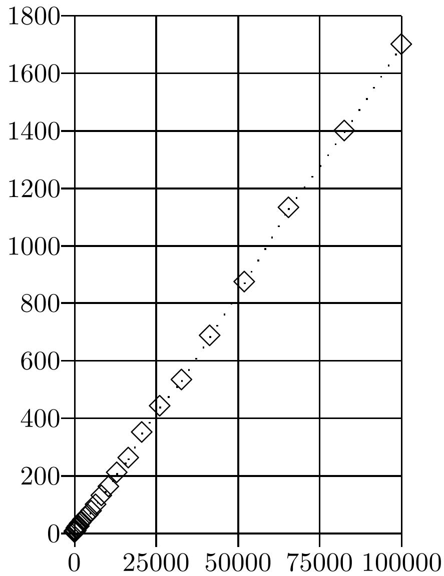
$$X_0^3 + 5^2X_1^3 + 23 \times 5X_2^3 + 23^2X_3^3 = 0 \tag{S_3}$$

$$X_0^3 + 11^2X_1^3 + 29 \times 11X_2^3 + 29^2X_3^3 = 0 \tag{S_4}$$

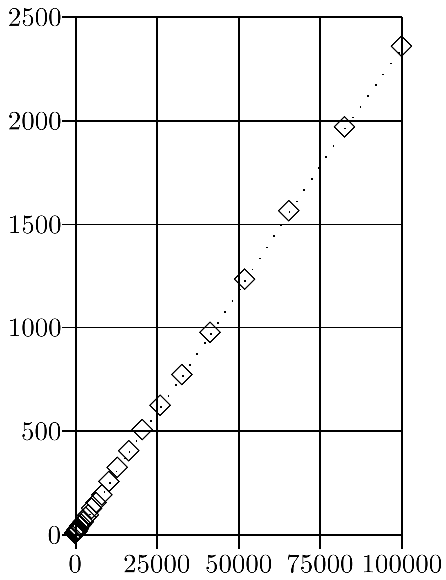
One can take for the open set U the whole surface V, as there are no rational points on the exceptional curves. The graphs of $n_{U,\mathbf{H}}$ are presented below.



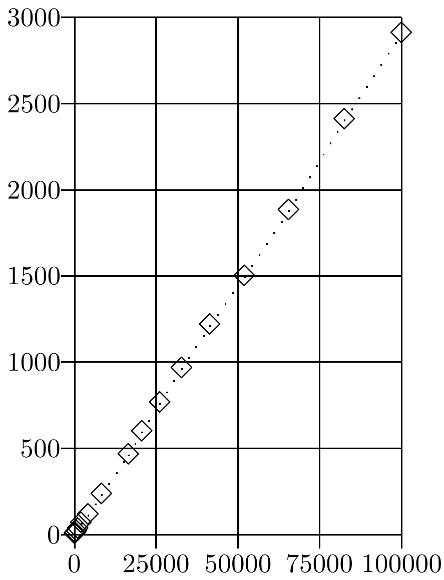
S_1



S_2



S_3



S_4

Let us sum up the description of the theoretical constant. Let V be a diagonal cubic over $\mathbf{Q}$ defined by the equation (4) with q and r distinct prime numbers such that $3 \nmid qr$ and such that the condition (9) is satisfied.

By proposition 5.1, the constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$ may be written as the product

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}))} \# H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \times \prod_{i=1}^{3} \zeta_{K_i}^*(1) \prod_{p \mid 3qr} \lambda_p' \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},p}(V(\mathbf{Q}_p)) C_1 C_2 C_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

where the first term which will be denoted by C_{Br} may be found in proposition 6.1, the cardinal of $H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ equals 3, the residues of the zeta functions $\zeta_{K_i}^*(1)$ have been computed using Dirichlet's class number formula and the system PARI (see also [**Co**, chapter 4]), λ_p' is defined in proposition 5.1, the volumes at the bad places are given in lemmata 4.4 and 4.5 and C_1, C_2, C_3 have been described as absolutely convergent Euler products (see remark 5.2). The volume at the real place may be computed directly using the definition of the Leray form.

The computations are summarized in the following table:

Surface	S_1	S_2	S_3	S_4
H	99999	99999	99999	99999
$n_{U,\mathbf{H}}(H)$	3773	1696	2353	2904
C_{Br}	1	1	1/3	1/3
$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$	3	3	3	3
$\zeta^*_{\mathbf{Q}(q^{1/3})}(1)$	1.4680	1.8172	1.1637	1.2284
$\zeta^*_{\mathbf{Q}(r^{1/3})}(1)$	1.8172	2.2035	1.1879	1.6792
$\zeta^*_{\mathbf{Q}((qr)^{1/3})}(1)$	1.9342	1.9925	1.0865	1.0543
$\lambda'_3\omega_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{Q}_3))$	0.5926	0.5926	0.6667	1.3333
$\lambda'_q\omega_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{Q}_q))$	0.9379	0.9808	0.7680	0.9016
$\lambda'_r\omega_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{Q}_r))$	0.9808	0.9857	0.9547	0.9644
C_1	0.9978	0.9989	0.9973	0.9812
C_2	0.9892	0.9892	0.9892	0.9893
C_3	0.3103	0.3072	0.3514	0.3158
$\omega_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{R}))$	0.0148	0.0042	0.0917	0.0389
$\theta_{\mathbf{H}}(V)$	0.0382	0.0175	0.0234	0.0300
$n_{U,\mathbf{H}}(H)/\theta_{\mathbf{H}}(V)H$	0.9882	0.9669	1.0077	0.9665

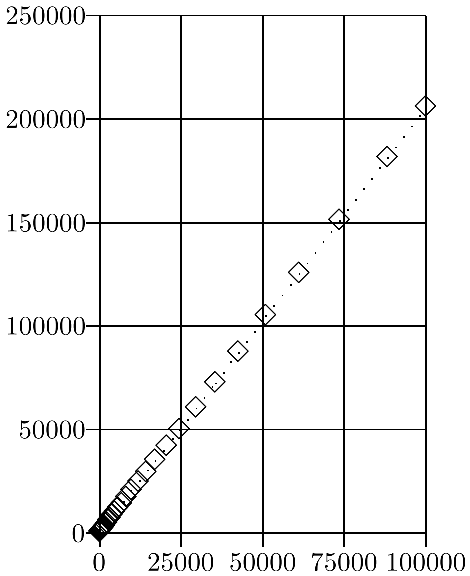
The new program of Bernstein allows to increase the upper bound for the height of rational points on the cubic surfaces studied by Heath-Brown in [**HB**].

These cubics are defined by the equations

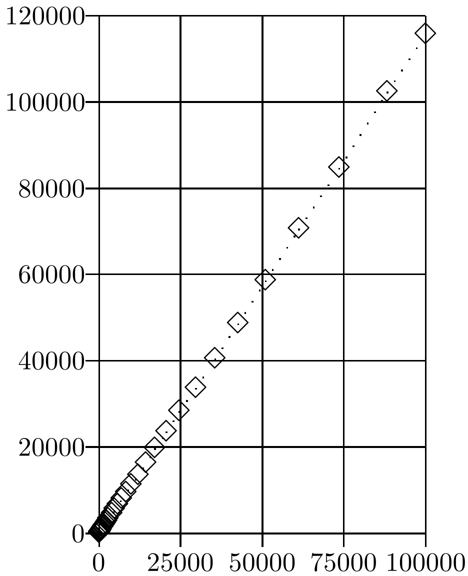
$$(S_5) \qquad X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 2X_3^3 = 0$$

$$(S_6) \qquad X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 3X_3^3 = 0.$$

The graphs of $n_{U,\mathbf{H}}$ are drawn below.



S_5



S_6

In this case, by remark 3.6 and [**HB**], the constant $\theta_{\mathbf{H}}(V)$ may be written as the product

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}))} \# H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \\ \times \zeta^*_{\mathbf{Q}(q^{1/3})}(1)^3 \prod_{p|3q} \lambda'_p \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},p}(V(\mathbf{Q}_p)) C_1 C_2 C_3 \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

where the first factor is $1/3$ for these cubics, the second 3, q is the last coefficient in the equation, the local factors at the bad places are given by

$$N^*(3^2) = \begin{cases} 2^2 3^5 & \text{if } q = 2 \\ 2^3 3^4 & \text{if } q = 3 \end{cases} \qquad N^*(4) = 2^6 - 2^4 \quad \text{if} \quad q = 2$$

and C_1, C_2 and C_3 are defined exactly as in remark 5.2.

The results are given in the following table:

Surface	S_5	S_6
H	99999	99999
$n_{U,\mathbf{H}}(H)$	205431	115582
C_{Br}	1/3	1/3
$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$	3	3
$\zeta^*_{\mathbf{Q}(q^{1/3})}(1)$	0.814624	1.017615
$\lambda'_3\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{Q}_3))$	1.333333	0.888889
$\lambda'_q\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{Q}_q))$	0.750000	1.000000
C_1	0.954038	0.976203
C_2	0.989387	0.989279
C_3	0.830682	0.306638
$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}(V(\mathbf{R}))$	4.921515	4.295619
$\theta_{\mathbf{H}}(V)$	2.086108	1.191539
$n_{U,\mathbf{H}}(H)/\theta_{\mathbf{H}}(V)H$	0.984767	0.970032

Therefore, the numerical tests for these cubic surfaces are compatible with an asymptotic behavior of the form

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) \sim \theta_{\mathbf{H}}(V)H \quad \text{when } H \to +\infty.$$

Acknowledgements This work was done while both authors were enjoying the hospitality of the Newton Institute for Mathematical Sciences in Cambridge. We have benefitted from conversations with Colliot-Thélène, Heath-Brown, Salberger and Swinnerton-Dyer. We thank the referee for his useful remarks and suggestions.

The second author was partially supported by NSA Grant MDA904-98-1-0023 and by EPSRC Grant K99015.

References

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ______, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n^{o} 1, 41–46.

[BT3] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Be] D. J. Bernstein, *Enumerating solutions to* $p(a) + q(b) = r(c) + s(d)$, to appear in Math. Comp. (1999).

[Co] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Math., vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1993.

[CT1] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem* 90 *for* K_2*, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), 1–20.

[CT2] ______, *The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties*, Number theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., Providence, 1998, pp. 19–39.

[CTKS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, et J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[HB] D. R. Heath-Brown, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails*, Math. Comp. **59** (1992), 613–623.

[IR] K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory (second edition)*, Graduate texts in Math., vol. 84, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1990.

[Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.

[Ma1] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Ma2] ______, *Cubic forms (second edition)*, North-Holland Math. Library, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n$^{\mathrm{o}}$ 1, 101–218.

[Pe2] ______, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[SaSk] P. Salberger and A. N. Skorobogatov, *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), n$^{\mathrm{o}}$ 2, 517–536.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

February 15, 2024

Emmanuel Peyre, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France
E-mail : peyre@irma.u-strasbg.fr

Yuri Tschinkel, Department of mathematics, University of Illinois in Chicago, 851 South Morgan Street, Chicago IL 60607-7045, USA • *E-mail :* yuri@math.uic.edu

TAMAGAWA NUMBERS OF DIAGONAL CUBIC SURFACES OF HIGHER RANK*

by

Emmanuel Peyre & Yuri Tschinkel

Abstract. — We consider diagonal cubic surfaces defined by an equation of the form

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Numerically, one can find all rational points of height $\leqslant B$ for B in the range of up to 10^5, thanks to a program due to D. J. Bernstein. On the other hand, there are precise conjectures concerning the constants in the asymptotics of rational points of bounded height due to Manin, Batyrev and the authors. Changing the coefficients one can obtain cubic surfaces with rank of the Picard group varying between 1 and 4. We check that numerical data are compatible with the above conjectures. In a previous paper we considered cubic surfaces with Picard groups of rank one with or without Brauer-Manin obstruction to weak approximation. In this paper, we test the conjectures for diagonal cubic surfaces with Picard groups of higher rank.

*Rational points on algebraic varieties, Progress in Math. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 275–305

Résumé. — Nous considérons les surfaces cubiques diagonales d'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

On peut trouver numériquement tous ses points rationnels de hauteur plus petite que B lorsque B est inférieur à 10^5, grâce à un programme de D. J. Bernstein. D'un autre côté, il existe une conjecture, due à Manin, Batyrev et les auteurs, qui prédit exactement quel doit être le comportement asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur cette surface. En changeant les coefficients, on peut obtenir des surfaces cubiques dont le groupe de Picard a un rang qui varie de 1 à 4. Nous vérifions que les données numériques sont compatibles avec les conjectures précédentes. Dans un texte antérieur, nous considérions les surfaces cubiques dont le groupe de Picard est de rang un, avec éventuellement une obstruction ade Brauer-Manin à l'approximation faible. Ici, nous vérifions les conjectures pour les surfaces cubiques diagonales avec des groupes de Picard de rang supérieur à 2.

Contents

1. Introduction

This paper is devoted to numerical tests of a refined version of a conjecture of Manin about the number of points of bounded height on Fano varieties (see [**BM**], [**FMT**], [**Pe**], or [**BT**] for a description of the conjectures). The choice of diagonal cubic surfaces to test these conjectures was motivated by the work of Heath-Brown [**HB**] in which he treated the cases

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + aT^3 = 0$$

for $a = 2$ or 3. The results he obtained were used as a benchmark for the subsequent attempts to interpret the asymptotic constants (see, in particular, [**SD**], [**Pe**] and [**PT**]).

More precisely, we consider a diagonal cubic surface $V \subset \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ given by an equation of the form

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dT^3 = 0.$$

Let H be the height function on $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$ defined by the formula: for any $Q = (x : y : z : t)$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$, one has

$$H(Q) = \max\{|x|, |y|, |z|, |t|\} \text{ if } \begin{cases} (x, y, z, t) \in \mathbf{Z}^4, \\ \gcd(x, y, z, t) = 1. \end{cases}$$

Let U be the complement in V to the 27 lines. We are interested in the asymptotic behavior of the cardinal

$$N_{U,H}(B) = \#\{\, Q \in U(\mathbf{Q}) \mid H(Q) \leqslant B \,\}$$

as B goes to infinity.

Assume that $V(\mathbf{Q})$ is Zariski dense, which by a result of Segre (see [**Ma2**, §29,§30]) is equivalent to $V(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$. It is expected that

$$N_{U,H}(B) = BP(\log(B)) + o(B)$$

as B goes to $+\infty$, where P is a polynomial of degree $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) - 1$, with leading coefficient $\theta_H(V)$. This constant has a conjectural description. The goal is to compute $\theta_H(V)$ explicitly in the examples at hand and to compare it with the constant obtained from numerical data. Our previous paper [**PT**] was devoted to surfaces with Picard groups of rank one with or without Brauer-Manin obstruction to weak approximation. In this paper, we consider examples with Picard groups of higher rank.

Note that in these examples the relative error term

$$(N_{U,H}(B) - \theta_H(V)B(\log B)^{\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V)-1})/B(\log B)^{\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V)-1}$$

is expected to decrease more slowly. Indeed, if $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) = 1$ this error term is expected to decrease as $1/B^{\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$, whereas for higher ranks it should be comparable to $1/\log B$. Thus we decided not only to compare the conjectural constant $\theta_H(V)$ with the quotient

$$N_{U,H}(B)/B(\log B)^{\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V)-1}$$

with $B = 10^5$, but also to take into account that a polynomial P of degree $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) - 1$ should appear in the asymptotics and use a naive statistical formula to estimate its leading coefficient $\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)$ from the data. We observe a quite good accordance: the difference between $\theta_H(V)$ and $\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)$ is less than 6% in the examples. Moreover the fact that $\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)$ is nearer to $\theta_H(V)$ than the above quotient is in itself a point in favor of the conjecture: indeed there is no obvious purely statistical reason for which this should be true in general.

The paper is organized as follows: in section 2 we define $\theta_H(V)$. Section 3 contains the description of the Galois action on the geometric Picard group $\operatorname{Pic}(\overline{V})$. In section 4 we compute the Euler product corresponding to good reduction places. In section 5 we explain how to compute the local densities at the places of bad reduction. In section 6 we determine in each case the value of the geometric constant $\alpha(V)$ defined in §2. Section 7 is devoted to the description of statistical tools we used to analyze the numerical data. In section 8 we present the results.

We would like to thank the referee for the improvements he suggested.

2. Description of the conjectural constant

In this section we give a short description of the conjectural asymptotic constant for heights defined by an adelic metrization of the anticanonical line bundle (see [**Pe**] for more details and [**BT**] for a discussion in a more general setting).

Notations 2.1. — For any field E, we denote by $\overline{E}$ an algebraic closure of E. If X is a variety over E, then $X(E)$ denotes the set of rational points of X and $\overline{X}$ the product $X \times_{\operatorname{Spec}(E)} \operatorname{Spec} \overline{E}$. The cohomological Brauer group $\operatorname{Br}(X)$ is defined as the étale cohomology group $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$. For any A in $\operatorname{Br}(X)$, any extension E' of E and any P in $V(E')$, we denote by $A(P)$ the evaluation of A at P.

For a number field F we denote by $\operatorname{Val}(F)$ the set of places of F and by $\operatorname{Val}_f(F)$ the set of finite places. The absolute discriminant of F is denoted by d_F. For any place v of F, let F_v be the v-adic completion of F. If v is finite, then $\mathcal{O}_v$ is the ring of v-adic integers and $\mathbf{F}_v$ the residue field. By global class field theory we have an exact sequence

$$0 \to \operatorname{Br}(F) \to \bigoplus_{v \in \operatorname{Val}(F)} \operatorname{Br}(F_v) \xrightarrow{\sum \operatorname{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \tag{2.1}$$

In the following, V is a smooth projective geometrically integral variety over a number field F satisfying the conditions:

(i) $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ for $i = 1$ or 2,
(ii) $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ has no torsion,
(iii) the anticanonical line bundle ω_V^{-1} belongs to the interior of the cone of classes of effective divisors $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V) \subset \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$.

The adelic space $V(\boldsymbol{A}_F)$ of V is the product $\prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} V(F_v)$. By [**CT**, lemma 1], for any class A in $\mathrm{Br}(V)$, one has a map ρ_A defined as the composition

$$\begin{array}{rcll} V(\boldsymbol{A}_F) & \to & \bigoplus_{v \in \mathrm{Val}(F)} \mathrm{Br}(F_v) & \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (P_v)_{v \in \mathrm{Val}(F)} & \mapsto & (A(P_v))_{v \in \mathrm{Val}(F)}. & \end{array}$$

Then one defines

$$V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}} = \bigcap_{A \in \mathrm{Br}(V)} \ker(\rho_A) \subset V(\boldsymbol{A}_F).$$

By the exact sequence (2.1), one has the inclusion

$$\overline{V(F)} \subset V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}$$

where $\overline{V(F)}$ denotes the topological closure of the set of rational points. Conjecturally both sets coincide for cubic surfaces. (See also the text of Swinnerton-Dyer in this volume). There is a *Brauer-Manin obstruction to weak approximation*, as described by Manin in [**Ma1**] and by Colliot-Thélène and Sansuc in [**CTS**], if one has

$$V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}} \neq V(\boldsymbol{A}_F).$$

Let us assume that the height H on V is defined by an adelic metric $(\|\cdot\|_v)_{v \in \mathrm{Val}(F)}$ on ω_V^{-1}. By definition, this means that we consider ω_V^{-1} as a line bundle, that the functions $\|\cdot\|_v$ are v-adically continuous metrics on $\omega_V^{-1}(F_v)$ which for almost all places v are given by a smooth model of V, and that the height of a rational point x of V is given by the formula

$$\forall y \in \omega_V^{-1}(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} \|y\|_v^{-1}$$

where $\omega_V^{-1}(x)$ is the fiber of ω_V^{-1} at x.

If $v \in \mathrm{Val}(F)$ the Haar measure $\mathrm{d}x_v$ on F_v is normalized as follows:
- $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$ if v is finite,
- $\mathrm{d}x_v$ is the usual Lebesgue measure if $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$,
- $\mathrm{d}x_v = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ if $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$.

The metric $||\cdot||_v$ defines a measure $\boldsymbol{\omega}_{H,v}$ on the locally compact space $V(F_v)$. In local v-adic analytic coordinates $x_{1,v} \dots x_{n,v}$ on $V(F_v)$ this measure is given by the formula

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_{1,v}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n,v}} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{n,v}.$$

If M is a discrete representation of $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ over $\mathbf{Q}$, then for any finite place $\mathfrak{p}$ of F, the local term of the corresponding Artin L-function is defined as follows: we choose an algebraic closure $\overline{F}_\mathfrak{p}$ of $F_\mathfrak{p}$ containing $\overline{F}$. We get an exact sequence

$$1 \to I_\mathfrak{p} \to D_\mathfrak{p} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}/\mathbf{F}_\mathfrak{p}) \to 1$$

where $D_\mathfrak{p}$ is the decomposition group and $I_\mathfrak{p}$ the inertia. We denote by $\widetilde{\mathrm{Fr}}_\mathfrak{p}$ a lifting of the Frobenius map to $D_\mathfrak{p} \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ (which up to conjugation depends only on $\mathfrak{p}$), and put

$$L_\mathfrak{p}(s, M) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s}\widetilde{\mathrm{Fr}}_\mathfrak{p} \mid M^{I_\mathfrak{p}})}.$$

We fix a finite set S of bad places containing the archimedean ones so that V admits a smooth projective model $\mathscr{V}$ over the ring of S-integers $\mathscr{O}_S$. For any $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Val}(F) - S$ we consider

$$L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}) \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Q}).$$

The corresponding global L-function is given by the Euler product

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Val}(F) - S} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

which converges for $\mathrm{Re}\, s > 1$ and has a meromorphic continuation to $\mathbf{C}$ with a pole of order $t = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V)$ at 1. One introduces local convergence factors λ_v given by

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \text{ if } v \in \mathrm{Val}(F) - S, \\ 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

The Weil conjectures (proved by Deligne) imply that the Tamagawa measure

$$\prod_{v \in \mathrm{Val}(F)} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}$$

converges on $V(\boldsymbol{A}_F)$ (see [**Pe**, proposition 2.2.2]).

***Definition 2.2.* —** The *Tamagawa measure* on $V(\boldsymbol{A}_F)$ corresponding to the adelic metric $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(F)}$ is defined by

$$\boldsymbol{\omega}_H = \frac{1}{\sqrt{d_F}^{\dim V}} \lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \prod_{v\in\mathrm{Val}(F)} \lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{H,v}.$$

From the arithmetic standpoint, it seems more natural to integrate $\boldsymbol{\omega}_H$ over the closure $\overline{V(F)} \subset V(\boldsymbol{A}_F)$ (as in the original approach to the Tamagawa number). However, computationally, it is easier to work with $V(\boldsymbol{A}_F)^{\mathrm{Br}}$. Therefore, following a suggestion of Salberger, we define here

***Definition 2.3.* —**

$$\tau_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(V(\boldsymbol{A})^{\mathrm{Br}}). \tag{2.2}$$

Let $\mathrm{Pic}(V)^\vee$ be the dual lattice to $\mathrm{Pic}(V)$. We denote by $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ the corresponding Lebesgue measure on $\mathrm{Pic}(V)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ and by

$$\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{x \in \mathrm{Pic}(V)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \mid \forall y \in \Lambda_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0\}$$

the dual cone of $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$.

***Definition 2.4.* —** We define

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!}\int_{\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

and

$$\beta(V) = \# H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{V})).$$

The theoretical constant attached to V and H is defined as

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V). \tag{2.3}$$

In the following sections we compute $\theta_H(V)$ for various diagonal cubic surfaces.

3. The Galois module $\mathrm{Pic}(\overline{V})$

The description of this Galois module is based upon the study of the 27 lines of the cubic. We fix notations for these lines which are slightly different from those given by Colliot-Thélène, Kanevsky and Sansuc in [**CTKS**, p. 9].

Notations 3.1. — From now on V is a diagonal cubic surface V given by an equation of the form

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dT^3 = 0 \tag{3.1}$$

where a, b, c and d are strictly positive integers with $\gcd(a,b,c,d) = 1$. Let

$$S = \{\infty, 3\} \cup \{p \mid p | abcd\}$$

We fix a cubic root α (resp. α', α'') of b/a (resp. c/a, d/a) (which is assumed to be in $\mathbf{Q}$ if b/a (resp. c/a, d/a) is a cube in $\mathbf{Q}$) and we put

$$\beta = \frac{\alpha''}{\alpha'} = \sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \qquad \beta' = \frac{\alpha}{\alpha''} = \sqrt[3]{\frac{b}{d}} \qquad \text{and} \qquad \beta'' = \frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{c}{b}}.$$

We also consider

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha'\alpha''} = \sqrt[3]{\frac{ab}{cd}}, \qquad \gamma' = \frac{\alpha'}{\alpha''\alpha} = \sqrt[3]{\frac{ac}{bd}} \qquad \text{and} \qquad \gamma'' = \frac{\alpha''}{\alpha\alpha'} = \sqrt[3]{\frac{ad}{bc}}.$$

We denote by θ a primitive third root of one. The 27 lines of the cubic surface (3.1) are given by the following equations, where i belongs to $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$:

$$L(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha Y = 0, \\ Z+\theta^i\beta T = 0. \end{cases} \quad L'(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha Y = 0, \\ Z+\theta^{i+1}\beta T = 0. \end{cases} \quad L''(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha Y = 0, \\ Z+\theta^{i+2}\beta T = 0. \end{cases}$$

$$M(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha' Z = 0, \\ T+\theta^i\beta' Y = 0. \end{cases} \quad M'(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha' Z = 0, \\ T+\theta^{i+1}\beta' Y = 0. \end{cases} \quad M''(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha' Z = 0, \\ T+\theta^{i+2}\beta' Y = 0. \end{cases}$$

$$N(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha'' T = 0, \\ Y+\theta^i\beta'' Z = 0. \end{cases} \quad N'(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha'' T = 0, \\ Y+\theta^{i+1}\beta'' Z = 0. \end{cases} \quad N''(i){:}\begin{cases} X+\theta^i\alpha'' T = 0, \\ Y+\theta^{i+2}\beta'' Z = 0. \end{cases}$$

Let K be the field $\mathbf{Q}(\theta, \alpha, \alpha', \alpha'')$. It is a Galois extension of $\mathbf{Q}$. In the generic case, K is an extension of degree 54 with a Galois group isomorphic to

$$(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^3 \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

It is generated by the elements c, τ, τ' and τ'' characterized by their action on θ, α, α' and α''.

	θ	α	α'	α''
c	θ^2	α	α'	α''
τ	θ	$\theta\alpha$	α'	α''
τ'	θ	α	$\theta\alpha'$	α''
τ''	θ	α	α'	$\theta\alpha''$

Their action on the 27 lines is given as follows: for τ we have

(3.2)
$$\begin{tikzcd} L(i) \arrow[rr] & & L''(i+1) \arrow[dl] \\ & L'(i+2) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(i) \arrow[rr] & & M'(i) \arrow[dl] \\ & M''(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \text{and} \qquad \begin{tikzcd} N(i) \arrow[rr] & & N''(i) \arrow[dl] \\ & N'(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

for τ':

(3.3)
$$\begin{tikzcd} L(i) \arrow[rr] & & L''(i) \arrow[dl] \\ & L'(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(i) \arrow[rr] & & M''(i+1) \arrow[dl] \\ & M'(i+2) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \text{and} \qquad \begin{tikzcd} N(i) \arrow[rr] & & N'(i) \arrow[dl] \\ & N''(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

for τ'':

(3.4)
$$\begin{tikzcd} L(i) \arrow[rr] & & L'(i) \arrow[dl] \\ & L''(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(i) \arrow[rr] & & M''(i) \arrow[dl] \\ & M'(i) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \text{and} \qquad \begin{tikzcd} N(i) \arrow[rr] & & N''(i+1) \arrow[dl] \\ & N'(i+2) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

for c:

(3.5)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] L(0) & L'(0) \arrow[r, leftrightarrow] & L''(0) & M(0) & M'(0) \arrow[r, leftrightarrow] & M''(0) & N(0) & N'(0) \arrow[r, leftrightarrow] & N''(0) \\ L(1) \arrow[d, leftrightarrow] & L'(1) \arrow[dr, leftrightarrow] & L''(1) \arrow[dl, leftrightarrow] & M(1) \arrow[d, leftrightarrow] & M'(1) \arrow[dr, leftrightarrow] & M''(1) \arrow[dl, leftrightarrow] & N(1) \arrow[d, leftrightarrow] & N'(1) \arrow[dr, leftrightarrow] & N''(1) \arrow[dl, leftrightarrow] \\ L(2) & L'(2) & L''(2) & M(2) & M'(2) & M''(2) & N(2) & N'(2) & N''(2). \end{tikzcd}$$

To describe the relations between the classes of these divisors in $\mathrm{Pic}(\overline{V})$, which shall be useful for the computation of $\alpha(V)$, we consider $\overline{V}$ as the blow-up of a

plane $\mathbf{P}^2_{\overline{\mathbf{Q}}}$ in six points P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 and P_6. The 27 lines may then be described as the 6 exceptional divisors $E_1, \dots, E_6$, the 15 strict transforms $L_{i,j}$ of the projective lines (P_iP_j) for $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ and the 6 strict transforms of the conics Q_i going through all points except P_i. Let Λ be the preimage of a line of $\mathbf{P}^2_{\overline{\mathbf{Q}}}$ which does not contain any of the points $P_1, \dots, P_6$. Then

$$([\Lambda], [E_1], [E_2], [E_3], [E_4], [E_5], [E_6])$$

is a basis of $\operatorname{Pic}(\overline{V})$ and we have the following relations in $\operatorname{Pic}(\overline{V})$:

$$\begin{aligned} [L_{i,j}] &= [\Lambda] - [E_i] - [E_j] \qquad \text{for } 1 \leqslant i < j \leqslant 6, \\ [Q_i] &= 2[\Lambda] - \sum_{j \neq i} [E_j]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

In the following, we choose the projection of $\overline{V}$ to $\mathbf{P}^2_{\overline{\mathbf{Q}}}$ so that we have the equalities:

$$\begin{array}{lll} E_1 = L(0), & E_2 = L(1), & E_3 = L(2), \\ E_4 = M(1), & E_5 = M'(2), & E_6 = M''(0), \\ Q_1 = L'(1), & Q_2 = L'(2), & Q_3 = L'(0), \\ Q_4 = M(0), & Q_5 = M'(1), & Q_6 = M''(2), \\ L_{1,2} = L''(1), & L_{2,3} = L''(2), & L_{3,1} = L''(0), \\ L_{4,5} = M''(1), & L_{5,6} = M(2), & L_{6,4} = M'(0), \\ L_{1,4} = N(0), & L_{1,5} = N(1), & L_{1,6} = N(2), \\ L_{2,4} = N'(1), & L_{2,5} = N'(2), & L_{2,6} = N'(0), \\ L_{3,4} = N''(2), & L_{3,5} = N''(0), & L_{3,6} = N''(1). \end{array} \tag{3.7}$$

Notations 3.2. — We consider the étale algebra E_1 over $\mathbf{Q}$ defined as $\mathbf{Q}(\gamma)$ if *ab/cd* is not a cube in $\mathbf{Q}$ and as $\mathbf{Q}(\theta) \times \mathbf{Q}$ otherwise. Similarly, we define the algebra E_2 (resp. E_3) corresponding to γ' (resp. γ'') and we put

$$E = E_1 \times E_2 \times E_3.$$

We also consider the following elements of $\mathrm{Pic}(\overline{V})$

$$\begin{aligned}
e_0^1 &= [M(0)] + [M(1)] + [M(2)], & e_1^1 &= [M'(0)] + [M'(1)] + [M'(2)],\\
e_2^1 &= [M''(0)] + [M''(1)] + [M''(2)], & e_0^2 &= [N(0)] + [N(1)] + [N(2)],\\
e_1^2 &= [N'(0)] + [N'(1)] + [N'(2)], & e_2^2 &= [N''(0)] + [N''(1)] + [N''(2)],\\
e_0^3 &= [L(0)] + [L(1)] + [L(2)], & e_1^3 &= [L'(0)] + [L'(1)] + [L'(2)],\\
e_2^3 &= [L''(0)] + [L''(1)] + [L''(2)]
\end{aligned}$$

and the sets

$$\mathscr{E}_1 = \{e_0^1, e_1^1, e_2^1\}, \quad \mathscr{E}_2 = \{e_0^2, e_1^2, e_2^2\}, \quad \mathscr{E}_3 = \{e_0^3, e_1^3, e_2^3\},$$

and $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup \mathscr{E}_3$.

Lemma 3.3. — *The sets $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ and $\mathscr{E}_3$ are globally invariant under the action of the Galois group* $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ *and the étale algebra corresponding to the set $\mathscr{E}_i$ is isomorphic to E_i.*

Proof. — The fact that the sets $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ and $\mathscr{E}_3$ are globally invariant follows immediately from the descriptions (3.2)–(3.5). The étale algebra F corresponding to a finite $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$-set $\mathscr{F}$ may be defined as the algebra

$$(K[\mathscr{F}])^{\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})}$$

where $K[\mathscr{F}]$ is the algebra $K^{\mathscr{F}}$ and where $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ acts simultaneously on K and $\mathscr{F}$. In the generic case, let us consider

$$\sigma = \tau'\tau'', \quad \sigma' = \tau''\tau \quad \text{and} \quad \sigma'' = \tau\tau'.$$

Then σ sends γ on $\theta\gamma$ and acts trivially on γ', γ'' and θ. We may describe similarly the actions of σ' and σ''. The action of $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ on $\mathscr{E}_1$ in the generic case is given by the table

	e_0^1	e_1^1	e_2^1
c	e_0^1	e_2^1	e_1^1
σ	e_1^1	e_2^1	e_0^1
σ'	e_0^1	e_1^1	e_2^1
σ''	e_0^1	e_1^1	e_2^1

This implies that if *ab/cd* is not a cube in $\mathbf{Q}$, then $\mathscr{E}_1$ is isomorphic to

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\gamma))$$

as a $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$-set. Then the corresponding étale algebra is

$$(K[\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\gamma))])^{\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})} \xrightarrow{\sim} K^{\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\gamma))} = \mathbf{Q}(\gamma) = E_1.$$

Similarly if *ab/cd* is a cube in $\mathbf{Q}$, then we may decompose $\mathscr{E}_1$ into two orbits and we see that the corresponding étale algebra is $\mathbf{Q}(\theta) \times \mathbf{Q} = E_1$. The proofs for $\mathscr{E}_2$ and $\mathscr{E}_3$ are similar. □

Lemma 3.4. — *There exists an exact sequence of* $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ *modules*

$$0 \to \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q}[\mathscr{E}] \to \mathrm{Pic}(\overline{V}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to 0.$$

Proof. — By (3.6) and (3.7), we have in $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ the relations

$$\begin{aligned}
e_0^1 &= 3[\Lambda] - [E_1] - [E_2] - [E_3] + [E_4] - 2[E_5] - 2[E_6],\\
e_1^1 &= 3[\Lambda] - [E_1] - [E_2] - [E_3] - 2[E_4] + [E_5] - 2[E_6],\\
e_2^1 &= 3[\Lambda] - [E_1] - [E_2] - [E_3] - 2[E_4] - 2[E_5] + [E_6],\\
e_0^2 &= 3[\Lambda] - 3[E_1] - [E_4] - [E_5] - [E_6],\\
e_1^2 &= 3[\Lambda] - 3[E_2] - [E_4] - [E_5] - [E_6],\\
e_2^2 &= 3[\Lambda] - 3[E_3] - [E_4] - [E_5] - [E_6],\\
e_0^3 &= [E_1] + [E_2] + [E_3],\\
e_1^3 &= 6[\Lambda] - 2[E_1] - 2[E_2] - 2[E_3] - 3[E_4] - 3[E_5] - 3[E_6],\\
e_2^3 &= 3[\Lambda] - 2[E_1] - 2[E_2] - 2[E_3]
\end{aligned}$$

which proves that the natural projection from $\mathbf{Q}[\mathscr{E}]$ to $\mathrm{Pic}(\overline{V}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ is surjective. Moreover one has the relations

$$3\omega_V^{-1} = \sum_{x \in \mathscr{E}_1} x = \sum_{x \in \mathscr{E}_2} x = \sum_{x \in \mathscr{E}_3} x,$$

which gives a homomorphism of $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$-modules

$$\mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q}[\mathscr{E}]$$

and the exact sequence of the lemma. □

Notations 3.5. — For any prime p and any finite field extension F of $\mathbf{Q}$, we consider the local factor $\zeta_{F,p}$ of the function ζ_F at p which is defined by

$$\zeta_{F,p}(s) = \prod_{\{v \in \mathrm{Val}(F) \mid v|p\}} (1 - \#\mathbf{F}_v^{-s})^{-1}.$$

Let F be an étale algebra over $\mathbf{Q}$ and $F = \prod_{i \in I} F_i$ its decomposition in fields. Put

$$\zeta_F(s) = \prod_{i \in I} \zeta_{F_i}(s) \quad \text{and} \quad \zeta_{F,p}(s) = \prod_{i \in I} \zeta_{F_i,p}(s).$$

For any prime p, we denote by $\nu_F(p)$ the number of components of $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$ of degree one over $\mathbf{Q}_p$.

Proposition 3.6. — *With notation as above, for any prime p not in S, one has*

(i) $L_p(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \dfrac{\zeta_{E,p}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q},p}(s)^2}$,

(ii) $\mathrm{Tr}(\widetilde{\mathrm{Fr}}_p \mid \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \nu_E(p) - 2$.

Proof. — By lemma 3.4, we have

$$L_p(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{L_p(s, \mathbf{Q}[\mathscr{E}])}{L_p(s, \mathbf{Q})^2}.$$

Thus it is enough to prove that if E is an arbitrary étale algebra over $\mathbf{Q}$ corresponding to a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$-set $\mathscr{E}$ and if p is a prime such that $E/\mathbf{Q}$ is not ramified at p, then

$$\zeta_{E,p}(s) = L_p(s, \mathbf{Q}[\mathscr{E}]).$$

This well-known assertion follows from the fact that the components of $E \otimes \mathbf{Q}_p$ are in bijection with the orbits of $\widetilde{\mathrm{Fr}}_p$ in $\mathscr{E}$, and the degree of each component is the length of the corresponding orbit. This proves (i).

But this also shows that

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{\mathrm{Fr}}_p \mid \mathbf{Q}[\mathscr{E}]) = \nu_E(p)$$

which implies (ii). □

Remark 3.7. — Thus the factor λ'_p which was defined in proposition 5.1 in [**PT**] coincides with $L_p(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ at the good places (as suggested by the referee of that paper).

4. Euler product for the good places

We need to compute the number of solutions of (3.1) modulo p for all primes not in S.

Proposition 4.1. — *For any prime p not in S, one has*

$$\frac{\#V(\mathbf{F}_p)}{p^2} = 1 + \frac{\nu_E(p)-2}{p} + \frac{1}{p^2}$$

where E is the étale algebra defined in §3.

Proof. — By a result of Weil (see [**Ma2**, theorem 23.1]),

$$\#V(\mathbf{F}_p) = 1 + \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\overline{V}))p + p^2.$$

Proposition 3.6 implies that

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \nu_E(p) - 2. \quad \square$$

Remark 4.2. — We could have proved this result directly as in [**PT**]. Let $N(p)$ be the number of solutions of (3.1) in $\mathbf{F}_p^4$. We have

$$\#V(\mathbf{F}_p) = \frac{N(p)-1}{p-1}.$$

By [**IR**, §8.7 theorem 5], one has

$$N(p) = p^3 + \sum \overline{\chi}_1(a)\overline{\chi}_2(b)\overline{\chi}_3(c)\overline{\chi}_4(d)J_0(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4),$$

where the sum is taken over all quadruples $(\chi_1,\dots,\chi_4)$ of nontrivial cubic characters from $\mathbf{F}_p^*$ to $\mathbf{C}^*$ such that $\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4 = 1$ and where

$$J_0(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4) = \sum_{t_1+\cdots+t_4=0}\prod_{i=1}^{4}\chi_i(t_i),$$

the characters being extended by $\chi_i(0) = 0$. For $p \equiv 2 \bmod 3$ there are no nontrivial characters and the formula is obvious. Otherwise there are exactly two nontrivial conjugated characters χ and $\overline{\chi}$. By [**PT**, proof of prop. 4.1], we have

$$J_0(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4) = p(p-1)$$

and

$$\#V(\mathbf{F}_p) = 1 + p(1 + \sum \chi_1(a)\chi_2(b)\chi_3(c)\chi_4(d)) + p^2$$

where the sum is taken over the same quadruples as above. The formula

$$\sum \chi_1(a)\chi_2(b)\chi_3(c)\chi_4(d) = \chi\left(\frac{ab}{cd}\right) + \overline{\chi}\left(\frac{ab}{cd}\right) + \chi\left(\frac{ac}{bd}\right) + \overline{\chi}\left(\frac{ac}{bd}\right) + \chi\left(\frac{ad}{bc}\right) + \overline{\chi}\left(\frac{ad}{bc}\right)$$

implies the result.

Notations 4.3. — For any place v of $\mathbf{Q}$, we put

$$\lambda_v = \begin{cases} \dfrac{\zeta_{E,v}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q},v}(s)^2} & \text{if } v \text{ is finite,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.4. — By proposition 3.6, $\lambda_p = L_p(1, \operatorname{Pic}(\overline{V}))$ if $p \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q}) - S$. Thus the Tamagawa measure $\boldsymbol{\omega}_H$ is given by the formula

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s \to 1} (s-1)^{\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V)} \left(\frac{\zeta_E(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)^2}\right) \times \prod_{v \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q})} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}.$$

By lemmata 3.2 and 3.4 in [**PT**] and lemma 5.4.6 in [**Pe**], for any p in $\operatorname{Val}(\mathbf{Q}) - S$ one has

$$\boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p)) = \frac{\# V(\mathbf{F}_p)}{p^2}$$

(see also [**Pe**, lemma 2.2.1] and [**PT**, remark 5.2]). Therefore, the local factor at a good place p is given by

$$\begin{array}{ll}
\left(1-\frac{1}{p}\right)^7\left(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_E(p) = 9 \\
\left(1-\frac{1}{p}\right)^4\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_E(p) = 6 \\
\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^2\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_E(p) = 3 \\
\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^3\left(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3 \text{ and } \nu_E(p) = 0 \\
\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^3\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3.
\end{array}$$

We get (for the good places) the factors C_0, C_1, C_2 and C_3 where

$$C_0 = \prod_{\substack{p\nmid 3abcd,\\ p\equiv 2 \bmod 3.}} \left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^3,$$

$$C_1 = \prod_{\substack{p\nmid 3abcd,\\ p\equiv 1 \bmod 3,\\ \nu_E(p)=9.}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^7\left(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\right),$$

$$C_2 = \prod_{\substack{p\nmid 3abcd,\\ p\equiv 1 \bmod 3,\\ \nu_E(p)=6.}} \left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^4\left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right),$$

$$C_3 = \prod_{\substack{p\nmid 3abcd,\\ p\equiv 1 \bmod 3,\\ \nu_E(p)=0 \text{ or } 3.}} \left(1-\frac{1}{p^3}\right)^3.$$

These products converge rapidly and are easily approximated.

5. Density at the bad places

In this section we restrict to cubic surfaces with equations of the form

$$X^3 + Y^3 + qZ^3 + q^2T^3 = 0 \tag{5.1}$$

with q prime and

$$aX^3 + aY^3 + qZ^3 + qT^3 = 0 \tag{5.2}$$

with q prime and a an integer coprime to q.

Notations 5.1. — If V is defined by the equation (3.1), and p is a prime, then we consider

$$N^*(p^r) = \#\{(x,y,z,t) \in (\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4 - (p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4 \mid ax^3+by^3+cz^3+dt^3=0 \text{ in } \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\}$$

Remark 5.2. — By [**PT**, lemmata 3.2 and 3.4], there is an explicit integer r_0 such that

$$\boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p)) = \frac{1}{1-p^{-1}} \times \frac{N^*(p^{r_0})}{p^{3r_0}}.$$

If $p = 3$ and $3 \nmid abcd$, then a direct computation in $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^4$ gives the value of $N^*(9)$ and thus of $\boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p))$. Thus, in the following lemma we restrict to the case when V is given by (5.1) or (5.2) and $p = q$.

Lemma 5.3. — *If V is given by the equation*

$$X^3 + Y^3 + pZ^3 + p^2T^3 = 0$$

then for $r \geqslant 2$,

$$\frac{N^*(p^r)}{p^{3r}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} & \textit{if } p \equiv 2 \textit{ mod } 3, \\ 3\left(1 - \frac{1}{p}\right) & \textit{if } p \equiv 1 \textit{ mod } 3, \\ \frac{2}{3} & \textit{if } p = 3. \end{cases}$$

If V is given by the equation

$$aX^3 + aY^3 + pZ^3 + pT^3 = 0,$$

with $p \nmid a$, then for $r \geqslant 3$,

$$\frac{N^*(p^r)}{p^{3r}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p^2} & \textit{if } p \equiv 2 \textit{ mod } 3, \\ 3\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \textit{if } p \equiv 1 \textit{ mod } 3, \\ \frac{4}{3} & \textit{if } p = 3. \end{cases}$$

Remark 5.4. — This lemma implies that if V is given by the first equation then the local factor at p is given by

$$\lambda_p \boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p)) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) & \text{if } p \equiv 2 \text{ mod } 3, \\ 3\left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 & \text{if } p \equiv 1 \text{ mod } 3, \\ \frac{4}{9} & \text{if } p = 3, \end{cases}$$

and if V is given by the second equation then this factor is

$$\lambda_p \boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p)) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^3 & \text{if } p \equiv 2 \text{ mod } 3, \\ 3\left(1 - \frac{1}{p}\right)^4\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \text{ mod } 3, \\ \frac{16}{27} & \text{if } p = 3. \end{cases}$$

Proof. — Let us consider the set of quadruples (x,y,z,t) in $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4 - (p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4$ such that

$$x^3+y^3+pz^3+p^2t^3=0 \qquad \text{in } \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}. \tag{5.3}$$

If $p|x$ then $p|y$, $p|z$ and $p|t$. Therefore, for any (x,y,z,t) as above, $p\nmid x$ and $p\nmid y$. But for any triple (y,z,t) in $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}-p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^2$, there exists exactly one x verifying (5.3) if $p\equiv 2 \bmod 3$ and exactly three of them if $p\equiv 1 \bmod 3$. If $p=3$ and y belongs to $\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z}-3\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z}$ then (5.3) implies that $3|z$. For any triple (y,z,t) with y in $(\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z})-(3\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z})$, z in $(3\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z})$ and t in $(\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z})$ there exist exactly three x in $\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z}$ which satisfy (5.3). We get that

$$\frac{N^*(p^r)}{p^{3r}}=\begin{cases}\frac{(p-1)p^{r-1}\times p^r\times p^r}{p^{3r}}=1-\frac{1}{p} & \text{if } p\equiv 2 \bmod 3,\\ 3\frac{(p-1)p^{r-1}\times p^r\times p^r}{p^{3r}}=3\left(1-\frac{1}{p}\right) & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3,\\ 3\frac{2\times 3^{r-1}\times 3^{r-1}\times 3^r}{3^{3r}}=\frac{2}{3} & \text{if } p=3.\end{cases}$$

Let us now turn to the set of (x,y,z,t) in $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4-(p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4$ such that

$$ax^3+ay^3+pz^3+pt^3=0.$$

We decompose this set as follows

$$N_1^*(p^r)=\#\left\{(x,y,z,t)\in(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4-(p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4 \;\middle|\; \begin{cases}p\nmid x,\\ ax^3+ay^3+pz^3+pt^3=0.\end{cases}\right\}$$

$$N_2^*(p^r)=\#\left\{(x,y,z,t)\in(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4-(p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^4 \;\middle|\; \begin{cases}p|x, \quad p\nmid z,\\ ax^3+ay^3+pz^3+pt^3=0.\end{cases}\right\}$$

As above we have the formula

$$\frac{N_1^*(p^r)}{p^{3r}}=\begin{cases}\frac{(p-1)p^{r-1}\times p^r\times p^r}{p^{3r}}=1-\frac{1}{p} & \text{if } p\equiv 2 \bmod 3,\\ 3\times\frac{(p-1)p^{r-1}\times p^r\times p^r}{p^{3r}}=3\left(1-\frac{1}{p}\right) & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3,\\ 3\frac{2\times 3^{r-1}\times 3^{r-1}\times 3^r}{3^{3r}}=\frac{2}{3} & \text{if } p=3,\end{cases}$$

where for $p=3$ we use the equality

$$3^{r-1}\times 3^r=\#\{(z,t)\in(\mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z})^2 \mid z^3\equiv t^3 \bmod 3\}.$$

On the other hand,

$$N_2^*(p^r) = p^2 \left\{ (x,y,z,t) \in (\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z})^4 \,\middle|\, \begin{cases} p \nmid z \\ ap^2x^3 + ap^2y^3 + z^3 + t^3 = 0. \end{cases} \right\}$$

and

$$\frac{N_2^*(p^r)}{p^{3r}} = \frac{p^2}{p^3} \times \begin{cases} \frac{(p-1)p^{r-2} \times p^{r-1} \times p^{r-1}}{p^{3(r-1)}} = 1 - \frac{1}{p} & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3, \\ 3\frac{(p-1)p^{r-2} \times p^{r-1} \times p^{r-1}}{p^{3(r-1)}} = 3\left(1 - \frac{1}{p}\right) & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3, \\ 3\frac{2 \times 3^{r-2} \times 3^{r-1} \times 3^{r-1}}{3^{3(r-1)}} = 2 & \text{if } p = 3. \end{cases}$$

We conclude:

$$\frac{N^*(p^r)}{p^{3r}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p^2} & \text{if } p \equiv 2 \bmod 3, \\ 3\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \text{if } p \equiv 1 \bmod 3, \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} & \text{if } p = 3. \quad \square \end{cases}$$

6. The constant $\alpha(V)$

Since the cubic surfaces we consider in this paper are $\mathbf{Q}$-rational (which implies that $\beta(V) = 1$), it remains to compute the rank t of the Picard group and the value of $\alpha(V)$.

Proposition 6.1. — *If V is given by the equation*

$$X^3 + Y^3 + aZ^3 + a^2T^3 = 0, \tag{6.1}$$

where a is not a cube in $\mathbf{Q}$, then $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) = 2$ *and* $\alpha(V) = 2$.

If V is given by the equation

$$aX^3 + aY^3 + bZ^3 + bT^3 = 0, \tag{6.2}$$

where a and b are strictly positive integers and b/a is not a cube in $\mathbf{Q}$, then $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) = 3$ *and* $\alpha(V) = 1$.

If V is given by the equation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0 \tag{6.3}$$

then $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(V) = 4$ *and* $\alpha(V) = 7/18$.

Proof. — To compute $\alpha(V)$ we shall use its original definition [**Pe**, §2]:

$$\alpha(V) = \mathrm{Vol}\{\, x \in \Lambda_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee} \mid \langle \omega_V^{-1}, x\rangle = 1 \,\}$$

where the Lebesgue measure on the affine hyperplane

$$\mathscr{H}(\lambda) = \{\, x \in \mathrm{Pic}(V)^{\vee} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \mid \langle \omega_V^{-1}, x\rangle = \lambda \,\}$$

is defined by the $(t-1)$-form $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ which is characterized by the relation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \wedge \mathrm{d}\omega_V^{-1} = \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

(where $\mathrm{d}\omega_V^{-1}$ is the linear form defined by ω_V^{-1} on $\mathrm{Pic}(V)^{\vee}$ and $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ is the form corresponding to the natural Lebesgue measure on $\mathrm{Pic}(V)^{\vee} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$). More explicitely, let $(e_1, \dots, e_t)$ be a basis of $\mathrm{Pic}(V)$ and $(e_1^{\vee}, \dots, e_t^{\vee})$ be the dual basis. Write

$$\omega_V^{-1} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i e_i$$

with $\lambda_t \neq 0$. Let $f_1, \dots, f_{t-1}$ be the projection of $e_1^{\vee}, \dots, e_{t-1}^{\vee}$ on $\mathscr{H}(0)$ along $e_t^{\vee}$. Then

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda_t} \mathrm{d}f_1^{\vee} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{t-1}^{\vee}.$$

By [**SK**, pages 14 and 55], if $O_1, \dots, O_m$ are the orbits of the action of $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ on the 27 lines, then $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$ is generated by the classes $[O_i] = \sum_{x \in O_i} [x]$.

When V is given by the equation (6.1) the Galois group $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ is

$$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

and the orbits of its action on the 27 lines are

$$\begin{aligned}
O_1 &= \{L(0), L'(0), L''(0)\},\\
O_2 &= \{L(1), L(2), L'(1), L'(2), L''(1), L''(2)\},\\
O_3 &= \{M(0), M(1), M(2)\},\\
O_4 &= \{M'(0), M'(1), M'(2), M''(0), M''(1), M''(2)\},\\
O_5 &= \{N(0), N'(1), N''(2)\},\\
O_6 &= \{N(1), N(2), N'(0), N'(2), N''(0), N''(1)\}.
\end{aligned}$$

In the basis $([\Lambda], [E_1], \dots, [E_6])$, a basis of $\mathrm{Pic}(V) = (\mathrm{Pic}\,\overline{V})^{\mathrm{Gal}(K:\mathbf{Q})}$ is given by

$$e_1 = \omega_V^{-1}, \qquad e_2 = -2[E_4] + [E_5] + [E_6].$$

In the basis (e_0, e_1), the effective cone $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$ is generated by the classes

$$\begin{array}{lll} [O_1] = e_1, & [O_2] = 2e_1, & [O_3] = e_1 - e_2, \\ [O_4] = 2e_1 + e_2, & [O_5] = e_1 + e_2, & [O_6] = 2e_1 - e_2. \end{array}$$

Therefore, this cone is generated by the elements $e_1 - e_2$ and $e_1 + e_2$ and $\alpha(V)$ is given as the volume of the domain

$$x = 1, \quad x + y > 0 \quad \text{and} \quad x - y > 0,$$

that is, as the volume of the segment $[-1, 1]$ and $\alpha(V) = 2$.

If V is given by the equation (6.2) then $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ is isomorphic to

$$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

and the orbits of the Galois action on the 27 lines are

$$\begin{aligned} O_1 &= \{L(0)\}, \\ O_2 &= \{L(1), L(2)\}, \\ O_3 &= \{L'(0), L''(0)\}, \\ O_4 &= \{L'(1), L''(2)\}, \\ O_5 &= \{L'(2), L''(1)\}, \\ O_6 &= \{M(0), M'(1), M''(2)\}, \\ O_7 &= \{M(1), M(2), M'(0), M'(2), M''(0), M''(1)\}, \\ O_8 &= \{N(0), N(1), N(2)\}, \\ O_9 &= \{N'(0), N'(1), N'(2), N''(0), N''(1), N''(2)\}. \end{aligned}$$

A basis of $\mathrm{Pic}(V)$ is given by

$$e_1 = \omega_V^{-1}, \quad e_2 = [E_1], \quad e_3 = [E_2] + [E_3],$$

and the cone $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$ is generated by

$$\begin{array}{lll} [O_1] = e_2, & [O_2] = e_3, & [O_3] = e_1 - e_2, \\ [O_4] = e_1 + e_2 - e_3, & [O_5] = e_1 - e_2, & [O_6] = 2e_1 - e_2 - e_3, \\ [O_7] = e_1 + e_2 + e_3, & [O_8] = e_1 - 2e_2 + e_3, & [O_9] = 2e_1 + 2e_2 - e_3, \end{array}$$

that is, by

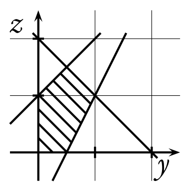
$$e_2, \quad e_3, \quad e_1 + e_2 - e_3, \quad 2e_1 - e_2 - e_3, \quad e_1 - 2e_2 + e_3$$

(since $3[O_3] = [O_6] + [O_8]$). Thus $\alpha(V)$ is the volume of the domain given by

$$\begin{cases} x = 1, y > 0, z > 0, \\ x + y - z > 0, \\ 2x - y - z > 0, \\ x - 2y + z > 0. \end{cases}$$

Using the description above, $\alpha(V)$ is the volume of

$$\begin{cases} 0 < y, \ 0 < z, \\ z - y < 1, \\ y + z < 2, \\ 2y - z < 1. \end{cases}$$



Therefore $\alpha(V) = 1$.

If V is given by the equation (6.3), then $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ and the orbits of the Galois action on the 27 lines are given by

$$\begin{array}{lll}
O_1 = \{L(0)\}, & O_2 = \{L(1), L(2)\}, & O_3 = \{L'(0), L''(0)\}, \\
O_4 = \{L'(1), L''(2)\}, & O_5 = \{L'(2), L''(1)\}, & \\
O_6 = \{M(0)\}, & O_7 = \{M(1), M(2)\}, & O_8 = \{M'(0), M''(0)\}, \\
O_9 = \{M'(1), M''(2)\}, & O_{10} = \{M'(2), M''(1)\}, & \\
O_{11} = \{N(0)\}, & O_{12} = \{N(1), N(2)\}, & O_{13} = \{N'(0), N''(0)\}, \\
O_{14} = \{N'(1), N''(2)\}, & O_{15} = \{N'(2), N''(1)\}. &
\end{array}$$

A basis of the Picard group is given by

$$e_1 = [\Lambda] - [E_4], \quad e_2 = [E_1], \quad e_3 = [E_2] + [E_3], \quad e_4 = -2[E_4] + [E_5] + [E_6].$$

The effective cone $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$ is generated by

$$
\begin{aligned}
[O_1] &= e_2, & [O_2] &= e_3,\\
[O_3] &= 3e_1-2e_2-e_3-e_4, & [O_4] &= 3e_1-2e_3-e_4,\\
[O_5] &= 3e_1-2e_2-e_3-e_4, & [O_6] &= 2e_1-e_2-e_3-e_4,\\
[O_7] &= e_1-e_4, & [O_8] &= e_1,\\
[O_9] &= 4e_1-2e_2-2e_3-e_4, & [O_{10}] &= e_1,\\
[O_{11}] &= e_1-e_2, & [O_{12}] &= 2e_1-2e_2-e_4,\\
[O_{13}] &= 2e_1-e_3-e_4, & [O_{14}] &= 2e_1-e_3,\\
[O_{15}] &= 2e_1-e_3-e_4.
\end{aligned}
$$

Since $[O_3]=[O_5]=[O_6]+[O_{11}]$ and $[O_{13}]=[O_{15}]=[O_6]+[O_2]$, we get that $\Lambda_{\mathrm{eff}}(V)$ is generated by

$$
\begin{gathered}
e_2,\quad e_3,\quad 3e_1-2e_3-e_4,\quad 2e_1-e_2-e_3-e_4,\quad e_1-e_4,\\
4e_1-2e_2-2e_3-e_4,\quad e_1-e_2,\quad 2e_1-2e_2-e_4,\quad 2e_1-e_3.
\end{gathered}
$$

The anticanonical class is given by

$$\omega_V^{-1}=3e_1-e_2-e_3-e_4.$$

Thus $\alpha(V)$ is the volume of the domain

$$
\begin{cases}
3x-y-z-t=1,\\
y>0,\quad z>0,\\
x-y>0,\\
2x-z>0,\\
x-t>0,\\
3x-2z-t>0,\\
2x-y-z-t>0,\\
4x-2y-2z-t>0,\\
2x-2y-t>0,
\end{cases}
$$

that is, of the domain P in $\mathbf{R}^3$ given by

$$\begin{cases} y > 0, \quad z > 0, \\ x - y > 0, \\ 2x - z > 0, \\ 1 - 2x + y + z > 0, \\ 1 + y - z > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 1 + x - y - z > 0, \\ 1 - x - y + z > 0. \end{cases}$$

We compute its volume as follows: decompose P into cones with apex $(0,0,0)$ and supported by the faces not containing this point. Thus we consider the following faces of P:

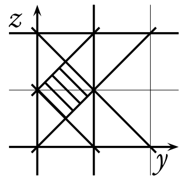
$$\begin{array}{llll} F_1: & 1 - x = 0, & F_2: & 1 - 2x + y + z = 0, \\ F_3: & 1 + y - z = 0, & F_4: & 1 + x - y - z = 0, \\ F_5: & 1 - x - y + z = 0. & & \end{array}$$

One has

$$\alpha(V) = \mathrm{Vol}(P) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5} \mathrm{Area}(F_i).$$

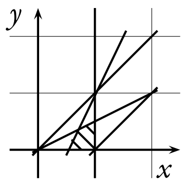
The area of F_1 is the volume of the domain

$$\begin{cases} y > 0, \quad z > 0, \\ 1 - y > 0, \\ 2 - z > 0, \\ -1 + y + z > 0, \\ 1 + y - z > 0, \\ 2 - y - z > 0, \\ z - y > 0, \end{cases}$$



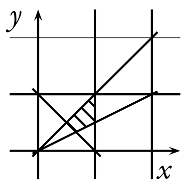
and we get $\mathrm{Area}(F_1) = \frac{1}{2}$. For F_2 we have the equations

$$\begin{cases} y > 0, \\ -1 + 2x - y > 0, \\ x - y > 0, \\ 1 + y > 0, \\ 2 - 2x + 2y > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 2 - x > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases}$$



We get $\mathrm{Area}(F_2) = \frac{1}{6}$. For F_3 we have the same equations and the same area. For F_4 we have the equations

$$\begin{cases} y > 0, \\ 1 + x - y > 0, \\ x - y > 0, \\ -1 + x + y > 0, \\ 2 - x > 0, \\ -x + 2y > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 2 - 2y > 0. \end{cases}$$



We find $\mathrm{Area}(F_4) = 1/8 + 1/24 = 1/6$. The face F_5 is given by the same equations and $\mathrm{Area}(F_5) = 1/6$. Finally

$$\alpha(V) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\right) = \frac{7}{18}. \qquad \square$$

7. Some statistical formulae

The most naive way to test the conjecture is to compute the quotient

$$N_{U,H}(B)/\theta_H(V)B(\log B)^{t-1} \tag{7.1}$$

for large values of B. However, as explained in the introduction, the relative error term is expected to decrease slowly. Therefore it is natural to use the fact that we expect an asymptotic of the form

$$N_{U,H}(B) = BP(\log(B)) + o(B),$$

where P is a polynomial of degree $t-1$ with a dominant coefficient equal to $\theta_H(V)$. With the program of D. J. Bernstein [**Be**], we can get a family of pairs $(B_i, N_{U,H}(B_i))_{1\leqslant i\leqslant N}$. In the examples below we took for B_i successive powers of 6/5 between 200 and 10^5. For any i between 1 and N, let

$$x_i = \log(B_i) \quad \text{and} \quad y_i = N_{U,H}(B_i)/B_i.$$

The simplest statistical tool in this setting is to look for a polynomial Q of degree $t-1$ such that

$$\sum_{i=1}^{N}(Q(x_i)-y_i)^2$$

is minimal and to compute its leading coefficient A_{t-1}. We then test the conjecture using the quotient

$$A_{t-1}/\theta_H(V) \tag{7.2}$$

The advantage of this method is that, if the expected formula is correct, and if we take for B_i successive powers of a fixed real number λ between B_1 and B_N, then the relative error term for (7.2) should at least decrease as $C/(\log(B_N)-\log(B_1))^{t-1}$ for B_N/B_1 large enough with a constant C going to 0 as B_1 goes to infinity.

Of course, due to the arithmetic nature of $N_{U,H}(B)$, the errors are not as independent as one would need for a clean statistical treatment of the data. Also, since we do not have a good understanding of the difference

$$N_{U,H}(B)-BP(\log(B)),$$

and in order to limit the number of arbitrary parameters involved in the statistical computation, we prefered not to weight the points.

Notations 7.1. — Let $R(X,Y)$ be a polynomial in $\mathbf{Q}[X,Y]$ and denote by $\langle R(X,Y)\rangle$ the mean value of $(R(x_i,y_i))_{1\leqslant i\leqslant N}$, that is,

$$\langle R(X,Y)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R(x_i,y_i).$$

If $t=2$ the leading coefficient of Q (if it is uniquely defined) is given by

$$A_1 = \frac{\langle XY\rangle - \langle Y\rangle\langle X\rangle}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}.$$

If $t = 3$ the leading coefficient is

$$A_2 = \frac{\langle YX^2\rangle - \langle Y\rangle\langle X^2\rangle - \frac{(\langle X^3\rangle - \langle X\rangle\langle X^2\rangle)(\langle YX\rangle - \langle Y\rangle\langle X\rangle)}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}}{\langle X^4\rangle - \langle X^2\rangle^2 - \frac{(\langle X^3\rangle - \langle X\rangle\langle X^2\rangle)^2}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}}.$$

If $t = 4$, the leading coefficient is

$$A_3 = \frac{\langle YX^3\rangle - \langle Y\rangle\langle X^3\rangle - \frac{(\langle X^4\rangle - \langle X\rangle\langle X^3\rangle)(\langle YX\rangle - \langle Y\rangle\langle X\rangle)}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} - \frac{\beta\delta}{\gamma}}{\langle X^6\rangle - \langle X^3\rangle^2 - \frac{(\langle X^4\rangle - \langle X\rangle\langle X^3\rangle)^2}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} - \frac{\beta^2}{\gamma}},$$

with

$$\beta = \langle X^5\rangle - \langle X^3\rangle\langle X^2\rangle - \frac{\langle X^3\rangle - \langle X\rangle\langle X^2\rangle}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}(\langle X^4\rangle - \langle X^3\rangle\langle X\rangle),$$

$$\gamma = \langle X^4\rangle - \langle X^2\rangle^2 - \frac{(\langle X^3\rangle - \langle X\rangle\langle X^2\rangle)^2}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2},$$

$$\delta = \langle YX^2\rangle - \langle Y\rangle\langle X^2\rangle - \frac{\langle X^3\rangle - \langle X\rangle\langle X^2\rangle}{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}(\langle YX\rangle - \langle Y\rangle\langle X\rangle).$$

In the next section, we denote by $\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)$ the leading coefficient A_{t-1}.

8. Presentation of the results

We consider only cubic surfaces of the form (6.1), (6.2), or (6.3). By [**CTKS**, Lemme 1], the corresponding surface V is $\mathbf{Q}$-rational and, in particular, $\mathrm{Br}(V) = 0$. Thus the Brauer-Manin obstruction to weak approximation is void and

$$V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} = V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) = \prod_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} V(\mathbf{Q}_v).$$

Moreover,

$$\beta(V) = \#H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = 1.$$

By (2.2) and (2.3), the constant $\theta_H(V)$ may be written as

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\boldsymbol{\omega}_H(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}))$$

Using remark 4.4 we get

$$\theta_H(V) = \alpha(V) \lim_{s \to 1} (s-1)^{t+2} \zeta_E(s) \times \boldsymbol{\omega}_{H,\infty}(V(\mathbf{R})) \times \prod_{p \mid 3abcd} \lambda_p \boldsymbol{\omega}_{H,p}(V(\mathbf{Q}_p)) \times \prod_{i=0}^{3} C_i,$$

where E is the étale algebra defined in 3.2. The residue of the zeta function could have been computed directly (see, for example, [**Co**, chapter 4]), but instead we used PARI. The volume at the real place is given by the formula

$$\frac{1}{2} \int_{\left\{ (x,y,z,t) \,\middle|\, \left\{ \begin{smallmatrix} ax^3+by^3+cz^3+dt^3=0 \\ \sup(|x|,|y|,|z|,|t|) \leqslant 1 \end{smallmatrix} \right. \right\}} \boldsymbol{\omega}_L(x,y,z,t),$$

where $\boldsymbol{\omega}_L$ is the Leray form

$$\boldsymbol{\omega}_L(x,y,z,t) = \frac{\sqrt[3]{d}^{\,-1}}{3(ax^3+by^3+cz^3)^{2/3}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Decomposing the domain of integration (and using the various expressions of the Leray form) it is possible to remove the singularities of this integral which is then easily estimated on a computer. The factors corresponding to the bad places have been described in section 5 and the constants C_0, C_1, C_2, and C_3 may be computed directly as in section 4.

We considered the following examples: for the cubic surfaces with a Picard group of rank 2 we used

$$(S_1) \qquad X^3 + Y^3 + 2Z^3 + 4T^3 = 0,$$

$$(S_2) \qquad X^3 + Y^3 + 5Z^3 + 25T^3 = 0,$$

$$(S_3) \qquad X^3 + Y^3 + 3Z^3 + 9T^3 = 0.$$

For the rank 3 case:

$$(S_4) \qquad X^3 + Y^3 + 2Z^3 + 2T^3 = 0,$$

$$(S_5) \qquad X^3 + Y^3 + 5Z^3 + 5T^3 = 0,$$

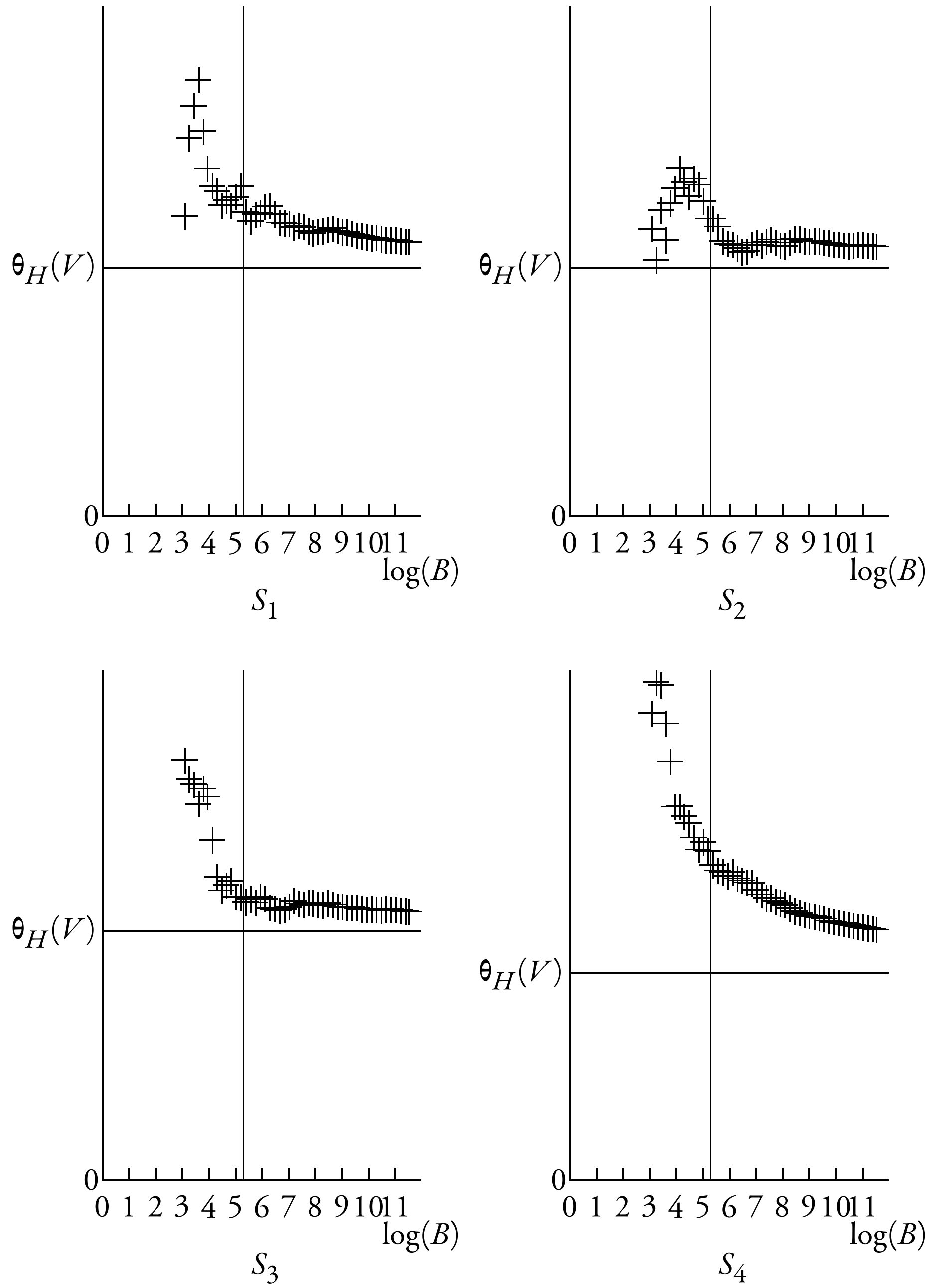
$$(S_6) \qquad X^3 + Y^3 + 7Z^3 + 7T^3 = 0,$$

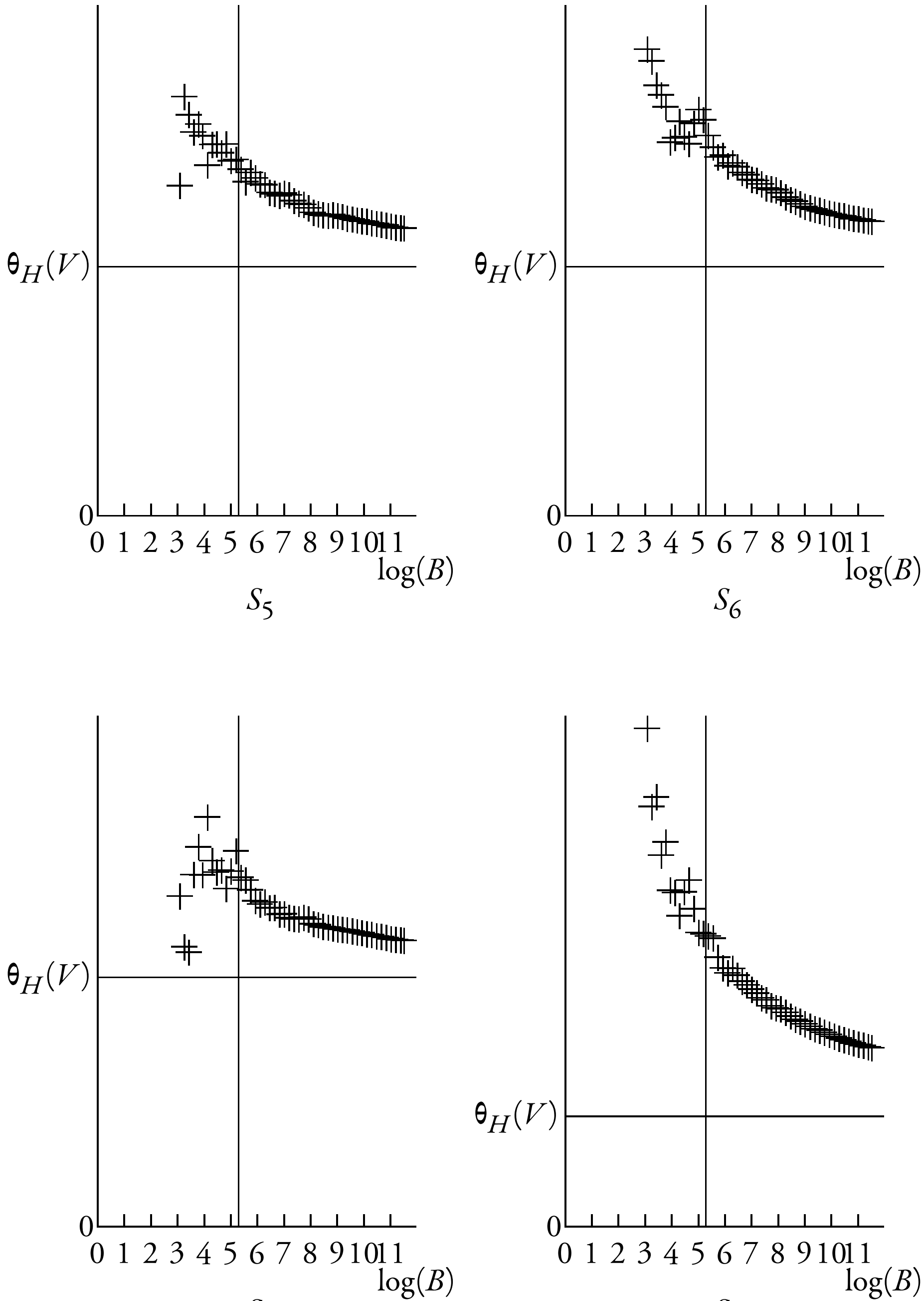
$$(S_7) \qquad 2X^3 + 2Y^3 + 3Z^3 + 3T^3 = 0,$$

and for rank 4:

$$(S_8) \qquad X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0.$$

We draw below the corresponding experimental curves in which we compare the value of $N_{U,H}(B)/(B(\log B)^{t-1})$ with $\theta_H(V)$. On each drawing, only the points on the right of the vertical line have been used for the computation of $\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)$.




$\theta_H(V)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
log(B)
$\theta_H(V)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
log(B)
$\theta_H(V)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
log(B)
$\theta_H(V)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
log(B)

S_5 S_6 S_7 S_8

We finish with tables of numerical results. The value of $\theta_H^{\text{stat}}(V)$ is obtained from the pairs $(B_i, N_{U,H}(B_i))$ as described in section 7. We denote by $\zeta_{E_i}^*(1)$ the limit

$$\zeta_{E_i}^*(1) = \lim_{s \to 1} (s-1)^{t_i} \zeta_{E_i}^*(s),$$

where t_i is the number of components of E_i. Note that for the examples with a Picard group of rank 2, C_2 is equal to 1.

Surface	S_1	S_2	S_3
B	100000	100000	100000
$N_{U,H}(B)$	433526	286040	455164
$\alpha(V)$	2	2	2
ab/cd	1/8	1/125	1/27
$\zeta^*_{E_0}(1)$	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}
ac/bd	1/2	1/5	1/3
$\zeta^*_{E_1}(1)$	8.146241×10^{-1}	1.163730	1.017615
ad/bc	2	5	3
$\zeta^*_{E_2}(1)$	8.146241×10^{-1}	1.163730	1.017615
$\lambda'_3 \boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{Q}_3))$	4/9	4/9	4/9
p_0	2	5	
$\lambda'_{p_0} \boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{Q}_{p_0}))$	3/8	96/125	
C_0	8.306815×10^{-1}	3.493824×10^{-1}	3.066383×10^{-1}
C_1	9.540383×10^{-1}	8.704106×10^{-1}	9.762028×10^{-1}
C_3	9.893865×10^{-1}	9.906098×10^{-1}	9.892790×10^{-1}
$\boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{R}))$	3.255161	1.360417	2.221359
$\theta_H(V)$	3.413500×10^{-1}	2.290769×10^{-1}	3.660885×10^{-1}
$N_{U,H}(B)/\theta_H(V)B\log(B)$	1.103137	1.084575	1.079931
$\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)/\theta_H(V)$	0.988687	1.067208	1.051041

For the examples with a Picard group of rank 3, C_3 is equal to 1.

Surface	S_4	S_5	S_6	S_7
B	100000	100000	100000	100000
$N_{U,H}(B)$	3051198	1976482	3420784	1966160
$\alpha(V)$	1	1	1	1
ab/cd	1/4	1/25	1/49	4/9
$\zeta^*_{E_0}(1)$	8.146241×10^{-1}	1.163730	1.265025	1.028996
ac/bd	1	1	1	1
$\zeta^*_{E_1}(1)$	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}
ad/bc	1	1	1	1
$\zeta^*_{E_2}(1)$	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}	6.045998×10^{-1}
$\lambda'_3 \boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{Q}_3))$	16/27	16/27	16/27	16/27
p_0	2	5	7	2
$\lambda'_{p_0} \boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{Q}_{p_0}))$	27/64	13824/15625	186624/117649	27/64
C_0	8.306815×10^{-1}	3.493824×10^{-1}	3.066383×10^{-1}	8.306815×10^{-1}
C_1	9.540383×10^{-1}	8.704106×10^{-1}	9.297617×10^{-1}	8.196347×10^{-1}
C_2	7.827314×10^{-1}	8.112747×10^{-1}	9.228033×10^{-1}	8.294515×10^{-1}
$\boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{R}))$	4.105301	2.347970	1.910125	2.430506
$\theta_H(V)$	1.895795×10^{-1}	1.291945×10^{-1}	2.184437×10^{-1}	1.290720×10^{-1}
$N_{U,H}(B)/\theta_H(V) B \log(B)^2$	1.214249	1.154191	1.181448	1.149252
$\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)/\theta_H(V)$	0.981952	1.035070	0.999247	1.063376

For the last example we have $C_2 = C_3 = 1$ and $E_1 = E_2 = E_3$ and we get

Surface	S_8
B	100000
$N_{U,H}(B)$	12137664
$\alpha(V)$	7/18
$\zeta^*_{E_i}(1)$	6.045998×10^{-1}
$\lambda'_3 \boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{Q}_3))$	16/27
C_0	3.066383×10^{-1}
C_1	5.129319×10^{-1}
$\boldsymbol{\omega}_H(V(\mathbf{R}))$	6.121864
$\theta_H(V)$	4.904057×10^{-2}
$N_{U,H}(B)/\theta_H(V)B\log(B)^3$	1.621894
$\theta_H^{\mathrm{stat}}(V)/\theta_H(V)$	1.012304

References

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Be] D. J. Bernstein, *Enumerating solutions to $p(a) + q(b) = r(c) + s(d)$*, to appear in Math. Comp. (1999).

[Co] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Math., vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1993.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties*, Number theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., Providence, 1998, pp. 19–39.

[CTKS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, et J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[HB] D. R. Heath-Brown, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails*, Math. Comp. **59** (1992), 613–623.

[IR] K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory (second edition)*, Graduate texts in Math., vol. 84, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1990.

[Ma1] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Ma2] ______, *Cubic forms (second edition)*, North-Holland Math. Library, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[PT] E. Peyre and Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. Comp. **70** (2000), n° 233, 367–387.

[SK] K. E. Smith, *Rational and non-rational algebraic varieties: lectures of János Kollár*, `http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9707013` (1997).

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

2001

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

Yuri Tschinkel, Department of Mathematics, Princeton University, Washington Rd, Princeton, NJ 08544-1000, U.S.A. • *E-mail :* `ytschink@math.princeton.edu`

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR LES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Le but de cet article est d'appliquer les travaux de Morris sur les séries d'Eisentein en caractéristique non nulle à l'étude asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur une variété de drapeaux généralisée obtenue comme quotient d'un groupe algébrique semi-simple au-dessus d'un corps global de caractéristique non nulle par un sous-groupe parabolique réduit. La formule obtenue pour le résidu de la fonction zêta des hauteurs a une interprétation analogue à celle connue pour un corps de nombres.

Abstract. — The aim of this paper is to apply the work of Morris on Eisenstein series over global function fields to the study of the asymptotic behavior of the points of bounded height on a generalized flag variety defined as the quotient of a semi-simple algebraic group by a reduced parabolic subgroup over such a field. The formula obtained for the height zeta function has an interpretation similar to the one known over a number field.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — primaire 14G05; secondaires 14M15.

Introduction

La compréhension du comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés presque de Fano au-dessus d'un corps de nombres a fortement progressé ces dernières années notamment grâce à l'impulsion donnée par Manin (cf. [**BM**], [**FMT**], [**Pe1**], [**Sal**] et [**BT2**]). Il serait naturel que le formalisme développé dans ce cadre s'étende dans une certaine mesure au cas des corps globaux de caractéristique non nulle. Il était donc tentant de chercher une formule pour le résidu de la fonction zêta des hauteurs pour les variétés de drapeaux généralisées sur un tel corps. Deux raisons motivent cet exemple ; tout d'abord de telles formules asymptotiques ont été obtenues dans des cas particuliers (cf. [**Se3**, §2.5 in fine], [**Hs**]), d'autre part le rôle joué par les travaux de Langlands dans la démonstration de ces formules asymptotiques pour les variétés de drapeaux sur un corps de nombres ([**FMT**], [**Pe1**]) peut être joué par ceux de Morris dans le cas d'un corps de fonctions global (cf. [**Mo1**] et [**Mo2**]).

Entre la première version de ce texte et sa soumission, d'autres auteurs ont fait progresser cette extension au cadre fonctionnel du programme initié par Manin. D'une part, King Fai Lai et Kit Ming Yeung dans [**LY**], écrit indépendamment de notre texte, se sont également intéressés aux variétés de drapeaux dans le cadre fonctionnel, sans toutefois donner d'interprétation de la constante, qui constitue

le point crucial de notre travail. D'autre part D. Bourqui, a traité de manière complète le cas délicat des variétés toriques dans [**Bou1**], [**Bou2**] et [**Bou3**].

Ce texte est organisé de la façon suivante : dans la partie 1, nous fixons les notations et rappelons la définition de la fonction zêta des hauteurs, dans la partie 2 nous généralisons à la situation présente la définition de la mesure de Tamagawa associée à une métrique adélique et dans le paragraphe 3 nous énonçons le résultat dont la démonstration occupe l'ensemble de la dernière partie.

Dans un souci de complétude, nous redonnons l'ensemble des constructions, bien que la plupart des notions soient strictement analogues à celles définies sur un corps de nombres. Les premières sections de ce texte contiennent donc des redites par rapport à [**Pe1**].

1. Points de hauteur bornée

Dans cette partie, nous transportons au cas d'un corps de fonctions global la notion de système de hauteurs connue sur un corps de nombres.

1.1. Notations. — Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes

Notations 1.1.1. — Pour tout corps F, on note $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans $\overline{F}$.

Si F est un corps de fonctions global, on note $\mathbf{F}_{q_F}$ le corps des constantes de F et M_F l'ensemble des places de F. Pour tout $\mathfrak{p}$ de M_F, on note $F_\mathfrak{p}$ le complété de F en $\mathfrak{p}$ et $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ son corps résiduel. Pour toute place $\mathfrak{p}$ la norme $|\cdot|_\mathfrak{p}$ sur $F_\mathfrak{p}$ est normalisée par la relation

$$\forall x \in F_\mathfrak{p}, \quad |x|_\mathfrak{p} = (\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(x)}$$

où $v_\mathfrak{p} : F_\mathfrak{p} \to \mathbf{Z}$ est la valuation surjective en $\mathfrak{p}$ et $\sharp A$ désigne le cardinal de A. On dispose donc de la formule du produit

$$\forall x \in F, \quad \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |x|_\mathfrak{p} = 1.$$

Pour toute place $\mathfrak{p}$, la mesure de Haar $\mathrm{d}x_\mathfrak{p}$ sur $F_\mathfrak{p}$ est normalisée par la relation

$$\int_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}} \mathrm{d}x_\mathfrak{p} = 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe projective et lisse sur $\mathbf{F}_{q_F}$ de corps de fonctions F, g_F le genre de $\mathscr{C}$ et h_F le nombre de classes de diviseurs de degré 0 sur $\mathscr{C}$. On identifiera M_F aux points fermés de $\mathscr{C}$.

Nous omettrons F dans ces notations lorsque le corps global sera indiqué par le contexte.

Si $\mathscr{V}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et si B est une A algèbre commutative, alors $\mathscr{V}(B)$ désigne l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{V})$$

et $\mathscr{V}_B$ le produit $\mathscr{V} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si V est lisse sur un corps F, son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic}\,V$, son groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ et son faisceau canonique ω_V. Le cône de $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs est noté $C_{\mathrm{eff}}(V)$. On note également $\overline{V}$ la variété $V_{\overline{F}}$ et $V^s = V_{F^s}$.

Si n n'est pas divisible par la caractéristique de F, le faisceau étale sur V des racines n-èmes de l'unité est noté μ_n. Le faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est également noté $\mu_n^{\otimes 0}$ et pour tout entier j strictement positif, $\mu_n^{\otimes j}$ désigne $\mu_n^{\otimes j-1} \otimes \mu_n$ et $\mu_n^{\otimes -j}$ le faisceau $\mathrm{Hom}(\mu_n^{\otimes j}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de F

$$H^i_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Z}_\ell(j)) = \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(\overline{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$$

et

$$H^i_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Q}_\ell(j)) = H^i_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Z}_\ell(j)) \otimes \mathbf{Q}_\ell.$$

On note $\mathrm{Br}\,V$ le groupe de Brauer cohomologique de V défini par

$$\mathrm{Br}\,V = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m).$$

Si V est une variété sur un corps global F, $V(\boldsymbol{A}_F)$ désigne l'espace adélique associé tel qu'il est défini par Weil dans [**We**, §1].

1.2. Métriques adéliques et hauteurs. — La notion de métrique adélique est une généralisation immédiate à notre cadre de celle décrite dans [**Pe2**] pour un corps de nombres, elle-même inspirée de la notion classique de hauteur (cf. [**La**], [**Si**]).

Définition 1.2.1. — Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps global F de caractéristique non nulle p. Soit L un faisceau inversible sur V et $\mathfrak{p}$ une place de F. Une *métrique* $\mathfrak{p}$*-adique* sur L est une application associant à tout point x de $V(F_\mathfrak{p})$ une norme $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ sur la fibre $L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} F_\mathfrak{p}$ de sorte que pour toute section s de L définie sur un ouvert de V l'application

$$x \mapsto \|s(x)\|_\mathfrak{p}$$

soit continue pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique.

Si $\mathfrak{p}$ est une place de F et $\mathscr{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$, alors à tout modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ on peut associer une métrique $\mathfrak{p}$-adique $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ sur L qui est construite de la manière suivante : V étant projective, tout point x de $V(F_\mathfrak{p})$ définit un point $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}$ et $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ définit une $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$-structure sur $L(x)$ dont on choisit un générateur y_0 ; $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ est alors donnée par la formule

$$\forall y \in L, \quad \|y\|_\mathfrak{p} = \left|\frac{y}{y_0}\right|_\mathfrak{p}.$$

Une famille de métriques $(\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F}$ sur L est appelée *métrique adélique* s'il existe un sous-ensemble fini S de M_F, un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de$V$ sur le complémentaire de S dans $\mathscr{C}$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur cet espace de sorte que pour toute place $\mathfrak{p}$ de $M_F - S$ la métrique $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ soit définie par $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{V}} \mathscr{O}_\mathfrak{p}$.

Nous appellerons *hauteur d'Arakelov* sur V la donnée d'une paire $H = (L, (\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F})$ où L est un faisceau inversible sur V et $(\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F}$ une métrique adélique sur ce fibré. Pour tout point rationnel x de V la *hauteur de x relativement à H* est alors définie par

$$H(x) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} \|\boldsymbol{s}(x)\|_\mathfrak{p}^{-1}$$

où $\boldsymbol{s}$ est une section de L sur un voisinage de x, non nulle en x.

On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov modulo la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par les relations de la forme

$$(L, (\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F}) \sim (L, (\lambda_\mathfrak{p}\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F})$$

pour toute famille $(\lambda_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in M_F}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant $\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} \lambda_\mathfrak{p} = 1$. Si x est un point rationnel et H une hauteur d'Arakelov, $H(x)$ ne dépend que de la classe de H dans $\mathscr{H}(V)$.

On dispose d'un morphisme d'oubli

$$\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \mathrm{NS}(V).$$

On appelle système de hauteurs une section $\boldsymbol{H}$ de l'application d'oubli. Un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ sur V induit un accouplement

$$\boldsymbol{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(F) \to \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et telle que

$$\forall L \in \mathrm{NS}(V), \quad \forall x \in V(F), \quad \boldsymbol{H}(L, x) = \boldsymbol{H}(L)(x).$$

Nous renvoyons à [**Pe3**] pour des exemples de hauteurs et de systèmes de hauteurs. En particulier pour tout morphisme $\phi : V \to W$ de variétés on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(W) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathscr{H}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{NS}(W) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathrm{NS}(V) \end{array}$$

et si E/F est une extension de corps on dispose d'un morphisme de normes

$$N_{E/F} : \mathscr{H}(V_E) \to \mathscr{H}(V).$$

Si $\boldsymbol{H}_E$ est un système de hauteurs sur V_E la hauteur induite $\boldsymbol{H}_F$ est définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(V) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(V_E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle N\boldsymbol{H}_F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{H}_E} \\ \mathscr{H}(V) & \xleftarrow{N_{E/F}} & \mathscr{H}(V_E) \end{array}$$

où $N = [E : F]$.

1.3. Sous-variétés accumulatrices. — Comme dans le cas des corps de nombres deux notions de sous-variétés accumulatrices apparaissent naturellement.

Définition 1.3.1. — Soit H une hauteur d'Arakelov sur une variété projective lisse et géométriquement intègre V au-dessus d'un corps global F de caractéristique p. Pour tout sous-espace localement fermé W de V et tout nombre réel strictement positif B, on pose

$$n_{W,H}(B) = \sharp\{x \in W(F) \mid H(x) \leqslant B\}.$$

Remarque 1.3.1. — si $H = (L, (||\cdot||_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in M_F})$ avec $[L]$ appartenant à l'intérieur de $C_{\mathrm{eff}}(V)$, alors il existe un ouvert non vide U de V tel que $n_{U,H}(B)$ soit fini pour tout nombre réel B.

Définition 1.3.2. — On note pour tout sous-espace localement fermé W de V

$$a_W(L) = \varlimsup_{B\to+\infty} \log(n_{W,H}(B))/\log(B) \leqslant +\infty.$$

Un fermé strict K de V est dit L-accumulateur au sens strict si et seulement si pour tout ouvert non vide W de K, il existe un ouvert non vide U de V avec

$$a_W(L) > a_U(L)$$

Un fermé strict K de V est dit modérément accumulateur pour H si et seulement si, pour tout ouvert non vide W de K, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim_{B\to+\infty}}\, n_{W,H}(B))/n_{U,H}(B) > 0.$$

1.4. Fonction zêta des hauteurs. — Contrairement au cas des corps de nombres, les métriques étant à valeur dans $q^{\mathbf{Z}}$ sauf pour un nombre fini d'entre elles, $n_{U,H}(B)$ n'est plus asymptotiquement équivalent à une fonction de la forme $CB^a(\log B)^{b-1}$. Toutefois il est bien connu que l'objet naturel dans le cadre fonctionnel est la fonction zêta associée, et nous verrons plus loin qu'il est effectivement possible d'étendre à ce cadre les propriétés connues sur les corps de nombres. De manière plus précise, les travaux de Batyrev, Franke, Manin et Tschinkel, ([**FMT**, §2], [**BT1**] et [**BT3**]) ont soulignés l'intérêt de considérer les fonctions zêtas associées a un système de hauteurs et définies sur un ouvert du produit $\mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{C}$. Nous en rappelons maintenant la définition.

***Définitions 1.4.1.* —** Soit $\boldsymbol{H}$ un système de hauteurs sur une variété projective lisse et géométriquement intègre V au-dessus d'un corps global F de caractéristique p. Soit U un ouvert de V. La fonction zêta associée est définie par la série

$$\zeta_{U,\boldsymbol{H}}(s) = \sum_{x\in U(F)} \boldsymbol{H}(s,x)^{-1} \tag{1.4.1}$$

où s désigne un élément de $\mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{C}$ pour lequel la série converge absolument.

Nous donnons maintenant quelques assertions sur le domaine de convergence des fonctions zêta. Ces assertions sont bien connues dans le cas de corps de nombres.

***Lemme 1.4.1.* —** *L'ensemble sur lequel $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge absolument est un ensemble convexe de $\mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{C}$ et si s_0 appartient à cet ensemble alors celui-ci contient*

$$s_0 + i\,\mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{C}.$$

Démonstration. — Ces assertions sont des propriétés générales des séries zêta. La convexité résulte de l'inégalité de Hölder : en effet si $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge absolument pour

$$s_0, s_1 \in \mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{C}$$

et si $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, alors pour tout sous-ensemble fini I de $U(F)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{x\in I} |\boldsymbol{H}(\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1)|^{-1} &= \sum_{x\in I} |\boldsymbol{H}(s_0, x)|^{-\lambda_0} |\boldsymbol{H}(s_1, x)|^{-\lambda_1} \\ &\leqslant (\sum_{i\in I} |\boldsymbol{H}(s_0, x)|^{-1})^{\lambda_0} (\sum_{i\in I} |\boldsymbol{H}(s_1, x)|^{-1})^{\lambda_1}.\end{aligned}$$

La seconde assertion résulte du fait que pour tout x de $V(F)$ on a

$$\forall s_0 \in \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}, \quad \forall s_1 \in i\,\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}, \quad |\boldsymbol{H}(s_0 + s_1, x)| = |\boldsymbol{H}(s_0, x)|.$$

□

Lemme 1.4.2. — *Si* $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ *est de rang fini et si* $C_{\mathrm{eff}}(V)$ *est un cône polyhédrique rationnel, c'est-à-dire s'il existe* $n_1, \dots, n_m$ *dans* $\mathrm{NS}(V)$ *tels que*

$$C_{\mathrm{eff}}(V) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{R}_{\geqslant 0} n_i$$

alors il existe un ouvert dense U *de* V *tel que pour tout* s *de* $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ *en lequel* $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ *converge absolument,* $s + C_{\mathrm{eff}}(V)$ *est contenu dans le domaine de convergence absolu de* $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$.

Démonstration. — Fixons des diviseurs effectifs $D_1, \dots, D_m$ tels que

$$C_{\mathrm{eff}}(V) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{R}_{\geqslant 0} [D_i]$$

et posons

$$U = V - \cup_{i=1}^{m} \mathrm{Supp}\, D_i.$$

Soit $\boldsymbol{s}_i$ une section de $[D_i]$ correspondant à D_i pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Soient s un élément de $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ en lequel $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge absolument et s' un élément de $C_{\mathrm{eff}}(V) \cap \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{Q}$. Il existe un entier λ strictement positif tel que $\lambda s'$ puisse se mettre sous la forme

$$\lambda s' = \sum_{i=1}^{m} n_i [D_i]$$

avec $n_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ pour $1 \geqslant i \geqslant m$. Soit $(L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ un représentant de $\boldsymbol{H}(\sum_{i=1}^{m} n_i [D_i])$. Comme $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est de rang fini, on peut supposer, quite à augmenter λ, que la classe de L coïncide avec celle de $\sum_{i=1}^{m} n_i [D_i]$ dans $\mathrm{Pic}\, V$. Le

produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{m} s_i^{n_i}$ définit alors une section s de L. Pour tout place $\mathfrak{p}$ de F, la fonction

$$\begin{array}{rcl} V(F_{\mathfrak{p}}) & \to & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ x & \mapsto & \|s(x)\|_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

est continue et admet un maximum $B_{\mathfrak{p}}$. En outre si S est une partie finie de M_F et $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{L}$) un modèle de V (resp. L) sur $\mathscr{C}-S$ de sorte que les métriques $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soient définies par $\mathscr{L}$ en-dehors de S; alors, quitte à augmenter S, on peut supposer que s provient d'une section $\tilde{s}$ de $\mathscr{L}$. Pour toute place $\mathfrak{p}$ dans M_F-S, tout point x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ correspondant à un point $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})$, soit y_0 un générateur de $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$. On a alors la relation

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \left|\frac{s(x)}{y_0}\right|_{\mathfrak{p}}$$

mais, comme s provient de $\tilde{s}$, on a que $s(x)$ appartient à $u_0\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$. Donc $B_{\mathfrak{p}} \leqslant 1$.

Si $U(F)=\varnothing$, alors le résultat est évident. Dans le cas contraire, soit $x\in U(F)$; pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de F on a $\|s(x)\|_{\mathfrak{p}}=1$, par conséquent $B_{\mathfrak{p}}=1$ pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de F. Mais alors

$$\forall x\in U(F),\quad \boldsymbol{H}(\lambda s',x) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} \|s(x)\|_{\mathfrak{p}}^{-1} \geqslant \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} B_{\mathfrak{p}}^{-1} > 0.$$

Autrement dit la fonction $x\mapsto \boldsymbol{H}(\lambda s',x)$ est uniformément minorée sur $U(F)$. On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{x\in U(F)} |\boldsymbol{H}(s+\lambda s')|^{-1} &\leqslant \sum_{x\in U(F)} |\boldsymbol{H}(s,x)|^{-1}\boldsymbol{H}(\lambda s',x)^{-1} \\ &\leqslant \left(\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} B_{\mathfrak{p}}\right)\zeta_{U,\boldsymbol{H}}(s).\end{aligned}$$

La série définissant $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge donc absolument en tout point de

$$s + C_{\text{eff}}(V)\cap \mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{Q}$$

mais l'enveloppe convexe de ce cône est $s+C_{\text{eff}}(V)$ et le résultat découle du lemme précédent. □

Lemme 1.4.3. — *Si L est un faisceau inversible très ample sur V et N la dimension de $\Gamma(V,L)$, alors pour toute hauteur H de la forme $(L,(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in M_F})$ et tout $\varepsilon>0$ la série $\sum_{x\in V(F)} H(x)^{-N-\varepsilon}$ converge.*

Démonstration. — Soit $s_1, \dots, s_N$ une base de $\Gamma(V, L)$. Le système de métriques définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_F, \quad \forall x \in V(F_\mathfrak{p}), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|'_\mathfrak{p} = \sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_\mathfrak{p}$$

est une métrique adélique sur L. On note H' la hauteur $(L, (\|\cdot\|'_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in M_F})$. Pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de F, $\|\cdot\|'_\mathfrak{p}$ coïncide avec $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in V(F), \quad H(x) \geqslant CH'(x).$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour H'. Mais

$$\sum_{x \in V(F)} H'(x)^{-N-\varepsilon} \leqslant \sum_{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F)} H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x)^{-N-\varepsilon}$$

où $H_{\mathbf{P}^{N-1}}$ est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^{N-1}$. Or il résulte de [**Se3**, theorem, p. 19] qu'il existe une constante C telle que

$$\sharp\{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F) \mid H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x) = q^d\} < C(q^d)^N$$

Par conséquent

$$\sum_{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F)} H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x)^{-N-\varepsilon} \leqslant C \sum_d (q^d)^{-N-\varepsilon} q^{dN} \qquad \square$$

Pour terminer, nous allons énoncer une condition qui implique trivialement la périodicité de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 1.4.2. — Dans la suite, nous dirons que le système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ vérifie la condition (P) si et seulement si pour tout élément L de $\mathrm{NS}(V)$, il existe un représentant $(L, (\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ de $\boldsymbol{H}(L)$ dont les métriques sont toutes à valeurs dans $q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque 1.4.4. — Il résulte des définitions que les fonctions $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ sont alors périodiques de groupe de périodes contenant $(2i\pi/\log(q))\,\mathrm{NS}(V)$.

2. Mesures de Tamagawa

2.1. Quelques hypothèses sur les variétés. — Dans ce paragraphe, nous allons préciser quelques hypothèses sur les variétés qui nous permettront de définir

la mesure de Tamagawa associée à une métrique adélique sur le faisceau anticanonique. Les hypothèses géométriques sont automatiquement vérifiées par une variété de Fano sur un corps de caractéristique 0. En l'absence d'un théorème d'annulation de Kodaira cela n'est toutefois plus le cas en caractéristique non nulle.

Hypothèses géométriques 1. — Dans la suite V désigne une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps global F de caractéristique p strictement positive vérifiant les assertions suivantes :

(i) La classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ appartient à l'intérieur du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$;

(ii) Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2 ;

(iii) Le groupe $\mathrm{Pic}(V^s)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et coïncide avec $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$;

(iv) Le cône $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est polyédrique rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $m_1, \dots, m_r$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ tels que

$$C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} m_i ;$$

(v) Si ℓ est un nombre premier distinct de p, la partie ℓ-primaire de $\mathrm{Br}\,\overline{V}$ est finie.

Remarque 2.1.1. — Si V est F^s-rationnelle alors la première assertion de (iii) et (v) sont vérifiées. En effet, par [**CTS**, appendice 2.A], si V est F^s-rationnelle alors $\mathrm{Pic}(V^s)$ est stablement isomorphe à $\mathbf{Z}$ et donc libre de rang fini sur $\mathbf{Z}$ et par [**Gr2**, corollaire 7.5], la partie ℓ-primaire du groupe de Brauer est un invariant birationnel des variétés propres et lisses, ce qui implique la trivialité de ce groupe si V est F^s-rationnelle.

Dans la suite nous supposerons également que la variété V vérifie la condition suivante :

Hypothèse arithmétique 2. — L'ensemble $V(F)$ des points rationnels de V est dense pour la topologie de Zariski.

2.2. Ensembles de mauvaises places. — Comme dans le cas des corps de nombres, les facteurs de convergence qui apparaissent naturellement sont les facteurs locaux de la fonction L associée au groupe de Picard géométrique de la variété. Le choix de ces facteurs est justifié par les arguments de descente qui les font apparaître dans le passage aux torseurs universels (cf. [**Sal**] et [**Pe2**]). Mais

pour montrer la convergence des mesures de Tamagawa, il faut comparer ces facteurs locaux à ceux donnés par le deuxième groupe de cohomologie ℓ-adique, ce qui est rendu possible par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. — *Sous les hypothèses du paragraphe 2.1, il existe un ensemble fini de places S et un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{C}-S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour toute place $\mathfrak{p}$ en-dehors de S, on ait les assertions suivantes :*

(i) Il existe un isomorphisme de $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ *sur* $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ *compatible avec les actions des groupes de Galois ;*

(ii) Pour tout nombre premier ℓ distinct de p, la partie ℓ-primaire du groupe $\mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ *est finie.*

Démonstration. — La variété V étant projective, on la plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}^N_F$. Soit $\mathscr{V}$ l'adhérence de V dans $\mathbf{P}^N_\mathscr{C}$. Comme V est lisse et géométriquement intègre, il existe par [**EGA**, IV 6.8.7 et 9.7.7] un ensemble fini S de places tel que $\mathscr{V}\times_\mathscr{C}\mathscr{C}-S$ soit lisse à fibres géométriquement intègres sur $\mathscr{C}-S$.

Par hypothèse, $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini qui coïncide avec $\mathrm{Pic}(V^s)$. Il existe donc une extension galoisienne finie E de F telle que $V(E)\neq\varnothing$ et

$$\mathrm{Pic}(V_E)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\overline{V}).$$

On ajoute à S les places qui se ramifient dans l'extension E/F et on note S_E l'ensemble des places de E au-dessus de S. Soit $\mathfrak{P}$ une place de E en-dehors de S_E, soit $\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}}$ le complété d'un hensélisé strict de $\mathscr{O}_\mathfrak{P}$ et $\mathrm{Fr}(\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}})$ son corps des fractions. Le schéma $\mathscr{V}_{\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}}}$ étant lisse, l'application canonique

$$\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}}})\to\mathrm{Pic}(V_{\mathrm{Fr}(\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}})})$$

est un isomorphisme. Comme, par hypothèse, $\mathrm{Pic}(V_E)$ est isomorphe à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ et donc à $\mathrm{NS}(\overline{V})$ et que le groupe de Néron-Severi ne change pas par extension de corps algébriquement clos, l'application

$$\mathrm{Pic}(V_E)\to\mathrm{Pic}(V_{\mathrm{Fr}(\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}})})$$

est également un isomorphisme. Considérons alors la composée des morphisme naturels

$$\mathrm{Pic}(V_E)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(V_{\mathrm{Fr}(\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}})})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_\mathfrak{P}}})\to\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{P}}).\tag{2.2.1}$$

Par hypothèse, $H^i(V, \mathscr{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2. Par le théorème de semi-continuité (cf. [**Ha**, theorem III.12.8]), on peut, quitte à augmenter S, supposer que $H^i(\mathscr{V}_{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}, \mathscr{O}_{\mathscr{V}_{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}})$ est nul pour $i = 1$ ou 2 et $\mathfrak{p} \in M_F - S$. Il en résulte que $H^i(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathscr{O}_{\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}})$ est trivial pour $i = 1$ ou 2. Par [**Gr1**, corollaire 1 de la proposition 3] la flèche de droite dans (2.2.1) est également un isomorphisme. On obtient ainsi l'isomorphisme recherché.

En ce qui concerne la seconde assertion, le corang ℓ-adique de $\mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ coïncide, d'après [**Gr3**, corollaire 3.4] avec la différence entre B_2, le deuxième nombre de Betti ℓ-adique de $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$ et ρ le rang du groupe de Picard de $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}$. Par ce qui précède ρ est également le rang de $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et par [**Se1**, page 19-02] B_2 coïncide avec le deuxième nombre de Betti de $\overline{V}$. Par hypothèse la partie ℓ-primaire de $\mathrm{Br}(\overline{V})$ est finie et $B_2 = \rho$. □

Convention 2.2.1. — Dans la suite de ce texte, les paires $(S, \mathscr{V})$ considérées avec S un ensemble fini de places de F et $\mathscr{V}$ un modèle de V sur $\mathscr{C} - S$ vérifient les conditions du lemme.

2.3. Mesures locales. — Dans ce paragraphe, nous associons à toute métrique adélique $(\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ sur ω_V^{-1} des mesures $\boldsymbol{\omega}_\mathfrak{p}$ sur $V(F_\mathfrak{p})$.

Définition 2.3.1. — Soit $\mathfrak{p}$ une place de F et $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ une métrique $\mathfrak{p}$-adique sur ω_V^{-1}. Si x appartient à $V(F_\mathfrak{p})$, on choisit des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ en x définissant un morphisme de F-variétés f d'un ouvert de Zariski U de V dans $\mathbf{A}_F^n$ et induisant un isomorphisme analytique pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique d'un ouvert W de $V(F_\mathfrak{p})$ sur son image. Le morphisme de faisceau cohérent

$$\omega(f) : f^*(\omega_{\mathbf{A}_F^n/F}) \to \omega_{U/F}$$

induit un isomorphisme de faisceau pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique

$${}^t\omega(f)^{-1} : f^*\omega_{f(W)}^{-1} \to \omega_W^{-1}$$

qui permet d'identifier $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ avec une section de ω_W^{-1}. Sur W, la mesure est alors définie par la relation

$$\boldsymbol{\omega}_\mathfrak{p} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_\mathfrak{p} \mathrm{d}x_{1,\mathfrak{p}} \dots \mathrm{d}x_{n,\mathfrak{p}}$$

où $\mathrm{d}x_{i,\mathfrak{p}}$ désigne la mesures de Haar normalisée sur $F_\mathfrak{p}$.

Si $x_1,\dots,x_n$ et $x'_1,\dots,x'_n$ sont deux systèmes de coordonnées définies sur un même ouvert W et correspondant à des fonctions

$$f,f' : U \to \mathbf{A}^n_F$$

Soit Φ l'isomorphisme analytique

$$f'\circ f^{-1} : f(W) \to f'(W)$$

On a alors la relation

$$^t\omega(\Phi)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x'_n}\right) = \mathrm{Jac}_x(\Phi)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}$$

et par [**We**, §2.2.1], on a

$$\mathrm{d}x'_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}x'_{n,\mathfrak{p}} = |\mathrm{Jac}_x(\Phi)|_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}x_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}x_{n,\mathfrak{p}}$$

On en déduit les égalités

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial x'_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x'_n}\right\|_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}x'_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}x'_{n,\mathfrak{p}}\\
&=\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right\|_{\mathfrak{p}}|\mathrm{Jac}_x(\Phi)|_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathrm{d}x'_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}x'_{n,\mathfrak{p}}\\
&=\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right\|_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}x_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}x_{n,\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

Les mesures obtenues se recollent donc pour former une mesure borélienne $\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}$ sur $V(F_{\mathfrak{p}})$.

2.4. Lien avec les densités locales. — Dans ce paragraphe, nous allons faire le lien pour $\mathfrak{p}\in M_F - S$ entre le volume $\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}}))$ et la densité locale en $\mathfrak{p}$ définie par

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\sharp\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{(\sharp\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{\dim V}}.$$

La démonstration suit celles de [**We**, §2.2.1], [**Pe1**, §2.2.2] et [**Sal**, theorem 2.13].

***Lemme 2.4.1.* —** *Pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de $M_F - S$, on a :*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

Démonstration. — Soit n la dimension de V. Fixons un plongement de variétés $\Phi : V \to \mathbf{P}^N_F$ et $\mathscr{V}$ l'adhérence de V dans $\mathbf{P}^N_{\mathscr{C}}$. Par le critère valuatif de propreté, on a une bijection de $V(F_\mathfrak{p})$ sur $\mathscr{V}(\mathscr{O}_\mathfrak{p})$ qui induit pour tout m des applications surjectives

$$\pi_m : V(F_\mathfrak{p}) \to \mathscr{V}(\mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^m).$$

On note $[x]_m = \pi_m^{-1}(\pi_m(x))$ pour tout x de $V(F_\mathfrak{p})$. Soit I le faisceau d'idéaux défini par V et $\mathscr{I}$ celui défini par $\mathscr{V}$. En dehors d'un nombre fini de places, le schéma $\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}}$ est lisse et le faisceau $(\Lambda^n \Omega^1_{\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}}/\mathscr{O}_\mathfrak{p}})^\vee$ est un modèle de ω_V^{-1}. On peut donc supposer que la métrique $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ est définie par ce modèle. Par [**Ha**, theorem 8.1, theorem 8.13], on a des suites exactes de faisceaux

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbf{P}^N_{\mathscr{C}}/\mathscr{C}} \otimes \mathscr{O}_{\mathscr{V}} \xrightarrow{r} \Omega^1_{\mathscr{V}/\mathscr{C}} \to 0$$

et

$$0 \to J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbf{P}^N_F/F} \otimes \mathscr{O}_V \xrightarrow{r} \Omega^1_{V/F} \to 0.$$

Sur l'ouvert $\mathscr{V}_i$ défini par $X_i \neq 0$, on obtient des suites exactes

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2_{|\mathscr{V}_i} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{j\neq i} \mathscr{O}_{\mathscr{V}_i} \mathrm{d}X_j \xrightarrow{r_i} \Omega^1_{\mathscr{V}/\mathscr{C}} \to 0 \tag{2.4.1}$$

et en notant $V_i = \mathscr{V}_{iF}$ qu'on identifie avec son image U_i dans $\mathbf{A}^{N+1}_F$,

$$J/J^2_{|U_i} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{j\neq i} \mathscr{O}_{U_i} \mathrm{d}X_j \xrightarrow{r_i} \Omega^1_{U_i/F} \to 0 \tag{2.4.2}$$

Par conséquent pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de M_F, on a
(2.4.3)
$$\forall x \in U_i(F_\mathfrak{p}), \quad \forall y \in \omega_V^{-1}(x), \quad \|y\|_\mathfrak{p} = \inf_{\substack{0 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \\ j \notin \{i_1,\dots,i_n\}}} |y(r_i(\mathrm{d}X_{i_1}) \wedge \cdots \wedge r_i(dx_{i_n}))|_\mathfrak{p}.$$

Notons f_i l'isomorphisme de V_i sur U_i. On peut en outre supposer que $\mathfrak{p}$ vérifie les conditions I et II de [**We**, page 19] pour la famille $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant N+1}$. Soit $x \in V(F_\mathfrak{p})$ et $(x_0 : \ldots : x_N)$ des coordonnées homogènes pour $\Phi(x)$. Après permutation des coordonnées et multiplication par un scalaire, on peut supposer que $x_0 = 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{O}_\mathfrak{p}$. Le point x provient alors d'un élément $\tilde{x}$ de $\mathscr{U}_0(\mathscr{O}_\mathfrak{p})$. Par [**We**, theorem 2.2.3], l'ensemble $[x]_1$ coïncide avec

$$\{(1 : x'_1 : \ldots : x'_n) \in V(F_\mathfrak{p}) \mid x'_i \in x_i + \mathfrak{p}\}$$

On peut, à permutation des coordonnées près, supposer par (2.4.1) que $\Omega^1_{\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}},x}$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}},x} \mathrm{d}X_i$. La famille $(X_1,\dots,X_n)$ constitue alors un système de coordonnées locales au voisinage de x. Par [**We**, page 22] ce système s'étend à $[x]_1$ et induit un difféomorphisme de $[x]_1$ sur $(x_1,\dots,x_n)+\mathfrak{p}^n$ et l'isomorphisme entre $\Omega^1_{\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}}/\mathscr{O}_\mathfrak{p},x}$ et $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathscr{V}_{\mathscr{O}_\mathfrak{p}},x}\mathrm{d}X_i$ s'étend également à $[x]_1$. Par conséquent (2.4.3) se réécrit alors

$$\forall x' \in [x]_1, \quad \forall y' \in \omega_V^{-1}(x'), \quad \|y'\|_\mathfrak{p} = \left| \frac{y'}{\frac{\partial}{\partial X_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial X_n}} \right|_\mathfrak{p}$$

et sur $[x]_1$, la mesure $\boldsymbol{\omega}_\mathfrak{p}$ coïncide avec

$$\mathrm{d}X_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}X_{n,\mathfrak{p}}.$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{\omega}_\mathfrak{p}([x]_1) = \int_{(x_1,\dots,x_n)+\mathfrak{p}^n} \mathrm{d}X_{1,\mathfrak{p}}\dots\mathrm{d}X_{n,\mathfrak{p}} = \sharp\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-n}.$$

En sommant sur $\mathscr{V}(F_\mathfrak{p})$, on obtient la formule du lemme. □

2.5. Facteurs de convergence. — Comme dans [**Pe1**, §2.2.3], nous allons maintenant appliquer les conjectures de Weil démontrées par Deligne pour obtenir des facteurs de convergence.

Définition 2.5.1. — Pour tout $\mathfrak{p} \in M_F - S$, on note $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ le morphisme de Frobenius sur $\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}$ défini par $x \mapsto x^{\sharp\mathbf{F}_\mathfrak{p}}$. La suite exacte

$$0 \to I_\mathfrak{p} \to \mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}/\mathbf{F}_\mathfrak{p}) \to 0$$

où $I_\mathfrak{p}$ désigne le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$ et l'inclusion canonique du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ définissent une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}/\mathbf{F}_\mathfrak{p})$ sur le groupe $(\mathrm{Pic}(\overline{V}))^{I_\mathfrak{p}}$. On note également $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ le morphisme de Frobenius induit sur $(\mathrm{Pic}(\overline{V}))^{I_\mathfrak{p}}$. Le terme local de la fonction L associée à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est alors défini par

$$L_\mathfrak{p}(s,\mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1-\sharp\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-s}\,\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid (\mathrm{Pic}(\overline{V}))^{I_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q})}$$

Proposition 2.5.1. — *Pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* $M_F - S$*, le terme* $L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ *est bien défini et le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))}$$

est absolument convergent.

Démonstration. — Par la démonstration du lemme 2.2.1, il existe une extension galoisienne finie E de F telle que $\mathrm{Pic}(V_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\overline{V})$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ se factorise donc par $\mathrm{Gal}(E/F)$ et pour tout $\mathfrak{p} \in M_F$, on a que $(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}})^{[E:F]}$ agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(\overline{V})^{I_{\mathfrak{p}}}$. Les valeurs propres de $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$ sont donc des racines $[E:F]$-èmes de l'unité et

$$\mathrm{Det}(1 - \sharp \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{-s} \,\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid (\mathrm{Pic}(\overline{V})^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q})$$

est non nul ce qui montre la première assertion.

Par la formule de Lefschetz (cf. [**Se2**]) on a pour toute place $\mathfrak{p}$ en-dehors de S et tout nombre premier ℓ distinct de p,

$$\sharp \mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell))$$

où n désigne la dimension de V et $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$ le Frobenius géométrique. La variété $\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}$ étant lisse, projective et géométriquement intègre, on a un isomorphisme canonique

$$H^{2n}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell.$$

D'autre part les suites exactes de Kummer

$$0 \to \mu_{\ell^r} \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{\times \ell^r} \mathbf{G}_m \to 0$$

où r est positif induisent des suites exactes

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to T_\ell(\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})) \to 0$$

et

$$0 \to \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Z}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to T_\ell(\mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})) \to 0.$$

Mais il résulte du lemme 2.2.1 que les modules de Tate

$$T_\ell(\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})) = \varprojlim_n \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})_{(\ell^n)}$$

et

$$T_\ell(\mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})) = \varprojlim_n \mathrm{Br}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})_{(\ell^n)}$$

sont tous les deux nuls. On obtient donc la trivialité du groupe de cohomologie $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$ et un isomorphisme

$$H^2_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}_\ell$$

qui, par dualité de Poincaré, entraîne la trivialité de $H^{2n-1}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell)$ et induit un isomorphisme

$$H^{2n-2}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell(n-1)) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}_\ell)^\vee.$$

Or pour toute paire d'entiers i et j, on a

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{P}}, \mathbf{Q}_\ell(j)) = \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^j} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Par conséquent

$$d_\mathfrak{p}(V) = 1 + \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}_\ell) + \sum_{i=0}^{2n-3} \frac{(-1)^i}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^{\dim V}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Mais par la conjecture de Weil démontrée par Deligne sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [**De**, theorem 1.6], on a des inégalités

$$|\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell))| \leqslant \sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^{i/2} \dim H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell).$$

Or le i-ième nombre de Betti étale $\dim H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}, \mathbf{Q}_\ell)$ est constant sur les places $\mathfrak{p}$ de bonne réduction (cf. [**Se1**, page 19-02]) et donc

$$d_\mathfrak{p}(V) = 1 + \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}) + O\left(\frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^{3/2}}\right).$$

D'autre part les valeurs propres de $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ sur $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ qui est isomorphe à $\mathrm{Pic}(V_E)$ étant des racines de l'unité, on a également

$$\mathrm{Det}(1 - \sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-1} \mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}) = 1 + \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}) + O\left(\frac{1}{\sharp \mathbf{F}_\mathfrak{p}^{3/2}}\right)$$

et il en résulte que

$$\frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L\mathfrak{p}(1,\operatorname{Pic}(\overline{V}))} = 1 + O\left(\frac{1}{\sharp \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{3/2}}\right)$$

et le produit de ces termes converge absolument. □

Définition 2.5.2. — Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, on pose

$$\lambda_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}(1,\operatorname{Pic}(\overline{V})).$$

2.6. Mesure de Tamagawa. — Afin de normaliser le mesure nous aurons besoin de prendre le résidu de la fonction L associée à $\operatorname{Pic}\overline{V}$ et donc du lemme suivant :

Lemme 2.6.1. — *Le produit eulérien*

$$\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}(\overline{V}))$$

converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ *et définit une fonction* $L(s,\operatorname{Pic}(\overline{V}))$ *qui se prolonge en une fonction rationnelle de* q^{-s} *sur* $\mathbf{C}$ *avec un pôle d'ordre* $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V)$ *en* $s = 1$.

Démonstration. — La convergence pour $\operatorname{Re} s > 1$ résulte de la définition et du fait que les valeurs propres du Frobenius agissant sur $\operatorname{Pic}(\overline{V})$ sont des racines de l'unité.

Soit Fr_{q_F} l'élément du groupe $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$ envoyant x sur x^{q_F}. La fonction L est alors donnée par le produit eulérien

$$L(s,\operatorname{Pic}(\overline{V})) = \prod_{x\in\mathscr{C}_{(0)}} \frac{1}{\operatorname{Det}(1-\sharp\kappa(x)^{-s}\operatorname{Fr}_{q_F}^{[\kappa(x):\mathbf{F}_{q_F}]} \mid \operatorname{Pic}(\overline{V})\otimes\mathbf{Q})}$$

où $\mathscr{C}_{(0)}$ désigne l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}$ et $\kappa(x)$ le corps résiduel en x. Notons $(\alpha_i)_{i\in I}$ les valeurs propres de Fr_{q_F} agissant sur $\operatorname{Pic}(\overline{V})\otimes\mathbf{Q}$ et $(m_i)_{i\in I}$ leurs multiplicités. On obtient

$$\begin{aligned} L(s,\operatorname{Pic}(\overline{V})) &= \prod_{i\in I}\prod_{x\in\mathscr{C}_{(0)}} \frac{1}{(1-(q^{-s}\alpha_i)^{[\kappa(x):\mathbf{F}_{q_F}]})^{m_i}} \\ &= \prod_{i\in I} Z(\mathscr{C},q^{-s}\alpha_i) \end{aligned}$$

où $Z(\mathscr{C},t)$ est la fonction zêta de $\mathscr{C}$ définie par

$$Z(\mathscr{C},t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\sharp\mathscr{C}(\mathbf{F}_{q_F^n})t^n}{n}\right).$$

Par le théorème de Weil $Z(\mathscr{C},t)$ est une fonction rationnelle de t avec un pôle d'ordre 1 en $t=q^{-1}$. De manière plus précise, on a en fait

$$Z(\mathscr{C},t)=\frac{\operatorname{Det}(1-t\operatorname{Fr}_{q_F}\mid H^1_{\text{ét}}(\mathscr{C}_{\overline{\mathbf{F}}_{q_F}}))}{(1-t)(1-qt)}$$

Ceci implique la deuxième assertion. □

Définition 2.6.1. — On considère la mesure de Tamagawa

$$\boldsymbol{\omega}_H=\left(\lim_{s\to 1}(s-1)^tL(s,\operatorname{Pic}(\overline{V}))\right)\frac{1}{q_F^{(g_F-1)\dim V}}\prod_{\mathfrak{p}\in M_F}\lambda_{\mathfrak{p}}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}$$

et le nombre de Tamagawa de V relativement à la hauteur H est défini par

$$\tau_H(V)=\boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(F)})$$

où $\overline{V(F)}$ désigne l'adhérece des points rationnels de V dans l'espace adélique $V(\boldsymbol{A}_F)$.

3. Présentation du résultat

3.1. Facteurs $\alpha(V)$ et $\beta(V)$. — Nous allons maintenant définir l'analogue de la fonction caractéristique $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$, qui remonte à [**Kö**], et qui fut introduite dans le contexte des conjectures de Manin par Batyrev et Tschinkel dans [**BT1**]. Cette analogue est fourni par le facteur local de la fonction L de Draxl associée au cône effectif (cf. [**Dr**]).

Définition 3.1.1. — Soit M un $\mathbf{Z}$-module libre et C un cône rationnel polyédrique strictement convexe de $M\otimes\mathbf{R}$; c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ d'éléments de M telle que $C=\sum_{i=1}^r\mathbf{R}_{\geqslant 0}m_i$ avec $C\cap -C=\{0\}$. On note $C^\vee$ le cône dual défini par

$$C^\vee=\{y\in(M\otimes\mathbf{R})^\vee\mid\forall x\in C,\ \langle x,y\rangle\geqslant 0\},$$

et C^{O} l'intérieur du cône C. On pose pour tout $\boldsymbol{s}\in C^{\mathrm{O}}+iM$,

$$L_q(\boldsymbol{s},M,C)=\sum_{y\in C^\vee\cap M^\vee}q^{-\langle y,\boldsymbol{s}\rangle}.$$

Par définition du cône dual cette série converge absolument sur le cône ouvert $C^{\mathrm{O}} + iM$ et si m appartient à l'intérieur de C, la fonction qui à s associe $L_q(sm, M, C)$ a un pôle d'ordre $\mathrm{rg} M$ en $s = 0$.

On pose

$$\alpha^*(V) = (\log q)^t \lim_{s \to 0} s^t L_q(s\omega_V^{-1}, \mathrm{Pic}(V), C_{\mathrm{eff}}(V))$$

où t désigne le rang de $\mathrm{Pic}(V)$ et

$$\alpha(V) = \frac{\alpha^*(V)}{(t-1)!}.$$

Enfin, comme Batyrev et Tschinkel, on pose

$$\beta(V) = \sharp H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

bien que ce terme soit trivial dans les cas considérés ici.

Remarque 3.1.1. — La fonction $L_q(\boldsymbol{s}, M, C)$ est périodique de groupe de période contenant $(2\pi i/\log q)M$. Il résulte de la définition que $\alpha^*(V)$ dépend du réseau $\mathrm{Pic}(V)$, du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$ et de l'élément ω_V^{-1} mais est indépendant de q.

Notation 3.1.2. — La fonction caractéristique du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est définie par

$$\forall \boldsymbol{s} \in C_{\mathrm{eff}}(V)^{\mathrm{O}}, \quad \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}) = \int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle s, y\rangle} \mathrm{d}y.$$

Définition 3.1.3. — Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel W, nous dirons que f admet une expression rationnelle en des puissances de q s'il existe une base $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $W^\vee$ et une fonction rationnelle

$$R \in \mathbf{C}(T_1, \ldots, T_n)$$

telle que pour tout $\boldsymbol{s}$ en lequel f est défini on ait

$$f(\boldsymbol{s}) = R(q^{\langle \chi_1, \boldsymbol{s}\rangle}, \ldots, q^{\langle \chi_n, \boldsymbol{s}\rangle}).$$

Proposition 3.1.2. — *Avec les hypothèses précédentes, la fonction*

$$\boldsymbol{s} \longmapsto L_q(\boldsymbol{s}, \mathrm{Pic}(V), C_{\mathrm{eff}}(V))$$

admet une expression rationnelle en des puissances de q et

$$\alpha^*(V) = \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1}) \in \mathbf{Q}^*.$$

Remarque 3.1.3. — La raison pour laquelle nous avons substitué L_q à $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}$ dans ce cadre est, qu'étant péridique comme la fonction zêta des hauteurs lorsque le système de hauteurs vérifie la propriété (P), $L_q(\cdot, \mathrm{Pic}(V), C_{\mathrm{eff}}(V))$ devrait avoir même lieu singulier que $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ au voisinage de $\omega_V^{-1} + i\,\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Démonstration. — Rappelons qu'un cône C de $M \otimes \mathbf{R}$ est dit régulier s'il est de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_{\geqslant 0} m_i$$

où $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une sous-famille d'une base de M. Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où C est un cône régulier d'intérieur non vide. La fonction $L_q(\cdot, M, C)$ s'écrit alors

$$L_q(\boldsymbol{s}, M, C) = \prod_{i=1}^{n} (1 - q^{\langle m_i, \boldsymbol{s}\rangle})^{-1}$$

et la première assertion est immédiate. En outre, si on a $\langle m_i, \boldsymbol{s}\rangle = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors par [**BT1**, proposition 2.4.5], on a l'égalité

$$\chi_C(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i};$$

la deuxième assertion en découle aussitôt. Dans le cas général (cf. [**Oda**, p. 23]), on écrit $C^\vee$ comme support d'un éventail régulier Σ, c'est-à-dire que Σ est un ensemble de cônes polyédriques rationnels strictement convexes de $M^\vee \otimes \mathbf{R}$ tels que :

(i) Si $\sigma \in \Sigma$ et si σ' est une face de σ, alors $\sigma' \in \Sigma$;
(ii) Si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face de σ et de σ' ;
(iii) On a l'égalité $C^\vee = \cup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$;
(iv) Tout σ de Σ est régulier.

Alors si on note $\Sigma^{(i)}$ l'ensemble des éléments de Σ de dimension i et n la dimension de M, il existe des entiers relatifs $\mu(\sigma)$ pour $\sigma \in \Sigma$ tels que :

$$L_q(\boldsymbol{s}, M, C) = \sum_{\sigma \in \Sigma^{(n)}} L_q(\boldsymbol{s}, M, \sigma^\vee) + \sum_{i<n} \sum_{\sigma \in \Sigma^{(i)}} \mu(\sigma) \sum_{y \in \sigma} q^{-\langle y, \boldsymbol{s}\rangle}$$

et

$$\chi_C(\boldsymbol{s}) = \sum_{\sigma \in \Sigma^{(n)}} \chi_C(\boldsymbol{s})$$

et les deux assertions résultent du cas précédent et du fait que l'ordre du pôle en 0 de la fonction $s \mapsto \sum_{y\in\sigma} q^{-\langle y, s\omega_V^{-1}\rangle}$ est d'ordre i si le cône σ est de dimension i. $\square$

3.2. Expression de la constante. — Nous allons maintenant définir la constante qui apparaît comme résidu de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 3.2.1. **—** On pose

$$\theta_H^*(V) = \alpha^*(V)\beta(V)\tau_H(V)$$

et

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)$$

3.3. Géométrie des variétés de drapeaux généralisées. — Dans la suite nous nous intéressons à la situation suivante :

Notations 3.3.1. **—** Dans la suite G désigne un groupe algébrique linéaire lisse semi-simple et connexe sur F, P un F-sous-groupe parabolique lisse de G. On note V le quotient $P\backslash G$ et $\pi : G \to V$ la projection canonique. Par [**BoTi2**, proposition 2.24], le revêtement universel $\tilde{G}$ de G est défini sur F. Quitte a remplacer G par $\tilde{G}$ et P par son image inverse dans $\tilde{G}$, on peut donc supposer que G est simplement connexe.

Pour tout groupe algébrique linéaire H sur F, on note $\mathrm{Lie}(H)$ l'algèbre de Lie restreinte de H, $\mathscr{R}H$ son radical et $\mathscr{R}_u H$ son radical unipotent. Le groupe des caractères de H sur F est défini par :

$$X^*(H)_F = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,F}(H, \mathbf{G}_{m,F})$$

et le groupe de cocaractères par

$$X_*(H)_F = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,F}(\mathbf{G}_{m,F}, H).$$

On note P_0 un F-sous-groupe parabolique lisse minimal de G contenu dans P. On note T un tore maximal de $\mathscr{R}P_0$ et S sa composante scindée. On a donc les inclusions

$$S \subset T \subset P_0 \subset P \subset G.$$

On fixe également un sous-groupe de Borel B de G^s tel que $T^s \subset B \subset P_0^s$.

On note Φ (resp. ${}_F\Phi$, Φ^+, ${}_F\Phi^+$) les racines de T^s (resp. S, T^s, S) dans G^s (resp. G, B, P_0), Δ la base de Φ associée à Φ^+ et ${}_F\Delta$ celle de ${}_F\Phi$ correspondant à ${}_F\Phi^+$. L'application de restriction de T à S induit une application

$$j : \Delta \to {}_F\Delta \cup \{0\}$$

(cf. [**Bo**, §21.8]) dont l'image contient ${}_F\Delta$. le groupe de Weyl de Φ (resp. ${}_F\Phi$) est note W (resp. ${}_FW$). Pour tout α de Δ (resp. ${}_F\Delta$), on note $\check{\alpha}$ la coracine correspondante et ϖ_α le poids fondamental associé.

Pour tout partie J de ${}_F\Delta$, on note ${}_FW_J$ le sous-groupe de ${}_FW$ engendrépar les s_α, pour $\alpha \in J$ et ${}_FP_J$ le F sous-groupe parabolique

$${}_FP_J = P_0\,{}_FW_JP_0.$$

On obtient ainsi une bijection entre les parties de ${}_F\Delta$ et les F sous-groupes paraboliques de G contenant P_0 avec

$$P_0 = {}_FP_\varnothing \qquad \text{et} \qquad G = {}_FP_{{}_F\Delta}.$$

On note ${}_FI$ (resp. I) la partie de ${}_F\Delta$ (resp. Δ) correspondant à P. On a donc

$$I = j^{-1}({}_FI \cup \{0\})$$

Par [**San**, proposition 6.10], on a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{F}[V]^*/F^* \to F[G]^*/F^* \to X^*(P)_F \to \operatorname{Pic}(V) \to \operatorname{Pic}(G)$$

Il résulte du théorème de Rosenlicht, [**Ro**, theorem 3] que $F[G]^*/F^*$ est isomorphe au groupe $X^*(G)_F$ et donc trivial et de [**San**, lemma 6.9 (iii)] que $\operatorname{Pic}(G)$ est nul puisque G est supposé simplement connexe. On a donc un isomorphisme canonique

$$\phi : X^*(P)_F \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(V)$$

qui peut être décrit de la manière suivante : si χ est un caractère de P sur F, χ peut être vu comme fibré en droites sur $\operatorname{Spec} F$ muni d'une action de P et comme fibré en droites sur V, $\phi(\chi)$ est défini comme le produit restreint $G \times^P \chi$. Autrement dit $\phi(\chi)$ est la classe du faisceau L_χ dont l'espace des sections $\Gamma(U, L_\chi)$ sur un ouvert U est l'ensemble

$$\{f \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_G) \mid \forall y \in \pi^{-1}(U)(\overline{F}),\ \forall p \in P(\overline{F}), f(pg) = \chi(p)f(g)\}.$$

Par [**Pe1**, lemme 6.2.10], l'image de $X^*(P)_{F^s}$ dans $X^*(T)_{F^s}$ coïncide avec le sous réseau engendré par la famille $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Delta-I}$ et le cône des diviseurs effectifs est donné par

$$C_{\text{eff}}(V^s) = \sum_{\alpha\in\Delta-I} \mathbf{R}_{\geqslant 0}(-\varpi_\alpha).$$

L'image de $X^*(P)_F$ dans $X^*(T)_{F^s}$ a donc pour base la famille

$$\left(\sum_{\beta\in j^{-1}(\alpha)} \varpi_\beta\right)_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}$$

et $C_{\text{eff}}(V)$ est donné par

$$\sum_{\alpha \in {}_F\Delta - {}_F I} \mathbf{R}_{\geqslant 0}\Big(-\sum_{\beta \in j^{-1}(\alpha)} \varpi_\beta\Big). \tag{3.3.1}$$

Pour tout $J \subset {}_F\Delta$, on note ${}_F\mathfrak{r}_J$ le radical de $\mathrm{Lie}({}_F P_J)$ et on pose $\mathfrak{r} = {}_F\mathfrak{r}_{{}_F I}$. La représentation adjointe définit une action de P sur $\mathfrak{r}$ et le fibré cotangent $\Omega^1_{V/F}$ est isomorphe au fibré $G \times^P \mathfrak{r}$ associé. En prennant les puissances extérieures maximales, on obtient que

$$\phi(\det \mathfrak{r}) = \omega_V.$$

On note

$$\rho_P = \frac{1}{2} \det \mathfrak{r} \in X^*(P)_F \otimes \mathbf{Q}$$

L'image de ρ_P dans $X^*(S)_F$ par la restriction coïncide avec la demi-somme des racines de S comptées avec des multiplicitées égales à la dimension de leur espace propre dans $\mathfrak{r}$.

Notons en outre que tout choix de bases des sous-espaces propres de ${}_F\mathfrak{r}_\varnothing$ pour l'action de S définit un isomorphisme de F-espace vectoriel $\det \mathfrak{r} \xrightarrow{\sim} F$ et donc un isomorphisme

$$\omega_V \xrightarrow{\sim} L_{2\rho_P}.$$

Remarque 3.3.1. — Il résulte des descriptions de $C_{\text{eff}}(V)$ et de ω_V^{-1} que ω_V^{-1} appartient à $C_{\text{eff}}(V)^{\mathrm{O}}$ et que V vérifie l'hypothèse (i) des hypothèses géométriques ainsi que l'hypothèse (iv). L'hypothèse (ii) résulte de [**Ke**, p. 575] et, du fait que P est supposé réduit, la condition (iii) résulte de la description du groupe du Picard et la dernière du fait que $\overline{V}$ est rationnelle. La variété vérifie donc l'ensemble des hypothèses géométriques.

3.4. Hauteurs sur les variétés de drapeaux. — Comme dans [**FMT**], nous allons tout d'abord nous restreindre au cas des hauteurs définies par des sous-groupes compacts maximaux. Le but de ce paragraphe est d'en rappeler la construction.

Notations 3.4.1. — Par la décomposition d'iwasawa (cf. [**Tit**, §3.3.2]), Il existe pour toute place $\mathfrak{p}$ de F un sous-groupe compact maximal $K_\mathfrak{p}$ de $G(F_\mathfrak{p})$ tel que

$$G(F_\mathfrak{p}) = P_0(F_\mathfrak{p})K_\mathfrak{p}. \tag{3.4.1}$$

En outre si $\mathscr{G}$ est un modèle de G sur un ouvert de $\mathbf{C}$, alors par [**Tit**, §3.9.1], on peut supposer pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de F que

$$K_{\mathfrak{p}} = \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})$$

On pose $K = \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} K_{\mathfrak{p}}$. Pour tout caractère χ de P, pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, on considère la métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur L_χ définie de la manière suivante : si U est un voisinage ouvert de x, $\boldsymbol{s}$ une section de L_χ non nulle en x et $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ l'élément de $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathscr{O}_G)$ qui lui correspond,

$$\forall k \in K_{\mathfrak{p}}, \qquad \pi(k) = x \Rightarrow \|\boldsymbol{s}(x)\|_{\mathfrak{p}} = |\widetilde{\boldsymbol{s}}(k)|_{\mathfrak{p}}.$$

L'existence d'un tel k est assuré par (3.4.1), et le terme de droite est indépendant de k puisque tout morphisme continu de $P(F_{\mathfrak{p}}) \cap K_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathbf{R}_{>0}$ est trivial.

Le système de métriques $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in M_F}$ ainsi défini est bien adélique. En effet soit $\mathscr{P}$ l'adhérence de P dans $\mathscr{G}$. Quitte à augmenter S, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{C}-S$ et le quotient $\mathscr{P}\backslash\mathscr{G}$, bien défini par [**Dem**, proposition 1.2], fournit un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathbf{C}-S$. On considère alors le faisceau $\mathscr{L}_\chi$ sur $\mathscr{V}$ dont l'ensemble des sections sur un ouvert $\mathscr{U}$ est

$$\{f \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathscr{U}), \mathscr{O}_{\mathscr{G}}) \mid \forall g \in \pi^{-1}(\mathscr{U})(\overline{F}), \forall p \in P(\overline{F}), f(pg) = \chi(p) f(g)\}$$

pour tout ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{V}$. Quitte à augmenter S, on a que $\mathscr{L}_\chi$ est un fibré en droites et un modèle de L_χ et pour tout $\mathfrak{p} \in M_F - S$ tel que $K_{\mathfrak{p}} = \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathfrak{p}})$ et tout x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ se relevant en un élément k de $K_{\mathfrak{p}}$, la $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$-structure de $L_\chi(x)$ définie par L_χ est induite par la $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$-structure de $\mathscr{O}_G(c)$ induite par $\mathscr{O}_{\mathscr{G}}$, ce qui montre que $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec la métrique définie par $\mathscr{L}_\chi$.

L'application

$$\chi \mapsto (L_\chi, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in M_F})$$

définit un système de métriques adéliques sur V qui vérifie de surcroît la propriété (P). Nous noterons $\boldsymbol{H}_K$ ce système de hauteurs. Nous omettrons K dans cette notation lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

3.5. Enoncé du résultat. — Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

Théorème 3.5.1. — *Avec les notations qui précèdent, on a que la fonction zêta des hauteurs $\zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}(\boldsymbol{s})$ converge absolument pour*

$$\boldsymbol{s} \in \omega_V^{-1} + C_{\text{eff}}(V)^{\mathrm{O}} + i \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

et s'étend à $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$ *en une fonction méromorphe qui admet une expression rationnelle en des puissance de* q*. En outre la fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *qui à* s *associe* $\zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}(s\omega_V^{-1})$ *a un pôle d'ordre* $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$ *en* $s = 1$ *avec*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^t \zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}(s\omega_V^{-1}) = \theta^*(V).$$

4. Démonstration du résultat

4.1. Fonction zêta et séries d'Eisenstein. — Comme dans [**FMT**, §2], la démonstration est basée sur le fait que la série zêta des hauteurs coïncide avec une série d'Eisenstein, ce qui permet d'appliquer les résultats démontrés par Morris dans [**Mo1**] et [**Mo2**] pour ces séries.

Notations 4.1.1. — Pour toute partie J de ${}_F\Delta$, on note S_J le tore

$$\left(\bigcap_{\alpha\in J}\operatorname{Ker}\alpha\right)^{\circ}$$

où pour tout groupe algébrique H, on désigne par H° sa composante neutre. On pose également

$${}_FM_J = Z_G(S_J) \qquad \text{et} \qquad {}_FN_J = \mathscr{R}_u({}_FP_J).$$

Le groupe parabolique ${}_FP_J$ est alors le produit semi-direct de ${}_FM_J$ par ${}_FN_J$. La restriction induit un isomorphisme

$$X^*({}_FP_J) \xrightarrow{\sim} X^*({}_FM_J).$$

Dans la suite, on posera

$$\mathfrak{a}_J = X^*({}_FM_J)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Res}} X^*(S_J)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$$

et on notera M (resp. N, $\mathfrak{a}$, M_0, N_0, $\mathfrak{a}_0$) pour ${}_FM_{{}_FI}$ (resp. ${}_FN_{{}_FI}$, $\mathfrak{a}_{{}_FI}$, ${}_FM_{\varnothing}$, ${}_FN_{\varnothing}$, $\mathfrak{a}_{\varnothing}$).

Pour tout place $\mathfrak{p}$ de F, on définit un morphisme

$$H_{P,\mathfrak{p}} : M(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \to \mathfrak{a}^{\vee}$$

par la relation

$$\forall\chi\in X^*(M),\quad \forall z\in Z_M(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}),\quad |\chi(z)|_{\mathfrak{p}} = q^{\langle H_{P,\mathfrak{p}}(z),\chi\rangle}$$

et $H_P : M(\boldsymbol{A}_F) \to \mathfrak{a}^\vee$ est défini comme la somme des morphisme $H_{P,\mathfrak{p}}$. On étend H_P en une application de $G(\boldsymbol{A}_F)$ dans $\mathfrak{a}^\vee$ de la manière suivante :

$$\forall n \in N(\boldsymbol{A}_F), \quad \forall m \in M(\boldsymbol{A}_F), \quad \forall k \in K, \quad H_P(nmc) = H_P(c).$$

Pour tout sous-groupe compact ouvert K' de K, on notera $\mathscr{C}^0(P, K')$ l'ensemble des fonctions continues

$$\varphi : P(\boldsymbol{A}_F) \backslash G(\boldsymbol{A}_F) \to \mathbf{C}$$

telles que φ soit K'-finie à droite (i.e. l'espace vectoriel engendré par les translatés de φ par les éléments de K' est de dimension finie). Si φ appartient à $\mathscr{C}^0(P, K')$ et ξ à $\mathfrak{a}$, on définit

$$\forall g \in G(\boldsymbol{A}_F), \quad T_\xi \varphi(g) = q^{\langle H_P(g), \xi\rangle} \varphi(g).$$

Définition 4.1.2. — Si $\varphi \in \mathscr{C}^0(P, K')$ et $\xi \in \mathfrak{a}$, la série d'Eisenstein associée à φ et ξ est définie par

$$\forall g \in G(\boldsymbol{A}_F), \quad E_P^G(\varphi, \xi, g) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} T_{\xi + \rho_P} \varphi(\gamma g).$$

D'après un lemme de Godement [**Mo1**, §2.2.2, lemme, p. 118] cette série converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $G(\boldsymbol{A}_F)$ dès que $\mathrm{Re}(\xi - \rho_P)$ appartient à C_P où C_P est la chambre de Weyl définie par

$$\forall \alpha \in {}_F\Delta - {}_FI, \quad (\lambda, \check{\alpha}) \geqslant 0.$$

On notera $E_P^G(\xi, \cdot)$ la fonction $E_P^G(1, \xi, \cdot)$.

Proposition 4.1.1. — *La série définissant la fonction zêta des hauteurs $\zeta_{V,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})$ coïncide avec celle définissant $E_P^G(\boldsymbol{s} - \rho_P, e)$.*

Démonstration. — Par [**Bo**, proposition 20.5], l'application $\pi : G(F) \to V(F)$ est surjective. Il suffit donc de vérifier que pour tout élément g de $G(F)$, on a

$$\boldsymbol{H}_K(\chi)(\pi(g)) = q^{\langle H_P(g), \chi\rangle}.$$

On écrit donc $g = nmk$ avec $n \in N(\boldsymbol{A}_F)$, $m \in M(\boldsymbol{A}_F)$ et $k \in K$. Soit $\boldsymbol{s}$ une section de L_χ sur un voisinage ouvert U de $\pi(g)$, non nulle en $\pi(g)$ et correspondant à un élément $\tilde{s}$ de $\Gamma(G, \mathscr{O}_G)$. Par définition on a

$$\boldsymbol{H}_K(\chi)(\pi(g)) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} ||\boldsymbol{s}(\pi(g))||_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\tilde{s}(k_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p}^{-1}.$$

Mais par la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} |\tilde{s}(g)|_{\mathfrak{p}} = 1$ et donc

$$\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} |\chi(m_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}\Big) \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} |\tilde{s}(k_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

On en déduit les égalités

$$\boldsymbol{H}_K(\chi)(\pi(g)) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} |\chi(m_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}\in M_F} q^{\langle H_{P,\mathfrak{p}}(g),\chi\rangle} = q^{\langle H_P(g),\chi\rangle}. \qquad \square$$

Corollaire 4.1.2. — *La fonction zêta des hauteurs $\zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}$ converge absolument dans le cône ouvert*

$$\omega_V^{-1} + C_{\mathrm{eff}}(V)^{\mathrm{O}} + i \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ *qui admet une expression rationnelle en des puissance de q.*

Démonstration. — D'après [**BoTi1**, §12.12], on a

(4.1.1)
$$\forall \alpha, \alpha' \in {}_F\Delta, \quad \alpha \neq \alpha' \Rightarrow \Big\langle \sum_{\beta\in j^{-1}(\alpha)} \varpi_\beta, \check{\alpha}\Big\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \Big\langle \sum_{\beta\in j^{-1}(\alpha)} \varpi_\beta, \check{\alpha}'\Big\rangle = 0$$

Par conséquent le cône C_P coïncide d'après (3.3.1) avec le cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$. La première assertion résulte donc de [**Mo1**, lemma, p. 118] mentionné cité ci-dessus. La seconde est un résultat de Morris [**Mo2**, §6.6, lemma, p. 1164] $\square$

4.2. Ordre du pôle au sommet du cône.

4.2. Ordre du pôle au sommet du cône. — L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. — *Le lieu des singularités de la fonction $\zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}$ au voisinage du point $s = \omega_V^{-1}$ coïncide avec la réunion des hyperplans*

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \omega_V^{-1}\rangle = 0$$

pour $\alpha \in {}_F\Delta - {}_FI$, chacun de ces hyperplans intervenant avec une multiplicité au plus égale à un.

Remarques 4.2.2. — (i) Nous verrons plus loin que la multiplicité est en réalité exactement égale à un.

(ii) Le fait que les singularités soient hyperplanes résulte de la proposition 4.1.1 et de [**Mo2**, §6.6, lemma, p. 1164].

Comme dans [**FMT**, §2] le principe de la démonstration est de considérer la fibration

$$P_0\backslash P \to P_0\backslash G \to V,$$

d'exprimer le terme constant des séries d'Eisenstein correspondant à $P_0\backslash P$ et $P_0\backslash G$ en termes des opérateurs d'entrelacements. Comme dans Harder [**Harder**, p. 278] ou Morris [**Mo1**, §4.3.4], l'étude des singularités des séries d'Eisenstein se réduit alors à la description de celles des opérateurs d'entrelacemant qui se déduisent des équations fonctionnelles et du cas de l'opérateur associé à une réflexion.

Notations 4.2.1. — Pour tout φ de $\mathscr{C}^0(P_0, K')$ et ξ de $\mathfrak{a}$, la série d'Eisenstein partielle $E^P_{P_0}$ est définie par

$$E^P_{P_0}(\varphi, \xi, g) = \sum_{\gamma \in P_0(F)\backslash P(F)} T_{\xi+\rho_{P_0}}\varphi(\gamma g).$$

Pour tout $w \in {}_FW$ représenté par un élément w' de $\mathscr{N}_G(S)(k)$, la fonction $C(w,\xi)\varphi$ est définie par

$$\forall g \in G(\boldsymbol{A}_F), \quad C(w,\xi)\varphi(g) = \int_{w'N_0(\boldsymbol{A}_F)w'^{-1}\cap N_0(\boldsymbol{A}_F)\backslash N_0(\boldsymbol{A}_F)} q^{\langle H_{P_0}(w'^{-1}ng), \xi+\rho_{P_0}\rangle}\varphi(w'^{-1}ng)\mathrm{d}n$$

où pour tout groupe unipotent U sur F, la mesure de Haar sur $U(\boldsymbol{A}_F)$ est normalisée par

$$\int_{U(F)\backslash U(\boldsymbol{A}_F)} \mathrm{d}u = 1.$$

On note également $E^P_{P_0}(\xi, g) = E^P_{P_0}(1, \xi, g)$ et $c(w,\xi) = (C(w,\xi)1)(e)$..

Remarque 4.2.3. — Par [**Mo1**, §2.4.8, theorem, p. 134] et [**Mo1**, §4.3.1, p. 167], on a les équations fonctionnelles

$$c(w_1, w_2\xi)c(w_2,\xi) = c(w_1w_2,\xi) \tag{4.2.1}$$

et

$$c(w,\lambda)E^G_{P_0}(w\lambda, g) = E^G_{P_0}(\lambda, g). \tag{4.2.2}$$

En outre, par définition, pour tout ξ' de $\mathfrak{a}$ invariant par w on a

$$c(w, \xi+\xi') = c(w,\xi) \tag{4.2.3}$$

Lemme 4.2.4. — *Si $w \in {}_F W$, le lieu des singularités de la fonction $c(w, \cdot)$ au voisinage du point $\lambda = \rho_{P_0}$ est égale à la réunion des hyperplans*

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{P_0} \rangle$$

où α décrit l'ensemble $\{\alpha \in {}_F\Delta \mid w\alpha < 0\}$. La multiplicité de chacun de ces hyperplans est exactement égale à un.

Remarque 4.2.5. — Dans le cas où G est un groupe de Chevalley, ce résultat découle immédiatement de ceux de Harder [**Harder**, p. 278].

Démonstration. — Comme dans [**FMT**, p. 429], si $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in {}_F\Delta$ il résulte de (4.2.3) que l'hyperplan défini par

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{P_0} \rangle = 0$$

contient le lieu singulier de $c(s_\alpha, \cdot)$ au voisinage de ρ_{P_0}. Le fait que ce pôle soit au plus de multiplicité un résulte de [**Mo1**, §3.5.2, theorem(i)]. Pour montrer que c'est effectivement un pôle, il suffit d'écrire $c(s_\alpha, \cdot)$ comme produit de facteurs locaux (cf. aussi la démonstration du théorème 4.3.1).

En général, on écrit

$$w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_q}$$

avec $\alpha_i \in {}_F\Delta$ et q minimal. On pose

$$w_j = s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_q}.$$

Alors l'équation fonctionnelle (4.2.1) fournit l'égalité

$$c(w, \lambda) = c(s_{\alpha_1}, w_1\lambda) \dots c(s_{\alpha_q}, \lambda).$$

Mais par [**Bki**, Ch. VI, §1.1.6, corollaire 2, p. 158], on a que $w_j^{-1}\alpha_j < 0$ et que $\{\alpha \in {}_F\Phi^+ \mid w\alpha < 0\}$ coïncide avec l'ensemble $\{w_j^{-1}\alpha_j, 1 \leqslant j \leqslant q\}$. Il résulte alors de [**FMT**, §8, sublemma, p. 430] que

$$\langle \alpha_j, w_j\rho_{P_0} \rangle \geqslant \langle \check{\alpha}_j, \rho_{P_0} \rangle$$

avec égalité uniquement si $w_j^{-1}\alpha_j \in {}_F\Delta$. Comme dans [**FMT**], on déduit alors du cas qui précède que $c(s_{\alpha_j}, w_j \cdot)$ est régulier au voisinage de ρ_{P_0} sauf si $w_j^{-1}\alpha_j \in {}_F\Delta$ auquel cas la singularité est contenue dans l'hyperplan

$$\langle w_j^{-1}\alpha_j, \lambda - \rho_{P_0} \rangle = 0$$

qui est de multiplicité un. □

Fin de la démonstration de la proposition 4.2.1. — Il résulte de [**Mo1**, §4.3.4], que les singularités de $E^G_{P_0}(\cdot, g)$ sont dominées par celles de $c({}_Fw_{{}_F\Delta}, \cdot)$. le résultat est donc démontré dans le cas où $P = P_0$. Dans le cas général, pour tout ξ de

$$\rho_{P_0} + C_{P_0} + iX^*(S) \otimes \mathbf{R}$$

le terme constant de $E^P_{P_0}$ est donné, d'après la démonstration de [**Mo1**, §2.3.1, lemma, p. 122], par la formule

$$\int_{N_0(\mathbf{F})\backslash N_0(\boldsymbol{A}_F)} E^P_{P_0}(\xi, ng)\mathrm{d}n = \sum_{w \in {}_FW_{{}_FI}} c(w,\xi) q^{\langle H_{P_0}(g), w\xi + 2\rho_P\rangle}.$$

En prenant les systèmes d'Eisenstein résiduels successifs (cf [**Mo1**, exemple 3.11.2, p. 1130–1132]) on obtient pour tout ξ de $\mathfrak{a}$ la relation

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\mathfrak{a}^\perp}} \Big(\prod_{\alpha\in {}_FI} \langle\check\alpha, \lambda\rangle\Big) E^P_{P_0}(\lambda + \xi + \rho_{P_0}, g) = C_P q^{\langle H_P(g), \xi + 2\rho_P\rangle}$$

où $\mathfrak{a}^\perp = \{\lambda \in X^*(S)\otimes\mathbf{R} \mid \lambda_{|{}_FS_I} = 0\}$ et la constante C_P est définie par

$$C_P = \lim_{\lambda\to\rho_{P_0}} \Big(\prod_{\alpha\in {}_FI} \langle\check\alpha, \lambda - \rho_{P_0}\rangle\Big) c({}_Fw_{{}_FI}, \lambda). \tag{4.2.4}$$

En sommant sur $P(F)\backslash G(F)$, on obtient

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\mathfrak{a}^\perp}} \Big(\prod_{\alpha\in {}_FI} \langle\check\alpha, \lambda\rangle\Big) E^G_{P_0}(\lambda + \xi + \rho_{P_0}, g) = C_P E^G_P(\xi + \rho_P, g)$$

et l'assertion pour E^G_P découle de celle pour $E^G_{P_0}$ et du fait que $C_P \neq 0$. □

Remarque 4.2.6. — Il découle de la démonstration précédente que que

$$\lim_{\xi\to 0}\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_0 - {}_FI} \langle\check\alpha, \xi\rangle\Big) E^G_P(\xi + \rho_P, g) = C_G/C_P$$

et donc par la proposition 4.1.1,

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V}\zeta_{V,\boldsymbol{H}_K}((s-1)\omega_V^{-1}) = \Big(\prod_{\alpha\in {}_F\Delta_{{}_FI}} \langle\check\alpha, 2\rho_P\rangle^{-1}\Big)\frac{C_G}{C_P} \tag{4.2.5}$$

4.3. Valeur de la constante. — Par la remarque précédente, pour clôre la démonstration, il suffit de comparer C_G/C_P et $\theta^*_H(V)$ ce qui redémontrera du même coup que C_G/C_P est une constante non nulle et que les multiplicités des hyperplans $\langle\check{\alpha},\xi\rangle = 0$ sont bien égales à un.

***Théorème 4.3.1.* —** *On a la relation*

$$\left(\prod_{\alpha\in{}_F\Delta_{{}_F I}} \langle\check{\alpha}, 2\rho_P\rangle\right)\frac{C_G}{C_P} = \theta^*_H(V) \tag{4.3.1}$$

Pour démontrer ce résultat, il nous faut d'abord écrire l'opérateur d'entrelacement comme produit d'opérateurs locaux que nous allons maintenant définir.

***Notations 4.3.1.* —** Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, on note ${}_{F_\mathfrak{p}}S$ un tore scindé maximal de $G_{F_\mathfrak{p}}$ tel que

$${}_F S_{F_\mathfrak{p}} \subset {}_{F_\mathfrak{p}}S \subset P_{0F_\mathfrak{p}},$$

on note ${}_{F_\mathfrak{p}}P_0$ un sous-groupe parabolique minimal de $G_{F_\mathfrak{p}}$ tel que

$${}_{F_\mathfrak{p}}S \subset {}_{F_\mathfrak{p}}P_0 \subset P_{0F_\mathfrak{p}}$$

et ${}_{F_\mathfrak{p}}N$ son radical unipotent. Quitte à modifier le choix de certains des compacts $K_\mathfrak{p}$, on peut supposer que

$$G(F_\mathfrak{p}) = {}_{F_\mathfrak{p}}P_0(F_\mathfrak{p})K_\mathfrak{p}.$$

On note ${}_{F_\mathfrak{p}}\Phi$ le système de ${}_{F_\mathfrak{p}}S$ dans $G_{F_\mathfrak{p}}$ et ${}_{F_\mathfrak{p}}\Delta$ la base de ${}_{F_\mathfrak{p}}\Phi$ correspondant à ${}_{F_\mathfrak{p}}P_0$.

Si J est une partie de ${}_{F_\mathfrak{p}}\Delta$, on définit comme précédemment le sous groupe parabolique ${}_{F_\mathfrak{p}}P_J$, l'algèbre de Lie ${}_{F_\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_J$, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel ${}_{F_\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_J$, l'élément ${}_{F_\mathfrak{p}}w_J$ du groupe de Weyl le caractère $\rho_{{}_{F_\mathfrak{p}}P_J}$ et la fonction $H_{{}_{F_\mathfrak{p}}P_J,\mathfrak{p}}$. On se donne en outre des bases des sous-espaces propres de ${}_{F_\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_\varnothing$ pour l'action de ${}_{F_\mathfrak{p}}S$ de sorte que pour toute partie J de ${}_F\Delta$, l'isomorphisme de F-espaces vectoriels

$$\Lambda^{\dim {}_F\mathfrak{r}_J}({}_F\mathfrak{r}_J \otimes \mathbf{F}_\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}_\mathfrak{p}$$

induit par ces bases coïncide avec celui induit par les bases choisies sur F.

Si U est un $F_\mathfrak{p}$ groupe unipotent de ${}_{F_\mathfrak{p}}P_\varnothing$ ou de son opposé, alors ces bases définissent un isomorphisme de variété de U sur $\mathbf{A}^{\dim U}_{F_\mathfrak{p}}$, ce qui permet de normaliser la mesure de Haar sur $U(F_\mathfrak{p})$.

Quitte à modifier à nouveau certains des $K_\mathfrak{p}$, on peut fixer pour tout w de ${}_FW$ des représentants $\tilde{w}$ appartenant à $\mathcal{N}_G(S)(F)\cap K$.

Définition 4.3.2. — Pour tout λ de ${}_F\mathfrak{a}_0$, et tout w de ${}_FW$, on considère

$$ {}_Fc_{\mathfrak{p}}(w,\lambda) = \int_{[\tilde{w}\,{}_FN(F_{\mathfrak{p}})\tilde{w}^{-1}\cap\,{}_FN(F_{\mathfrak{p}})]\backslash {}_FN(F_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{P_0,\mathfrak{p}}(\tilde{w}^1 n),\lambda+\rho_{P_0}\rangle)\mathrm{d}n_{\mathfrak{p}}. $$

Remarque 4.3.2. — Le quotient C_G/C_P se met alors sous la forme

$$ \frac{C_G}{C_P} = \frac{1}{q^{(g-1)\dim V}}\lim_{\lambda\to 0}\prod_{\alpha\in {}_F\Delta - I}\langle\check{\alpha},\lambda\rangle\prod_{\mathfrak{p}\in M_F}\frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}({}_Fw_{{}_F\Delta},\lambda+\rho_{P_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}({}_Fw_I,\lambda+\rho_{P_0})}. \tag{4.3.2} $$

Définition 4.3.3. — Pour tout λ de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{a}_0$ et tout w de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}W$ se relevant en $w'\in K_{\mathfrak{p}}$

$$ c_{\mathfrak{p}}(w,\lambda) = \int_{[w'\,{}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}})w'^{-1}\cap\,{}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}})]\backslash {}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0,\mathfrak{p}}(w'^{-1},\lambda+\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P}\rangle)\mathrm{d}n_{\mathfrak{p}} $$

Remarque 4.3.3. — Casselman donne dans [**Cas**] une expression explicite pour $c_{\mathfrak{p}}(w,\lambda)$ en reliant ${}_Fc_{\mathfrak{p}}(w,\lambda)$ à ce terme, on obtiendra une expression explicite pour ce dernier.

Lemme 4.3.4. — *Le volume de la variété à la place $\mathfrak{p}$ vérifie*

$$ \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}})) = \frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_F\Delta},\rho_{P_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_FI},\rho_{P_0})} $$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement de la démonstration du lemme 6.2.7 dans [**Pe1**]. □

Lemme 4.3.5. — *Avec les notations précédentes on a la relation*

$$ \frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}({}_Fw_{{}_F\Delta},\lambda+\rho_{P_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}({}_Fw_{{}_FI},\lambda+\rho_{P_0})} = \frac{c_{\mathfrak{p}}(w_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta},\operatorname{Res}\lambda+\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P})}{c_{\mathfrak{p}}(w_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}I},\operatorname{Res}\lambda+\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P})} $$

où ${}_{F_{\mathfrak{p}}}I$ désigne la partie de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta$ correspondant à $P_{F_{\mathfrak{p}}}$.

Démonstration. — Ce lemme se montre comme le lemme 6.2.8 de [**Pe1**]. □

Notation 4.3.4. — On note

$$ \lambda_{P_0} = \sum_{\alpha\in j^{-1}({}_F\Delta)} \varpi_\alpha \in \operatorname{Pic}(V_0) \xrightarrow{\sim} X^*(P_0)_F \subset \mathfrak{a}_0. $$

Lemme 4.3.6. — *Le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p}\in M_F} L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\frac{c_{\mathfrak{p}}({}_{F_{\mathfrak{p}}}w_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta},(s-1)\operatorname{Res}\lambda_{{}_FP}+\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0})}{c_{\mathfrak{p}}({}_{F_{\mathfrak{p}}}w_{{}_FI},(s-1)\operatorname{Res}\lambda_{{}_FP}+\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0})}$$

converge absolument au voisinage de $s=1$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration du lemme 6.2.12 de [**Pe1**], cela résulte de l'expression explicite donnée par Casselmann de $c_{\mathfrak{p}}(w,\chi)$. □

Lemme 4.3.7. — *La constante* $\alpha^*(V)$ *est donnée par la formule*

$$\alpha^*(V)=\frac{\prod_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},\lambda_{{}_FP}\rangle}{\prod_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},2\rho_P\rangle}.$$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement de la description de $C_{\mathrm{eff}}(V)$ donnée par (3.3.1) et du fait, déja indiqué en (4.1.1) que la matrice de changement de base passant de $(\check{\alpha})_{\alpha\in{}_F\Delta}$ à la base duale de $(\sum_{\beta\in j^{-1}(\alpha)}\varpi_\beta)_{\alpha\in{}_F\Delta}$ est diagonale. □

Démonstration du théorème 4.3.1. — Par la formule (4.3.2), on a que le quotient C_G/C_P vaut

$$\frac{\prod\limits_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},\lambda_{{}_FP_0}\rangle}{q^{(g-1)\dim V}}\lim_{s\to1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V}\prod_{\mathfrak{p}\in M_F}\frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_F\Delta},(s-1)\lambda_{{}_FP_0}+\rho_{{}_FP_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_FI},(s-1)\lambda_{{}_FP_0}+\rho_{{}_FP_0})}.$$

Pour tout $\mathfrak{p}$ de M_F, on note $\lambda_{\mathfrak{p}}(s)=L_{\mathfrak{p}}(s,\operatorname{Pic}\overline{V})$ et le quotient C_G/C_P s'écrit

$$\frac{\prod\limits_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},\lambda_{{}_FP_0}\rangle}{q^{(g-1)\dim V}}\lim_{s\to1}\Bigg[(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V}L(s,\operatorname{Pic}\overline{V})\prod_{\mathfrak{p}\in M_F}\lambda_{\mathfrak{p}}(s)^{-1}\frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_F\Delta},(s-1)\lambda_{{}_FP_0}+\rho_{{}_FP_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_FI},(s-1)\lambda_{{}_FP_0}+\rho_{{}_FP_0})}\Bigg].$$

par les lemmes 4.3.5 et 4.3.6, le produit du bas converge absolument au voisinage de 1 et le quotient C_G/C_P se met sous la forme

$$\begin{aligned}
&\prod_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},\lambda_{{}_FP_0}\rangle\frac{\lim_{s\to1}(s-1)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}V}L(s,\operatorname{Pic}\overline{V})}{q^{(g-1)\dim V}}\\
&\times\prod_{\mathfrak{p}\in M_F}\lambda_{\mathfrak{p}}(1)^{-1}\frac{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_F\Delta},\rho_{{}_FP_0})}{{}_Fc_{\mathfrak{p}}(w_{{}_FI},\rho_{{}_FP_0})}\\
&=\prod_{\alpha\in{}_F\Delta-{}_FI}\langle\check{\alpha},\lambda_{{}_FP_0}\rangle\tau_{\boldsymbol{H}_K}(V)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Je tiens à remercier Laure Blasco pour ses précieuses indications.

Références

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[BT3] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.

[BoTi1] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. **27** (1965), 55–150.

[BoTi2] ______, *Compléments à l'article : ≪ groupes réductifs ≫*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 253–276.

[Bki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.

[Bou1] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bou2] ______, *Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel*, J. reine angew. Math. **562** (2003), 17–199.

[Bou3] ______, *Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées*, Memoirs of the AMS, vol. 211, 2011.

[Cas] W. Casselman, *The unramified principal series of* $\mathfrak{p}$*-adic groups I. The spherical function*, Compositio Math. **40** (1980), n$^{\text{o}}$ 3, 387–406.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n$^{\text{o}}$ 2, 375–492.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[Dem] M. Demazure, *Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs*, Schémas en groupes III (Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962/64 (SGA3)), Lect. Notes in Math., n$^{\text{o}}$ 153, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

[EGA] J. A. Dieudonné et A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S., vol. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32, 1960–67.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Gr1] A. Grothendieck, *Géométrie formelle et géométrie algébrique*, Séminaire Bourbaki 11-ème année, 1958/59, n$^{\text{o}}$ 182.

[Gr2] ______, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 88–188.

[Gr3] ______, *Le groupe de Brauer II : Théorie cohomologique*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 67–87.

[Harder] G. Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. **100** (1974), 249–306.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.

[Hs] Liang chung Hsia, *On the dynamical height zeta functions*, J. Number Theory **63** (1997), 146–169.

[Ke] G. R. Kempf, *Algebraic representations of reductive groups*, Proc. of the Internat. Congress of Math. (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, pp. 575–577.

[Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im* $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.

[LY] K. F. Lai and K. M. Yeung, *Rational points in flag varieties*, J. of Number Theory **95** (2002), 142–149.

[La] S. Lang, *Fundamentals of diophantine equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1983.

[Mo1] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields I. The cusp form case*, Can. J. Math. **34** (1982), 91–168.

[Mo2] ———, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields II. The general case*, Can. J. Math. **34** (1982), 1112–1182.

[Oda] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n$^{\rm o}$ 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[Ro] M. Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984–988.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[Se1] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 11-ème année, 1969/70, n$^{\rm o}$ 19.

[Se2] ———, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne)*, Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n$^{\rm o}$ 446.

[Se3] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Si] J. H. Silverman, *The theory of height functions*, Arithmetic geometry (G. Cornell and J.H. Silverman, eds.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1986, pp. 151–166.

[Tit] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33 Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 29–69.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

---

15 février 2024

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre
• *E-mail :* Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE ET GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS [D'APRÈS Y. MANIN ET AL.]*

par

E. Peyre

Résumé. — Si V est une variété algébrique ayant une infinité de points rationnels sur un corps de nombres, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points rationnels de hauteur bornée sur V. Les conjectures énoncées par Manin vers 1989 proposent une interprétation géométrique de ce comportement asymptotique où le fibré anticanonique et le cône engendré par les diviseurs effectifs dans le groupe de Néron-Severi jouent un rôle crucial. Le but de cet exposé est un survol des travaux suscités par ces conjectures.

Abstract. — If V is an algebraic variety over a number field with infinitely many rational points, it is natural to construct heights on V and to study the asymptotic behavior of the points of bounded height on V. The conjectures made by Manin around 1989 propose a geometrical interpretation of this behavior in which the canonical line bundle and the cone of effective divisors in the Néron-Severi group play a central rôle. This talk is a survey of the works stimulated by these conjectures.

Si V est une variété algébrique projective sur $\mathbf{Q}$ et $\phi : V \to \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ un plongement, on dispose d'une hauteur exponentielle $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie comme la composée $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}$ est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, donnée par

$$H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} (|x_i|)$$

si les x_i sont des entiers et $\mathrm{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant N}(x_i) = 1$. Il est alors naturel de vouloir étudier de manière asymptotique les points rationnels de V dont la hauteur est bornée. De manière plus générale, si V est une variété algébrique sur un corps de nombres K, tout morphisme $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ induit une hauteur $H : V(K) \to \mathbf{R}$ et,

*Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000-01, exposé n°891

pour tout ouvert de Zariski U de V et tout nombre réel strictement positif B, on pose

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(K) \mid H(x) \leqslant B\}.$$

On souhaite alors étudier le comportement asymptotique de $N_{U,H}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Dans tous les cas connus de l'orateur où il a été déterminé, si $U(K) \neq \varnothing$, et si $N_{U,H}(B)$ est fini pour tout B, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a (\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et $b \geqslant 1$.

L'objet des conjectures énoncées par Manin et ses coauteurs vers 1989 est de proposer une interprétation géométrique pour a et b, où n'interviennent que la classe du fibré en droites $L = \phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_K}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ de V, la classe du faisceau canonique dans ce groupe et le cône des classes de diviseurs effectifs. Le but de cet exposé est de présenter ces conjectures en faisant un survol des résultats connus et des perspectives ouvertes.

Après des rappels sur les hauteurs et quelques exemples simples, nous donnerons une description plus détaillée des conjectures de Manin avant de présenter au paragraphe 4 une liste d'indices en leur faveur. Nous décrirons ensuite le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [**BT2**], avant de terminer par une brève évocation d'autres aspects de la théorie que nous avons choisi de ne pas traiter en détail dans cet exposé.

1. Point de vue sur les hauteurs

Parmi les nombreuses variantes de la notion de hauteur introduite par Weil [**We**] (cf. par exemple [**Né1**], [**Ar**], [**Se**], [**BGS**]), nous avons choisi d'utiliser, comme Batyrev et Manin dans [**BM**], les hauteurs exponentielles définies en termes de métriques adéliques sur un fibré en droites. Nous allons maintenant fixer les notations correspondantes.

Notations 1.0.1. — Dans la suite de cet exposé K désigne un corps de nombres, M_K l'ensemble des places de K. Si w est une place de K, on note K_w le complété de K pour la topologie définie par w. Si w est une place non-archimédienne, on note $\mathscr{O}_w$ l'anneau des entiers de K_w. Soit v la place de $\mathbf{Q}$ obtenue par restriction de w, on note $|\cdot|_w$ la valeur absolue sur K définie par la relation

$$\forall x \in K_w, \quad |x|_w = |N_{K_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue archimédienne ou p-adique usuelle sur $\mathbf{Q}$. Ces valeurs absolues ont l'avantage de satisfaire la formule du produit :

$$\forall x \in K^*, \qquad \prod_{w \in M_K} |x|_w = 1.$$

Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. En particulier, si X est une variété sur un corps F, de clôture algébrique $\overline{F}$, $X(F)$ est l'ensemble des points rationnels de X et on note $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{F}}$.

Nous dirons qu'une variété algébrique V sur K est *bonne* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Si V est une bonne variété, et L un faisceau inversible sur V, alors pour toute extension K' de K et tout point x de $V(K')$, on note

$$L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} K'$$

où L_x désigne la fibre de L en x au sens des faisceaux ; $L(x)$ est un espace vectoriel de dimension un sur K' et peut être vu comme la fibre du fibré en droites associé à L.

Si v est une place de K, une *métrique v-adique* sur L est une application qui à tout point x de $V(K_v)$ associe une fonction

$$\|\cdot\|_v : L(x) \to \mathbf{R}_+$$

de sorte que

M1 $\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = 0 \Leftrightarrow y = 0,$

M2 $\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \forall \lambda \in K_v, \quad \|\lambda y\|_v = |\lambda|_v \|y\|_v,$

M3 pour tout ouvert U de V, pour toute section s de L sur U, l'application de $U(K_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ qui à x associe $\|s(x)\|_v$ est continue pour la topologie v-adique.

Donnons deux exemples importants de telles métriques.

Exemple 1.0.2. — Si $\mathscr{B} = (s_1, \dots, s_N)$ est une famille de sections globales de L, de sorte que le système linéaire engendré soit sans point base, on peut définir pour toute place v une métrique par la formule :

$$\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \inf_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_v .$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique associée à $\mathscr{B}$.

Exemple 1.0.3. — Si $S \subset M_K$ est un ensemble fini de places non-archimédiennes, on note $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Soient $\mathcal{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur $\mathcal{O}_S$ et $\mathcal{L}$ un modèle de L sur $\mathcal{V}$. Pour toute place finie v de K en-dehors de S, on définit une métrique v-adique de la façon suivante : si $x \in V(K_v)$, comme $\mathcal{V}$ est projective, il se relève en un unique élément $\tilde{x} \in \mathcal{V}(\mathcal{O}_v)$. Le faisceau inversible $\tilde{x}^*(\mathcal{L})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ correspond à un $\mathcal{O}_v$-module libre de rang un dans $L(x)$, dont on note y_0 un générateur. La métrique cherchée est alors définie par

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique définie par le modèle $\mathcal{L}$.

Définition 1.0.4. — Une famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ où $\|\cdot\|_v$ est une métrique v-adique sur un faisceau inversible L est dite *adélique* si et seulement s'il existe un ensemble fini S de places non-archimédiennes, un modèle $\mathcal{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathcal{L}$ de L sur $\mathcal{V}$ tels que pour toute place finie de K en-dehors de S, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit la métrique définie par $\mathcal{L}$.

Par abus de langage, nous appellerons dans cet exposé *hauteur d'Arakelov* sur une bonne variété V une paire $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ où L désigne un faisceau inversible sur V et $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ une métrique adélique sur L. Si x est un point rationnel de V sa hauteur relativement à H est donnée par la formule

$$\forall y \in L(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{y \in M_K} \|y\|_v^{-1}.$$

Remarques 1.0.5. — (i) Si $x \in V(K)$ et $y \in L(x) - \{0\}$, on a $\|y\|_v = 1$ sauf pour un nombre fini de places ce qui donne un sens au produit ci-dessus, qui, par la formule du produit, est indépendant du choix de y.

(ii) Pout tout faisceau inversible L sur une bonne variété V, il est possible de construire une métrique adélique sur L.

(iii) Si $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ et $H' = (L, (\|\cdot\|'_v)_{v \in M_K})$ sont des hauteurs relatives au même faisceau L, alors les métriques $\|\cdot\|_v$ et $\|\cdot\|'_v$ coïncident sauf pour un nombre fini de places. En outre, pour toute place v de K, l'application qui à tout x de $V(K_v)$ associe $\|y\|_v / \|y\|'_v$ où $y \in L(x) - \{0\}$ est continue et donc bornée sur l'espace compact $V(K_v)$. En conséquence, il existe des constantes C et C' telles que

$$\forall x \in V(K), \quad 0 < C < \frac{H(x)}{H'(x)} < C'.$$

Cela reste vrai si la différence entre les classes des fibrés est un élément de torsion dans le groupe de Picard [**Se**, §2.9].

(iv) Il y a une notion évidente de produit tensoriel pour les hauteurs d'Arakelov et on a la formule

$$\forall x \in V(K), \quad (H_1 \otimes H_2)(x) = H_1(x)H_2(x).$$

Exemple 1.0.6. — Si $\mathscr{B} = (s_0, \dots, s_N)$ est une famille de sections d'un faisceau inversible L engendrant un système linéaire sans point base, la famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ définie par $\mathscr{B}$ est une métrique adélique sur L. En outre, si $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ est le morphisme défini par $\mathscr{B}$, on a

$$\forall x \in V(K), \quad H(x) = \prod_{v \in M_K} \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i|_v$$

où $(y_0 : \cdots : y_N)$ désigne un système de coordonnées homogènes pour $\phi(x)$; autrement dit $H = H_{\mathbf{P}^N_K} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_K}$ est la hauteur usuelle sur l'espace projectif. En particulier, si $K = \mathbf{Q}$ et si $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, on retrouve la hauteur classique

$$H((x_0 : \dots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i| \quad \text{si} \quad \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant N, \\ \operatorname{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant N}(x_i) = 1. \end{cases}$$

Notations 1.0.7. — Si H est une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété et F un sous-ensemble de $V(K)$, on note pour tout nombre réel strictement positif B

$$N_{F,H}(B) = \#\{x \in F \mid H(x) \leqslant B\}.$$

Si W est un sous-ensemble localement fermé de V, on notera $N_{W,H}(B)$ pour $N_{W(K),H}(B)$. On considérera également la fonction zêta associée définie pour $s \in \mathbf{C}$ par la série

$$\zeta_{F,H}(s) = \sum_{x \in F} \frac{1}{H(x)^s}$$

lorsque celle-ci converge. Le comportement asymptotique de $N_{F,H}(B)$ est lié par des théorèmes taubériens au domaine de convergence et aux propriétés de méromorphie de la fonction $\zeta_{F,H}(s)$.

2. Premiers exemples et phénomènes d'accumulation

L'exemple le plus simple que l'on puisse étudier est celui de l'espace projectif. Le résultat est dû à Schanuel.

Théorème 2.0.1 **(Schanuel [Sc]).** — *Soit H la hauteur usuelle sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_K$. Il existe alors une constante explicite C_H telle que*

$$N_{\mathbf{P}^n_K,H}(B) = C_H B^{n+1} + \begin{cases} O(B\log B) \text{ si } n=1, \\ O(B^n) \text{ si } n>1. \end{cases}$$

En outre le comportement asymptotique reste le même si on remplace $\mathbf{P}^n$ par un ouvert non vide de cet espace, la contribution de tout fermé strict de $\mathbf{P}^n$ étant négligeable. On peut même obtenir un résultat plus général en utilisant la notion d'ensemble mince.

Définition 2.0.2. — Un sous-ensemble F de $\mathbf{P}^n(K)$ est dit *mince* si et seulement s'il existe un morphisme de variétés algébriques sur K

$$\pi : X \to \mathbf{P}^n_K$$

tel que $F \subset \pi(X(K))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle définie sur K.

Un exemple typique de sous-ensemble mince est l'ensemble des cubes dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, image de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ par l'application envoyant $(x:y)$ sur $(x^3:y^3)$.

Théorème 2.0.3 **(Serre [Se, §13.1.3]).** — *Si F est un sous-ensemble mince de l'ensemble $\mathbf{P}^n(K)$, alors*

$$N_{F,H}(B) = O(B^{n+\frac{1}{2}}(\log B)^\gamma)$$

avec $\gamma < 1$.

Le deuxième cas classique est celui des variétés abéliennes :

Théorème 2.0.4 **(Néron [Né2]).** — *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K, soit H une hauteur exponentielle sur A relative à un faisceau inversible ample sur A, alors il existe une constante explicite C_H telle que*

$$N_{A,H}(B) = C_H(\log B)^{\rho/2} + O((\log B)^{\frac{\rho-1}{2}})$$

où ρ désigne le rang du groupe $A(K)$.

Remarques 2.0.5. — (i) Les remarques faites pour l'espace projectif ne s'appliquent plus pour les variétés abéliennes. D'une part, les points rationnels ne sont pas nécessairement denses pour la topologie de Zariski, auquel cas le comportement asymptotique dépend de l'ouvert choisi. D'autre part, le groupe $A(K)/2$ étant fini, $A(K)$ est la réunion d'un nombre fini de translatés de $2A(K)$. En ce sens, les points rationnels de A forment un sous-ensemble mince.

(ii) Le cas des variétés abéliennes est, à la connaissance de l'orateur, le seul cas où on ait démontré un comportement asymptotique avec une puissance demi-entière du logarithme.

Nous allons terminer cette partie avec un exemple qui illustre différents types de phénomènes d'accumulation dont la compréhension est cruciale pour l'interprétation du comportement asymptotique.

Notations 2.0.6. — Soit V la variété obtenue en éclatant le plan projectif en le point P_0 de coordonnées $(0:0:1)$. Les points rationnels de V peuvent être décrits par

$$V(\mathbf{Q}) = \{\, ((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid z_1 y_0 = z_0 y_1 \,\}.$$

On note pr_1 (resp. pr_2) la projection sur le premier (resp. le deuxième) facteur. On désigne par E le diviseur exceptionnel $\mathrm{pr}_1^{-1}(P_0)$ et par U son complémentaire ; soit Λ l'image inverse par pr_1 d'une droite évitant P_0. Le groupe de Picard de V est donné par

$$\mathrm{Pic}(V) = \mathbf{Z}\Lambda \oplus \mathbf{Z}E.$$

Si r et s sont deux entiers, on considère la hauteur sur $V(\mathbf{Q})$ donnée par la formule

$$H_{r,s}((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) = \sqrt{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}^{\,r+s} \sqrt{z_0^2 + z_1^2}^{\,-s}$$

si y_0, y_1, y_2, z_0, z_1 sont des entiers tels que

$$\mathrm{pgcd}(y_0, y_1, y_2) = \mathrm{pgcd}(z_0, z_1) = 1.$$

Cette hauteur correspond à une métrique adélique sur $r\Lambda + sE$.

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.0.7 **(Batyrev-Manin [BM, §1.6]).** — *On suppose que $r > 0$ et $r + s > 0$. Il existe des constantes $C_{r,s}$ telles que le comportement asymptotique de $N_{U,H_{r,s}}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$ soit donné par les formules :*

$$N_{U,H_{r,s}}(B) \sim \begin{cases} C_{r,s} B^{\frac{3}{r}} \text{ si } \frac{3}{r} > \frac{2}{r+s}, \\ C_{3,-1} B^{\frac{3}{r}} \log(B^{\frac{3}{r}}) \text{ si } \frac{3}{r} = \frac{2}{r+s}, \\ C_{r,s} B^{\frac{2}{r+s}} \text{ si } \frac{3}{r} < \frac{2}{r+s}. \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$N_{E,H_{r,s}}(B) \sim C'_s B^{-\frac{2}{s}} \text{ si } s < 0$$

et ce dernier cardinal est infini si $s > 0$ et $B > 0$.

Remarques 2.0.8. — (i) On obtient donc que $N_{U,H_{r,s}}(B) = o(N_{E,H_{r,s}}(B))$ si $r+2s > 0$, comme cela apparaît dans [**Se**, §2.12]. Le nombre de points de l'ouvert est négligeable devant celui du fermé E. Du point de vue de l'interprétation, le nombre de points sur la variété V tout entière est, sous la condition précédente, équivalent à celui sur E et donc s'interprète en termes de la restriction de H à E. Tout phénomène global est occulté. Une des idées cruciales des conjectures de Manin est de suggérer que la géométrie globale de la variété réapparaisse dans le comportement asymptotique si on considère le complémentaire U de E.

(ii) La symétrie apparente entre les cas $\frac{3}{r} > \frac{2}{r+s}$ et $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$ disparaît si on étudie de manière plus fine la contribution des fermés de Zariski dans le comportement asymptotique : si $\frac{3}{r} \geqslant \frac{2}{r+s}$, le comportement asymptotique n'est pas modifié si on remplace U par un ouvert non vide contenu dans U, la contribution des fermés étant négligeable. En particulier, si $(r,s) = (1,0)$ on est ramené au cas du plan projectif pour lequel tout sous-ensemble mince apporte une contribution négligeable. Par contre, si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$, le comportement asymptotique du nombre de points sur chaque fibre de pr_2 est donné par une formule de la forme

$$\forall x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}), \quad N_{\mathrm{pr}_2^{-1}(x),H_{r,s}}(B) \sim C_{r,s}(x)B^{\frac{2}{r+s}}$$

et la constante $C_{r,s}$ globale est obtenue dans ce cas comme somme des constantes $C_{r,s}(x)$. Chaque fibre de pr_2 est donc faiblement accumulatrice en un sens que nous préciserons plus loin.

(iii) Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté sur la figure 1 les ensembles

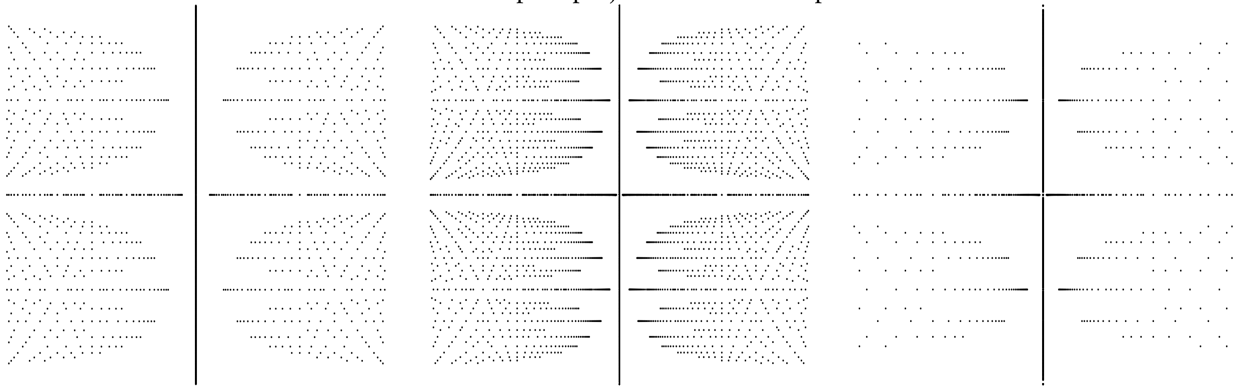
$$\{x = ((y_0 : y_1 : 1), (1 : z_1)) \in V(\mathbf{Q}) \mid |y_0| < 1, |z_1| < 1, H_{r,s}(x) \leqslant 4000\},$$

pour $(r,s) = (3,0)$, $(3,-1)$ et $(4,-2)$, avec y_0 en abscisse et z_1 en ordonnée. Dans cette figure, le diviseur exceptionnel apparaît donc comme la droite verticale centrale et les fibres de pr_2 sont les droites horizontales.

3. Les conjectures de Manin

Dans une série d'articles [**FMT**], [**BM**], [**Ma**] publiés entre 1989 et 1993, Manin a présenté, avec Batyrev, Franke et Tschinkel, une série de conjectures qui donnent une interprétation du terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Nous allons donner un échantillon de ces conjectures qui ont servi de fil directeur dans l'étude récente de ces phénomènes asymptotiques.

FIGURE 1. Le plan projectif éclaté en un point



$r = 3,\ s = 0$ $r = 3,\ s = -1$ $r = 4,\ s = -2$

Dans [**BM**, §3], Batyrev et Manin précisent que les conjectures énoncées sont à considérer plutôt comme des questions. Une remarque similaire vaut pour les conjectures de cet exposé.

3.1. Premier niveau : la puissance de B**.** — Le premier objectif est d'interpréter la puissance de B intervenant dans le comportement asymptotique. Nous utiliserons pour cela la notation suivante :

Notation 3.1.1. — Soit H une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété V et F un sous-ensemble constructible de V. On pose

$$a_F(H) = \inf\{\,\sigma \in \mathbf{R} \mid \zeta_{F,H}(s) \text{ converge pour } \mathrm{Re}(s) = \sigma\,\}.$$

Remarques 3.1.2. — (i) Si $a_F(H) > 0$ sa valeur peut être également décrite comme

$$a_F(H) = \varlimsup_{B \to +\infty} \log(N_{F,H}(B))/\log B$$

et donne donc la puissance de B dans le comportement asymptotique.

(ii) La valeur de $a_F(H)$ ne dépend en fait que de la classe $[L]$ du faisceau inversible considéré dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ (cf. [**BM**, §1.4]). Nous noterons donc aussi $a_F([L])$ ou $a_F(L)$ pour $a_F(H)$.

(iii) On a en outre la relation $a_F(d[L]) = \frac{1}{d} a_F([L])$.

3.1.1. *Conjectures concernant une variété projective arbitraire.* — La première conjecture lie l'existence d'une courbe rationnelle au fait d'avoir « beaucoup » de points rationnels :

Conjecture 3.1.3 **(Manin [Ma]).** — *Si $a_U(L) > 0$ pour un ouvert U de V et un faisceau ample L, alors U contient une courbe isomorphe à un ouvert de $\mathbf{P}^1_K$.*

Passons à l'interprétation géométrique de $a_U(L)$:

Définition 3.1.4. — Si V est une bonne variété, on note $C^1_{\text{eff}}(V)$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans le groupe $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et ω_V le faisceau canonique de V, puissance extérieure maximale du fibré cotangent Ω^1_V. On pose alors

$$a^g_V(L) = \inf\{\gamma \in \mathbf{R} \mid \gamma[L] \in \omega_V^{-1} + C^1_{\text{eff}}(V)\}.$$

Remarques 3.1.5. — (i) On a également la relation $a^g_F(d[L]) = \frac{1}{d} a^g_F([L])$.

(ii) Si ω_V n'appartient pas à $C^1_{\text{eff}}(V)$, $a^g_V(\omega_V^{-1}) = 1$.

Conjecture 3.1.6 **(Batyrev, Manin).** — *Si L est ample, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert de Zariski dense U de V tel que*

$$a_U(L) \leqslant a^g_V(L) + \varepsilon.$$

Remarques 3.1.7. — (i) Notons que cette conjecture est vraie pour une courbe C : en effet les valeurs de $a_U(L)$ et de $a^g_V(L)$, pour U un ouvert dense de V, sont données par le tableau :

genre g	$a_U(L)$
0	$\frac{2}{\deg(L)}$ ou $-\infty$
1	0 ou $-\infty$
> 1	$-\infty$

où le fait que $a_U(L) = -\infty$ si $g > 1$ résulte de la conjecture de Mordell montrée par Faltings [**Fa**].

(ii) Si V est de type général, c'est-à-dire si ω_V est pseudo-ample, alors la conjecture est équivalente à dire que $V(K)$ n'est pas dense pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire à une des conjectures de Lang [**La**, Chap. I, §3].

Il est essentiel dans cette conjecture de se restreindre à des ouverts, comme cela apparaît déjà dans le cas du plan projectif éclaté en un point. Cela amène aux définitions suivantes :

Définition 3.1.8. — Soit $F \subsetneq V$ un fermé irreductible de V. On dit que F est *strictement accumulateur* pour L si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

On dit que F est *faiblement accumulateur* pour L si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{B \to +\infty} \frac{N_{W,H}(B)}{N_{U,H}(B)} > 0$$

pour toute hauteur d'Arakelov H relative à L.

Exemple 3.1.9. — Dans le cas du plan projectif éclaté en un point rationnel, le diviseur exceptionnel est strictement accumulateur si $r + 2s > 0$ et toute fibre de pr_2 est faiblement accumulatrice si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$. L'ensemble des points rationnels est donc, dans ce dernier cas, réunion d'ensembles faiblement accumulateurs.

Exemple 3.1.10. — Soit V une surface K3 ou une surface d'Enriques telle que le groupe d'automorphismes de V sur K soit infini. On suppose en outre que V contient une courbe K-rationnelle, c'est-à-dire birationnelle à $\mathbf{P}^1_K$. Des exemples de telles surfaces $K3$ données sous la forme d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définies par une section de $\mathcal{O}(2,2,2)$ sont étudiées par Billard dans [**Bil**]. Une telle surface contient une infinité de courbes rationnelles. Soit L un faisceau inversible ample sur V. Si on indexe les courbes rationnelles de V en une famille $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de sorte que les degrés d'intersection avec L soient croissants, on peut poser $U_i = V - \bigcup_{j \leqslant i} C_j$. On obtient une suite décroissante d'ouverts tels que, conjecturalement, on ait que $a_{U_i}(L) > 0$ tende vers 0 quand i tend vers $+\infty$. La stratification arithmétique définie par $a_U(L)$ serait donc, dans ce cas, infinie (cf. [**BM**, §3.5]).

Peu de choses ont été effectivement montrées pour ces surfaces. Billard [**Bil**] avait obtenu des majorations pour certaines des surfaces mentionnées ci-dessus; plus récemment McKinnon a montré dans [**Mc**] que les courbes K-rationnelles de plus bas degré relativement à L sont effectivement L-accumulatrices pour certaines surfaces K3 hyperelliptiques, identifiant ainsi le premier cran de la filtration.

Une question qui reste, semble-t-il, complètement ouverte est celle des points sur le complémentaire de la réunion des droites K-rationnelles que celles-ci soient en nombre fini ou pas. Est-il possible qu'il y ait un nombre infini de tels points? Quel est le comportement asymptotique de ces points relativement aux hauteurs?

Pour conclure ce paragraphe, il convient de pouvoir décrire géométriquement ces variétés strictement accumulatrices. Une méthode consiste à restreindre L à une sous-variété, puis à donner un analogue de la conjecture pour celle-ci. Il faut donc étendre la définition de $a^g_V(L)$ à des sous-variétés éventuellement singulières F de V : soit F un fermé irréductible de V, soient $\widetilde{F}$ une normalisation de F, $\varphi : \widetilde{F} \to V$ le morphisme induit et $F_0 \subset \widetilde{F}$ le lieu des points lisses de $\widetilde{F}$. On pose alors

$$a^g_F(L) = \inf\{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid h^0(F_0, \varphi^*(L)^p \otimes \omega^q_{F_0}) > 0\}$$

Les candidats géométriques pour les variétés strictement accumulatrices sont alors les fermés pour lesquels

$$a^g_F(L) > a^g_V(L).$$

3.1.2. *Le cas des variétés presque de Fano.* — Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, si V est de type général, on peut avoir pour toute extension finie K' de K, une inégalité $a_{V_{K'}}(L) < a^g_{V_{K'}}(L)$. Ce phénomène peut encore se produire si V n'est pas de type général, il suffit pour cela que les points rationnels ne soient pas potentiellement Zariski denses, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension finie K' telle que $V(K')$ soit Zariski dense. En particulier, on peut considérer le produit $\mathbf{P}^1_K \times C$ où C est une courbe de genre plus grand que deux (cf. également [**CTSSD**] pour un autre exemple). Il convient donc de restreindre la classe des variétés considérées.

Dans ce cadre, il est assez naturel de considérer une classe un peu plus large que celle des variétés de Fano :

Définition 3.1.11. — Nous dirons qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K est presque de Fano si elle vérifie les conditions suivantes :

PF1 le groupe de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ est nul pour $i = 1$ et $i = 2$,

PF2 la torsion dans le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est réduite à $\{0\}$,

PF3 l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Le théorème d'annulation de Kodaira assure qu'une variété de Fano est presque de Fano. Par ailleurs, toutes les variétés toriques sont presque de Fano.

Conjecture 3.1.12. — *Si V est presque de Fano, et si L est un faisceau à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs, alors il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O de V_{K_0} tel que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert*

dense U contenu dans $O_{K'}$, on ait

$$a_U(L) = a^g_V(L).$$

Remarque 3.1.13. — Cette conjecture est intermédiaire entre la conjecture B, qui se limite aux variétés de Fano, et la conjecture C de [**BM**].

3.2. Deuxième niveau : la puissance de $\log B$. — Dans ce paragraphe nous allons faire une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 3.2.1. — On suppose que V est une variété presque de Fano telle qu'il existe une famille finie $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(\overline{V})$ telle que

$$C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_+ n_i.$$

Très peu de choses semblent connues sur la structure du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ en général. Si V est une surface de Del Pezzo, l'hypothèse résulte de la théorie de Mori. Cela reste vrai si V est une variété de Fano de dimension trois [**Ba**]. Cette hypothèse est également vérifiée dans divers cas particuliers (variétés de drapeaux, variétés toriques,...).

Définition 3.2.2. — Si V vérifie les hypothèses précédentes et si $L \in \mathrm{NS}(V)$ est tel que $a^g_V(L) > 0$, alors $a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}] \in \partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$, et on peut définir $b^g_V(L)$ comme la codimension de la face minimale de $\partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ contenant $a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$.

Conjecture 3.2.3. — *Si V vérifie l'hypothèse 3.2.1 et H est une hauteur relative à un fibré en droites L tel que $a^g_V([L]) > 0$, il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O tels que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert dense U contenu dans $O_{K'}$, il existe une constante $C_H > 0$ vérifiant*

$$\text{(F)} \qquad \begin{array}{ccc} N_{U,H}(B) & \sim & C_H B^{a^g_{V'}(L)} (\log B)^{b^g_{V'}(L)-1} \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

où $V' = V_{K'}$.

Remarques 3.2.4. — (i) Cette conjecture est une version affaiblie de la conjecture C′ de [**BM**].

(ii) Notons que $a^g_V(L)$ est stable par extension de corps, mais que cela n'est plus le cas pour $b^g_V(L)$. D'autre part, l'exemple du plan projectif éclaté en un point montre que la constante C peut dépendre de l'ouvert U choisi.

Là encore, il est possible de suggérer une piste pour la détermination des variétés faiblement accumulatrices pour un faisceau L dont la classe appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$. Soit H une hauteur relative à L. Considérons tout d'abord la famille $(n_1, \dots, n_r)$ des générateurs des arêtes de $C^1_{\text{eff}}(V)$ et $(L_1, \dots, L_r)$ une famille de représentants de cette famille. Soit B la réunion des points bases des systèmes $\Gamma(V, L_i)$; on note U son complémentaire. Cet ouvert U apparaît naturellement lorsqu'on s'intéresse à la finitude de $N_{U,H}(B)$: pour toute hauteur H comme ci-dessus, on a

$$\forall B \in \mathbf{R}^*_+, \quad N_{U,H}(B) < +\infty.$$

Considérons σ la face fermée minimale de $C^1_{\text{eff}}(V)$ contenant $a^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$. Pour tout L' de σ, quitte à remplacer L' par $L'^{\otimes n}$, on dispose d'un morphisme $\phi_{L'} : U \to \mathbf{P}(\Gamma(V, L')^\vee)$. Soit $L_0 \in \sigma$ de sorte que la fibre générique soit de dimension minimale. Les candidats naturels pour les variétés faiblement accumulatrices relativement à L sont alors les fibres de ϕ_{L_0} si le morphisme associé n'est pas constant.

En particulier, suivant cette première approche, pour $L = \omega_V^{-1}$ le complémentaire des variétés faiblement accumulatrices devrait être un ouvert. Nous verrons que, vraisemblablement, ce n'est pas toujours le cas. Une analyse plus fine et plus approfondie des fibrations intervenant dans le comportement asymptotique se trouve dans [**BT4**].

4. Une liste de résultats

Il est maintenant temps de donner une liste de cas pour lesquels la formule (F) a été démontrée.

• La formule (F) est compatible avec le produit de variétés au sens suivant : si H_1 et H_2 sont deux hauteurs d'Arakelov relatives à des fibrés L_1 et L_2 sur de bonnes variétés V_1 et V_2 vérifiant les hypothèses 3.2.1 et s'il existe des ouverts U_i de V_i tels que

$$N_{U_i,H_i}(B) = C_i B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-1} + O(B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-2}),$$

alors une formule analogue vaut pour le produit $U_1 \times U_2$ et la hauteur H donnée par $H(x,y) = H_1(x)H_2(y)$ (Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §1]).

• (F) est compatible avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$. En particulier, si V est une intersection complète lisse définie par m équations de même degré d en $N+1$ variables de sorte que

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$$

et si $V(\mathbf{Q}_v) \neq \varnothing$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$, alors (F) est vérifiée pour tout ouvert U de V (Birch [**Bir**], cf. également [**Va**] pour la méthode du cercle ; Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §1]).

• (F) est vérifiée pour les variétés de drapeaux généralisés, c'est-à-dire pour les quotients G/P où G est un groupe algébrique linéaire et P un K-sous-groupe parabolique de G (Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §2]). Dans ce cas, tout ouvert dense U convient également.

• (F) a été démontrée pour les variétés toriques projectives et lisses, c'est-à-dire pour les compactifications équivariantes lisses de tores, en prenant comme ouvert U l'orbite ouverte dans V (Batyrev et Tschinkel [**BT1**], [**BT5**] et [**BT3**]).

• (F) est vraie pour certaines fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisés (Strauch et Tschinkel [**ST1**] et [**ST2**]). L'ouvert U est obtenu dans ce cas en considérant l'orbite ouverte dans chaque fibre.

• (F) est valide pour les compactifications équivariantes lisses d'espaces affines, l'ouvert U étant l'orbite ouverte dans V (Chambert-Loir et Tschinkel [**CLT1**], [**CLT2**] et [**CLT5**]).

• (F) est vérifiée par la surface obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, U étant donné comme complémentaire des diviseurs exceptionnels (Salberger, la Bretèche [**Bre2**]).

5. quelques outils de démonstration

Il est difficile dans le cadre de cet exposé de décrire en détails la panoplie des méthodes très variées qui ont été utilisées pour montrer les résultats précédents. Nous nous contenterons de donner quelques idées de preuves illustrant deux types d'approches : la première est basée sur des techniques d'analyse harmonique et s'avère fructueuse pour des compactifications d'espaces homogènes ou des variétés apparentées ; la seconde, que nous détaillerons moins, utilise les torseurs universels introduits par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS**].

5.1. Les séries d'Eisenstein. — Soit V une variété de drapeaux généralisés de la forme $V = G/P$, avec G semi-simple simplement connexe et P sous-groupe parabolique de G. Le groupe de Picard de V est alors isomorphe au groupe $X^*(P)_K$ des caractères de P sur K c'est-à-dire au groupe des K-morphismes de P dans $\mathbf{G}_{m,K}$. Soit P_0 un K-sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P et A_0 un tore déployé maximal de G contenu dans P_0. On a une injection de $X^*(P)_K$ dans $X^*(A_0)_K$. Par l'isomorphisme ci-dessus ω_V^{-1} correspond à la somme des racines de A_0 comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans l'algèbre de Lie du radical de P.

Pour certaines hauteurs H, la série zêta des hauteurs

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

est une série d'Eisenstein relative à P à laquelle on peut appliquer les travaux de Langlands ([**Lan**], [**Go**] et [**MW**]).

De manière plus précise, donnons-nous une base du groupe de Picard de V et pour chaque élément de cette base donnons-nous une hauteur d'Arakelov relative à cet élement qui soit du type ci-dessus. Cela nous fournit un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \times V(k) & \to & \mathbf{C} \\ (L, x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L, x). \end{array}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et redonne, pour les éléments de la base, les hauteurs choisies. On considère alors pour tout s de $\operatorname{Pic} V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ la série $\zeta_{V,\boldsymbol{H}}(s) = \sum_{x \in V(K)} \boldsymbol{H}(-s, x)$. La conjecture 3.1.12 est donc équivalente à l'assertion que cette série converge sur l'intérieur du domaine $\omega_V^{-1} + C^1_{\mathrm{eff}}(V) + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Les résultats de Langlands impliquent cette convergence et montrent en outre que les séries d'Eisenstein s'étendent en des fonctions méromorphes (cf. [**Lan**, Lemme 4.1] ou [**MW**, §II.1.5, §IV.1.8]). Il reste donc essentiellement à déterminer la nature des pôles au voisinage de $\omega_V^{-1} + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$. On utilise pour cela les équations fonctionnelles satisfaites par les séries d'Eisenstein relatives à P_0 qui font intervenir des fonctions

$$c(w, \cdot) : X^*(A_0) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

où w appartient au groupe de Weyl relatif W_K (cf., par exemple, [**MW**, §IV.1.10]). Ces fonctions $c(w, \cdot)$, qui sont définies à l'aide d'intégrales, ont des prolongements méromorphes [**Lan**, §4] et vérifient

$$c(wv, \lambda) = c(w, v\lambda) c(v, \lambda).$$

La nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0 est déterminée par les pôles de $c(w,\cdot)$. En décomposant w de manière minimale en les générateurs donnés par la base du système de racines correspondant à P_0, les pôles de $c(w,\cdot)$ se déduisent des pôles de $c(s_\alpha,\cdot)$, ce qui permet de se ramener au cas d'un groupe de rang relatif 1, pour lequel la méthode utilisée pour SL_2 s'applique (cf. [**Lan**, §7]) : $c(s_\alpha,\cdot)$ a au plus un pôle le long d'un hyperplan au voisinage du point qui nous intéresse. Cela donne la nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0. Pour terminer la démonstration, on exprime les séries relatives à P comme résidus de celles relatives à P_0.

Le cas où $G = \mathrm{GL}_n$ a également été traité de manière directe par Thunder [**Th**].

5.2. Formule de Poisson et compactifications équivariantes. — Passons au cas des variétés toriques projectives et lisses. Là encore il nous faut d'abord décrire le groupe de Picard. Soit V une variété torique, compactification équivariante lisse d'un tore algébrique T. Soit $D(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre sur les diviseurs irréductibles équivariants de $\overline{V}$. On notera $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ces diviseurs. On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(\overline{T}) \to D(\overline{V}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0,$$

le cône effectif dans $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est engendré par les images des D_i et $\omega_{\overline{V}}^{-1}$ coïncide avec $\pi(\sum_{i=1}^r D_i)$. La description de $\mathrm{Pic}(V)$ et $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ s'obtient en considérant les invariants sous l'action du groupe de Galois.

Le groupe de Galois agit sur la famille des diviseurs D_i et on note $O_1,\dots,O_m$ les orbites de cette action. Pour chaque orbite, on se donne une métrique adélique sur le faisceau correspondant à $\sum_{D\in O_i} D$ et on obtient un accouplement

$$\begin{array}{rcl} D(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}\times V(k) & \to & \mathbf{C} \\ (L,x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L,x), \end{array}$$

où $D(V)$ désigne les invariants de $D(\overline{V})$ sous l'action de Galois.

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_m) \in D(V)$. Dans un premier temps Batyrev et Tschinkel montrent que la série $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{x\in T(K)} \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{s},x)$ converge lorsque $\mathrm{Re}(s_i) > 1$. Il reste donc à déterminer la nature des pôles de la série.

On utilise pour cela la formule de Poisson suivante : on fixe temporairement ub m-uplet $\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_m) \in D(V)$ avec $\mathrm{Re}(s_i) > 1$ et on pose $H = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s},\cdot)$. Soit $T(\boldsymbol{A}_K)$ le groupe des adèles de T, produit restreint des $T(K_v)$. En écrivant H sous la forme

$$\forall x \in T(K), \quad H(x) = \prod_{v\in M_K} H_v(x),$$

où $H_v : T(K_v) \to \mathbf{R}$, on peut étendre H à $T(\boldsymbol{A}_K)$. Soit dx une mesure de Haar sur $T(\boldsymbol{A}_K)$. D'un point de vue formel, on souhaite écrire

$$\zeta_{T,H}(s) = \sum_{x \in T(K)} H(x)^{-s} = \int_{\chi \in (T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee} \widehat{H}(\chi) \mathrm{d}\chi$$

où $(T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee$ désigne le groupe des caractères topologiques de $T(\boldsymbol{A}_K)$ triviaux sur $T(K)$, dχ la mesure duale de la mesure dx et $\widehat{H}$ la transformée de Fourier de H donnée par la formule

$$\widehat{H}(\chi) = \int_{T(\boldsymbol{A}_K)} H_v(x)\chi(x)\mathrm{d}x.$$

Cette formule de Poisson a un sens à condition que les fonctions H et $\widehat{H}$ soient L^1. Pour H cela résulte de ce qui précède. D'un autre côté $\widehat{H}$ s'exprime comme produit de termes locaux qui, en dehors de quelques mauvaises places, peuvent s'écrire explicitement. Il suffit alors de majorer ces termes locaux en les mauvaises places et en les places archimédiennes.

La dernière partie de la preuve consiste à décrire le terme principal de $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}$ en utilisant notamment l'expression explicite des transformées de Fourier locales. On utilise également à ce niveau des majorations uniformes de fonctions L de Hecke. Pour terminer, un calcul de résidu itéré permet de passer au quotient dans la suite exacte

$$0 \to X^*(T)_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to D(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to 0$$

au niveau duquel cette partie principale s'obtient en multipliant un produit eulérien convergent par la fonction caractéristique du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ définie par

$$\forall s \in \mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}, \quad \chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} \exp(-\langle s, t\rangle)\mathrm{d}t$$

où $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$:

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\, x \in (\mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})^\vee \mid \forall y \in C^1_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0 \,\}.$$

Ceci donne la nature des pôles de la fonction zêta des hauteurs et un argument taubérien permet de conclure.

Les méthodes employées par Chambert-Loir et Tschinkel pour les compactifications d'espaces affines reposent également sur des formules de Poisson, mais de nature additive, et des calculs explicites de transformée de Fourier locale.

Le résultat de Strauch et Tschinkel sur les fibrations en variétés toriques audessus de variétés de drapeaux repose sur une combinaison des méthodes employées dans chacun des deux cas. Les arguments de descente utilisés dans ce cas

ont été généralisés par Chambert-Loir et Tschinkel à des fibrations en variétés toriques plus générales [**CLT3**], [**CLT4**].

Les résultats de Batyrev et Tschinkel ont été redémontrés dans le cas des variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$ par Salberger [**Sal**] avec une méthode totalement différente basée sur le fait que le torseur universel sur V considéré par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS**] est un ouvert d'un espace affine (cf. également [**Del**], [**Co**] et [**MP**]) et par la Bretèche, avec un contrôle affiné du terme d'erreur [**Bre1**] (cf. également [**CLT4**]).

5.3. Le cas de la surface de Del Pezzo de degré 5. — Dans ce cas, Salberger avait obtenu une majoration de $N_{U,H}(B)$ du type souhaité. La démonstration de la Bretèche, comme celle de Salberger, utilise la description du torseur universel comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 K^5$ au-dessus de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5)$ (cf. également [**Sk**]). Ce cône peut être décrit par les équations de Plücker. En utilisant ce fait, la Bretèche ramène la question initiale à un dénombrement de décuplets $(z_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant 5}$ vérifiant les équations de Plücker ainsi que des conditions de primalité

$$\mathrm{pgcd}(z_{i,j}, z_{i,k}) = 1 \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

Après une réduction supplémentaire utilisant le groupe d'automorphismes de la variété, la Bretèche montre l'estimation souhaitée grâce à des techniques fines de théorie analytique des nombres.

6. Le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel

Notation 6.0.1. — Soient n un entier strictement positif et $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbf{Q}[X_0, \ldots, X_n]$ quatre formes linéaires linéairement indépendantes. On considère l'hypersurface V dans le produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x) y_i^3 = 0.$$

Théorème 6.0.2 **(Batyrev et Tschinkel [BT2]).** — *La variété de Fano V ci-dessus est un contre-exemple à la conjecture 3.2.3.*

L'idée de la démonstration est la suivante : par le théorème de Lefschetz, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V)$$

et donc, si H est une hauteur relative au fibré anticanonique sur V, on devrait obtenir l'existence d'une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O tels que pour tout $K' \supset K_0$ on ait

$$N_{O_{K'},H}(B) \sim C_{K'}B(\log B).$$

Mais le faisceau anticanonique de V est donné par $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(n,1)$. Autrement dit, on peut prendre comme hauteur

$$H((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)) = H_{\mathbf{P}^n}((x_0 : \ldots : x_n))^n H_{\mathbf{P}^3}((y_0 : y_1 : y_2 : y_3)).$$

D'un autre côté les fibres V_x de la projection pr_1 sur la première composante sont des surfaces cubiques lisses si

$$\prod_{i=0}^{3} l_i(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$$

et la restriction de H à une telle fibre est, à une constante près, la restriction de la hauteur $H_{\mathbf{P}^3}$. Or, pour tout x vérifiant la condition précédente

$$\omega_{V_x}^{-1} = \mathscr{O}_{V_x}(1).$$

Le comportement espéré pour un ouvert d'une telle fibre est donc

$$C_x B(\log B)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V_x)-1}.$$

Mais tout ouvert dense de V rencontre une infinité de fibres pour lesquelles $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V_x) > 2$.

On peut en fait être plus précis : si K contient les racines cubiques de l'unité et si $l_i(x_0 : \ldots : x_n)$ est un cube pour $i = 0, 1, 2, 3$, alors la fibre est une surface cubique déployée contenant 27 droites rationnelles et peut être obtenue comme éclatement de $\mathbf{P}^2$ en 6 points rationnels. Soit X l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois de ces points, on a donc une factorisation

$$V_x \xrightarrow{\pi} X \to \mathbf{P}^2$$

et en étendant une base de $\Gamma(V_x, \omega_{V_x}^{-1})$ en une base de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$, on obtient une hauteur H_X sur X relative à ω_X^{-1} telle que

$$\forall y \in V_x(k), \quad H_{V_x}(y) \leqslant H_X(\pi(y))$$

et donc, comme la conjecture est montrée pour X, pour tout ouvert dense U de V_x, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant N_{\pi(U),H_X}(B) \geqslant CB(\log B)^3.$$

L'ensemble des points $(x_0 : \dots : x_n)$ tels que $l_i(x_0, \dots, x_n)$ soit un cube est Zariski dense dans $\mathbf{P}^n$. Donc pour tout ouvert U de V, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant CB(\log B)^3$$

en contradiction avec la formule attendue.

Plusieurs directions s'offrent pour modifier les conjectures de Manin afin de prendre en compte ce contre-exemple. Tout d'abord il est raisonnable d'espérer que chacune des fibres de pr_1 dont le rang du groupe de Picard est maximal soit faiblement accumulatrice. Une première solution consiste donc à rajouter l'hypothèse arithmétique peu pratique que pour toute hauteur relative au faisceau anticanonique, le complémentaire des sous-variétés faiblement accumulatrices forme un ouvert de Zariski de la variété. Les exemples du §4 vérifient une telle propriété.

Une deuxième direction est de noter que pr_1 est une des fibrations associées aux arêtes de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$. Une idée est donc de raisonner par récurrence sur la dimension en utilisant des fibrations successives. Une telle démarche est notamment explorée dans [**BT4**].

Une troisième direction serait de noter que les points rationnels des fibres ayant un groupe de Picard non réduit à $\mathbf{Z}$ constituent un ensemble mince en un sens analogue à celui du §2. Le terme dominant du comportement asymptotique refléterait donc la géométrie du revêtement X. Cet ensemble ne contenant pas tous les points rationnels, une question naturelle, qui s'inscrit dans la démarche des conjectures de Manin, serait de se demander quel est le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire de cet ensemble. Si celui-ci se révélait être du type attendu, il faudrait déterminer de manière systématique comment décrire ces ensembles minces accumulateurs.

Seule l'étude de nouveaux exemples permettra de dire laquelle de ces directions est la plus fructueuse.

7. Autres développements

D'autres exemples sont actuellement étudiés : notamment Shalika, Takloo-Bighash et Tschinkel se penchent sur des compactifications lisses de formes intérieures de groupes semi-simples de type adjoint.

D'importants progrès ont été réalisés pour les surfaces cubiques pour lesquelles différentes majorations ont été obtenues (cf. Heath-Brown [**HB**] et Broberg [**Bro**]) ainsi que des minorations (Swinnerton-Dyer [**SSD**]).

Plusieurs auteurs, dont l'orateur [**Pe**], ont proposé une formule empirique pour décrire la constante C intervenant dans le comportement asymptotique. Cette formule, dans le cas d'une hauteur relative au faisceau anticanonique, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace des adèles faisant intervenir les métriques locales. Cette formule est vérifiée pour au moins un choix des métriques sur le faisceau anticanonique dans les cas décrits au paragraphe 4. Nous renvoyons à [**BT4**] pour une description de cette interprétation dans le cas général.

Il est également possible de considérer un analogue géométrique de ces conjectures pour les variétés sur un corps global de caractéristique finie (cf. [**BM**, §3.13]). Quelques résultats ont été obtenus dans cette direction notamment pour les variétés de drapeaux et certaines variétés toriques [**Bo**]. Cet analogue pourrait permettre de mieux cerner les conditions géométriques exactes pour lesquelles la formule (F) peut être valide.

En conclusion, ce sujet est encore en pleine éclosion, riche en questions ouvertes à la fois arithmétiques et géométriques, où les conjectures de Manin se sont révélées un fil conducteur très efficace.

Remerciements. Je remercie chaleureusement tous ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai très bref et, en particulier, L. Bonavero, R. de la Bretèche, A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, G. Rémond et Y. Tschinkel.

Références

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Ba] V. V. Batyrev, *The cone of effective divisors of threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V. V. Batyrev et Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT4] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[BT5] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), n° 1, 15–53.

[Bil] H. Billard, *Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$*, Compositio Math. **108** (1997), n° 3, 247–275.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 903–1027.

[Bo] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bre1] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. of Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bre2] ———, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[Bro] N. Broberg, *Rational points on cubic surfaces*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 13–35.

[CLT1] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ———, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. of Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ———, *Torseurs arithmétiques et espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 37–70.

[CLT4] ———, *Fonctions zêta des hauteurs des espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 71–115.

[CLT5] ———, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), n° 2, 421–452.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Double fibres and double covers : paucity of rational points*, Acta Arith. **79** (1997), n° 2, 113–135.

[Co] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[Fa] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), n° 3, 349–366.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Go] R. Godement, *Introduction à la théorie de Langlands*, Séminaire Bourbaki 19-ème année, 1966/67, n° 321.

[HB] D. R. Heath-Brown, *Counting rational points on cubic surfaces*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 13–30.

[La] S. Lang, *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Ma] Y. I. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math **85** (1993), 37–55.

[Mc] D. McKinnon, *Counting rational points on $K3$ surfaces*, J. of number theory **84** (2000), n° 1, 49–62.

[MP] A. S. Merkurjev et I. A. Panin, *K-theory of algebraic tori and toric varieties*, K-Theory **12** (1997), n° 2, 101–143.

[MW] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, une paraphrase de l'écriture*, Progress in Math., vol. 113, Birkhaüser, Basel, 1994.

[Né1] A. Néron, *L'arithmétique sur les variétés algébriques [d'après A. Weil]*, Séminaire Bourbaki 4-ème année, 1951/52, n° 66.

[Né2] ———, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. **82** (1965), 249–331.

[Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n° 3, 429–440.

[SSD] J. B. Slater et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces, I*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch et Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ———, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[Th] J. L. Thunder, *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.

[Va] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[We] A. Weil, *Arithmetic on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444.

Juin 2001

E. Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

- *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE, TOPOLOGIE ADÉLIQUE ET MESURE DE TAMAGAWA*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Si V est une variété algébrique projective sur un corps de nombres F dont les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski, tout plongement ϕ de V dans $\mathbf{P}^N_F$ induit une hauteur exponentielle $H : V(F) \to \mathbf{R}$. Il est alors naturel d'étudier pour tout ouvert U de V le comportement asymptotique de

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B\}$$

lorsque le nombre réel B tend vers $+\infty$. Dans les cas connus de l'auteur, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}^*_+$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, et $b \geqslant 1$. Vers 1989, Manin a proposé une interprétation géométrique de a et b qui dépend uniquement de la classe de $\phi^*(\mathscr{O}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi de V, de la classe du fibré canonique ω_V dans ce groupe et du cône engendré par les classes de diviseurs effectifs. Par la suite, l'auteur puis Batyrev et Tschinkel, dans un cadre plus général, ont suggéré une formule empirique pour la constante C, qui, dans le cas où $\phi^*(\mathscr{O}(1)) = \omega_V^{-1}$, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique associé à V. L'objectif de ce texte est de faire un survol de ces conjectures et des travaux qu'elles ont suscités.

*A paraître au J. de Théorie des Nombres de Bordeaux

Abstract. — Let V be a projective algebraic variety over a number field F such that the rational points are Zariski dense. Any embedding $\phi : V \to \mathbf{P}^N_F$ induces an exponential height $H : V(F) \to \mathbf{R}$. It is then natural to study for any open subset U of V the asymptotic behavior of

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B\}$$

when the real number B goes to $+\infty$. In all known cases, this asymptotic behavior takes the form

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

with $C \in \mathbf{R}^*_+$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, and $b \geqslant 1$. Around 1989, Manin gave a conjectural interpretation of a and b which depends only on the class of $\phi^*(\mathscr{O}(1))$ in the Néron-Severi group of V, on the class of the canonical line bundle ω_V, and on the cone of effective divisors in this group. Afterwards the author, and later Batyrev and Tschinkel in a more general setting, gave an empiric formula for the value of the constant C, which, in the case $\phi^*(\mathscr{O}(1)) = \omega_V^{-1}$, is given in terms of a Tamagawa measure on the adelic space of V. The aim of this text is to make a survey of these conjectures and of the work they generated.

Soit $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ une variété projective dont les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. On peut alors munir $V(\mathbf{Q})$ de la hauteur exponentielle $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$H((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$$

si les x_i sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Il est alors naturel de vouloir étudier, de manière asymptotique, l'ensemble fini des points de $V(\mathbf{Q})$ dont la hauteur est bornée, lorsque la borne tend vers $+\infty$.

De manière plus générale, si F est un corps de nombres, il existe une hauteur naturelle $H_N : \mathbf{P}^N(F) \to \mathbf{R}$ et, pour tout morphisme de variétés $\phi : V \to \mathbf{P}^N_F$, on obtient par composition une hauteur $H : V(F) \to \mathbf{R}$. On souhaite alors étudier de manière asymptotique, pour tout ouvert U de V, le cardinal, éventuellement infini,

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B\}$$

lorsque le nombre réel B tend vers $+\infty$. Supposons que $U(F)$ soit non vide et que $N_{U,H}(B)$ soit fini pour tout B de $\mathbf{R}^*_+$. Sous ces hypothèses, dans tous les cas connus de l'auteur dans lesquels le terme dominant du comportement asymptotique a pu être déterminé, il est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et $b \geqslant 1$. L'objectif est donc d'interpréter a, b et C de manière aussi géométrique que possible. Dans une série d'articles publiés entre 1989 et 1993, Manin a proposé, avec Batyrev, Franke et Tschinkel, une interprétation conjecturale pour les valeurs de a et b où n'interviennent que la classe du faisceau inversible $\phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_F^N}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$, la classe du faisceau canonique et le cône des classes de diviseurs effectifs. Un des points cruciaux dans cette interprétation fut de noter qu'il n'était possible de lier le comportement asymptotique à des invariants globaux de la variété qu'à la condition de se restreindre à des ouverts de V dans le dénombrement des points de hauteur bornée. Autrement dit, la compréhension du comportement asymptotique passe par celle de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée pour la topologie de Zariski.

Par la suite, l'auteur de ce texte, Batyrev et Tschinkel mirent en évidence une formule empirique pour la constante C, qui, dans le cas où le faisceau $L = \phi^*(\mathscr{O}(1))$ est le faisceau anticanonique ω_V^{-1}, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\boldsymbol{A}_F)$ associé à V. Là encore, un point crucial dans cette interprétation conjecturale est l'étude de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée, mais cette fois pour la topologie adélique. De manière plus précise, on définit pour tout B de $\mathbf{R}_+^*$ la mesure

$$\mu_{U,H\leqslant B} = \frac{1}{N_{U,H}(B)} \sum_{\substack{x \in U(F)\\ H(x)\leqslant B}} \delta_{(x)}$$

sur $V(\boldsymbol{A}_F)$, où U est un ouvert de Zariski de V et $\delta_{(x)}$ la mesure de Dirac en x. L'interprétation de C est directement liée à la compréhension de la limite éventuelle de cette mesure lorsque B tend vers $+\infty$.

Dans ce texte nous avons l'intention de présenter ces interprétations conjecturales lorsque $L = \omega_V^{-1}$ en faisant un survol des cas où elles ont été démontrées ainsi que des questions encore ouvertes.

Nous commencerons par quelques exemples élémentaires. Après quelques rappels sur les hauteurs et les conjectures de Manin, nous construirons la mesure adélique associée à une hauteur relative au faisceau anticanonique. Nous pourrons ensuite donner la formule empirique en précisant son lien avec la répartition adélique des points de hauteur bornée. Au paragraphe 6 nous donnerons une liste d'indices en faveur de cette formule. Nous décrirons ensuite comment, au niveau des torseurs universels, cette formule s'interprète naturellement, donnant un analogue de la notion de variété d'Hardy-Littlewood au sens de Borovoi et Rudnick.

Le paragraphe 8 présente les perspectives ouvertes par le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel. Nous terminerons en décrivant brièvement la généralisation de la formule empirique au cas où $L \neq \omega_V^{-1}$ par Batyrev et Tschinkel.

Table des matières

1. Deux exemples, en marche d'approche

L'exemple le plus classique est celui de l'espace projectif. Rappelons une construction des hauteurs sur celui-ci

Notations 1.1. — Dans la suite, F est un corps de nombres, et $\mathscr{O}_F$ son anneau des entiers. On note M_F l'ensemble des places de $\mathbf{F}$, $M_{F,f}$ l'ensemble des places finies qu'on identifiera avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathscr{O}_F$ et $M_{F,\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de F. Pour toute place w de F, on note F_w le complété de F pour w. On normalisera la valeur absolue $|\cdot|_w$ en w de la façon suivante :

$$\forall x \in F_w, \quad |x|_w = |N_{F_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

où v est la place de $\mathbf{Q}$ induite par w. Ces valeurs absolues présentent l'avantage de satisfaire la formule du produit :

$$\forall x \in F^*, \quad \prod_{w \in M_F} |x|_w = 1.$$

Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on note $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$ l'anneau des entiers dans $F_\mathfrak{p}$ et $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel. La hauteur H_n sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_F$ est alors donnée par la formule

$$H_n((x_0 : \ldots : x_n)) = \prod_{w \in M_F} \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_w.$$

Notons que pour $F = \mathbf{Q}$, on retrouve la hauteur classique

$$H_n((x_0 : \ldots : x_n)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \text{ si } \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ \mathrm{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant n}(x_i) = 1. \end{cases}$$

On note comme ci-dessus $N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B)$ le nombre de points x de $\mathbf{P}^n(F)$ tels que $H_n(x) \leqslant B$.

Théorème 1.2 **(Schanuel [Sc]).** — *Le comportement asymptotique de $N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$ est donné par la formule*

$$N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B) = C_n \frac{1}{\zeta_F(n+1)} B^{n+1} + \begin{cases} O(B \log B) \text{ si } n=1, \\ O(B^n) \text{ sinon,} \end{cases}$$

avec

$$C_n = \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} \frac{hR}{w} (n+1)^{r_1+r_2-1}$$

où r_1 désigne le nombre de places réelles de F, r_2 le nombre de places complexes, w le nombre de racines de l'unité dans ce corps, h le cardinal du groupe des classes d'idéaux, R le régulateur de F et d la valeur absolue de son discriminant.

En outre, la contribution de tout fermé de Zariski est négligeable. Cela est même valable pour tout sous-ensemble mince de $\mathbf{P}^n_F$, ces ensembles étant définis de la manière suivante :

Définition 1.3. — Un sous-ensemble W de $\mathbf{P}^n(F)$ est dit mince s'il existe un morphisme de variétés algébriques sur F

$$\pi : X \to \mathbf{P}^n_F$$

tel que $W \subset \pi(X(F))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle définie sur F.

Un exemple typique est celui des éléments de la forme $(x^3 : y^3)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Précisons que, dans cette définition, la variété X n'est pas supposée irréductible.

Théorème 1.4 **(Serre, [Se2, §13.1.3]).** — *Si W est un sous-ensemble mince de $\mathbf{P}^n(F)$ alors le nombre $N_{W,H_n}(B)$ des points de W de hauteur majorée par B vérifie*

$$N_{W,H_n}(B) = O(B^{n+\frac{1}{2}} (\log B)^\gamma)$$

avec $\gamma < 1$.

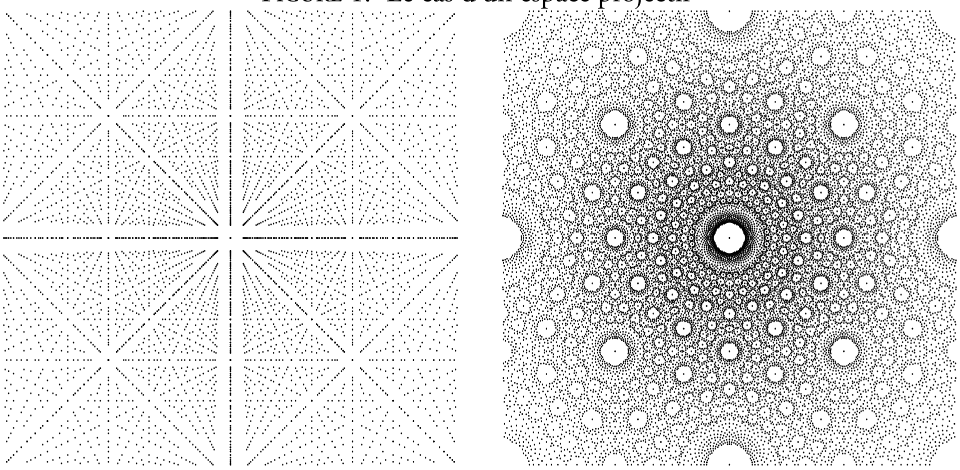
Afin d'illustrer le théorème de Schanuel nous avons représenté sur la figure 1 d'une part l'ensemble

$$\{\, x = (x_0 : x_1 : 1) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) \mid\ |x_0| < 1,\ |x_1| < 1,\ H_2(x) \leqslant 20 \,\}$$

et d'autre part l'ensemble

$$\{\, x = (x_0 + iy_0 : 1) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(i)) \mid\ |x_0| < 1,\ |y_0| < 1,\ H_1(x) \leqslant 20 \,\}.$$

FIGURE 1. Le cas d'un espace projectif



$\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(i))$

Exemple 1.5. — Comme deuxième exemple, nous considérerons la surface V obtenue en éclatant les points

$$P_0 = (1 : 0 : 0), \quad P_1 = (0 : 1 : 0) \quad \text{et} \quad P_2 = (0 : 0 : 1)$$

sur le plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Cette surface peut être vue comme une hypersurface du produit $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ dont les points rationnels sont donnés par

$$V(\mathbf{Q}) = \{\, ((x_0 : y_0), (x_1 : y_1), (x_2 : y_2)) \mid x_0 x_1 x_2 = y_0 y_1 y_2 \,\}.$$

La surface V contient 6 diviseurs exceptionnels donnés par les équations

$$E_{i,j} : \quad x_i = y_j = 0$$

pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant 2$ et $i \neq j$. On notera U le complémentaire de ces diviseurs exceptionnels. Le faisceau anticanonique $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(1, 1, 1)$ est très ample

et définit un plongement de V dans $\mathbf{P}^7_{\mathbf{Q}}$ correspondant aux monômes $X_0X_1X_2$, $X_0X_1Y_2$, $X_0Y_1X_2$, $Y_0X_1X_2$, $X_0Y_1Y_2$, $Y_0X_1Y_2$, $Y_0Y_1X_2$ et $Y_0Y_1Y_2$. La hauteur correspondante est donc donnée par

$$H((x_0:y_0),(x_1:y_1),(x_2:y_2)) = \prod_{i=0}^{2} \sup(|x_i|,|y_i|)$$

si les (x_i, y_i) sont des paires d'entiers premiers entre eux.

Proposition 1.6. — *Le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur U est donné par la formule*

$$N_{U,H}(B) \sim \frac{1}{3} \prod_{p \ premier} \left(1-\frac{1}{p}\right)^4 \left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right) B(\log B)^3.$$

Par ailleurs, le nombre de points de hauteur bornée sur chacun des $E_{i,j}$ est donné par la formule

$$N_{E_{i,j},H}(B) \sim \frac{2}{\zeta_{\mathbf{Q}}(2)} B^2.$$

Nous renvoyons à [**Pe1**, §7] pour la démonstration de ce résultat.

Remarques 1.7. — (i) On constate donc que $N_{U,H}(B)$ est négligeable devant $N_{E_{i,j},H}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Si on considère le terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur V tout entier, celui-ci est donné par le nombre de points sur la réunion des diviseurs exceptionnels et ne dépend que de la restriction de la hauteur à cette réunion de droites. Un des points cruciaux dans les conjectures de Manin est de noter que la géométrie globale de la variété puisse réapparaître si on considère le comportement asymptotique sur le complémentaire U de ces droites.

(ii) En ce qui concerne la constante, c'est Beukers qui, le premier, a noté dans ce cas que le produit eulérien peut se mettre sous la forme

$$\prod_{p \text{ premier}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V)} \frac{\#V_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p)}{p^{\dim V}}$$

où $V_{\mathbf{F}_p}$ est la surface sur $\mathbf{F}_p$ obtenue en éclatant les trois points P_0, P_1 et P_3 dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_p}$. Notons que cette réécriture vaut également pour l'espace projectif : le

quotient $\frac{1}{\zeta_{\mathbf{F}}(n+1)}$ se met en effet sous la forme

$$\prod_{\mathfrak{p}\in M_{F,f}} \left(1-\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}\right)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}(\mathbf{P}^n_F)} \frac{\#\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\#\mathbf{F}^n_{\mathfrak{p}}}.$$

Ces descriptions suggèrent immédiatement que la constante puisse se décrire dans certains cas en termes d'un volume pour une mesure de Tamagawa convenablement choisie.

2. Point de vue sur les hauteurs

Depuis Weil (cf. [**We1**], [**Né**]), de nombreuses variantes de la notion de hauteur ont été utilisées (cf., par exemple, [**Ar**], [**Se2**], [**BGS**]). Dans ce texte, nous utiliserons, comme Batyrev et Manin [**BM**], les hauteurs exponentielles définies par des métriques adéliques sur des faisceaux inversibles. C'est en effet en ces termes que la construction de la mesure de Tamagawa est la plus simple.

Notations 2.1. — Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, $\mathscr{X}(B)$ désigne l'ensemble des B-points de $\mathscr{X}$, $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} B, \mathscr{X})$, et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$. Si X est une variété sur un corps E de clôture algébrique $\overline{E}$, $X(E)$ est donc l'ensemble des points rationnels de X et on notera $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{E}}$. Nous dirons qu'une variété sur E est *bonne* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre.

Si V est une bonne variété sur F et L un faisceau inversible sur V, alors pour toute extension E de F et tout x de $V(E)$, on note $L(x)$ la fibre du fibré en droites associé donnée par

$$L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} E$$

où L_x désigne la fibre de L en x au sens des faisceaux ; $L(x)$ est un espace vectoriel de dimension un sur E.

Si v est une place de F et L un faisceau inversible sur une bonne variété V, une *métrique v-adique* est une application qui à tout point x de $V(F_v)$ associe une fonction

$$\|\cdot\|_v : L(x) \to \mathbf{R}_+$$

vérifiant les conditions

M1 $\forall x \in V(F_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = 0 \Leftrightarrow y = 0,$

M2 $\forall x \in V(F_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \forall \lambda \in F_v, \quad \|\lambda y\|_v = |\lambda|_v \|y\|_v,$

M3 si s est une section de L définie sur un ouvert U de V, l'application de $U(F_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ envoyant x sur $\|s(x)\|_v$ est continue pour la topologie v-adique.

Un exemple fondamental de métrique est celle définie par un modèle du fibré :

Exemple 2.2. — Si $S \subset M_{F,f}$ est un ensemble fini de places non-archimédiennes, on note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Si $\mathscr{V}$ est un modèle projectif et lisse de V sur $\mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}$ un modèle de L sur $\mathscr{V}$, pour toute place v de $M_{F,f} - S$, on peut définir une métrique v-adique sur L de la façon suivante : Comme $\mathscr{V}$ est projective, un point x de $V(F_v)$ se relève en un unique point $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$. Le faisceau inversible $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$ correspond à un $\mathscr{O}_v$-module libre de rang un dans $L(x)$. Soit y_0 un générateur de ce module, la métrique est alors donnée par

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

On dira que $\|\cdot\|_v$ est la métrique définie par le modèle $\mathscr{L}$.

Définition 2.3. — Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}$, où $\|\cdot\|_v$ est une métrique v-adique sur L, telle qu'il existe une partie finie S de $M_{F,f}$, un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ de sorte que, pour tout place v de $M_{F,f} - S$, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit définie par $\mathscr{L}$.

Par abus de langage, nous appelerons ici *hauteur d'Arakelov* sur une bonne variété V une paire $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ formée d'un faisceau inversible L sur V et d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}$ sur L. La hauteur d'un point rationnel x de V relativement à H est définie par

$$\forall y \in L(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{v\in M_F} \|y\|_v^{-1}.$$

En effet pour tout y de $L(x) - \{0\}$, $\|y\|_v = 1$ sauf pour un nombre fini de places. Le produit ci-dessus a donc bien un sens et la formule du produit assure qu'il est indépendant du choix de y.

On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov quotienté par la relation d'équivalence engendrée par

$$(L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}) \sim (L, (\lambda_v\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$$

si $(\lambda_v)_{v\in M_F}$ est une famille de nombres réels presque tous égaux à un et tels que le produit $\prod_{v\in M_F} \lambda_v$ vaille 1. Notons que si $x \in V(F)$ et H est une hauteur, $H(x)$ ne dépend que de la classe de H dans $\mathscr{H}(V)$.

On dispose d'une notion naturelle de produit tensoriel sur les hauteurs d'Arakelov. Celle-ci vérifie :

$$\forall x \in V(F), \quad (H_1 \otimes H_2)(x) = H_1(x)H_2(x)$$

et munit $\mathscr{H}(V)$ d'une structure de groupe. L'application qui à une hauteur associe la classe du fibré correspondant dans le groupe de Picard de V définit un morphisme d'oubli

$$\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \operatorname{Pic} V.$$

Remarques 2.4. — (i) Si $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ et $H' = (L, (\|\cdot\|'_v)_{v\in M_F})$ sont deux hauteurs relatives à un même faisceau inversible L alors les métriques $\|\cdot\|_v$ et $\|\cdot\|'_v$ coïncident pour presque toute place v. En outre, pour toute place v, $\|\cdot\|'_v$ peut s'écrire $f_v\|\cdot\|_v$ où $f_v : V(F_v) \to \mathbf{R}_+^*$ est continue et donc bornée. Il existe donc des constantes C et C' telles que

$$\forall x \in V(F), \quad 0 < C < \frac{H(x)}{H'(x)} < C'.$$

Cette assertion reste vraie si la différence $\boldsymbol{o}(H) - \boldsymbol{o}(H')$ est un élément de torsion dans $\operatorname{Pic}(V)$, [**Se2**, §2.9].

(ii) Si $V = \operatorname{Spec} F$, alors on a un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \deg : & \mathscr{H}(\operatorname{Spec} F) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}_+^* \\ & H & \mapsto & H(x) \end{array}$$

où x est l'unique point de V.

(iii) Tout morphisme $\phi : V \to W$ entre bonnes variétés induit un morphisme de groupes $\phi^* : \mathscr{H}(W) \to \mathscr{H}(V)$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(W) \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{o}"'] & \mathscr{H}(V) \arrow[d, "\boldsymbol{o}"'] \\ \operatorname{Pic}(W) \arrow[r] & \operatorname{Pic}(V). \end{tikzcd}$$

et tel que pour tout point rationnel x de V, on ait $\phi^*(H)(x) = H(\phi(x))$. En particulier, pour tout x de $V(F)$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \text{év}_x : & \mathscr{H}(V) & \to & \mathbf{R}_+^* \\ & H & \mapsto & H(x) \end{array}$$

est la composée $\deg \circ x^*$.

Exemple 2.5. — Si $V = \mathbf{P}^N_F$ et $L = \mathcal{O}(1)$, on note $s_0, \dots, s_N$ la base usuelle de l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}^N_F, \mathcal{O}(1))$. Pour toute place v de F, on considère alors la métrique donnée par

$$\forall x \in \mathbf{P}^N(F), \quad \forall y \in \mathcal{O}(1)(x), \quad \|y\|_v = \inf_{\substack{s_i(x) \neq 0 \\ 0 \leqslant i \leqslant N}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_v$$

pour toute place finie v de F, cette métrique est la métrique définie par le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^N_{\mathcal{O}_F}$. La famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_F}$ est donc une métrique adélique sur $\mathcal{O}(1)$ et la hauteur d'un point est donnée par la formule

$$\forall (x_0 : \dots : x_N) \in \mathbf{P}^N(F), \quad H((x_0 : \dots, x_N)) = \prod_{v \in M_F} \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v$$

et on retrouve ainsi la hauteur H_N. Plus généralement, si $\phi : V \to \mathbf{P}^N_F$ est un plongement, $\phi^*(H)$ est une hauteur d'Arakelov sur V relative à $\phi^*(\mathcal{O}(1))$.

Remarque 2.6. — Si V est une bonne variété, tout faisceau inversible s'écrit $L_1 \otimes L_2^{-1}$ où L_1 et L_2 sont très amples. Il résulte donc de l'exemple précédent que tout faisceau inversible peut être muni d'une métrique adélique. En particulier, le morphisme d'oubli $\boldsymbol{o}$ est surjectif.

Définition 2.7. — On appelle *système de hauteurs* tout morphisme $\boldsymbol{H}$: $\mathrm{NS}(V) \to \mathcal{H}(V)$ qui est une section de la composée

$$\mathcal{H}(V) \xrightarrow{\boldsymbol{o}} \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{NS}(V)$$

un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ induit un accouplement

$$\boldsymbol{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(F) \to \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une forme linéaire en la première variable et tel que

$$\forall L \in \mathrm{NS}(V), \quad \forall x \in V(F), \quad \boldsymbol{H}(L, x) = \boldsymbol{H}(L)(x).$$

Ces dénominations étant précisées, on peut aborder les questions de comportement asymptotique.

Notations 2.8. — Si H est une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété V et W une partie de $V(F)$, on note pour tout réel strictement positif B

$$N_{W,H}(B) = \#\{x \in W \mid H(x) \leqslant B\}.$$

La fonction zêta associée est définie pour $s \in \mathbf{C}$ par la série

$$\zeta_{W,H}(s) = \sum_{x \in W} \frac{1}{H(x)^s}$$

lorsque celle-ci converge. Si $\boldsymbol{H}$ est un système de hauteurs sur V, on considérera également pour $\boldsymbol{s} \in \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ la série

$$\zeta_{W,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{x \in W} \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{s}, x).$$

Si X est un sous-ensemble constructible de V, on notera $N_{X,H}$ (resp. $\zeta_{X,H}$, $\zeta_{X,\boldsymbol{H}}$) pour $N_{X(F),H}$ (resp. $\zeta_{X(F),H}$, $\zeta_{X(F),\boldsymbol{H}}$).

3. Une conjecture de Manin

Dans une série d'articles publiés entre 1989 et 1993, [**FMT**], [**BM**], [**Ma**], Manin a mis en place avec Batyrev, Franke et Tschinkel un programme en vue d'interpréter le terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Nous allons nous intéresser à une variante de la conjecture C′ de [**BM**].

Dans [**BM**, §3], Batyrev et Manin précisent que les conjectures énoncées sont à considérer plutôt comme des questions. Cette remarque vaut également pour les conjectures énoncées dans ce texte.

Avant d'énoncer la conjecture, il convient de préciser le type de variétés que nous utiliserons.

Définition 3.1. — Si V est une bonne variété, on note $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans le groupe $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ et ω_V le faisceau canonique, puissance extérieure maximale du fibré cotangent Ω^1_V.

Nous dirons qu'une bonne variété V sur F est *presque de Fano* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

PF1 le groupe de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ est nul si $i = 1$ ou $i = 2$,

PF2 la torsion dans le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est triviale,

PF3 la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} est à l'intérieur de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Dans la suite, nous dirons qu'un fibré L sur V est *pseudo-ample* si sa classe appartient à l'intérieur de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Exemples 3.2. — Si V est une variété de Fano, alors elle est presque de Fano ; en effet PF1 résulte du théorème d'annulation de Kodaira, PF2 du lemme 1.2.1 de

[**Pe1**], et PF3 des définitions. Ces conditions sont également vérifiées par toute variété torique projective et lisse (cf. [**Pe3**], exemple 2.1.4).

Dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

Hypothèses 3.3. — Désormais V est une variété presque de Fano telle que le groupe de Brauer cohomologique $H^2_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{G}_m)$ soit trivial et qui vérifie la condition suivante :

CP Il existe une famille finie $(n_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(\overline{V})$ telle que

$$C^1_{\text{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_+ n_i.$$

Remarque 3.4. — L'hypothèse CP nous sera utile pour donner un interprétation conjecturale de la puissance du logarithme et de la constante. Toutefois la structure du cône $C^1_{\text{eff}}(\overline{V})$ est mal connue en général, même pour les variétés de Fano. Si V est une surface de Del Pezzo, cette hypothèse découle de la théorie de Mori. Cela est également le cas pour les variétés de Fano de dimension trois, comme l'a démontré Batyrev [**Ba**]. Cette condition est aussi vérifiée pour diverses familles de variétés (variétés de drapeaux, variétés toriques,...).

Nous pouvons alors définir les invariants géométriques intervenant dans la conjecture de Manin.

Définitions 3.5. — Si L est un faisceau inversible pseudo-ample, on note

$$a^g_V(L) = \inf\{\, \gamma \in \mathbf{R} \mid \gamma[L] \in [\omega_V^{-1}] + C^1_{\text{eff}}(V)\,\}.$$

On a alors que $a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}] \in \partial C^1_{\text{eff}}(V)$ et on définit $b^g_V(L)$ comme la codimension de la face minimale de $\partial C^1_{\text{eff}}(V)$ contenant

$$a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}].$$

Comme nous le verrons par la suite, la formule suivante, qui est une variante de la conjecture C' de [**BM**] est vérifiée pour de nombreuses familles de variétés. Batyrev et Tschinkel [**BT2**] en ont toutefois donné un contre-exemple sur lequel nous reviendrons au paragraphe 8.

Formule empirique 3.6. — *Si V vérifie les hypothèses précédentes et si H est une hauteur d'Arakelov relative à un fibré en droites L pseudo-ample, alors pour toute*

extension finie assez grande E de F et tout ouvert dense assez petit U de V, il existe une constante C_{H_E} telle que

$$N_{U_E,H_E}(B) \sim C_{H_E} B^{a^g_{V_E}(L)} (\log B)^{b^g_{V_E}(L)-1}.$$

Remarques 3.7. — (i) Ici, « corps assez grand » signifie contenant une extension convenable F_0 de F. De même, « ouvert assez petit » signifie contenu dans un ouvert convenable de V.

(ii) Notons que $a^g_{V_E}(L) = a^g_V(L)$ est stable par extension de corps, mais cela ne vaut pas pour $b^g_{V_E}(L)$.

(iii) Si on prends $L = \omega_V^{-1}$, la formule asymptotique s'écrit

$$N_{U,H}(B) \sim C_H B (\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V - 1}$$

et c'est sur la demi-droite $\mathbf{R}_+^* \omega_V^{-1}$ que la puissance de $\log B$ devrait être maximale.

(iv) L'analogue de cette assertion pour les fonctions zêtas des hauteurs est que pour tout corps de nombre assez grand et tout ouvert U assez petit, la série zêta ζ_{U_E,H_E} converge pour $\operatorname{Re}(s) > a^g_{V_E}(L)$ et s'étend en une fonction méromorphe sur un voisinage de la droite $\operatorname{Re}(s) = a^g_{V_E}(L)$ avec un unique pôle d'ordre $b^g_{V_E}(L)$ en $s = a^g_{V_E}(L)$.

Le cas d'une conique montre qu'il peut être nécessaire de passer à une extension du corps de base. A ce sujet, on peut se demander si toute extension sur laquelle les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski convient. D'autre part, l'exemple du plan projectif éclaté en trois points illustre le fait qu'il est crucial de se restreindre à un ouvert de la variété, un fermé pouvant avoir « trop » de points. Ceci amène aux définitions suivantes :

Notations 3.8. — Soit X une partie constructible de V, pour toute hauteur H relative à un fibré pseudo-ample, on note

$$a_X(H) = \varlimsup_{B \to +\infty} \frac{\log(N_{X,H}(B))}{\log B}.$$

Remarques 3.9. — (i) Le nombre $a_X(H)$ ne dépend en fait que de la classe de $L = \boldsymbol{o}(H)$ dans le groupe de Néron-Severi [**BM**, §1.4] et nous noterons également $a_X([L])$ ou $a_X(L)$ pour $a_X(H)$.

(ii) La formule empirique implique l'égalité entre $a_U(L)$ et $a^g_V(L)$.

Définition 3.10. — On suppose que les points rationnels de V sont denses pour la topologie de Zariski. Un fermé irréductible strict X de V sera dit strictement accumulateur si pour tout ouvert non vide W de X, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

On dit que X est faiblement accumulateur si pour tout ouvert non vide W de X, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{B \to +\infty} \frac{N_{W,H}(B)}{N_{U,H}(B)} > 0 \tag{3.1}$$

pour toute hauteur H relative à L.

Remarque 3.11. — Il semble raisonnable d'espérer que la condition (3.1) ne dépende pas du choix de la métrique adélique sur L. Cela est vrai si les comportements asymptotiques pour U et W sont de la forme $CB^a(\log B)^{b-1}$.

Exemple 3.12. — Nous reprenons les notations de l'exemple 1.5 pour le plan éclaté en trois points rationnels en position générale. Dans ce cas, on a vu que les diviseurs exceptionnels $E_{i,j}$ sont strictement accumulateurs pour ω_V^{-1}. On peut également montrer que leur complémentaire U ne rencontre pas de sous-variétés faiblement accumulatrices. Notons que cette dernière assertion reste valide si on considère une hauteur relative à $\omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$. En effet le fibré est alors l'image inverse de $\omega_{\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}}$ par la contraction $V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ des diviseurs $E_{1,2}, E_{2,3}$ et $E_{3,1}$ et compter des points de U revient à compter des points sur un ouvert de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Par contre, si on considère une hauteur relative à $\omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{1,3}$, alors chacune des fibres de la première projection, qui correspond au système linéaire défini par $E_{1,2} + E_{1,3}$, est faiblement accumulatrice et le terme dominant du comportement asymptotique, qui est de la forme conjecturée, est obtenu en sommant les termes dominants sur chaque fibre. L'ensemble $V(F)$ est alors réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices.

Pour déterminer l'ouvert de la conjecture, il conviendrait donc de donner une caractérisation géométrique des sous-variétés strictement accumulatrices. L'idée pour cela est de définir $a^g_X(L)$ pour tout fermé irréductible X de V, autrement dit d'étendre aux variétés éventuellement singulières la définition de $a^g_V(L)$. Si $X \subset V$ est un fermé irréductible de V, soient $\widetilde{X}$ une normalisation de X, φ :

$\widetilde{X} \to V$ le morphisme induit et $X_0 \subset \widetilde{X}$ le lieu des points lisses de $\widetilde{X}$. On pose alors

$$a_X^g(L) = \inf\left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \;\middle|\; h^0(X_0, \varphi^*(L)^p \otimes \omega_{X_0}^q) > 0 \right\}$$

les candidats pour les fermés strictement accumulateurs pour L sont ceux pour lesquels $a_X^g(L) > a_V^g(L)$.

4. Hauteurs et mesures de Tamagawa

Supposons un instant que la formule empirique 3.6 soit vérifiée et que le complémentaire dans V des sous-variétés faiblement accumulatrices soit un ouvert dense U de V. Autrement dit, pour tout ouvert W de U, on a une équivalence

$$N_{W,H}(B) \sim N_{U,H}(B)$$

quand B tend vers $+\infty$. Il est alors naturel de s'interroger sur la répartition des points pour la topologie adélique. Comme nous allons le voir, cela est directement lié à l'interprétation de la constante C_H.

Notations 4.1. — Si V est une bonne variété sur F, on note $V(\boldsymbol{A}_F)$ l'ensemble des adèles de V, qui est donné par

$$V(\boldsymbol{A}_F) = \prod_{v \in M_F} V(F_v),$$

puisque la variété est projective. Si H est une hauteur d'Arakelov sur V et U un ouvert non vide de V, pour tout B de $\mathbf{R}_+^*$ tel que $N_{U,H}(B)$ soit fini et non nul, on considère la mesure de probabilité sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ définie par la formule

$$\mu_{U,H \leqslant B} = \frac{1}{N_{U,H}(B)} \sum_{\substack{x \in U(F) \\ H(x) \leqslant B}} \delta_{(x)}$$

où $\delta_{(x)}$ est la mesure de Dirac en x.

Remarque 4.2. — L'étude de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée sur V revient donc à l'étude de la convergence de la mesure $\mu_{U,H \leqslant B}$. De manière plus précise, existe-t-il une mesure borélienne de probabilité μ_H sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ de sorte que pour toute fonction continue $f : V(\boldsymbol{A}_F) \to \mathbf{R}$ on ait que

$$\begin{array}{rcl} \int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f \mu_{U,H \leqslant B} & \to & \int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f \mu_H \\ B & \to & +\infty. \end{array}$$

Nous allons maintenant construire, dans le cas où $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$ une mesure qui fournira une interprétation conjecturale à la fois pour C_H et pour la mesure $\boldsymbol{\mu}_H$. La construction de cette mesure est basée d'une part sur une généralisation immédiate du fait qu'une section continue du faisceau canonique d'une variété réelle définit une mesure, d'autre part sur les techniques d'intégration sur un espace adélique mises au point par Weil [**We2**].

Notations 4.3. — Soit $H = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ une hauteur relative au faisceau anticanonique sur une variété presque de Fano V.

Pour toute place v de F, on normalise la mesure de Haar $\mathrm{d}x_v$ sur le corps localement compact F_v de la façon suivante :

— Si $v \in M_{F,f}$, $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$,

— Si $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$,

— Si $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, alors $\mathrm{d}x_v = i\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

On définit alors une mesure borélienne $\boldsymbol{\omega}_{H,v}$ sur $V(F_v)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{n,v}$$

où $x_1, \dots, x_n$ est un système de coordonnées locales v-analytiques sur $V(F_v)$ et la forme $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$ est vue comme section de ω_V^{-1}. Le fait que ces mesures se recollent bien résulte de la formule de changement de variables [**We2**, §2.2.1].

Remarque 4.4. — Soit $\mathscr{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur un anneau de S-entiers $\mathscr{O}_S$ pour une partie finie S de $M_{F,f}$. Comme dans [**We2**], on peut déduire du fait que $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}$ est une métrique adélique que pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on a

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v}(V(F_\mathfrak{p})) = \frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_\mathfrak{p})}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{\dim V}}.$$

En particulier, comme l'illustre le cas de l'espace projectif, le produit

$$\prod_\mathfrak{p} \boldsymbol{\omega}_{H,\mathfrak{p}}(V(\mathbf{F}_\mathfrak{p}))$$

diverge. Pour définir une mesure adélique, il convient donc, en imitant les contructions de Tamagawa et Weil [**We2**], d'introduire des facteurs de convergence.

Notations 4.5. — Comme dans [**Pe1**, lemme 2.1.1], sous les hypothèses PF1–3, on peut se donner un ensemble fini de places finies et un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour

toute place finie $\mathfrak{p}$ en-dehors de S, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ de façon compatible avec les actions des groupes de Galois.

Si $\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S$, le terme local de la fonction L associée à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ s'écrit

$$L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s}\,\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(V_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ est le Frobenius en $\mathfrak{p}$. La fonction L globale est alors donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})).$$

En utilisant des résultats d'Artin [**Art**, Satz 3], on obtient que ce produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'odre $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V)$ en $s = 1$.

Les facteurs de convergence que nous utiliserons sont définis de la façon suivante :

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \text{ si } v \in M_{F,f} - S, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition 4.6. — Avec les notations qui précèdent, la *mesure de Tamagawa* associée à H est la mesure borélienne sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ définie par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \frac{1}{\sqrt{d_F}^{\dim V}} \prod_{v \in M_F} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}$$

où d_F désigne la valeur absolue du discriminant de F.

Remarque 4.7. — Les arguments principaux pour montrer que cette mesure est bien définie sont les suivants : il suffit de montrer que pour tout S assez grand, le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,\mathfrak{p}}(V(F_\mathfrak{p}))$$

converge, c'est-à-dire que le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} \mathrm{Det}(1 - \#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q}) \frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_\mathfrak{p})}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{\dim V}}$$

converge. Soit ℓ un nombre premier et supposons que S contienne les idéaux premiers contenant ℓ. La formule de Lefschetz due à Grothendieck (cf. [**Se1**])

s'écrit
$$\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell)).$$
En utilisant la conjecture de Weil démontrée par Deligne [**De**, théorème 1.6] sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius et le fait que, pour presque tout $\mathfrak{p}$, le groupe $H^{2n-1}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ est trivial, on obtient que
$$\frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\dim V}} = 1 + \frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H^{2n-2}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell(n-1))) + O\left(\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{3/2}}\right).$$
Enfin pour presque tout $\mathfrak{p}$, on a un isomorphisme issu de la dualité de Poincaré
$$\operatorname{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})^\vee \otimes \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} H^{2n-2}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell(n-1)).$$

Définition 4.8. — Soit $\overline{V(F)}$ l'adhérence des points rationnels dans $V(\boldsymbol{A}_F)$, on pose
$$\tau_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(F)}).$$
On note également
$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!} \int_{C^1_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y\rangle} \mathrm{d}y$$
où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V)$, $C^1_{\text{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C^1_{\text{eff}}(V)$ défini par
$$C^1_{\text{eff}}(V)^\vee = \{ y \in \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in C^1_{\text{eff}}(V), \quad \langle x, y\rangle \geqslant 0 \}$$
et $\mathrm{d}y$ est la mesure de Haar sur $\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}^\vee$ normalisée par le réseau $\operatorname{Pic}(V)^\vee$. Pour terminer, on pose
$$\beta(V) = \# H^1(F, \operatorname{Pic}(\overline{V}))$$
et
$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V).$$

Remarques 4.9. — (i) C'est Swinnerton-Dyer [**SD**] qui a mis clairement en évidence que le domaine d'intégration naturel est l'adhérence des points rationnels.

(ii) La constante $\alpha(V)$ peut être également décrite comme le volume du domaine
$$\{ y \in C^1_{\text{eff}}(V)^\vee \mid \langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1 \}$$
pour une mesure convenablement normalisée de l'hyperplan $\langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1$ (cf. [**Pe1**, §2.2.5]). En conséquence, sous les hypothèses 3.3, $\alpha(V)$ est un nombre rationnel.

(iii) C'est Batyrev et Tschinkel qui ont montré la nécessité d'introduire la constante $\beta(V)$ dans ce contexte (cf. [**BT1**]).

5. Une formule empirique

Lorsque $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$, une version raffinée de la conjecture de Manin s'écrit :

Formule empirique 5.1. — *Soit V une variété vérifiant les hypothèses 3.3 et H une hauteur d'Arakelov sur V relative au faisceau anticanonique. Si $V(F)$ est dense pour la topologie de Zariski et le complémentaire des sous-variétés faiblement accumulatrices pour H est un ouvert dense U de V, on a*

$$\text{(F)} \qquad \begin{array}{rcl} N_{U,H}(B) & \sim & \theta_H(V)B(\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V - 1} \\ B & \to & +\infty. \end{array}$$

Remarque 5.2. — (i) L'analogue en termes de la fonction $\zeta_{U,H}(s)$ est d'espérer que

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^t \zeta_{U,H}(s) = (t-1)!\theta_H(V).$$

En ce qui concerne la répartition des points pour la topologie adélique, on obtient dans plusieurs cas un résultat de la forme :

Répartition empirique 5.3. — *Sous les mêmes hypothèses, si $f : V(\boldsymbol{A}_F) \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors*

$$\text{(E)} \qquad \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f\,\mu_{U,H\leqslant B} & \to & \displaystyle\int_{\overline{V(F)}} f\,\frac{\boldsymbol{\omega}_H}{\theta_H(V)} \\ B & \to & +\infty. \end{array}$$

Ces deux aspects du comportement asymptotique sont liés par l'assertion suivante :

Proposition 5.4. — *La formule (F) est vraie pour toute hauteur relative au faisceau anticanonique si et seulement si (F) et (E) sont vérifiées pour une hauteur relative à ce faisceau.*

Remarque 5.5. — On peut noter qu'alors (E) est vraie pour toute hauteur relative à ω_V^{-1}.

On peut être également tenté de réunir la formule (F) et la formule empirique 3.6 en utilisant un système de hauteurs. On utilise pour cela la notion de fonction caractéristique du cône introduite dans ce contexte par Batyrev et Tschinkel.

Définition 5.6. — La fonction caractéristique du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$ est définie, pour $\boldsymbol{s}$ appartenant à $\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{C}$, par la formule

$$\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}) = \int_{C^1_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \boldsymbol{s}, y\rangle} \mathrm{d}y$$

Cette intégrale convergeant lorsque $\operatorname{Re} \boldsymbol{s}$ appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$.

Remarque 5.7. — Sous les hypothèses 3.3, $\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s})$ s'étend en une fonction rationnelle sur $\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{C}$.

Question 5.8. — *Avec les notations qui précèdent, existe-t-il un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ sur V tel que la série $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge sur le domaine*

$$\omega_V^{-1} + \overbrace{C^1_{\text{eff}}(V)}^{\circ} + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$$

et s'étende en une fonction méromorphe au voisinage de ω_V^{-1} avec comme partie principale en ce point la fraction rationnelle

$$\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s} - \omega_V^{-1}) \beta(V) \tau_{H(\omega_V^{-1})}(V) ?$$

Remarque 5.9. — (i) Comme me l'a signalé Yuri Tschinkel, la question 2.6.1 de [**Pe2**] est mal posée, et il est facile de lui trouver une réponse négative parmi les variétés toriques.

(ii) Par partie principale, nous entendons terme de plus haut degré dans la décomposition de la fonction au voisinage de ω_V^{-1} (cf. [**BV**], par exemple).

6. Une liste de résultats

• La formule asymptotique (F) est compatible avec le produit de variétés au sens suivant : Soient H_1 et H_2 des hauteurs d'Arakelov sur des variétés presque de Fano V_1 et V_2 vérifiant les hypothèses 3.3. S'il existe des ouverts U_i de V_i tels que

$$N_{U_i,H_i}(B) = \theta_H(V_i) B (\log B)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V_i - 1} + O(B (\log B)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V_i - 2})$$

alors une formule analogue vaut pour le produit $U_1 \times U_2$ (Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**]). Un énoncé analogue vaut pour (E).

• (F) et (E) sont compatibles avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$. En particulier, si V est une intersection

complète lisse définie par m équations de même degré d en $N+1$ variables de sorte que

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$$

et si $V(\mathbf{Q}_v) \neq \varnothing$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$ alors (F) et (E) sont vérifiées pour l'ouvert $U = V$ (Birch, [**Bir**], cf. également [**Va**] pour une description de la méthode du cercle, Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §1] et [**Pe1**, §5] pour la constante).

• (F) et (E) sont vraies pour les variétés de drapeaux généralisés, c'est-à-dire pour les quotients G/P où G est un groupe algébrique linéaire sur F et P un F-sous-groupe parabolique de G avec $U{=}V$. Le cas de l'espace projectif sur $\mathbf{Q}$ est traité dans [**HW**], résultat généralisé à un corps de nombres par Schanuel [**Sc**], Schmidt avait traité le cas des Grassmanniennes sur $\mathbf{Q}$ dans [**Sch**]. Le cas général résulte des travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein (Langlands [**Lan**], Franke-Manin-Tschinkel [**FMT**, §2], [**Pe1**, §6] pour la constante). Cela s'applique en particulier aux quadriques.

• (F) a été démontrée pour les variétés toriques projectives et lisses, c'est-à-dire les compactifications équivariantes projectives et lisses de tores algébriques, en prenant comme ouvert U l'orbite ouverte du tore dans V (Batyrev et Tschinkel [**BT1**], [**BT3**] et [**BT4**], puis, avec une autre méthode sur $\mathbf{Q}$, Salberger [**Sal**] et la Bretèche [**Bre1**]).

• (F) est vraie pour certaines fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisés (Strauch et Tschinkel [**ST1**] et [**ST2**]).

• (F) et (E) sont valides pour des compactifications équivariantes lisses d'espaces affines, en choisissant l'orbite ouverte comme ouvert U (Chambert-Loir et Tschinkel [**CLT1**], [**CLT2**] et [**CLT3**]).

• (F) est vérifiée pour la surface de Del Pezzo de degré 5 obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, U étant obtenu comme complémentaire des dix diviseurs exceptionnels (Salberger, la Bretèche [**Bre2**]).

• En ce qui concerne les surfaces cubiques, différentes majorations pour le nombre de points sur le complémentaire des 27 droites ont été obtenues (cf. notamment Heath-Brown [**HB2**] et Broberg [**Bro**]) ainsi que des minorations (Swinnerton-Dyer [**SSD**]). D'autre part des tests numériques en bon accord avec la formule (F) ont été réalisés (Heath-Brown [**HB1**], [**PT1**] et [**PT2**]).

Remarque 6.1. — Il est possible de considérer un analogue de ces formules sur un corps global de caractéristique finie (cf. [**BM**]). Quelques résultats ont été obtenus pour les variétés de drapeaux généralisés [**Pe4**] et les variétés toriques déployées [**Bo**].

7. Hauteurs et techniques de descente

L'objet de cette partie est d'apporter un nouvel indice en faveur de la formule (F) en expliquant comment, au niveau des torseurs universels, les facteurs $\alpha(V)$ et $\beta(V)$ recoivent une explication naturelle. Salberger fut le premier a mettre en lumière ce point dans [**Sal**], lui permettant de redémontrer le résultat de Batyrev et Tschinkel dans le cas de variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$.

7.1. Les torseurs universels. — La notion de torseur universel a été développée par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS1**], [**CTS2**] et [**CTS3**], en vue de déterminer l'adhérence des points rationnels pour certaines classes de variétés. L'idée derrière cette introduction est que ces torseurs, d'un point de vue arithmétique, sont plus simples que la variété de départ. En particulier, à leur niveau, les obstructions de Brauer-Manin à l'approximation faible sont triviales. Il n'est donc pas très surprenant qu'ils apparaissent également dans le cadre des conjectures de Manin.

Si E est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et V une variété presque de Fano sur E, un torseur universel sur V peut être décrit de la façon suivante : soit $(L_1,\dots,L_t)$ une famille de fibré en droites dont les classes donnent une base de $\operatorname{Pic} V$. Considérons L_i^* le complémentaire de la section nulle dans L_i et

$$\mathcal{T} = L_1^* \times_V \cdots \times_V L_t^*$$

alors on a un morphisme naturel $\pi : \mathcal{T} \to V$ qui fait de V un quotient de $\mathcal{T}$ sous l'action du groupe $\mathbf{G}_{m,E}^t$ et on peut vérifier qu'à un isomorphisme près, le morphisme obtenu ne dépend pas de la base choisie. Les définitions suivantes permettent de généraliser cette notion à un corps arbitraire.

***Définition 7.1.1.* —** Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E et X une variété sur E, un *G-torseur au-dessus de X* est la donnée d'un morphisme fidèlement plat π de Y vers X et d'une action $\mu : G \times Y \to Y$ de G sur Y telle que $\pi \circ \mu = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ et que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times_E Y & \to & Y \times_X Y \\ (g,y) & \mapsto & (gy,y) \end{array}$$

soit un isomorphisme.

Si G est lisse et abélien, alors un torseur $\pi : Y \to X$ est localement trivial pour la topologie étale, c'est-à-dire localement de la forme $U \times G \to U$. Les classes d'isomorphisme de G-torseurs sur X sont alors classifiées par le groupe de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(X, G)$ (cf. [**Mi**, théorème III.3.9 et corollaire III.4.7]).

Si T est un tore algébrique sur E et X une bonne variété sur E, corps de caractéristique nulle, ayant un point rationnel, alors on dispose par [**CTS3**, (2.0.2) et proposition 2.2.8] d'une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(E,T) \to H^1_{\text{ét}}(X,T) \xrightarrow{\rho} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Gal}(\overline{E}/E)}(X^*(T), \operatorname{Pic}\overline{X}) \to 0$$

où $X^*(T)$ désigne le groupe de caractères de $\overline{T}$ c'est-à-dire le groupe $\operatorname{Hom}(\overline{T}, \mathbf{G}_{m,\overline{E}})$.

Si X est une variété presque de Fano sur F, on note T_{NS} le tore dont le groupe de caractères est le $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$-module $\operatorname{Pic}(\overline{V})$. Un *torseur universel sur* X est un T_{NS}-torseur $\mathcal{T}$ au-dessus de X dont l'invariant $\rho(\mathcal{T})$ coïncide avec $\mathrm{Id}_{\operatorname{Pic}(\overline{V})}$.

Exemple 7.1.2. — Si V est une compactification équivariante projective et lisse d'un tore T sur F, soient $\Sigma(1)$ l'ensemble des diviseurs irréductibles équivariant de $\overline{V}$ et $D(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre sur cet ensemble. On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(T) \to D(\overline{V}) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Pic}(\overline{V}) \to 0$$

et donc par dualité une suite exacte

$$1 \to T_{\mathrm{NS}} \to T_{D(\overline{V})} \to T \to 1$$

où $T_{D(\overline{V})}$ est le tore associé à $D(\overline{V})$. Le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$ agit sur l'ensemble $\Sigma(1)$ et on considère l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \operatorname{Spec}\Big(\overline{F}[X_D, D \in \Sigma(1)]^{\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)}\Big).$$

Pour toute partie I de $\Sigma(1)$ telle que $\bigcap_{D\in I} D = \varnothing$, on note $V_I \subset \mathbf{A}_{\Sigma(1),\overline{F}}$ le sous-espace défini par l'annulation des X_D pour $D \in I$. Soit $U_{\overline{F}}$ le complémentaire de la réunion de ces sous-espaces. Il est invariant sous l'action de Galois et provient d'un ouvert U de $\mathbf{A}_{\Sigma(1)}$. On a les inclusions

$$T_{D(\overline{V})} \subset U \subset \mathbf{A}_{\Sigma(1)}.$$

Pour tout point x de $T(F)$, on a un morphisme de variétés $T_{D(\overline{V})} \to T$ qui envoie l'origine sur x et qui s'étend en un morphisme

$$\pi_x : U \to V.$$

On obtient de cette manière une bijection entre les $T_{D(\overline{V})}(F)$-orbites dans $T(F)$ et les classes d'isomorphismes de torseurs universels sur V (cf. [**CTS2**], la description de Delzant [**Del**] dans le cadre symplectique, Cox [**Co**], Merkur′ev et Panin [**MP**] et Salberger [**Sal**]).

Exemple 7.1.3. — Si V est obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_F$, alors en tant que variété un torseur universel sur V peut être décrit comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 F^5$ au-dessus de la Grassmanienne $\mathrm{Gr}(2,5)$. Ce cône est donc donné par les équations de Plücker (cf. Skorobogatov [**Sk**]).

7.2. Montée aux torseurs universels. — Nous allons tout d'abord munir les torseurs universels de deux structures naturelles : tout d'abord une forme de jauge et d'autre part une structure adélique qui pourra être munie d'une mesure canonique.

Notations 7.2.1. — Soit V une variété presque de Fano sur F et $\mathcal{T}$ un torseur universel sur V, alors le fibré canonique $\omega_{\mathcal{T}}$ est trivial (cf [**Pe3**, lemme 3.1.12]) et il découle de [**CTS3**, proposition 2.1.1] que

$$\Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{T}}) = F^*.$$

Par conséquent à une constante multiplicative près, il existe une unique section partout non nulle de $\omega_{\mathcal{T}}$. Nous noterons $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ une telle section.

On peut noter que cette section définit pour toute place v de F une mesure locale $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ sur $\mathcal{T}(F_v)$ donnée localement par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v} = \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \breve{\omega}_{\mathcal{T}} \right\rangle \right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{N,v}$$

où $x_1, \ldots, x_N$ sont des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point de $\mathcal{T}(F_v)$.

On considère la variété torique affine

$$\mathbf{A}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})} = \mathrm{Spec}\left(\left(\overline{F}[\mathrm{Pic}(\overline{V}) \cap - C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})] \right)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} \right)$$

qui est une variété torique affine pour le tore T_{NS} et on considère le produit contracté

$$\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})} = \mathcal{T} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{A}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}.$$

C'est un fibré en variétés toriques affines sur V qui contient $\mathcal{T}$ comme ouvert. Soit $\widetilde{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ un modèle de $\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ sur un anneau de S-entiers $\mathcal{O}_S$. on considère alors l'espace adélique $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$ qui est défini comme l'ensemble des $(P_v)_{v \in M_F} \in \prod_{v \in M_F} \mathcal{T}(F_v)$ tel que P_v appartienne à $\widetilde{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathcal{O}_v)$ pour presque

toute place finie v de F. Il s'agit donc de l'intersection

$$\prod_{v\in M_F} \mathcal{T}(F_v) \cap \widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F).$$

On peut alors montrer que la mesure

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim \mathcal{T}}} \prod_{v\in M_F} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$$

converge et définit une mesure borélienne sur $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$. Par la formule du produit, elle est indépendante du choix de la forme $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$, on l'appelle donc la mesure canonique sur l'espace $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$.

Exemple 7.2.2. — Dans le cas d'une intersection complète lisse dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, de dimension supérieure ou égale à trois, et de faisceau anticanonique ample, le torseur universel est donné par le cône épointe C au-dessus de V. La variété $\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ peut être vue comme l'éclaté du cône au-dessus de V en l'origine, l'espace adélique coïncide avec l'ensemble des $(P_v)_{v\in M_F}$ de $\prod_{v\in M_F} C(F_v)$ tels que pour presque toute place v de F, P_v aient des coordonnées dans $\mathcal{O}_v$. On peut choisir comme forme $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ la forme de Leray. On retrouve ainsi les structures utilisées pour la méthode du cercle.

Pour énoncer les résultats, on aura également besoin des fonctions L de Draxl [**Dr**] :

Notation 7.2.3. — Soit E/F une extension finie de F telle que $\mathrm{Pic}(V_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et soit S l'ensemble des places de F ramifiées dans E/F. On définit alors pour toute place finie v de F et pour tout $\boldsymbol{s} \in \mathrm{Pic}\, V \otimes \mathbf{C}$

$$L_v(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{y\in C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee \cap \mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F)}} (\#\mathbf{F}_v)^{-\langle y,\boldsymbol{s}\rangle}$$

et

$$L_S(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \prod_{v\in M_{F,f}-S} L_v(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})).$$

Enfin on notera $W(T_{\mathrm{NS}})$ la partie de torsion de $T_{\mathrm{NS}}(F)$ et, pour toute partie finie S de M_F,

$$\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}}) = \sum_{v\in M_{F,f}-S} (X^*(T_{\mathrm{NS}})^\vee)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F)}.$$

On dispose alors des résultats suivants (cf. [**Pe2**] et [**Pe3**]) : soit V une variété presque de Fano sur F vérifiant les conditions 3.3. On suppose que les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible c'est-à-dire que les points rationnels sont denses dans $\prod_{v\in S}\mathcal{T}(F_v)$ pour toute partie finie S de M_F. Par [**CTS2**, proposition 2] le nombre de classes d'isomorphismes de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel est fini. On note $(\mathcal{T}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille de représentants de ces classes d'isomorphisme. On se donne un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ et on pose $H=\boldsymbol{H}(\omega_V^{-1})$.

• Il existe un ouvert non vide C de $\operatorname{Pic}(V)\otimes\mathbf{C}$ et des fonctions

$$\phi_i^{\boldsymbol{H}} : C\times \mathcal{T}_{i\,C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)\to\mathbf{C}$$

telles que pour $\boldsymbol{s}\in C$ on ait

$$\zeta_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})L_S(\boldsymbol{s},T_{\mathrm{NS}},C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))=\sum_{i=1}^r\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\phi_i^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s},y)$$

$$\chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}-\omega_V^{-1})\beta(V)\tau_H(V)L_S(\omega_V^{-1},T_{\mathrm{NS}},C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))=\sum_{i=1}^r\int_{\mathcal{T}_{i\,C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)}\phi_i^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

• Il existe une partie finie S de $M_{F,f}$ et une fonction $\mu:\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})\to\mathbf{Z}$ et des fonctions $\psi_i^H:\mathbf{R}\times\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})\times\mathcal{T}_{i\,C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)\to\mathbf{R}$ telles que

$$N_{U,H}(B)=\frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\sum_{i=1}^r\sum_{b\in\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})}\mu(b)\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\psi_i^H(B,b,y),$$

$$\theta_H(V)\int_0^{\log B}u^{t-1}e^u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\sum_{i=1}^r\sum_{b\in\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})}\mu(b)\int_{\mathcal{T}_{i\,C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)}\psi_i^H(B,b,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

Remarques 7.2.4. — (i) En conclusion on est ramené, au niveau des torseurs universels, à des majorations de termes de la forme

$$\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\phi(y)-\int_{\mathcal{T}_{i\,C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)}\phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

L'équivalence entre ces deux termes peut être vu comme un analogue de la notion de variété strictement d'Hardy-Littlewood introduite par Borovoi et Rudnick dans [**BR**].

(ii) Dans le cas d'une intersection complète dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ on retrouve la méthode permettant de passer du dénombrement des points dans V à celui de points dans

le cône épointé au-dessus de V et donc de déduire la formule (F) de la méthode du cercle lorsque celle-ci s'applique.

(iii) Les torseurs universels ont également été utilisés par Salberger dans sa démonstration de (F) pour les variétés toriques déployées sur **Q** [**Sal**], qui fut ensuite reprise avec un terme d'erreur affiné par la Bretèche [**Bre1**]. Ils les ont également utilisés dans le cas de la surface de Del Pezzo déployée de degré 5 [**Bre2**], première surface de Del Pezzo traitée qui ne soit pas torique.

(iv) Sans rentrer dans les détails de la démonstration, l'obtention de la première formule intégrale ci-dessus repose sur des égalités de la forme

$$\int_{\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)} \phi^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y) \\ = \chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}-\omega_V^{-1})L_S(\omega_V^{-1},T_{\mathrm{NS}},C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))\tau(T_{\mathrm{NS}})\boldsymbol{\omega}_H\Big(\pi\Big(\prod_{v\in M_F}\mathcal{T}(F_v)\Big)\Big),$$

où $\pi : \mathcal{T} \to V$ est un torseur universel et $\tau(T_{\mathrm{NS}})$ désigne le nombre de Tamagawa du tore T_{NS}. On applique alors le théorème fondamental d'Ono [**Ono**] qui donne l'égalité

$$\tau(T_{\mathrm{NS}}) = \frac{\#H^1(F,\mathrm{Pic}(\overline{V}))}{\#Ш^1(F,T_{\mathrm{NS}})}.$$

L'hypothèse faite sur les torseurs universels assure alors que tout point x de l'adhérence de $V(F)$ dans $V(\boldsymbol{A}_F)$ appartient exactement à l'image de $\#Ш^1(F,T_{\mathrm{NS}})$ torseurs universels parmi les $\mathcal{T}_i$. Salberger a été le premier à utiliser de tels arguments dans [**Sal**].

8. Le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel

Notations 8.1. — On se donne un entier $n > 0$ et quatre formes linéaires linéairement indépendantes l_0, l_1, l_2 et $l_3 \in \mathbf{Q}[X_0,\dots,X_n]$. Soit V l'hypersurface de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x)y_i^3 = 0.$$

Théorème 8.2 **(Batyrev et Tschinkel [BT2]).** — *La variété de Fano V est un contre-exemple à la conjecture 3.6.*

Démonstration. — L'idée de la démonstration est la suivante : par le théorème de Lefschetz, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V).$$

La formule attendue pour un ouvert dense assez petit U et une hauteur H relative au faisceau anticanonique après extension éventuelle des scalaires est donc de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB \log B.$$

Mais le faisceau canonique de V est donné par $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(n, 1)$. Autrement dit, on peut prendre comme hauteur relative au faisceau anticanonique

$$H((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)) = H_n((x_0 : \ldots : x_n))^n H_3((y_0 : y_1 : y_2 : y_3)).$$

D'un autre côté, si $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ vérifie

$$\prod_{i=0}^{3} l_i(x_0, \ldots, x_n) \neq 0,$$

alors la fibre V_x au-dessus de x est une surface cubique lisse et la restriction de H à une telle fibre est une hauteur relative à $\mathscr{O}_{V_x}(1) = \omega_{V_x}^{-1}$. Supposons maintenant que F contienne les racines cubiques de l'unité. Alors pour tout x de $\mathbf{P}^n(F)$ tel que les $l_i(x_0, \ldots, x_n)$ soient des cubes dans F, V_x est une surface cubique déployée contenant 27 droites rationnelles qui peut être obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2$ en 6 points rationnels. Si X est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois de ces points, on dispose d'un morphisme

$$V_x \xrightarrow{\pi} X.$$

En étendant une base de $\Gamma(V_x, \omega_{V_x}^{-1})$ en une base de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$, on obtient une hauteur H_x sur X relative à ω_X^{-1} telle que

$$\forall y \in U_x(F), \quad H_{V_x}(y) \leqslant H_X(\pi(y)),$$

où U_x désigne le complémentaire des 27 droites dans V_x. La conjecture étant connue pour X, il existe $C > 0$ tel que pour tout ouvert dense U de V_x, on ait

$$N_{U,H}(B) \geqslant N_{\pi(U),H_x}(B) \geqslant CB(\log B)^3.$$

L'ensemble des points $(x_0 : \ldots : x_n)$ tels que les $l_i(x_i : \ldots : x_n)$ soient des cubes est Zariski dense dans $\mathbf{P}^n$. Donc pour tout ouvert U de V, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant CB(\log B)^3,$$

en contradiction avec la formule attendue. □

Plusieurs directions sont disponibles pour modifier la conjecture de Manin et prendre en compte ce contre-exemple :

Tout d'abord, les fibres de pr_1 dont le rang du groupe de Picard est maximal sont vraisemblablement faiblement accumulatrices. Une première solution consiste donc à faire l'hypothèse arithmétique peu pratique que le complémentaire des variétés faiblement accumulatrices est un ouvert de Zariski dense. C'est l'hypothèse que nous avons faite pour la formule (F).

Une deuxième direction, plus élégante, est de procéder par récurrence sur la dimension de la variété en utilisant des fibrations successives, la conjecture obtenue s'appliquant à chaque fibre. Une telle démarche est explorée par Batyrev et Tschinkel dans [**BT5**].

Enfin, on peut également noter que la réunion W des fibres ayant un groupe de Picard de rang plus grand que deux constitue un ensemble mince en un sens analogue de la définition 1.3 : il existe un morphisme de variétés algébriques sur F, $\pi : X \to V$ tel que W soit contenu dans $\pi(X(F))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle sur F. Dans ce cas le comportement asymptotique devrait pouvoir s'interpréter en termes de $\pi^*(H)$. D'autre part, W ne contient pas tous les points rationnels et il serait naturel de s'interroger sur le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire.

Nous manquons à l'heure actuelle d'exemples pour dire laquelle de ces approches devrait se révéler la plus fructueuse.

9. Extensions

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes placés dans le cas où $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$. Dans leur article [**BT5**], Batyrev et Tschinkel proposent une interprétation de la constante pour des fibrés distincts du fibré anticanonique. Une des difficultés pour faire cela apparaît clairement dans le cas du plan projectif éclaté en trois points : pour $L = \omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{1,3}$, il apparaît une fibration dont les fibres sont faiblement accumulatrices, tandis que si $L = \omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$, l'étude des points de hauteur bornée se ramène à celle d'une variété obtenue par contraction et la constante est à nouveau issue d'une mesure de Tamagawa. Cela amène aux constructions suivantes.

Notations 9.1. — Soit V une bonne variété vérifiant les conditions 3.3. Un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif D sur X est dit rigide si et seulement s'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \dim_F(\Gamma(V, nn_0D)) = 1.$$

Supposons que l'on ait $L = \omega_V^{-1} + D$ avec D rigide, Soit $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ une hauteur d'Arakelov, on peut alors écrire H comme un produit tensoriel $H = H_1 \otimes H_2$ avec $H_1 = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v^1)_{v\in M_F})$ et $H_2 = (D, (\|\cdot\|_v^2)_{v\in M_F})$. Soit m tel que $\dim_F \Gamma(V, mD) = 1$ et soit s une section de mD. Pour toute place v de F, on peut définir une fonction continue $f_v : V(F_v) \to \mathbf{R}$ de la façon suivante : $\|\cdot\|_v^2$ induit une métrique $\|\cdot\|_v^{2\otimes m}$ sur mD et on pose

$$f_v(x) = \left(\|\mathrm{s}(x)\|_v^{2\otimes m}\right)^{1/m}.$$

On considère ensuite les mesures

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v} = f_v \boldsymbol{\omega}_{H_1,v}.$$

Il faut alors utiliser les facteurs de convergence suivants : on considère le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)$ et on utilise les termes locaux de la fonction L associée. Pour toute place finie v en dehors d'un ensemble fini S

$$L_v\left(s, \mathrm{Pic}\left(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - \#\mathbf{F}_v^{-s} \mid \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i) \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L globale associée

$$L_S\left(s, \mathrm{Pic}\left(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\right)\right) = \prod_{v\in M_{F,f} - S} L_v\left(s, \mathrm{Pic}\left(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\right)\right).$$

On pose alors

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)) \text{ si } v \in M_{F,f} - S, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et on définit

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s\to 1} (s-1)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V - \bigcup_{i=1}^r D_i)} L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)) \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}} \prod_{v\in M_F} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}.$$

Cette mesure ne dépend que de la hauteur H. Le nombre

$$\tau_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(F)})$$

donne alors, à un facteur rationnel près, la constante espérée dans le comportement asymptotique.

Dans le cas général, il faut introduire des fibrations en variétés faiblement accumulatrices de sorte que la restriction de H à chacune des fibres soit du type ci-dessus après résolution éventuelle des singularités et la constante s'obtient en sommant sur ces fibres. Dans [**BT5**], Batyrev et Tschinkel montrent des formules asymptotiques avec ces constantes pour les variétés de drapeaux généralisés et les variétés toriques.

Terminons sur un cas qui résiste encore et qui permettrait de tester la validité des différentes approches. Il a été suggéré par Colliot-Thélène et est considéré dans [**BT5**] : il s'agit de l'hypersurface de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ d'équation :

$$X_0 Y_0^2 + X_1 Y_1^2 + X_2 Y_2^2 + X_3 Y_3^2 = 0$$

qui est une fibration en quadriques sur $\mathbf{P}^3(F)$. L'auteur de ce texte a tendance à penser que le comportement asymptotique pour une hauteur relative au fibré anticanonique devrait être de la forme :

$$\begin{array}{ccc} N_{U,H}(B) & \sim & CB\log B \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

avec

$$C = \theta_H(V) + \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^3(F) \\ \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V_x)=2}} \theta_{H_{|V_x}}(V_x),$$

la constante $\theta_{H_{|V_x}}(V_x)$ étant nulle si la fibre n'a pas de points rationnels. Il faudrait donc additionner un terme global à la contribution de chaque fibre.

Je remercie le rapporteur pour ses nombreuses remarques pertinentes.

Références

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), n° 1, 89–108.

[Ba] V. V. Batyrev, *The cone of effective divisors of threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V. V. Batyrev et Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ______, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ______, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT4] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[BT5] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BR] M. Borovoi et Z. Rudnick, *Hardy-Littlewood varieties and semi-simple groups*, Invent. math. **119** (1995), 37–66.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

[Bo] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bre1] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. of Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bre2] ______, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[BV] M. Brion et M. Vergne, *Arrangement of hyperplanes. I : rational functions and Jeffrey-Kirwan residue*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), 715–741.

[Bro] N. Broberg, *Rational points on cubic surfaces*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 13–35.

[CLT1] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ______, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. of Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ______, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), n° 2, 421–452.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS3] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[Co] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[HW] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers, 3rd ed.*, Oxford, Clarendon Press, 1954.

[HB1] D. R. Heath-Brown, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails*, Math. Comp. **59** (1992), 613–623.

[HB2] ———, *Counting rational points on cubic surfaces*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 13–30.

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Ma] Y. I. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math **85** (1993), 37–55.

[MP] A. S. Merkurjev et I. A. Panin, *K-theory of algebraic tori and toric varieties*, K-Theory **12** (1997), n° 2, 101–143.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Né] A. Néron, *L'arithmétique sur les variétés algébriques [d'après A. Weil]*, Séminaire Bourbaki 4-ème année, 1951/52, n° 66.

[Ono] T. Ono, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n° 1, 47–73.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[Pe4] ———, *Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie*, Acta Arith. **152** (2012), n° 2, 185–216.

[PT1] E. Peyre et Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. Comp. **70** (2000), n° 233, 367–387.

[PT2] ———, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces of higher rank*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 275–305.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Sch] W. Schmidt, *Asymptotic formulae for points lattices of bounded determinant and subspaces of bounded height*, Duke Math. J. **35** (1968), 327–339.

[Se1] J.-P. Serre, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne)*, Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446.

[Se2] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n° 3, 429–440.

[SSD] J. B. Slater et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces, I*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch et Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ———, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni et A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[Va] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[We1] A. Weil, *Arithmetic on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444.

[We2] ———, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

15 février 2024

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France • *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

COUNTING POINTS ON VARIETIES USING UNIVERSAL TORSORS

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — Around 1989, Manin initiated a program to understand the asymptotic behaviour of rational points of bounded height on Fano varieties. This program led to the search of new methods to estimate the number of points of bounded height on various classes of varieties. Methods based on harmonic analysis were successful for compactifications of homogeneous spaces. However, they do not apply to other types of varieties. Universal torsors, introduced by Colliot-Thélène and Sansuc in connection with the Hasse principle and weak approximation, turned out to be a useful tool in the treatment of other varieties. The aim of this short survey is to describe the use of torsors in various representative examples.

Résumé. — Vers 1989, Manin initia un programme en vue de comprendre le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés de Fano. Ce programme amena à la recherche de nouvelles méthodes pour estimer le nombre de points de hauteur bornée sur différentes classes de variétés. Les méthodes basées sur l'analyse harmonique s'appliquent avec succès pour les compactifications d'espaces homogènes. Cependant, elles ne s'appliquent pas à d'autres types de variétés. Les torseurs universels, introduits par Colliot-Thélène et Sansuc en relation avec le principe de Hasse et l'approximation faible se sont révélés utiles pour l'étude d'autres variétés. L'objet de cet article est de décrire l'utilisation de ces torseurs pour divers exemples représentatifs.

1. Introduction

If the rational points of a variety V over a number field k are Zariski dense, it is natural to equip V with a height H and to study the asymptotic distribution of

Key words and phrases. — Rational points, heights, universal torsors.

the set of points of bounded height on V. In [**FMT**] and [**BM**], Batyrev, Franke, Manin and Tschinkel gave strong evidence supporting conjectures relating the asymptotic behaviour of the number of points of bounded height on open subsets of V to geometrical invariants of V. This work motivated the development of several methods to estimate the number of points of bounded height for new classes of varieties. One of the most successfull methods was the use of harmonic analysis on adelic groups. For example, it was used by Batyrev and Tschinkel in [**BT1**], [**BT2**], and [**BT4**] to handle the case of projective toric varieties, by Strauch and Tschinkel in [**ST1**] and [**ST2**] for toric bundles over flag varieties, and by Chambert-Loir and Tschinkel in [**CLT1**], [**CLT2**], and [**CLT3**] for equivariant compactifications of vector spaces. However, these kind of methods apply only to equivariant compactifications of homogeneous spaces. One may say that almost all other methods have one step in common, namely the lifting to universal torsors. Universal torsors have been introduced by Colliot-Thélène and Sansuc in [**CTS1**], [**CTS2**], [**CTS3**], and [**CTS4**] to study the Hasse principle and the weak approximation. The interest of universal torsors is that, from an arithmetic point of view, these torsors should be much simpler that the variety itself. As an example, universal torsors over smooth projective toric varities are open subsets of an affine space. When the Fano variety V is a smooth complete intersection of dimension bigger than three in the projective space, the universal torsor may be described as the cone over the variety. In that case, if the dimension of the variety is big enough, the conjectural formula of Manin may be deduced from the formula given by the classical circle method. This reduction, which is described in [**FMT**], may be seen as a particular case of the lifting to the universal torsor. Salberger in [**Sal**] was the first to use explicitly universal torsors in relation with points of bounded height. In particular, he was able to give a new proof of the theorem of Batyrev and Tschinkel for smooth projective split toric varieties over $\mathbf{Q}$. This lifting to the universal torsor was then used by de la Bretèche in [**Bre1**] to give a better estimate for the number of points of bounded height on toric varieties. The lifting to universal torsors was later used by Salberger and de la Bretèche (see [**Bre2**]) to prove the asymptotic formula for the plane blown up in four points over $\mathbf{Q}$. In a more general setting, the author described in [**Pe2**] and [**Pe3**] how the conjectural asymptotic formula lifts naturally to universal torsors.

The aim of this short survey is to explain in a self-contained way the usefulness of universal torsors for counting points of bounded height. In Section 2, we describe the heights used throughout the paper, and in Section 3 we recall the empirical formula for the number of points on Fano varieties. In Section 4 we

give a short list of cases for which this formula holds, in Section 5 we describe the counter-example of Batyrev and Tschinkel. In Section 6 we describe briefly both methods: harmonic analysis and universal torsors. Section 7 is devoted to the case of a hypersurface in $\mathbf{P}^n$. The next section contains the definition of universal torsors in general. In Section 9 we describe Cox's construction of universal torsors for toric varieties and explain how Salberger used it and in Section 10 we turn to the case of the plane blown up in four points, in which case the universal torsor was described by Salberger and Skorobogatov. The last section contains a short description of the generalization of these lifting arguments to a larger class of varieties.

Acknowledgements: I am very grateful to John Voight who typed the notes of my talks at the American Institute of Mathematics on which this survey is based.

2. Heights on projective varieties

Definition 2.1. — The classical exponential height on the projective space over $\mathbf{Q}$ is defined as follows:

$$
\begin{aligned}
H_N \colon \mathbf{P}^N(\mathbf{Q}) &\to \mathbf{R}_{>0} \\
(x_0 : \ldots : x_N) &\mapsto \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|, \qquad \text{if } \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z}, \text{ and} \\ \gcd(x_i) = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

If K is a number field, one generalizes this construction in the following way:

$$
\begin{aligned}
H_N \colon \mathbf{P}^N(K) &\to \mathbf{R}_{>0} \\
(x_0 : \ldots : x_N) &\mapsto \prod_{v \in \Omega_K} \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v
\end{aligned}
$$

where Ω_K is the set of places of K and for any $x \in K_v$,

$$|x|_v = |N_{K_v/\mathbf{Q}_p}(x)|_p \quad \text{if} \quad v \mid p.$$

Any morphism of varieties $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ induces a height

$$
\begin{aligned}
H \colon V(K) &\to \mathbf{R}_{>0} \\
x &\mapsto H_N(\phi(x)).
\end{aligned}
$$

If $U \subset V$ is an open subset, then we would like to describe and understand the asymptotic behavior of the counting function

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(K) \mid H(x) \leqslant B\}.$$

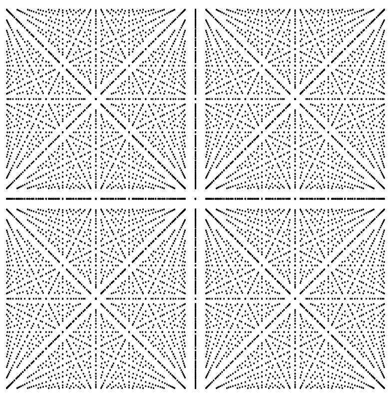
Let us first give a few examples:

Example 2.2. — If $V = \mathbf{P}^N(\mathbf{Q})$ and $\phi = \mathrm{id}$, then an easy Möbius inversion formula gives that

$$N_{V,H}(B) \sim \frac{2^N}{\zeta_{\mathbf{Q}}(N+1)} B^{N+1}$$

as $B \to \infty$ (see Figure 1).

Figure 1. Projective space



This result was later generalized by Schanuel in [**Sc**] to the projective space over any number field (see Figure 2).

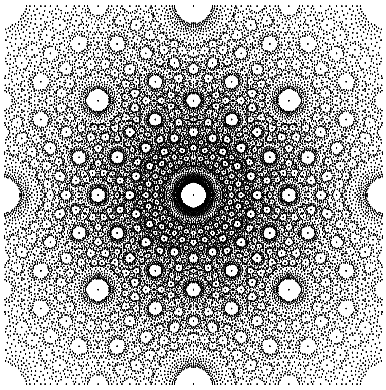
Example 2.3. — If $V = V_1 \times V_2$, and $H_i : V_i(K) \to \mathbf{R}_{>0}$ are heights as above, and $U_i \subset V_i$ is an open subset for each i, then the height $H : V \to \mathbf{R}_{>0}$ defined by $H(x_1, x_2) = H_1(x_1)H_2(x_2)$ corresponds to the Segre embedding of $V_1 \times V_2$. Assume that

$$N_{U_i,H_i}(B) = C_i B(\log B)^{t_i - 1} + O\left(B(\log B)^{t_i - 2}\right).$$

Then, by [**FMT**, Proposition 2]

$$N_{U_1 \times U_2, H}(B) \sim \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!} C_1 C_2 B (\log B)^{t_1+t_2-1}$$

FIGURE 2. Projective line over $\mathbf{Q}(i)$

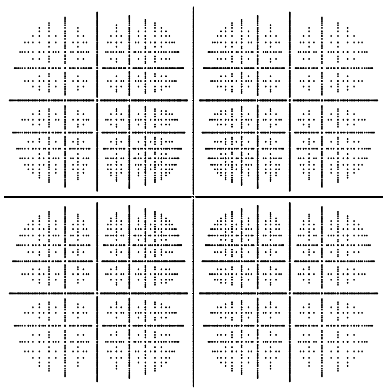


as $B \to \infty$. For $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, we get

$$N_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, H}(B) \sim CB^2 \log B$$

(see Figure 3).

FIGURE 3. Product of two projective lines



Example 2.4. — Let $V \to \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ be the blow up of $\mathbf{P}^2$ at $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, and $P_3 = (0:0:1)$. Then V may be seen as the hypersurface in $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ given by the equation $x_1 x_2 x_3 = y_1 y_2 y_3$. We put

$$H(P_1, P_2, P_3) = H_1(P_1) H_1(P_2) H_1(P_3)$$

which defines a height $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}_{>0}$.

On V, there are 6 exceptional lines $E_{i,j}\colon x_i = 0, y_j = 0$ for $i \neq j$. Let $U = V - \bigcup_{i\neq j} E_{ij}$. We have

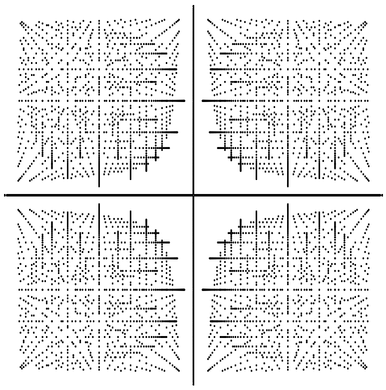
$$N_{E_{i,j},H}(B) \sim CB^2$$

and

$$N_{U,H}(B) \sim \frac{1}{6}\left(\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^4 \left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\right) B(\log B)^3$$

(see Figure 4).

FIGURE 4. The plane blown up



We see that $N_{U,H}(B) = o(N_{E_{i,j},H}(B))$. Thus, in this case, the dominant term of the asymptotic behaviour of $N_{V,H}(B)$ is given by the number of points on the six lines. Therefore it can not reflect the geometry of the whole of V. One of the basic ideas in the interpretation of the asymptotic behaviour of the number of points of bounded height is that one has to consider open subsets to be able to get a meaningful geometric interpretation.

In all examples known to the author for which it is possible to give a precise estimate of the number of points of bounded height, the asymptotic behaviour is of the form

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

with $C \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ and $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, $b \geqslant 1$. Thus one wishes to give a geometric interpretation of a, b and C.

3. Manin's principle

We assume that V is a smooth, geometrically integral projective variety of dimension n over the number field K. We also assume that $\omega_V^{-1} = \Lambda^n T_V$ is very ample (in particular, V is a Fano variety). We look only at the height relative to this anticanonical divisor $\phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N}(1)) = \omega_V^{-1}$, and we assume that $V(K)$ is Zariski dense. The following question is a variant of the conjecture C′ in [**BM**]:

Question 3.1. — *Does there exist a dense open subset $U \subset V$ and a constant $C > 0$ such that*

$$N_{U,H}(B) \sim CB(\log B)^{t-1}$$

as $B \to \infty$, where t is the rank of the Picard group of V. (Since V is Fano, $\operatorname{Pic} V$ *is a free $\mathbf{Z}$-module of finite rank.)*

In fact, it is even possible to give a conjectural interpretation of C, but to describe this conjectural constant, we first need to express the height in terms of metrics.

Notation 3.2. — Let V be a geometrically integral smooth projective variety and H be the height corresponding to an embedding $\phi\colon V \to \mathbf{P}^N_K$. Let L be $\phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N}(1))$. We denote by $s_0, \dots, s_N$ the pull-backs in $\Gamma(V, L)$ of the sections $X_0, \dots, X_N$ of $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N}(1)$. We view L as a line bundle over V and define for any place v of K a v-adically continuous metric $\|\cdot\|_v : L(K_v) \to \mathbf{R}$ by the condition:

$$\forall x \in V(K_v), \quad \forall s \in \Gamma(V, L), \quad \|s(x)\|_v = \inf_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_v .$$

Then the height H may be characterized by

$$\forall x \in V(K), \quad \forall s \in \Gamma(V, L), \quad s(x) \neq 0 \Rightarrow H(x) = \prod_{v \in \Omega_K} |s(x)|_v^{-1}.$$

From now on we assume that the above line bundle L is the anticanonical line bundle ω_V^{-1}. We now define a measure on the adelic space $V(\mathbf{A}_K)$ which coincides with the product $\prod_{v \in \Omega_K} V(K_v)$, since V is projective.

Definition 3.3. — For any place v of K, we normalize the Haar measure $\mathrm{d}x_v$ on K_v by the conditions

— $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$ if v is finite,

— $\mathrm{d}x_v([0, 1]) = 1$ if K_v is isomorphic to $\mathbf{R}$,

— $\mathrm{d}x_v = i\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ if K_v is isomorphic to $\mathbf{C}$.

The measure $\boldsymbol{\omega}_v$ on $V(F_v)$ is defined locally by the formula

$$\boldsymbol{\omega}_v = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v}$$

if $(x_1, \ldots, x_n)$ is a local system of coordinates on $V(K_v)$ in the v-adic topology and where $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ is viewed as a section of ω_V^{-1}. The fact that these expressions glue together follows from the chosen normalization of the absolute value. Indeed the formula for a change of variables is given by

$$\mathrm{d}y_{1,v} \cdots \mathrm{d}y_{n,v} = \left| \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \cdots \mathrm{d}x_{n,v}$$

(see [**We**, §2.2.1]).

Remark 3.4. — At any real place this construction amounts to the classical recipe for producing a measure on a differential variety from a continuous section of its canonical line bundle. At almost all finite places, using ideas of Tamagawa and Weil, one may prove the following proposition:

Proposition 3.5. — *For almost all finite* $\mathfrak{p}$ *in* Ω_K,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(K_{\mathfrak{p}})) = \frac{\# V(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{(\# \mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{\dim V}}$$

where $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ *is the residue field at* $\mathfrak{p}$.

In particular, this implies that the product $\prod_{\mathfrak{p}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(K_{\mathfrak{p}}))$ diverges. Therefore we have to introduce convergence factors. These factors are suggested by the Grothendieck-Lefschetz formula.

Definition 3.6. — We fix a finite set S of bad places containing all archimedean places and all places of bad reduction. Let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K and put $\overline{V} = V \times_K \overline{K}$. Then for $\mathfrak{p} \in \Omega_K - S$ one defines

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\det(1 - q^{-s} \operatorname{Frob}_q \mid \operatorname{Pic}(V_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Q})}$$

where $q = \# \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ and Frob_q is the q-power Frobenius automorphism of the field $\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}$, which induces a linear endomorphism of the $\mathbf{Q}$-vector space $\operatorname{Pic}(V_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Q}$.

The global L-function is given by the Euler product

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_K - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

which converges for $\mathrm{Re}(s) > 1$ and admits a meromorphic continuation to $\mathbf{C}$. We define the convergence factors by

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V})), & \text{if } v \in \Omega_K - S, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The adelic measure on $V(\mathbf{A}_K)$ is then defined by the formula

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \frac{1}{\sqrt{d_K}^{\dim V}} \prod_{v\in\Omega_K} \lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_v,$$

where d_K is the absolute value of the discriminant of K.

Remarks 3.7. —
(i) The convergence of the product $\prod_{v\in\Omega_K}\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_v$ follows from the Lefschetz trace formula and Weil's conjecture about the absolute value of the eigenvalues of the Frobenius operator which was proven by Deligne [**De**].
(ii) By definition, the measure $\boldsymbol{\omega}_H$ does not depend on S.
(iii) Note that $\sqrt{d_K}$ is the volume of $\mathbf{A}_K/K$ for the measure $\prod_{v\in\Omega_K} \mathrm{d}x_v$.

To define the conjectural constant it remains to multiply by two rational factors which are the object of the next definition.

Definition 3.8. — Let $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ be the cone in $\mathrm{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$ generated by the classes of effective divisors and $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ the dual cone defined by

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{y \in \mathrm{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in C^1_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0\}.$$

Then

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!}\int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{\langle \omega_V^{-1}, y\rangle}\mathrm{d}y$$

where the measure on $\mathrm{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^\vee$ is normalized so that the covolume of the dual lattice $\mathrm{Pic}(V)^\vee$ is one. We also consider the integer

$$\beta(V) = \#H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{V})).$$

***Remarks 3.9.* —**
(i) The constant $\alpha(V)$ may also be defined as the volume of the domain

$$\{y \in C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1\}$$

for a suitable measure on the affine hyperplane $\langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1$ (see [**Pe1**, §2.2.5]). Therefore, if there exists a finite family $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ of effective divisors on V such that

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_{\geqslant 0}[D_i]$$

then the constant $\alpha(V)$ is rational.
(ii) The constant $\beta(V)$ was introduced by Batyrev and Tschinkel in [**BT1**].

The conjectural constant is then defined as follows

***Definition 3.10.* —** We define

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(K)}),$$

where $\overline{V(K)}$ denotes the closure of the rational points in the adelic space $V(\mathbf{A}_K)$.

We can now give a refined version of Question 3.1:

***Empirical formula 3.11.* —** *With notation as in Question 3.1, there often exists a dense open subset $U_0 \subset V$ such that for any nonempty subset U of U_0, one has*

$$N_{U,H}(B) \sim \theta_H(V) B(\log B)^{t-1} \tag{F}$$

4. Results

The formula (F) is true in the following cases:
— $V = G/P$, where G is a reductive algebraic group over K and P is a parabolic subgroup of G defined over K. It follows from the work of Langlands on Eisenstein series [**Lan**] (see Franke, Manin, Tschinkel [**FMT**] and [**Pe1**, §6]). We may take $U_0 = V$. In particular, it is true for any quadric.
— V is a smooth projective toric variety, that is an equivariant compactification of an algebraic torus (see [**Pe1**, §8–11] for particular cases, Batyrev and Tschinkel [**BT1**], [**BT2**], and [**BT4**], Salberger [**Sal**], and de la Bretèche [**Bre1**]). One may take the open orbit as U_0. This case includes the plane blown up in 1, 2, or 3 points, and Hirzebruch surfaces.
— V is an equivariant compactification of an affine space for the action of the corresponding vector space (see Chambert-Loir, Tschinkel [**CLT1**], [**CLT2**], and [**CLT3**]).

— $V = \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ blown up at $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)$ (see Salberger for an upper bound, and de la Bretèche [**Bre2**]).

The formula (F) is compatible with:

— the circle method. In particular, it is true if $V \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ is a smooth hypersurface of degree d, if $n > 2^d(d-1)$ (see Birch [**Bir**]);

— products of varieties (see [**FMT**], [**Pe1**, §4]);

— numerical tests for some diagonal cubic surfaces [**PT1**], [**PT2**];

— lower bounds for some cubic surfaces (see Slater and Swinnerton-Dyer [**SSD**]). The problem of finding an optimal upper bound for cubic surfaces is still open.

All these examples support the empirical formula. However, there are also counterexamples, which will be discussed in the next section.

5. The counterexample of Batyrev and Tschinkel

Take $V \subset \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ defined by

$$x_0y_0^3 + x_1y_1^3 + x_2y_2^3 + x_3y_3^3 = 0.$$

We have

$$\mathrm{Pic}(V) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

and $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(3,1)$. In particular, V is a Fano variety. We may use the height

$$H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}_{>0}$$

$$((x_0 : \ldots : x_3), (y_0 : \ldots : y_3)) \mapsto H_3(x)^3 H_3(y).$$

If (F) is true for V then there is an open subset U and a constant C such that

$$N_{U,H}(B) \sim CB \log B$$

as $B \to \infty$. There is a projection onto the first coordinate $\pi_1 : V \to \mathbf{P}^3$. If $(x_0 : \ldots : x_3) \in \mathbf{P}^3$ is such that $\prod_{i=0}^3 x_i \neq 0$, then $\pi_1^{-1}(x)$ is a smooth cubic surface; if $x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0$ are cubes, then $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(\pi_1^{-1}(x)) = 4$. If (F) is true for the fiber, then

$$N_{\pi^{-1}(x),H}(B) \sim C_x B (\log B)^3$$

as $B \to \infty$, but these fibers are Zariski dense, so the answer to Question 3.1 can not be positive for both V and the fibers. In fact, Batyrev and Tschinkel prove the following more precise result:

Theorem 5.1 **(Batyrev and Tschinkel [BT3]).** — *If K contains a nontrivial cube root of unity, then for all nonempty $U \subset V$, (F) does not hold for U.*

6. Methods of counting

We now return to the methods used to prove the results given in Section 4.

Harmonic analysis: Assume that there exists a dense open subset U of V which is of the form G/H, where G is a reductive algebraic group, look at the height zeta function

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

which converges when $\mathrm{Re}(s) \gg 0$.

The asymptotic behavior of $N_{U,H}(B)$ is given by the meromorphic properties of $\zeta_{U,H}(s)$. If $U = G$, one may use a Poisson formula. If $V = G/P$, $\zeta_{U,H}(s)$ is an Eisenstein series and we may apply the work of Langlands. In both cases the problem may be handled using harmonic analysis.

These methods do not apply when the variety is not an equivariant compactification of a homogeneous space. All other cases appearing in the list of section 4 have one preliminary step in common: they all use a lift to universal torsors.

Universal torsors: implicit in the case of a hypersurface in $\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$, it was made explicit by Salberger in [**Sal**] in his alternative treatment of split toric varieties over $\mathbf{Q}$; it was then used by Salberger and de la Bretèche in the case of the plane blown up in 4 points. The end of this survey is devoted to the description of this preliminary step in those cases.

7. A basic example

In the case of hypersurfaces of large dimension and small degree, the principle of Manin follows from the following deep theorem which is based upon the Hardy-Littlewood circle method.

Theorem 7.1 **(Birch [Bir]).** — *Let $f \in \mathbf{Z}[x_0, \dots, x_N]$ be homogeneous of degree d, and let $W \subset \mathbf{A}^{N+1} - \{0\}$ be the cone defined by $f = 0$. Assume that:*

(i) *W is smooth,*

(ii) *$W(\mathbf{R}) \neq \varnothing$, and for all primes p, $W(\mathbf{Q}_p) \neq \varnothing$,*

(iii) *$N > 2^d(d-1)$.*

Let

$$M_W(B) = \#\left\{ x \in \mathbf{Z}^{N+1} - \{0\} \;\middle|\; f(x) = 0 \text{ and } \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i| \leqslant B \right\}.$$

Then there exist explicit $C > 0$ *and* $\delta > 0$ *such that*

$$M_W(B) = CB^{N+1-d} + O(B^{N+1-d-\delta}).$$

Let $\pi : \mathbf{A}^{N+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^N$, and let $V = \pi(W)$ be the corresponding projective hypersurface. Then $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(N+1-d)$, so we may take the height

$$H(x) = H_N(x)^{N+1-d}$$

where H_N was defined in Section 2. Then

$$N_{V,H}(B) = \frac{1}{2}\#\left\{ x \in \mathbf{Z}^{N+1} - \{0\} \;\middle|\; \begin{cases} f(x) = 0, \\ \sup |x_i|^{N+1-d} \leqslant B, \\ \gcd(x_i) = 1. \end{cases} \right\}.$$

Using Möbius inversion, we get

$$N_{V,H}(B) = \frac{1}{2}\sum_k \mu(k)\#\left\{ x \in (k\mathbf{Z})^{N+1} - \{0\} \;\middle|\; \begin{cases} f(x) = 0, \\ \sup_i |x_i|^{N+1-d} \leqslant B \end{cases} \right\},$$

where $\mu : \mathbf{Z}_{>0} \to \{-1, 0, 1\}$ is the Möbius function. Then

$$\begin{aligned} N_{V,H}(B) &= \frac{1}{2}\sum_k \mu(k) M_W\left(\frac{B^{1/(N+1-d)}}{k}\right) \sim \frac{C}{2}\sum_k \frac{\mu(k)}{k^{N+1-d}} B \\ &= \frac{C}{2\zeta(N+1-d)} B. \quad \square \end{aligned}$$

The motivation behind the introduction of universal torsors was to generalize this simple descent argument to other varieties.

8. Universal torsors

Let V be a smooth, geometrically integral projective variety over K, where $\operatorname{char} K = 0$. Assume (for simplicity) that V is Fano, which means that ω_V^{-1} is ample. Thus, if $\overline{K}$ is an algebraic closure of K, and $\overline{V} = V \times_K \overline{K}$, then $\operatorname{Pic}(\overline{V})$ is a free abelian group of finite rank.

Assume $K = \overline{K}$ first. Let $L_1, \dots, L_t$ be line bundles on V such that $[L_1], \dots, [L_t]$ form a basis of $\operatorname{Pic}(V) = \operatorname{Pic}(\overline{V})$. Let $L_i^\times = L_i$ — zero section. Consider

$$\pi : L_1^\times \times_V L_2^\times \times_V \cdots \times_V L_t^\times \to V.$$

On the left we have an action of $\mathbf{G}_m^t$, this is 'the' *universal torsor* of V.

Proposition 8.1. — *If $K = \overline{K}$, the universal torsor constructed above does not depend, up to isomorphism, on the chosen basis of the Picard group.*

Proof. — Let $L'_1, \dots, L'_t$ be line bundles on V whose classes $[L'_1], \dots, [L'_t]$ form another basis of the Picard group of V. Let $M = (m_{i,j})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ be the matrix such that

$$[L'_i] = \sum_{i=1}^{t} m_{j,i}[L_j].$$

In other words, for each i in $\{1, \dots, t\}$ we may fix an isomorphism

$$\psi_i : \bigotimes_{j=1}^{t} L_j^{\otimes m_{j,i}} \xrightarrow{\sim} L'_i.$$

But if $E_1, \dots, E_m$ are one-dimensional vector spaces and $k_1, \dots, k_m$ integers there is a canonical map

$$\begin{array}{ccc} \times_{i=1}^{m}(E_i - \{0\}) & \to & \otimes_{i=1}^{m} E_i^{\otimes k_i} \\ (y_1, \dots, y_m) & \mapsto & \otimes_{i=1}^{m} y_i^{\otimes k_i} \end{array}$$

where for any vector space E of dimension one, and any non-zero y in E, $y^{\otimes -1}$ is the unique element of the dual $E^\vee$ of E such that $y^{\otimes -1}(y) = 1$. In that way, composing with ψ_i, we get maps

$$\rho_i : \mathop{\times}_{j=1}^{t} L_j^\times \to L'^\times_i.$$

This map is equivariant for the action of $\mathbf{G}_m^t$ in the following sense:

$$\forall (z_1, \dots, z_t) \in \mathbf{G}_m^t(K),\ \forall y \in \mathop{\times}_{j=1}^{t} L_j^\times(K),\ \rho_i((z_1, \dots, z_t) \cdot y) = \prod_{j=1}^{t} z_j^{m_{j,i}} \cdot \rho_i(y).$$

Note that if ρ'_i is another map from $\times_{j=1}^{t} L_j^\times$ to $L'^\times_i$ with the same equivariance property, then there is a section $s \in \Gamma(V, \mathbf{G}_m)$ such that

$$\forall y \in \mathop{\times}_{j=1}^{t} L_j^\times(K), \quad \rho'_i(y) = s(\pi(y)) \cdot \rho_i(y).$$

But, since V is projective, $\Gamma(V, \mathbf{G}_m) = K^*$ and ρ_i is unique up to multiplication by a constant. The maps ρ_i yield a map

$$\rho : \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i^\times \to \mathop{\times}_{i=1}^{t} L'^\times_i.$$

The matrix M defines a morphism of algebraic groups

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{M} : \mathbf{G}_m^t & \to & \mathbf{G}_m^t \\ (z_1, \dots, z_t) & \mapsto & (\prod_{j=1}^t z_j^{m_{j,i}})_{1 \leqslant i \leqslant t} \end{array}$$

and the map ρ is equivariant with respect to $\widetilde{M}$:

$$\forall z \in \mathbf{G}_m^t(K), \quad \forall y \in \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i^\times(K), \quad \rho(z \cdot y) = \widetilde{M}(z) \cdot \rho(y).$$

Moreover, if ρ' is another map with the same equivariance property, then there is $z \in \mathbf{G}_m^t(K)$ such that $\rho' = z.\rho$. Similarly we may define a map

$$\tau : \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i'^\times \to \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i^\times$$

which is equivariant with respect to $\widetilde{M}^{-1}$. Thus the composite map

$$\tau \circ \rho : \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i{}^\times \to \mathop{\times}_{i=1}^{t} L_i^\times$$

is equivariant with respect to the identity map and therefore coincides with the action of an element of $\mathbf{G}_m^t(K)$. Thus $\tau \circ \rho$ and $\rho \circ \tau$ are isomorphisms. $\square$

For arbitrary fields, a universal torsor may be described as a K-structure on the above torsor. Let us define this notion more precisely:

Recall that there is a contravariant equivalence of categories between the category of algebraic tori, that is, algebraic groups T such that $\overline{T}$ is isomorphic to $\mathbf{G}_{m,\overline{K}}^{\dim T}$, and the category of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-lattices, that is, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-modules which are free abelian groups of finite rank. The functors giving the equivalence are

$$T \mapsto X^*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{alg.gp.}}(\overline{T}, \mathbf{G}_m) \quad \text{and} \quad M \mapsto \mathrm{Spec}(\overline{K}[M])^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}.$$

Definition 8.2. — Let the Néron-Severi torus, T_{NS}, be the torus corresponding to the $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-lattice $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$.

If G is an algebraic group over K, then a *G-torsor* is a faithfully flat map $\pi : \mathscr{T} \to V$ with an action of G on $\mathscr{T}$ such that locally for the faithfully flat topology, $\mathscr{T} \times_V U \simeq G \times U$, where the isomorphism is compatible with the action of G. (In another language, these are principal homogeneous spaces.)

A T_{NS}-torsor $\mathscr{T} \to V$ is said to be *universal* if $\overline{\mathscr{T}} \to \overline{V}$ is isomorphic as a torsor to $L_1^* \times_V \cdots \times_V L_t^* \to V$.

Why are these universal torsors interesting? The following facts are due to Colliot-Thélène and Sansuc, who introduced this notion.

Proposition 8.3 **(Colliot-Thélène, Sansuc).** — *With notations as above,*

— *For all $x \in V(K)$, there exists a unique (up to isomorphism) universal torsor $\pi : \mathscr{T} \to V$ such that $x \in \pi(\mathscr{T}(K))$.*

— *If K is a number field, there exist up to isomorphism only finitely many universal torsors $\pi : \mathscr{T} \to V$ such that $\mathscr{T}(K) \neq \varnothing$.*

This proposition gives us a nice decomposition of the set of rational points

$$V(K) = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \pi_i(\mathscr{T}_i(K)).$$

Heuristic 8.4. — *From the arithmetical point of view, universal torsors should be much simpler than the variety V.*

This heuristic can be justified by the following statement:

Proposition 8.5 **(Colliot-Thélène, Sansuc).** — *If $\mathscr{T}^c$ is a smooth projective compactification of a universal torsor $\mathscr{T} \to V$, then $\mathscr{T}^c(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \mathscr{T}^c(\boldsymbol{A}_K)$. In other words, there is no Brauer-Manin obstruction to the Hasse principle or weak approximation.*

Example 8.6. — Let $V \subset \mathbf{P}^N$ be a hypersurface over $\mathbf{Q}$ with $\dim V \geqslant 3$, $\deg V = d$, and $N + 1 - d > 0$. Then the cone $W \subset \mathbf{A}^{N+1} - \{0\}$ above V is, up to isomorphism, the unique universal torsor over V.

9. Toric varieties

The following construction is due to Cox. Let T be an algebraic torus and V a smooth projective equivariant compactification of T. This means that there is an action of T on V, an open subset $U \subset V$, and an isomorphism from U to T compatible with the actions of T.

Denote by $\Sigma(1)$ the set of orbits of codimension 1 in $\overline{V}$. Then there is an exact sequence of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-modules

$$\begin{array}{c} 0 \to X^*(T) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad e_\sigma \mapsto [D_\sigma] \end{array}$$

where D_σ is the closure of the orbit σ in $\overline{V}$, which is an irreducible divisor of $\overline{V}$. Moreover, we have

$$\omega_V^{-1} = \sum_{\sigma \in \Sigma(1)} [D_\sigma].$$

By duality, we get an exact sequence of tori

$$1 \to T_{\mathrm{NS}} \to T_{\Sigma(1)} \xrightarrow{\pi} T \to 1.$$

But $T \subset V$ and we want to extend the map π to get a torsor over V. We do this in the following way: We consider the affine space

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \mathrm{Spec}\Big((\overline{K}[X_\sigma]_{\sigma \in \Sigma(1)})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \Big)$$

and a closed subset $F \subset \mathbf{A}_{\Sigma(1)}$, defined over $\overline{K}$ as a union of affine subspaces,

$$\overline{F} = \bigcup_{\substack{I \subset \Sigma(1) \\ \bigcap_{\sigma \in I} D_\sigma = \varnothing}} \Big(\bigcap_{\sigma \in I} (X_\sigma = 0) \Big).$$

Note that $\overline{F}$ is stable under the action of the Galois group, so it is defined over K. We take $\mathscr{T} = \mathbf{A}_{\Sigma(1)} - F$.

Claim 9.1. — *For all $x \in T(K)$, the map*

$$\begin{aligned} T_{\Sigma(1)} &\to T \\ t &\mapsto \pi(t) \cdot x \end{aligned}$$

extends to a map $\mathscr{T} \to V$ sending $1 \in T_{\Sigma(1)}$ to x.

Theorem 9.2 **(Colliot-Thélène, Sansuc, Salberger, Madore)**
The above construction gives a bijection between $T(K)/T_{\Sigma(1)}(K)$ and isomorphism classes of universal torsors over V.

We return now to the problem of counting points. We assume that $K = \mathbf{Q}$, that the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on $X^*(T)$ and $\Sigma(1)$ are trivial, and that ω_V^{-1} is generated by global sections.

Then we consider

$$\mathscr{M} = \{ m \in \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \mid \forall \sigma \in \Sigma(1),\ m_\sigma \geqslant 0 \text{ and } \rho(m) = \omega_V^{-1} \in \mathrm{Pic}\, V \}.$$

For all $m \in \mathscr{M}$, let $X^m \in \mathbf{Q}[X_\sigma]_{\sigma \in \Sigma(1)}$ be the corresponding monomial. We lift the height to the universal torsor by

$$\widetilde{H}((y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma(1)}) = \sup_{m \in \mathscr{M}} |X^m((y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma(1)})|.$$

***Theorem 9.3* (Salberger [Sal]). —** *There exists a height H relative to ω_V^{-1} such that $N_{U,H}(B) = \widetilde{N}(B)/2^{\dim T_{\mathrm{NS}}}$, where $\widetilde{N}(B)$ is the number of $(y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma(1)}$ in $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ such that*

$$\begin{cases} \widetilde{H}(y) \leqslant B, \\ \forall I \subset \Sigma(1),\ \bigcap_{\sigma\in I} D_\sigma = \varnothing \Rightarrow \gcd_{\sigma\in I}(y_\sigma) = 1. \end{cases}$$

To prove Manin's conjecture in that case one may then proceed as follows: By use of a Möbius inversion formula, reduce to give an estimate

$$\#\left\{(y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma(1)} \in (\mathbf{Z} - \{0\})^{\Sigma(1)} \,\middle|\, \widetilde{H}(y) \leqslant B\right\}.$$

and prove that when B goes to $+\infty$ this is asymptotic to

$$\mathrm{vol}\left(\left\{(y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma(1)} \in \mathbf{R}^{\Sigma(1)} \,\middle|\, \widetilde{H}(y) \leqslant B\right\}\right) \sim CB(\log B)^{\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}\, V - 1},$$

which proves the conjecture in this case.

10. The plane blown up in 4 points

The construction is due to Salberger and Skorobogatov. We consider in this section the blowup $\pi : V \to \mathbf{P}^2$ of $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$, and $P_4 = (1:1:1)$. The exceptional divisors on V are $E_{i,5} = \pi^{-1}(P_i)$ and $E_{i,j}$, the strict pullback of the line through P_k and P_l if $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Then $E_{i,j} \cap E_{k,l} = \varnothing$ if and only if $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \varnothing$. Then we consider the Grassmannian variety $\mathrm{Gr}(2,5)$ of the planes in $\mathbf{Q}^5$; we may embed it into $\mathbf{P}(\Lambda^2\mathbf{Q}^5)$. The cone above it, $W \subset \Lambda^2\mathbf{Q}^5$ is given by the Plücker relations:

$$\begin{cases} X_{1,2}X_{3,4} - X_{1,3}X_{2,4} + X_{1,4}X_{2,3} &= 0, \\ X_{1,2}X_{3,5} - X_{1,3}X_{2,5} + X_{1,5}X_{2,3} &= 0, \\ X_{1,2}X_{4,5} - X_{1,4}X_{2,5} + X_{1,5}X_{2,4} &= 0, \\ X_{1,3}X_{4,5} - X_{1,4}X_{3,5} + X_{1,5}X_{3,4} &= 0, \\ X_{2,3}X_{4,5} - X_{2,4}X_{3,5} + X_{2,5}X_{3,4} &= 0. \end{cases}$$

Indeed, the vector space $\Lambda^2\mathbf{Q}^5$ has dimension 10, and we take $X_{i,j}$ as coordinates corresponding to the basis elements $e_i \wedge e_j$ for $i \neq j$. We consider the closed subset $F \subset W$ given by

$$F = \bigcup_{\{i,j\}\cap\{k,\ell\}\neq\varnothing} ((X_{i,j} = 0) \cap (X_{k,\ell} = 0)),$$

and define $\mathscr{T} = W - F$. There is an action $\mathbf{G}_m^5 \subset GL_5(\mathbf{Q})$ on $\mathscr{T}$, and $\mathscr{T}/\mathbf{G}_m^5$ is isomorphic to V and $\mathscr{T} \to V$ is up to isomorphism the only universal torsor.

We put

$$\mathscr{M} = \left\{ (m_{i,j})_{i<j} \in \mathbf{Z}^{10} \;\middle|\; \sum m_{i,j} E_{i,j} = \omega_V^{-1} \right\}$$

and for $m \in \mathscr{M}$, $X^m \in \mathbf{Q}[X_{i,j}, i < j]$. Then we may lift the height by using

$$\widetilde{H}((y_{i,j})) = \sup_{m \in \mathscr{M}} |X^m(y)|.$$

Proposition 10.1 **(Salberger).** — *There is a height H relative to ω_V^{-1} such that $N_{U,H}(B) = \widetilde{N}(B)/2^{\dim T_{\mathrm{NS}}}$ where $\widetilde{N}(B)$ is the number of $(y_{i,j})$ in $W(\mathbf{Z})$ such that*

$$\begin{cases} \widetilde{H}(y_{i,j}) \leqslant B, \\ \{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \varnothing \Rightarrow \gcd(y_{i,j}, y_{k,l}) = 1. \end{cases}$$

This description, which was made by Salberger in order to get an upper bound for the number of points of bounded height, was also the first step in the proof of the empirical formula (F), given by de la Bretèche in [**Bre2**].

11. Generalization

The papers [**Pe2**] and [**Pe3**], showed how to generalize the lifting described in Sections 7, 9, and 10. The first fact enabling this generalization is the existence of a gauge form on each universal torsor:

Proposition 11.1. — *If V is a Fano variety over K, and $\mathscr{T}$ a universal torsor over V, then*

— *the canonical bundle $\omega_{\mathscr{T}}$ is trivial,*

— $\Gamma(\mathscr{T}, \mathbf{G}_m) = K^*$.

As usual, a gauge form yields a measure:

Definition 11.2. — Up to a constant, there exists a unique non-vanishing section of the canonical line bundle. Let $\breve{\omega}_{\mathscr{T}}$ be such a section. This section defines for any place v of K a measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ on $\mathscr{T}(K_v)$ which is locally given by

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v} = \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \breve{\omega}_{\mathscr{T}} \right\rangle \right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \cdots \mathrm{d}x_{N,v},$$

where $(x_1,\dots,x_N)$ is an analytic local system of coordinates on $\mathscr{T}(K_v)$ for v-adic topology. We then define a canonical measure on $\prod_{v\in\Omega_K}\mathscr{T}(K_v)$ by

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}} = \frac{1}{\sqrt{d_K}^{\dim\mathscr{T}}}\prod_{v\in\Omega_K}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}.$$

***Remarks 11.3.* —**

(i) If V is a hypersurface in $\mathbf{P}^n$, the measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ coincides with the classical Leray measure on $\mathscr{T}(K_v)$.

(ii) The measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}$ does not depend on the choice of the section $\check{\omega}_{\mathscr{T}}$.

(iii) The volume $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}(\prod_{v\in\Omega_K}\mathscr{T}(K_v))$ is infinite, but if $S\subset\Omega_K$ is a finite set of places containing the archimedean ones and $\mathscr{T}$ a model of $\mathscr{T}$ over the ring of S-integers $\mathscr{O}_S$, then the product $\prod_{v\in\Omega_K-S}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(\mathscr{T}(\mathscr{O}_v))$ converges.

Let $\mathscr{T}_1,\dots,\mathscr{T}_r$ be torsors representing all isomorphism classes of universal torsors over V having a rational point. It is then possible to construct families of integrable functions $\Upsilon_{i,j,B}:\prod_{v\in\Omega_K}\mathscr{T}(K_v)\to\mathbf{R}_{>0}$ such that upper bounds for the difference

$$\left|\sum_{y\in\mathscr{T}_i(K)}\Upsilon_{i,j,B}(y)-\int_{\prod_{v\in\Omega_K}\mathscr{T}(K_v)}\Upsilon_{i,j,B}(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}\right|$$

yield an upper bound for the difference

$$|N_{U,H}(B)-\theta_H(V)B(\log B)^{t-1}|.$$

The liftings described in previous sections may be seen as particular cases of this descent argument.

References

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT3] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT4] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), n° 1, 15–53.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bre1] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. of Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bre2] ______, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[CLT1] A. Chambert-Loir and Y. Tschinkel, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ______, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. of Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ______, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), n° 2, 421–452.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ______, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[CTS3] ______, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS4] ______, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ______, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ______, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[PT1] E. Peyre and Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. Comp. **70** (2000), n° 233, 367–387.

[PT2] ______, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces of higher rank*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 275–305.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[SSD] J. B. Slater and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces, I*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch and Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ______, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

February 15, 2024

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université de Grenoble I, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France • *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

RATIONAL POINTS AND CURVES ON FLAG VARIETIES

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — One of the main tool to study the asymptotic behaviour of points of bounded height on projective varieties over a number field K is the height zeta function defined by the series

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

where $V(K)$ denotes the set of rational points of V and $H : V(K) \to \mathbf{R}$ is a height on V. If V is a flag variety, Franke, Manin and Tschinkel proved that one may normalize the height so that the height zeta function is an Eisenstein series. One may then apply Langland's work to ascertain the meromorphic properties of this function. This method apply also over global fields of positive characteristic where Eisenstein series have been studied by Morris.

In a joint work with Antoine Chambert-Loir, we are extending this framework to motivic height zeta functions, using results of Kapranov. This generalization makes explicit strong links existing between the asymptotics of points of bounded height and the moduli spaces of curves on the considered varieties.

Résumé. — L'un des meilleur outils pour l'étude du comportement asymptotique des points de hauteur bornée sur les variétés projectives sur un corps de nombres K est la fonction zêta des hauteurs définie par la série complexe

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

où $V(K)$ désigne l'ensemble des points rationnels de V et $H : V(K) \to \mathbf{R}$ une hauteur sur V. Si V est une variété de drapeau, Franke, Manin et Tschinkel ont démontré que l'on peut normaliser la hauteur de sorte que la fonction zêta des hauteurs soit une série d'Eisenstein. Il est alors possible d'appliquer les travaux de Langlands pour montrer des propriétés de méromorphie de cette fonction. Cette méthode s'applique aussi aux corps globaux de caractéristique finie pour lesquels les séries d'Eisenstein ont été étudiées par Morris.

Dans un travail en cours avec Antoine Chambert-Loir, nous étendons cette étude aux fonctions zêta des hauteurs motiviques, en utilisant des résultats de Kapranov. Cette généralisation souligne les liens profonds existant entre le comportement symptotique des points de hauteur bornée et les espaces de modules de courbes sur ces variétés.

Joint work in progress with Antoine Chambert-Loir

1. Heights

It is well known that there are many analogies between the rational points on a variety V defined over a number field K and the rational curves on a variety V over $\mathbf{C}$ and that one of the simplest way to make these links more precise is to consider rational points on a global field of finite characteristic.

In this talk we shall consider the three settings simultaneously:

(1) Over $\mathbf{Q}$ we may define several natural heights on the projective space, for example the height $H_N : \mathbf{P}^N(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ defined by

$$H_N((x_0 : \ldots : x_N)) = \sqrt{x_0^2 + \cdots + x_N^2},$$

if $x_0, \ldots, x_N$ are coprime integers. The corresponding logarithmic height is $h_N = \log H_N$.

More generally, if K is a number field, let M_K be the set of places of K. For any place v of K, we denote by K_v the completion of K for the topology defined by v and the absolute value $|\cdot|_v$ is normalized by $\mathrm{d}(ax)_v = |a|_v \mathrm{d}x_v$ for any Haar measure $\mathrm{d}x_v$. We then choose v-adic norms $||\cdot||_v : K_v^{N+1} \to \mathbf{R}$, for example we may define the norm $||(x_0, \ldots, x_N)||_v$ as $\sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v$ if v is a finite place, as

$\sqrt{\sum_{i=0}^{N} x_i^2}$ if K_v is isormorphic to $\mathbf{R}$, and as $\sum_{i=0}^{N} x_i \overline{x}_i$ if K_v is isomorphic to $\mathbf{C}$. Then $H_N : \mathbf{P}^N(K) \to \mathbf{R}$ is defined by

$$H_N(x_0 : \ldots : x_N) = \prod_v ||(x_0, \ldots, x_N)||_v$$

and $h_N = \log H_N$.

(2) If $K = \mathbf{F}_q(\mathscr{C})$ where $\mathscr{C}$ is a smooth projective curve of genus g over $\mathbf{F}_q$, then there is a bijection from the set of points in the projective space $\mathbf{P}^N(K)$ to the set $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}, \mathbf{P}^N_{\mathbf{F}_q})$. Let us denote by $\tilde{x}$ the image of a point x. Then

$$h_N(x) = \deg(\tilde{x}^*(\mathscr{O}(1)))$$

where $\tilde{x}^*(\mathscr{O}(1))$ belongs to the Picard group of the curve $\mathscr{C}$. We also put $H_N = q^{h_N}$.

(3) Similarly, if $K = k(\mathscr{C})$ where $\mathscr{C}$ is a smooth projective curve over a field k, we define

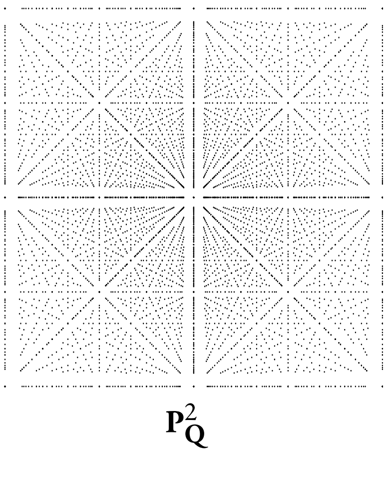
$$h_N(x) = \deg(\tilde{x}^*(\mathscr{O}(1)))$$

where $\tilde{x}^*(\mathscr{O}(1))$ belongs to the Picard group of the curve $\mathscr{C}$.

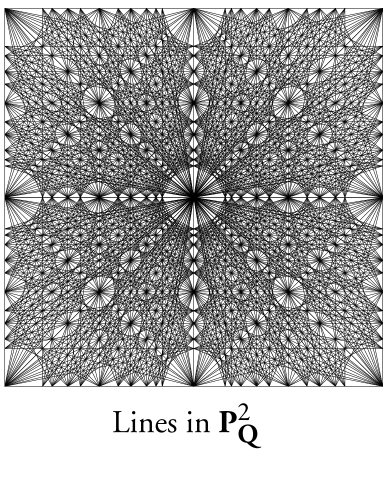
In all settings, if V is a variety over K, any morphism $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ induces a map $h : V(K) \to \mathbf{R}$ defined by $h = h_N \circ \phi$. We want to study asymptotically the set

$$\{ x \in V(K) \mid h(x) < \log(B) \}$$

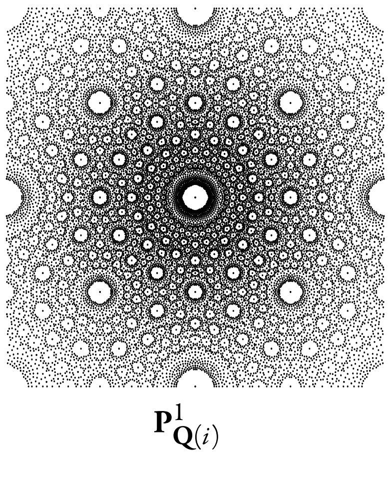
as B goes to $+\infty$. To illustrate this, I represented such sets as points on the projective plane, as lines on the plane and as points in $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}(i)}$.



$\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$



Lines in $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$



$\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}(i)}$

2. Height zeta functions

One of the main tool to study the asymptotic behaviour of the number of points of bounded height is the height zeta function.

(1) Over a number field, it is defined for any open subset U of V by

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

where this series converges.

(2) Similarly, over $\mathbf{F}_q(T)$, for any open subset U of V

$$Z_{U,h}(T) = \sum_{x \in U(K)} T^{h(x)} \quad \text{and} \quad \zeta_{U,H}(s) = Z_{U,h}(q^{-s}).$$

(3) In the functional setting, we are in fact interested in moduli spaces of morphisms from the curve $\mathscr{C}$ to the variety V. Let $\mathscr{M}_k$ be the group generated by symbols $[V]$ for V variety over k with the relations $[V] = [V']$ if V and V' are isomorphic and

$$[V] = [F] + [V - F]$$

for any closed subset F of V.

If U is an open subset of V, for any integer n, there exists a variety U_n over k such that for any extension k' of k, there is a functorial bijection from $U_n(k')$ to the set of points of $U(k'(\mathscr{C}))$ of height n. The motivic height zeta function is the formal series in $\mathscr{M}_k[[T]]$ defined by

$$Z^{\mathrm{mot}}_{U,h}(T) = \sum_{n \in \mathbf{N}} [U_n] T^n.$$

If k is a finite field, one may go from the functional setting to the classical one by using the map

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_k & \to & \mathbf{Z} \\ [V] & \mapsto & \#V(\mathbf{F}_q). \end{array}$$

This map sends $Z^{\mathrm{mot}}_{U,h}$ to the classical zeta function $Z_{U,h}$.

3. The case of flag varieties

For flag varieties, one may use the fact, first discovered by Franke, Manin and Tschinkel [**FMT**] that, in that case, the height zeta function coincides with an Eisenstein series. One may then apply the difficult and deep results obtained for Eisenstein series by Langlands over number fields [**Lan**], by Harder [**Harder**]

and Morris ([**Mo1**] and [**Mo2**]) over global fields of finite characteristic and by Kapranov [**Ka**] in the functional setting.

Notations 3.0.1. — Let G be a split semi-simple simply-connected algebraic group over K, let P be a smooth parabolic subgroup of G, let B be a Borel subgroup of G contained in P and let T be a split maximal torus of G contained in B. We denote by Φ the root system of T in G, by Φ^+ the positive roots corresponding to B and by Δ the corresponding basis of the root system. Let Φ_P be the roots of T in the Lie algebra $\mathrm{Lie}(R_u(P))$ of the unipotent radical of P. The set Φ_P is contained in the set of positive roots. We also put $\Delta_P = \Phi_P \cap \Delta$.

Let $V = G/P$. There exists a canonical isomorphism from the character group $X^*(P)$ of P to $\mathrm{Pic}(V)$ sending the character χ to the line bundle $\mathscr{L}_\chi = G \times^P \mathbf{A}^1_K$ where P acts on the affine line via χ. There is also an injective restriction map $\mathrm{res} : X^*(P) \to X^*(T)$. Let ρ_P (resp. ρ_B) be the half-sum of the roots in Φ_P (resp. Φ^+) then $2\rho_P$ belongs to the image of $X^*(P)$ and we denote also by $2\rho_P$ its inverse image in $X^*(P)$. The line bundle $\mathscr{L}_{2\rho_P}$ is isomorphic to the anticanonical line bundle ω_V^{-1} and is very ample. From now on, all the heights used will be relative to ω_V^{-1}.

(1) In the number field case, it is possible to choose the height on V so that the height zeta function coincides with the value of an Eisenstein series:

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in G/P(K)} H(x)^{-s} = E_P^G((2s-1)\rho_P, e).$$

Franke, Manin and Tschinkel then applied the work of Langlands and have proven the following results:

- $\zeta_{V,H}(s)$ converges for $\mathrm{Re}(s) > 1$,
- It extends to a meromorphic function on the projective plane,
- It has a pole of order $t = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V)$ at $s = 1$,
- There is a explicit formula for the leading term of the development of $\zeta_{V,H}(s)$ in Laurent series at $s = 1$:

$$\lim_{s \to 1} (s-1)^t \zeta_{V,H}(s) = \prod_{\alpha \in \Phi_P - \Delta_P} \frac{\xi_K(\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle)}{\xi_K(\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle + 1)} \prod_{\alpha \in \Delta_P} \frac{\mathrm{res}_{s=1}\, \xi}{\xi_K(2)\langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle},$$

where

$$\xi_K(s) = d_K^{s/2} (\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))^{r_1} ((2\pi)^{-s}\Gamma(s))^{r_2} \zeta_K(s),$$

r_1 being the number of real places of K and r_2 the number of complex places. This limit may be reinterpreted as

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^t \zeta_{V,H}(s) = \prod_{\alpha\in\Delta_P} \frac{1}{\langle\check{\alpha}, 2\rho_P\rangle} \boldsymbol{\omega}_H(V(\boldsymbol{A}_K))$$

where $\boldsymbol{\omega}_H$ is a Tamagawa measure on $V(\boldsymbol{A}_K)$.

(2) The connection with Eisenstein series is also valid for global fields of finite characteristic and we may apply the work of Harder and Morris to get the following results:

- $Z_{V,h}(z)$ converges for $|z| < q^{-1}$,
- $Z_{V,h}(T)$ is a rational function,
- $Z_{V,h}(z)$ has a pole of order t at $z = q^{-1}$
- the leading term at $z = q^{-1}$, that is $\lim_{z\to q^{-1}}(z-q^{-1})^t Z_{V,h}(z)$ is given by

$$q^{\dim(V)(1-g)} \prod_{\alpha\in\Phi_P-\Delta_P} \frac{Z_K(q^{-\langle\check{\alpha},\rho_B\rangle})}{Z_K(q^{-\langle\check{\alpha},\rho_B\rangle-1})} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \frac{\operatorname{res}_{z=q^{-1}} Z_K}{Z_K(q^{-2})\langle\check{\alpha}, 2\rho_P\rangle}$$

which may be reinterpreted as in the number field case.

(3) In the functional setting, we need to use an extension of $\mathscr{M}_k$ constructed by Denef et Loeser to give an analog to the last assertion. Let $\mathscr{M}_k^{\mathrm{loc}}$ be the ring $\mathscr{M}_k[\mathbf{L}^{-1}]$ and, for any integer n, let $F^n\mathscr{M}_k^{\mathrm{loc}}$ be the subgroup of $\mathscr{M}_k^{\mathrm{loc}}$ generated by the elements of the form $\mathbf{L}^{-i}[V]$ where $i - dim(V) \geqslant m$. Then $\widehat{\mathscr{M}}_k$ is the completion of $\mathscr{M}_k^{\mathrm{loc}}$ for this filtration.

- The varieties V_n verify:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\dim(V_n)}{n} \leqslant 1,$$

- $Z_{V,h}^{\mathrm{mot}}(T)$ is a rational function,
- the formal series

$$\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_P}\Big(1-(\mathbf{L}T)^{\langle\check{\alpha},2\rho_P\rangle}\Big)\Big) Z_{V,h}^{\mathrm{mot}}(T)$$

converges in $\widehat{\mathscr{M}}_k$ at $T = \mathbf{L}^{-1}$,
- at this point it takes the value

$$\mathbf{L}^{\dim(V)(1-g)} \prod_{\alpha\in\Phi_P-\Delta_P} \frac{Z_K^{\mathrm{mot}}(\mathbf{L}^{-\langle\check{\alpha},\rho_B\rangle})}{Z_K^{\mathrm{mot}}(\mathbf{L}^{-\langle\check{\alpha},\rho_B\rangle-1})} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \frac{Z_K^{\mathrm{mot}}(T)(1-\mathbf{L}T)(\mathbf{L}^{-1})}{Z_K^{\mathrm{mot}}(\mathbf{L}^{-2})}$$

where Z_K^{mot} is the zeta function of the field defined by

$$Z_K^{\mathrm{mot}}(T) = \sum_{n \in \mathbf{N}} [\mathscr{C}^{(n)}] T^n,$$

$\mathscr{C}^{(n)}$ being the n-th symmetric power of $\mathscr{C}$. Kapranov proved that Z_K^{mot} verifies

$$Z_K^{\mathrm{mot}}(T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-\mathbf{L}T)}$$

for a polynomial P in $\mathscr{M}_k[T]$ of degree $2g$ which satisfies a functional equation. Once again this may be interpreted in terms of a Tamagawa number in a motivic setting.

References

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Harder] G. Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. **100** (1974), 249–306.

[Ka] M. Kapranov, *The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups*, `http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0001005` (2001).

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Mo1] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields I. The cusp form case*, Can. J. Math. **34** (1982), 91–168.

[Mo2] ———, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields II. The general case*, Can. J. Math. **34** (1982), 1112–1182.

February 15, 2024

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France • *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

ON MANIN'S CONJECTURE FOR A FAMILY OF CHÂTELET SURFACES

by

Régis de la Bretèche, Tim Browning & Emmanuel Peyre

Abstract. — The Manin conjecture is established for Châtelet surfaces over $\mathbf{Q}$ arising as minimal proper smooth models of the surface

$$Y^2 + Z^2 = f(X)$$

in $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$, where $f \in \mathbf{Z}[X]$ is a totally reducible polynomial of degree 3 without repeated roots. These surfaces do not satisfy weak approximation.

Résumé. — Nous démontrons la conjecture de Manin pour les surfaces de Châtelet sur $\mathbf{Q}$ obtenues comme modèle minimal propre et lisse de la surface affine d'équation

$$Y^2 + Z^2 = f(X)$$

où $f \in \mathbf{Z}[X]$ est un polynôme scindé à racines distinctes. Ces surfaces ne satisfont pas l'approximation faible.

Contents

2000 *Mathematics Subject Classification.* — primary 14E08; secondary 11D45, 12G05, 14F43.

Supported by EPSRC grant number EP/E053262/1 and the ANR project PEPR.

1. Introduction

The purpose of this paper is to prove Manin's conjecture about points of bounded height for a family of Châtelet surfaces over **Q**. These surfaces have been considered by F. Châtelet in [**Ch1**] and [**Ch2**], by V. A. Iskovskikh [**?**], by D. Coray and M. A. Tsfasman [**CoTs**], and by J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, and P. Swinnerton-Dyer in [**CTSSD1**] and [**CTSSD2**], among others.

The surfaces considered here are smooth proper models of the affine surfaces given in $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ by an equation of the form

$$Y^2 + Z^2 = X(a_3X + b_3)(a_4X + b_4),$$

for suitable a_3, b_3, a_4, $b_4 \in \mathbf{Z}$.

It is important to note that the surfaces we consider do not satisfy weak approximation, the lack of which is explained by the Brauer-Manin obstruction, as described in [**CTSSD1**] and [**CTSSD2**]. Up to now, the only cases for which Manin's principle was proven despite weak approximation not holding were obtained using harmonic analysis and required the action of an algebraic group on the variety with an open orbit. The method used in this paper is completely different. Following ideas of P. Salberger [**Sal**], we use versal torsors introduced by Colliot-Thélène and Sansuc in [**CTS1**], [**CTS2**], and [**CTS3**] to estimate the number of rational points of bounded height on the surface. Such a combination of descent methods with analytic number theory was used in [**HBS**] to prove that the Brauer-Manin obstruction to weak approximation is the only one for hypersurfaces related to norm forms. Therefore we can reasonably hope that further developments of these techniques may be successful in proving the refined conjectures of Manin for other such varieties.

This paper is organised as follows: in section 2, we recall some facts about the geometry of the surfaces. In section 3, we define the height and state our main result. Section 4 contains the description of the versal torsors we use. In section 5, we describe the lifting of rational points to the versal torsors. This lifting reduces the initial problem to the estimation of some arithmetic sums denoted by $\mathscr{U}(T)$. The following sections contain the key analytical tools used in the

proof. In section 7 we give a uniform upper bound for $\mathscr{U}(T)$ and in section 8 an asymptotic formula for it. The last section is devoted to an interpretation of the leading constant.

Let us fix some notation for the remainder of this text.

Notation and conventions. — If k is a field, we denote by $\overline{k}$ an algebraic closure of k. For any variety X over k and any k-algebra A, we denote by X_A the product $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$ and by $X(A)$ the set $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}(A), X)$. We also put $\overline{X} = X_{\overline{k}}$. The cohomological Brauer group of X is defined as $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$, where $\mathbf{G}_m$ denotes the multiplicative group. The projective space of dimension n over A is denoted by $\mathbf{P}^n_A$ and the affine space by $\mathbf{A}^n_A$. For any $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$ we denote by $(x_0 : \ldots : x_n)$ its image in $\mathbf{P}^n(k)$.

2. A family of Châtelet surfaces

Let us fix $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbf{Z}$ such that

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \neq 0$$

for any $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ with $i \neq j$. We then consider the linear forms L_i defined by $L_i(U, V) = a_i U + b_i V$ for $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ and define the hypersurface S_1 of $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ given by the equation

$$X^2 + Y^2 = T^2 \prod_{i=1}^{4} L_i(U, 1)$$

and the hypersurface S_2 given by the equation

$$X'^2 + Y'^2 = T'^2 \prod_{i=1}^{4} L_i(1, V).$$

Let U_1 be the open subset of S_1 defined by $U \neq 0$ and U_2 be the open subset of S_2 defined by $V \neq 0$. The map $\Phi : U_1 \to U_2$ which maps $((X : Y : T), U)$ onto $((X : Y : U^2 T), 1/U)$ is an isomorphism and we define S as the surface obtained by glueing S_1 to S_2 using the isomorphism Φ. The surface S is a smooth projective surface and is a particular case of a Châtelet surface. The geometry of such surfaces has been described by J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and P. Swinnerton-Dyer in [**CTSSD2**, §7]. For the sake of completeness, let us recall part of this description which will be useful for the description of versal torsors.

The maps $S_1 \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ (resp. $S_2 \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$) which maps $((X:Y:T),U)$ onto $(U:1)$ (resp. $((X':Y':T'),V)$ onto $(1:V)$) glue together to give a conic fibration $\pi : S \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ with four degenerate fibres over the points given by $P_i = (-b_i : a_i) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ for $i \in \{1,2,3,4\}$. In fact, the glueing of $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ to $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ through the map

$$((X:Y:T),U) \mapsto ((X:Y:U^2T),1/U) \tag{2.1}$$

gives the projective bundle[(1)] $\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathscr{O}^2 \oplus \mathscr{O}(-2))$ over $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ and S may be seen as a hypersurface in that bundle.

Over $\mathbf{Q}(i)$, if $\xi \in \{-i,i\}$, the map $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}(i)} \to S_{1\mathbf{Q}(i)}$ given by $u \mapsto ((\xi:1:0),U)$ extends to a section σ_ξ of π. The surface $S_{\mathbf{Q}(i)}$ contains 10 exceptional curves, that is irreducible curves with negative self-intersection. Eight of them are given in $S_{\mathbf{Q}(i)}$ by the following equations

$$D^\xi_j : \qquad L_j(\pi(P)) = 0 \quad \text{and} \quad X - \xi Y = 0$$

for $\xi \in \{-i,i\}$ and $j \in \{1,2,3,4\}$; the last ones correspond to the section σ_ξ and are given by the equations

$$E^\xi : \qquad T = 0 \quad \text{and} \quad X - \xi Y = 0.$$

Here X, Y and T are seen as sections of $\mathscr{O}_{\mathcal{P}}(1)$. Let us denote by $\mathscr{G}$ the Galois group of $\mathbf{Q}(i)$ over $\mathbf{Q}$ and by $z \mapsto \overline{z}$ the nontrivial element in $\mathscr{G}$. Then we have

$$\overline{E^\xi} = E^{\overline{\xi}} \quad \text{and} \quad \overline{D^\xi_j} = D^{\overline{\xi}}_j$$

for $\xi \in \{-i,i\}$ and $j \in \{1,2,3,4\}$. We shall also write D^+_j (resp. D^-_j, E^+, E^-) for D^i_j (resp. D^{-i}_j, E^i, E^{-i}). The intersection multiplicities of these divisors are given by

$$(E^\xi, E^\xi) = -2, \quad (D^\xi_j, D^\xi_j) = -1, \quad (D^\xi_j, D^{-\xi}_j) = 1, \quad (E^\xi, D^\xi_j) = 1,$$

where $\xi \in \{-i,i\}$, and $j \in \{1,2,3,4\}$, all other intersection multiplicities being equal to 0 (see [**CTSSD2**, p. 73]). The geometric Picard group of S, that is

1. We define here $\mathbf{P}(\mathscr{O}^2 \oplus \mathscr{O}(-2))$ as the projective bundle associated to the sheave of graded commutative algebras $\underline{\mathrm{Sym}}(\mathscr{O}^2 \oplus \mathscr{O}(2))$. In other words the fibre over a point is given by the lines in the fibre of the vector bundle and not by the hyperplanes.

$\operatorname{Pic}(\overline{S})$, is isomorphic to $\operatorname{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$ and is generated by these exceptional divisors with the relations

$$[D_j^+] + [D_j^-] = [D_k^+] + [D_k^-] \tag{2.2}$$

for $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ and

$$[E^+] + [D_j^+] + [D_k^+] = [E^-] + [D_l^-] + [D_m^-] \tag{2.3}$$

whenever $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Using the fact that $\operatorname{Pic}(S) = (\operatorname{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)}))^{\mathscr{G}}$ it is easy to deduce that $\operatorname{Pic}(S)$ has rank 2.

It follows from adjunction formula that the class of the anticanonical line bundle is given by

$$\omega_S^{-1} = 2E^+ + \sum_{j=1}^{4} D_j^+ = 2E^- + \sum_{j=1}^{4} D_j^-.$$

Lemma 2.1. — *Using the trivialisation described by* (2.1)*, the* 5*-tuple of functions*

$$(T, UT, U^2T, X, Y)$$

gives a basis of $\Gamma(S, \omega_S^{-1})$.

Proof. — Let C be a generic divisor in $|\omega_S^{-1}|$. Then C is a smooth irreducible curve; let g_C be its genus. According to the adjunction formula, we have that $2g_C - 2 = \omega_S.(\omega_S - \omega_S) = 0$. Thus $g_C = 1$. The exact sequence of sheaves

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \omega_S^{-1} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \mathscr{O}_C \longrightarrow 0$$

gives an exact sequence

$$0 \longrightarrow H^0(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow H^0(S, \omega_S^{-1}) \longrightarrow H^0(C, \omega_S^{-1}{}_{|C}) \longrightarrow H^1(S, \mathscr{O}_S).$$

But S is geometrically rational and $H^1(S, \mathscr{O}_S) = \{0\}$. We get that

$$h^0(S, \omega_S^{-1}) = 1 + h^0(C, \omega_S^{-1}{}_{|C}).$$

Let $D = \omega_S^{-1}{}_{|C}$. We have that $\deg(D) = 4$ and $\deg(\omega_C - D) = -4$ since $\omega_C = 0$. Applying Riemann–Roch theorem to C, we get that

$$h^0(D) = \deg(D) + 2g_C - 2 = 4$$

and $h^0(S, \omega_S^{-1}) = 5$. Since the sections T, UT, U^2T, X and Y are linearly independent, and extend to a section of $\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)$, we get a basis of $\Gamma(S, \omega_S^{-1})$. □

Lemma 2.2. — *The linear system $|\omega_S^{-1}|$ has no base point and the basis given in lemma 2.1 gives a morphism from S to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$, the image of which is the surface S' given by the system of equations*

$$\begin{cases} X_0X_2 - X_1^2 = 0 \\ X_3^2 + X_4^2 = (aX_0 + bX_1 + cX_2)(a'X_0 + b'X_1 + c'X_2) \end{cases}$$

where

$$a = a_1a_2, \qquad b = a_1b_2 + a_2b_1, \qquad c = b_1b_2,$$
$$a' = a_3a_4, \qquad b' = a_3b_4 + a_4b_3, \qquad c' = b_3b_4.$$

The induced map $\psi : S \to S'$ is the blowing up of the conjugate singular points of S' given by $P^\xi = (0:0:0:1:-\xi)$ with $\xi^2 = -1$ and $\psi^{-1}(P^\xi) = E^\xi$.

Proof. — This follows from the fact that the map from S to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$ induces the maps

$$((x:y:t),u) \longmapsto (t:ut:u^2t:x:y)$$

from S_1 to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$ and

$$((x':y':t'),v) \longmapsto (v^2t':vt':t':x':y')$$

from S_2 to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$. □

Remark 2.3. — The surface S' is an Iskovskikh surface [**CoTs**]; it is a singular Del Pezzo surface of degree 4 with a singularity of type $2A_1$ and $\psi : S \to S'$ is a minimal resolution of singularities for S'.

3. Points of bounded height

Over $\overline{\mathbf{Q}}$ or even $\mathbf{Q}(i)$, the only geometrical invariant of S is the cross-ratio

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & a_1 \\ b_4 & b_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \in \mathbf{Q}.$$

Indeed the automorphisms of $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ sending the points P_1, P_2, P_3 onto $\infty = (0:1)$, $0 = (1:0)$ and $1 = (1:1)$ lifts to an isomorphism from S to the Châtelet

surface with an equation of the form

$$X^2 + Y^2 = \beta U(U-1)(U-\alpha)T^2$$

where $\beta \in \mathbf{Q}$. Over $\mathbf{Q}(i)$ we may further reduce to the case where $\beta = 1$. In particular, without any loss of generality, we may assume that

$$a_1 = b_2 = 1 \qquad \text{and} \qquad a_2 = b_1 = 0. \tag{3.1}$$

Hypothesis 3.1. — From now on we assume the relations (3.1), that we have $\gcd(a_3, b_3) = \gcd(a_4, b_4) = 1$, and that $a_3b_3a_4b_4(a_3b_4 - a_4b_3) \neq 0$.

Notation 3.2. — Let $C = \sqrt{\prod_{j=1}^{4}(|a_j| + |b_j|)}$. We equip the projective space $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$ with the exponential height $H_4 : \mathbf{P}^4(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ defined by

$$H_4(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \max\left(|x_0|, |x_1|, |x_2|, \frac{|x_3|}{C}, \frac{|x_4|}{C}\right)$$

if $x_0, \dots, x_4$ are coprime integers. Using the morphism $\psi : S \to S'$, we get a height $H = H_4 \circ \psi$ which is associated to the anticanonical line bundle ω_S^{-1}.

We denote by $\mathrm{Val}(\mathbf{Q})$ the set of places of $\mathbf{Q}$. For any $v \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{Q}_v$ is the corresponding completion of $\mathbf{Q}$. As explained in [**Pe1**, §2], such a height enables us to define a Tamagawa measure $\boldsymbol{\omega}_H$ on the adelic space $S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) = \prod_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} S(\mathbf{Q}_v)$. We also consider the constant $\alpha(S)$ defined in [**Pe1**, definition 2.4] which is equal to 1 in our particular case and, following Batyrev and Tschinkel [**BT**], we also put $\beta(S) = \sharp\Big(\mathrm{coker}(\mathrm{Br}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Br}(S))\Big) = 4$ (see [**Sk**, prop. 7.1.2]). We then set

$$C_H(S) = \alpha(S)\beta(S)\boldsymbol{\omega}_H(S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}})$$

where $S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ is the set of points in the adelic space for which the Brauer-Manin obstruction to weak approximation is trivial.

We are interested in the asymptotic behaviour of the number of points of bounded height in $S(\mathbf{Q})$, that is by the number

$$N_{S,H}(B) = \sharp\{P \in S(\mathbf{Q}),\ H(P) \leqslant B\}$$

for $B \in \mathbf{R}$ with $B > 1$.

We can now state the main result of this paper.

Theorem 3.3. — *For any Châtelet surface as above, we have the asymptotic formula*

$$N_{S,H}(B) = C_H(S)B\log(B) + O\Big(B\log(B)^{0.972}\Big). \tag{F}$$

Remarks 3.4. — (i) One may note that, as $S(\mathbf{Q})$ is dense in $S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ by [**CTSSD1**, theorem B], this formula is compatible with the empirical formula (F) described in [**Pe4**, formule empirique 5.1] which is a refinement of a conjecture of Batyrev and Manin [**BM**].

(ii) Over $\mathbf{R}$, the image of $S(\mathbf{R})$ on $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ is the union of two intervals defined by the conditions $\prod_{j=1}^4 L_j(U,V) > 0$. Therefore we may choose $j,k \in \{1,2,3,4\}$ such that $j \neq k$ and the sign of $L_j(U,V)L_k(U,V)$ is not constant on $S(\mathbf{R})$. The evaluation of the corresponding element $(-1, L_j(U,V)/L_k(U,V)) \in \mathrm{Br}(S)$ (see [**Sk**, prop. 7.1.2]) is not constant on $S(\mathbf{R})$. Therefore in all the cases we consider, $S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$.

4. Description of versal torsors

Versal torsors were first introduced by J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc in [**CTS1**], [**CTS2**] and [**CTS3**] as a tool to prove that the Brauer–Manin obstruction to the Hasse principle and weak approximation is the only one. In [**CTS3**, §2.6], these authors give a description of the versal torsors for Châtelet surfaces up to birational equivalence. To be able to parametrise the points of $S(\mathbf{Q})$ we in fact need to construct the versal torsors themselves. Our construction is akin to the one used by Colliot-Thélène and Sansuc but also to the constructions based upon Cox rings.

We shall first introduce an intermediate versal torsor which corresponds to the Picard group of S over $\mathbf{Q}$, that is to the maximal split quotient of T_{NS}.

Definition 4.1. — Let $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}$ be the subscheme of $\mathbf{A}^5_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X,Y,T,U,V])$ defined by the equation

$$X^2 + Y^2 = T^2 \prod_{j=1}^{4} L_j(U,V) \tag{4.1}$$

and the conditions

$$(X,Y,T) \neq 0 \quad \text{and} \quad (U,V) \neq 0.$$

The split algebraic torus $T_{\mathrm{spl}} = \mathbf{G}^2_{m,\mathbf{Z}}$ acts on $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}$ via the morphism of tori

$$(\lambda,\mu) \mapsto (\lambda, \lambda, \mu^{-2}\lambda, \mu, \mu)$$

from $\mathbf{G}^2_{m,\mathbf{Z}}$ to $\mathbf{G}^5_{m,\mathbf{Z}}$ and the natural action of $\mathbf{G}^5_{m,\mathbf{Z}}$ on $\mathbf{A}^5_{\mathbf{Z}}$. Let $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ be the variety $\mathscr{T}_{\mathrm{spl},\mathbf{Q}}$. We have an obvious morphism π_{spl} from $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ to S which may

be described as follows: for any extension $\mathbf{K}$ of $\mathbf{Q}$ and any point (x,y,t,u,v) of $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{K})$, if $v \neq 0$, then the point $((x:y:tv^2),u/v)$ belongs to $S_1(\mathbf{K}) \subset S(\mathbf{K})$. If $u \neq 0$ then the point $((x:y:tu^2),v/u)$ belongs to $S_2(\mathbf{K}) \subset S(\mathbf{K})$ and the points obtained in $S(\mathbf{K})$ coincide if $uv \neq 0$. The morphism π_{spl} makes of $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ a $\mathbf{G}_m^2$-torsor over S.

We now turn to the construction of the versal torsors.

Notation 4.2. — We denote by $\boldsymbol{\Delta}$ the set of exceptional divisors in $S_{\mathbf{Q}(i)}$ and consider it as a $\mathscr{G}$-set. Let $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}}$ be the set of $\mathscr{G}$-orbits in $\boldsymbol{\Delta}$. We put $E = \{E^+, E^-\}$ and $D_j = \{D_j^+, D_j^-\}$ for $j \in \{1,2,3,4\}$. Then $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}} = \{E, D_1, D_2, D_3, D_4\}$. For $\delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}}$, we may also write $\delta = \{\delta^+, \delta^-\}$. We consider the affine space $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta},\mathbf{Z}}$ of dimension 10 over $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta},\mathbf{Z}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[X_\delta, Y_\delta, \delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}}])$$

and define $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta},\mathbf{Z}})_{\mathbf{Q}}$. For any $\delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}}$, we put $Z_{\delta^+} = X_\delta + iY_\delta$ and $Z_{\delta^-} = X_\delta - iY_\delta$. We may then consider the algebraic torus

$$T_{\boldsymbol{\Delta}} = \operatorname{Spec}\left((\mathbf{Q}(i)[Z_\delta, Z_\delta^{-1}, \delta \in \boldsymbol{\Delta}])^{\mathscr{G}}\right)$$

as an open subvariety of $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$. We shall also write Z_k^ε (resp. Z_0^ε) for $Z_{D_k^\varepsilon}$ (resp. Z_{E^ε}) and use similar conventions for the variables X_δ and Y_δ.

We now wish to construct for each isomorphism class of versal torsors over S with a rational point a representative of this class in $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$.

Notation 4.3. — Let $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ belong to $(\mathbf{Z} - \{0\})^4$. We define $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$ as the subscheme of $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta},\mathbf{Z}}$ given by the equations

$$\Delta_{j,k} n_l (X_l^2 + Y_l^2) + \Delta_{k,l} n_j (X_j^2 + Y_j^2) + \Delta_{l,j} n_k (X_k^2 + Y_k^2) = 0 \tag{4.2}$$

if $1 \leqslant j < k < l \leqslant 4$. The scheme $\mathscr{T}_{\boldsymbol{n}}$ is the open subset of $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$ given by the conditions

$$(Z_{\delta_1}, Z_{\delta_2}) \neq (0,0), \tag{4.3}$$

whenever $\delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing$. We denote by $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}$ the variety $(\mathscr{T}_{\boldsymbol{n}})_{\mathbf{Q}}$.

Remark 4.4. — The equations (4.2) define an intersection of two quadrics in $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^8$, upon which we will ultimately need to count integral points of bounded height. As shown by Cook in [**Co**], the Hardy–Littlewood circle method can be adapted to handle intersections of diagonal quadrics in at least 9 variables. Here

we will need to deal with an intersection of diagonal quadrics in only 8 variables. For this we will call upon the alternative approach based on the geometry of numbers in [**BB2**].

It follows from [**CTS2**, proposition 2] that the set of isomorphism classes of versal torsors over S with a rational point is finite. We introduce a finite set which parametrises this set.

Notation 4.5. — Let $\mathcal{S}$ be the set of primes p such that $p \mid \prod_{1\leqslant j<k\leqslant 4}\Delta_{j,k}$ [2]. For any j in $\{1,2,3,4\}$, we put

$$\mathcal{S}_j = \{p\in\mathcal{S},\ p\equiv 3 \bmod 4 \quad\text{and}\quad p\mid \prod_{k\neq j}\Delta_{j,k}\}$$

and

$$\Sigma_j = \left\{(-1)^{\varepsilon_{-1}}\prod_{p\in\mathcal{S}_j} p^{\varepsilon_p},\ (\varepsilon_{-1},(\varepsilon_p)_{p\in\mathcal{S}_j})\in\{0,1\}\times\{0,1\}^{\mathcal{S}_j}\right\}.$$

Finally, we define Σ to be the set of $\boldsymbol{m} = (m_j)_{1\leqslant j\leqslant 4} \in \prod_{j=1}^4 \Sigma_j$ such that the four integers are relatively prime, m_1 is positive and $\prod_{j=1}^4 m_j$ is a square. For any $\boldsymbol{m}\in\Sigma$, we denote by $\alpha_{\boldsymbol{m}}$ the positive square root of $\prod_{j=1}^4 m_j$.

Let $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. We define a morphism $\pi_{\boldsymbol{m}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}} \to S$. In order to do this, it is enough to define a morphism $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ which is done as follows: for any extension $\mathbf{K}$ of $\mathbf{Q}$ and any $\boldsymbol{z} = (z_\delta)_{\delta\in\Delta}$ in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{K})$, the conditions (4.2) and (4.3) ensure that there exists a pair $(u,v)\in\mathbf{K}^2 - \{0\}$ such that

$$L_j(u,v) = m_j z_j^+ z_j^- \tag{4.4}$$

for $j\in\{1,2,3,4\}$. Let $(x,y,t)\in\mathbf{K}^3-\{0\}$ be given by the conditions

$$\begin{cases} x+iy = \alpha_{\boldsymbol{m}}(z_0^+)^2\prod_{j=1}^4 z_j^+,\\ x-iy = \alpha_{\boldsymbol{m}}(z_0^-)^2\prod_{j=1}^4 z_j^-,\\ t = z_0^+z_0^-.\end{cases} \tag{4.5}$$

Then we have the relation

$$x^2+y^2 = t^2\prod_{j=1}^4 L_j(u,v).$$

2. Over $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, one of the $\Delta_{j,k}$ has to be zero, and so $2\in\mathcal{S}$.

and (x, y, t, u, v) belongs to $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{K})$.

It remains to describe the action of the torus T_{NS} associated to the $\mathscr{G}$-lattice $\mathrm{Pic}(\overline{S})$ on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$. The algebraic torus $T_{\boldsymbol{\Delta}}$ corresponds to the $\mathscr{G}$-lattice $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}}$ and $T_{\boldsymbol{\Delta}}$ acts by multiplication of the coordinates on $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$. The natural surjective morphism of $\mathscr{G}$-lattices

$$-\mathrm{pr} : \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})$$

induces an embedding of the algebraic torus T_{NS} on $T_{\boldsymbol{\Delta}}$.[3]

Proposition 4.6. — *Let $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. The variety $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ is invariant under the action of T_{NS} on $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$ and the variety $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ equipped with the map $\pi_{\boldsymbol{m}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}} \to S$ and this action of T_{NS} is a versal torsor above S.*

Proof. — The description of the kernel of the morphism pr (see (2.2) and (2.3)) give the following equations for T_{NS}:

$$Z_j^+ Z_j^- = Z_k^+ Z_k^- \tag{4.6}$$

for $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ and

$$Z_0^+ Z_j^+ Z_k^+ = Z_0^- Z_l^- Z_m^- \tag{4.7}$$

if $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\}$. The equations (4.2) are invariant under the action of T_{NS} thanks to (4.6) as are the inequalities (4.3). Therefore the action of T_{NS} on $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$ induces a natural action of T_{NS} on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$. This description of T_{NS} also implies that $\pi_{\boldsymbol{m}}$ is invariant under the action of T_{NS} on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$. Indeed let $\mathbf{K}$ be an extension of $\mathbf{Q}$, let t belong to $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$ and $\boldsymbol{z}$ to $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{K})$. We put $\boldsymbol{z}' = t\boldsymbol{z}$. It follows from (4.4) and (4.6) that $\boldsymbol{z}$ and $\boldsymbol{z}'$ define the same point $(u : v) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ and from (4.5), (4.6) and (4.7) that $\boldsymbol{z}$ and $\boldsymbol{z}'$ give the same point $(x : y : tv^2)$ (resp. $(x : y : tu^2)$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$).

We may note that for any extension K of $\mathbf{Q}$, if $R \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(K)$ then $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\pi_{\boldsymbol{m}}(R))$ coincides with the orbit of R under the action of T_{NS}. Indeed if $R' \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(K)$ satisfies $\pi_{\boldsymbol{m}}(R') = \pi_{\boldsymbol{m}}(R)$, then there exists a unique $\boldsymbol{z} \in T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{K})$ such that $R' = \boldsymbol{z}R$. Let us write $\boldsymbol{z} = (z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}}$. Using (4.4) and (4.5) and the description of the action of $\mathbf{G}_m(K)$ on $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}$, we get that $z_i^+ z_i^- = z_j^+ z_j^-$ if $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ and

$$z_0^+ z_0^- (z_k^+ z_k^-)^2 = (z_0^+)^2 \prod_{j=1}^{4} z_j^+ = (z_0^-)^2 \prod_{j=1}^{4} z_j^- .$$

---

3. There is some question of convention in the definition of versal torsors which leads us to use the opposite of the projection map.

for $k \in \{1,2,3,4\}$. We deduce from these equations that $z \in T_{\mathrm{NS}}(K)$.

It is enough to prove the result over $\overline{\mathbf{Q}}$. By choosing square roots α_j of m_j such that $\prod_{j=1}^4 \alpha_j = \alpha_{\boldsymbol{m}}$, and using a change of variable of the form $Z_j^{\varepsilon\prime} = \alpha_j Z_j^\varepsilon$ for $\varepsilon \in \{+1,-1\}$ and $j \in \{1,2,3,4\}$ we may assume that $\boldsymbol{m} = (1,1,1,1)$. Note that for any δ in $\boldsymbol{\Delta}$, the variety $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(E_{\boldsymbol{\Delta}})$ is the subvariety of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ defined by $Z_\delta = 0$. If $\varepsilon \in \{+1,-1\}$, we consider the open subset

$$U_\varepsilon = S - E^\varepsilon - \bigcup_{j=1}^4 E_j^\varepsilon$$

of S and for $j \in \{1,2,3,4\}$, we put

$$U_j = S - E^+ - E^- - \bigcup_{k \neq j} (E_k^+ \cup E_k^-).$$

The open subsets U_1, U_2, U_3, U_4, U_+ and U_- form an open covering of S. If $\varepsilon \in \{+1,-1\}$, we may consider that $X + \varepsilon i Y = 1$ on U_ε and we define a section s_ε^1 (resp. s_ε^2) of $\pi_{\mathbf{1}}$ over $U_\varepsilon \cap S_1$ (resp. $U_\varepsilon \cap S_2$) by $Z_0^\varepsilon = Z_1^\varepsilon = Z_2^\varepsilon = Z_3^\varepsilon = Z_4^\varepsilon = 1$, $Z_0^{-\varepsilon} = t$ and $Z_j^{-\varepsilon} = L_j(U,1)$ (resp. $Z_j^{-\varepsilon} = L_j(1,V)$) for $j \in \{1,2,3,4\}$. Similarly, for $j \in \{1,2,3,4\}$, fix k,l,m so that $\{j,k,l,m\} = \{1,2,3,4\}$. On U_j, we may consider that $L_k(U,V) = 1$ and $T = 1$. We may then define a section s_j of $\pi_{\mathbf{1}}$ over U_j by $Z_k^+ = Z_k^- = Z_0^+ = Z_0^- = Z_l^+ = Z_m^+ = 1$ and

$$Z_l^- = L_l(U,V), \quad Z_m^- = L_m(U,V), \quad Z_j^+ = \frac{X+iY}{\prod_{r\neq j} Z_r^+} \quad \text{and} \quad Z_j^- = \frac{X-iY}{\prod_{r\neq j} Z_r^+}.$$

The conditions (4.3) ensures that, for any point $P \in \mathcal{T}_{\mathbf{1}}(\overline{\mathbf{Q}})$, the stabilizer of P in $T_{\mathrm{NS}}(\overline{\mathbf{Q}})$ is trivial. Using the action of T_{NS} on $\mathcal{T}_{\mathbf{1}}$ we then get an equivariant isomorphism from $T_{\mathrm{NS}} \times U$ to $\pi_{\mathbf{1}}^{-1}(U)$ for each open subset U described above. This proves that $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ is a T_{NS}-torsor over S.

It remains to prove that the endomorphism of $\mathrm{Pic}(\overline{S})$ defined by this torsor is the identity map. Let us first recall how this endomorphism may be defined. If L is a line bundle over $\overline{S}$, then the class of L defines a morphism of Galois lattices $\mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}(\overline{S})$ and therefore a morphism of algebraic tori $\phi_L : T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$ and an action of T_{NS} on $\mathbf{G}_m$. The restricted product $\mathcal{T} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{G}_m$ is a $\mathbf{G}_m$-torsor over $\overline{S}$ which defines an element of $\mathrm{Pic}(\overline{S})$. For any δ in $\boldsymbol{\Delta}$, the function Z_δ on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ is invariant under the action of the kernel of the map $\phi_\delta : T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$ defined by the class of δ in $\mathrm{Pic}(\overline{S})$. Therefore this function defines an antiequivariant map from $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{G}_m$ to $\mathbf{A}^1$ which vanishes with multiplicity one over $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\delta)$.

Thus the endomorphism defined by $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ on $\mathrm{Pic}(\overline{S})$ sends the class of δ to itself for any $\delta \in \boldsymbol{\Delta}$. This proves that $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ is a versal torsor over S. □

To conclude these constructions it remains to prove that the set of rational points $S(\mathbf{Q})$ is the disjoint union of the sets $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}))$ where $\boldsymbol{m}$ runs over the set Σ.

Lemma 4.7. — *For any $P \in S(\mathbf{Q})$, we have*

$$\sharp(\pi_{\mathrm{spl}}^{-1}(P) \cap \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z})) = \sharp\mathbf{G}_m^2(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} = 2^2.$$

Proof. — Let us start with a point $P = ((x_0 : y_0 : t_0), u_0)$ in $S_1(\mathbf{Q})$. We then have the relation

$$x_0^2 + y_0^2 = t_0^2 \prod_{j=1}^{4} L_i(u_0, 1)$$

We may write $u_0 = u/v$ with $u, v \in \mathbf{Z}$ and $\gcd(u, v) = 1$. Then we may find an element λ of $\mathbf{Q}$ such that the rational numbers $x = \lambda x_0$, $y = \lambda y_0$ and $t = \lambda t_0/v^2$ are coprime integers and we have

$$x^2 + y^2 = t^2 \prod_{j=1}^{4} L_j(u, v).$$

The same construction works for any point of $S_2(\mathbf{Q})$ and if P belongs to $S_1(\mathbf{Q}) \cap S_2(\mathbf{Q})$ the elements of $\mathbf{Z}^5$ thus obtained coincide up to multiplication of the first three or the last two coordinates by -1. □

Remark 4.8. — Note that if we impose conditions like

$$t > 0, \quad L_1(u, v) \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \prod_{j=2}^{4} L_j(u, v) \geqslant 0,$$

the lifting of P is unique.

Proposition 4.9. — *Let P belong to $S(\mathbf{Q})$. Then there exists a unique $\boldsymbol{m}$ in Σ such that P belongs to $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}))$.*

Proof. — Let $Q = (x, y, t, u, v) \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z})$ be such that $\pi_{\mathrm{spl}}(Q) = P$. Without loss of generality we may assume that $Q = (x, y, t, u, v) \in \mathbf{Z}^5$ is such that

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 \prod_{j=1}^4 L_j(u, v), \\ \gcd(x, y, t) = 1, \ \gcd(u, v) = 1, \\ t > 0, \ L_1(u, v) \geqslant 0, \ \text{and} \ \prod_{j=2}^4 L_j(u, v) \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

The fact that $t^2 \prod_{j=1}^4 L_j(u, v)$ is the sum of two squares implies that

$$\prod_{j=1}^{4} L_j(u, v) \geqslant 0 \tag{4.9}$$

and, if $\prod_{j=1}^4 L_j(u, v) \neq 0$, for any prime p congruent to 3 modulo 4

$$\sum_{j=1}^{4} v_p(L_j(u, v)) \equiv 0 \bmod 2. \tag{4.10}$$

Let j belong to $\{1, 2, 3, 4\}$. If $L_j(u, v) \neq 0$, we denote by $\varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ the sign of $L_j(u, v)$ and by $\Sigma_j(Q)$ the set of prime numbers p which are congruent to 3 modulo 4 and such that $v_p(L_j(u, v))$ is odd. We then put

$$m_j = \varepsilon_j \times \prod_{p \in \Sigma_j(Q)} p.$$

If $L_j(u, v) = 0$ we define m_j as the only integer in Σ_j such that $\prod_{k=1}^4 m_k$ is a square. By construction, we have $m_j \mid L_j(u, v)$ and the quotient $L_j(u, v)/m_j$ is the sum of two squares.

Let us now check that $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ belongs to Σ. According to (4.10), if a prime number belongs to $\Sigma_j(Q)$ for some $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, then there exists $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ with $k \neq j$ such that $p \in \Sigma_k(Q)$. In particular, p divides both $L_j(u, v)$ and $L_k(u, v)$ as well as

$$\Delta_{j,k} u = b_k L_j(u, v) - b_j L_k(u, v)$$

and $\Delta_{j,k} v$. Since $\gcd(u, v) = 1$, we get that $p \mid \Delta_{j,k}$. This proves that $\boldsymbol{m} \in \prod_{j=1}^4 \Sigma_j$. But combining (4.9), (4.10) and the definition of $\boldsymbol{m}$ we get that $\prod_{j=1}^4 m_j$ is a square. If d divides all the m_j, it divides $\gcd_{1 \leqslant j < k \leqslant 4}(\Delta_{j,k})$ which is equal to 1

since $\Delta_{1,2} = 1$ under the condition (3.1). Finally $m_1 > 0$ since $L_1(u,v) > 0$ or $\prod_{j=2}^4 L_j(u,v) > 0$. Thus, $\boldsymbol{m}$ belongs to Σ.

We now wish to prove that Q belongs to $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}))$. By construction of $\boldsymbol{m}$, for any j in $\{1,2,3,4\}$, the integer $L_j(u,v)/m_j$ is the sum of two squares. Moreover if p is a prime number, congruent to 3 modulo 4, then p generates a prime ideal of $\mathbf{Z}[i]$. From the relations (4.8), if $p \mid t$, then $p \mid (x+iy)(x-iy)$. In that case we have $p \mid x$ and $p \mid y$, which contradicts the fact that $\gcd(x,y,t) = 1$. As $t > 0$, we get that t may also be written as the sum of two squares.

If $\prod_{j=1}^4 L_j(u,v) \neq 0$, we choose for $j \in \{1,2,3\}$ an element $z_j^+ \in \mathbf{Z}[i]$ such that $L_j(u,v)/m_j = z_j^+ \overline{z_j^+}$ and an element $z_0^+ \in \mathbf{Z}[i]$ such that $t = z_0^+ \overline{z_0^+}$. Then we get the relation

$$L_4(u,v)/m_4 = \left(\frac{x+iy}{\alpha_{\boldsymbol{m}} (z_0^+)^2 \prod_{j=1}^3 z_j^+} \right) \overline{\left(\frac{x+iy}{\alpha_{\boldsymbol{m}} (z_0^+)^2 \prod_{j=1}^3 z_j^+} \right)}$$

and we put $z_4^+ = (x+iy)/(\alpha_{\boldsymbol{m}} (z_0^+)^2 \prod_{j=1}^3 z_j^+) \in \mathbf{Q}[i]$. If $\prod_{j=1}^4 L_j(u,v) = 0$, we choose z_1^+, z_2^+, z_3^+, z^+ as above and $z_4^+ \in \mathbf{Z}[i]$ such that $L_4(u,v)/m_4 = z_4^+ \overline{z_4^+}$. In both cases, we put $z_j^- = \overline{z_j^+}$ for $j \in \{1,2,3,4\}$ and $z_0^- = \overline{z_0^+}$.

The family so constructed satisfy the relations (4.5) and (4.8), from which it follows that the corresponding family $(z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}}$ is a solution to the systems (4.2) and (4.3). Thus we obtain a point R in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})$ such that $\pi_{\boldsymbol{m}}(R) = P$.

Let $\boldsymbol{m}'$ belong to Σ and assume that the point P belongs to the set $\pi_{\boldsymbol{m}'}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}'}(\mathbf{Q}))$ as well. Then by (4.8), we have for any prime number p

$$v_p(m_j') - v_p(m_k') = v_p(L_j(u,v)) - v_p(L_k(u,v)) = v_p(m_j) - v_p(m_k)$$

for any j,k in $\{1,2,3,4\}$ such that $L_j(u,v)L_k(u,v) \neq 0$. Similarly, denoting by $\operatorname{sgn}(m)$ the sign of an integer m, we have

$$\operatorname{sgn}(m_j')/\operatorname{sgn}(m_k') = \operatorname{sgn}(m_j)/\operatorname{sgn}(m_k).$$

These relations between $\boldsymbol{m}$ and $\boldsymbol{m}'$ remain valid if $L_j(u,v)L_k(u,v) = 0$ since the products $\prod_{j=1}^4 m_j$ and $\prod_{j=1}^4 m_j'$ are squares. But, by definition of Σ, we have

$$m_1' > 0 \quad \text{and} \quad \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} v_p(m_j') = 0$$

for any prime number p, and similarly for $\boldsymbol{m}$. We obtain that $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}'$. $\square$

5. Jumping up

Having constructed the needed versal torsors explicitly, we now wish to lift our initial counting problem to these torsors. In order to do this, we shall define an adelic domain $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$ in the adelic space $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ so that for any $P \in \pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}))$ the cardinality of $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(P) \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$ is $\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$.

5.1. Idelic preliminaries. — We first need to gather a few facts about the adelic space $T_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$.

Notation 5.1. **—** Let A be a commutative ring. We may identify the A-points of $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}$ with the elements of the invariant ring

$$A_{\boldsymbol{\Delta}} = \Big(\prod_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i]\Big)^{\mathscr{G}}.$$

Let $\mathscr{P}$ be the set of prime numbers. Let $p \in \mathscr{P}$. We put $\mathcal{S}_p = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i])$ which we may identify with the set of places of $\mathbf{Q}[i]$ above p. If $\boldsymbol{a} = (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p}$ and $\boldsymbol{b} = (b_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p}$ belong to $\mathbf{Z}^{\mathcal{S}_p}$, we write $\boldsymbol{a} \geqslant \boldsymbol{b}$ if $a_{\mathfrak{p}} \geqslant b_{\mathfrak{p}}$ for $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p$ and $\min(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\min(a_{\mathfrak{p}}, b_{\mathfrak{p}}))_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p}$. The valuations induce a map

$$\widehat{v}_p : \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i] \longrightarrow (\mathbf{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathcal{S}_p}.$$

Thus we get a natural map

$$(\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i])^{\boldsymbol{\Delta}} \longrightarrow (\mathbf{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathcal{S}_p \times \boldsymbol{\Delta}}.$$

The action of $\mathscr{G}$ on $\mathcal{S}_p$ and $\boldsymbol{\Delta}$ induces an action of $\mathscr{G}$ on the set on the right-hand side so that the above map is $\mathscr{G}$ equivariant. Denoting by $\overline{\Gamma}_p$ the set of invariants in $(\mathbf{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathcal{S}_p \times \boldsymbol{\Delta}}$ and by Γ_p its intersection with $\mathbf{Z}^{\mathcal{S}_p \times \boldsymbol{\Delta}}$, we get a map

$$\log_p : \mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}_p) \longrightarrow \overline{\Gamma}_p$$

whose restriction to $T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}_p)$ is a morphism from this group to the group Γ_p and $\log_p$ is compatible with the action of $T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}_p)$ on the left and the action of Γ_p on the right. We denote by Ξ_p the set of elements $(r_{\mathfrak{p},\delta})$ of Γ_p such that $r_{\mathfrak{p},\delta} \geqslant 0$ for any $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p$ and any $\delta \in \boldsymbol{\Delta}$.

If T is an algebraic torus over $\mathbf{Q}$ which splits over $\mathbf{Q}(i)$, then $X^*(T)$ denotes the group of characters of T over $\mathbf{Q}(i)$ and $X_*(T) = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z})$ its dual, that is the group of cocharacters of T. We denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the natural pairing

$X^*(T)\times X_*(T)\to \mathbf{Z}$. For any place v of $\mathbf{Q}$, we denote by $X_*(T)_v$ the group of cocharacters of T over $\mathbf{Q}_v$, which may be described as $X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_v/\mathbf{Q}_v)}$. We also consider the groups $X_*(T)_{\mathbf{Q}}=X_*(T)^{\mathscr{G}}$ and $X^*(T)_{\mathbf{Q}}=X^*(T)^{\mathscr{G}}$. The group Γ_p may then be seen as the group $X_*(T_{\boldsymbol{\Delta}})_p$. The restriction of $\log_p$ from $T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}_p)$ to Γ_p is then the natural morphism defined in [**Ono1**, §2.1]. For any $(\boldsymbol{r}_\delta)_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}}\in\Gamma_p$, we put $\boldsymbol{r}_j^{\pm}=\boldsymbol{r}_{D_j^{\pm}}$ for $j\in\{1,2,3,4\}$ and $\boldsymbol{r}_0^{\pm}=\boldsymbol{r}_{E^{\pm}}$. The group $X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$ is then the subgroup of Γ_p given by the equations

$$\boldsymbol{r}_j^+ +\boldsymbol{r}_j^- =\boldsymbol{r}_l^+ +\boldsymbol{r}_l^-$$

for $1\leqslant j<l\leqslant 4$ and

$$\boldsymbol{r}_0^+ +\boldsymbol{r}_j^+ +\boldsymbol{r}_l^+ =\boldsymbol{r}_0^- +\boldsymbol{r}_m^- +\boldsymbol{r}_n^-$$

if $\{j,l,m,n\}=\{1,2,3,4\}$.

Remarks 5.2. — (i) If $p\equiv 3 \bmod 4$ or $p=2$ then there exists a unique element $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{S}_p$. Thus Γ_p is canonically isomorphic to $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{Q}}}$. If $p\equiv 1 \bmod 4$, then choosing an element $\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_p$, we get an isomorphism from $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}}$ to Γ_p.

(ii) We may note that an element $Q\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ belongs to $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$ if and only if $\log_p(Q)$ belongs to Ξ_p.

Lemma 5.3. — *For any prime p the morphism* $\log_p$ *induces an isomorphism from the quotient $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)/T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$ to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$ and there is an exact sequence*

$$1\longrightarrow T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}\longrightarrow T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})\longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathscr{P}} X_*(T_{\mathrm{NS}})_p\longrightarrow 0.$$

Proof. — By [**Dr**, p. 449], the kernel of the map $\log_p$ from $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$ coincides with $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$ for any prime p. Let us prove that the map $\bigoplus_p \log_p$ from $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$ to $\bigoplus_p X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$ is surjective. We first assume that $p\neq 2$. If $p\equiv 1 \bmod 4$ we choose an element $\varpi\in\mathbf{Z}[i]$ such that $p=\varpi\overline{\varpi}$ and identify $\mathcal{S}_p$ with $\{\varpi,\overline{\varpi}\}$. If $\boldsymbol{r}\in\Gamma_p$, we then define

$$\exp_\varpi(\boldsymbol{r})=(\varpi^{r_{\varpi,\delta}}\overline{\varpi}^{r_{\overline{\varpi},\delta}})_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}}.$$

If $p\equiv 3 \bmod 4$, then we put $\varpi=p$ and for $\boldsymbol{r}\in\Gamma_p$, we define $\exp_\varpi(\boldsymbol{r})$ to be $(\varpi^{r_{p,\delta}})_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}}$. By construction, $\exp_\varpi$ is a morphism from Γ_p to $T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q})$ and satisfies

$\log_p \circ \exp_{\varpi} = \mathrm{Id}_{\Gamma_p}$ and $\log_\ell \circ \exp_{\varpi} = 0$ for any prime $\ell \neq p$. Moreover we have

$$\chi(\exp_{\varpi}(\boldsymbol{r})) = p^{\langle \chi, \boldsymbol{r}\rangle} \tag{5.1}$$

for any $\chi \in X^*(T_{\boldsymbol{\Delta}})_{\mathbf{Q}}$ and any $\boldsymbol{r} \in \Gamma_p$. Therefore, if $\boldsymbol{r}$ belongs to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$, then $\exp_{\varpi}(\boldsymbol{r})$ belongs to $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$. It remains to prove a similar result for $p = 2$, although there is no morphism which satisfies (5.1). Let $\boldsymbol{r}$ belong to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_2$. Let us write $r_j = r_j^+ = r_j^-$ for j in $\{0, \dots, 4\}$. Since $\boldsymbol{r}$ belong to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_2$, we have $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$. We put $z_j^+ = (1 + i)^{r_j}$ for $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ and $z_4^+ = (-i)^{r_0+2r_1}(1 + i)^{r_0}$ and $z_j^- = \overline{z}_j^+$ for $j \in \{0, \dots, 4\}$. Then $\log_2(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{z}$ satisfies equation (4.6). Moreover if $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\}$ one has

$$z_0^+ z_j^+ z_k^+/(z_0^- z_l^- z_m^-) = \frac{(1+i)^{r_0+2r_1}}{(1-i)^{r_0+2r_1}}(-i)^{r_0+2r_1} = 1$$

which proves that $\boldsymbol{z}$ satisfies (4.7).

If $\boldsymbol{z}$ belongs to the kernel of the map $\bigoplus_p \log_p$ then its coordinates are invertible elements in $\mathbf{Z}[i]$. Thus $\boldsymbol{z}$ is a torsion element of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$. □

5.2. Local domains. — To construct $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$, for any prime p and any $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ we shall define a fundamental domain in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ modulo $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. In other words, we want to construct an open domain $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p} \subset \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ such that

(i) The open set $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ is stable under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$;

(ii) For any t in $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p) - T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$, one has $t.\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p} \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p} = \varnothing$;

(iii) For any x in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$, there exists an element t in $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ such that x belongs to $t.\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$.

Lemma 5.4. — *For any prime number p, the domain $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$ is a fundamental domain in $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ under the action of $T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ modulo $T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$.*

Proof. — As in the proof of lemma 4.7, if P belongs to $S(\mathbf{Q}_p)$, there exists a point $Q = (x, y, t, u, v) \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ such that $\pi_{\mathrm{spl}}(Q) = P$ and

$$\min(v_p(x), v_p(y), v_p(t)) = \min(v_p(u), v_p(v)) = 0.$$

The last condition is equivalent to $Q \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$. The lemma then follows from the facts that the action of $T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ on $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ is given by

$$((\lambda, \mu), (x, y, t, u, v)) \mapsto (\lambda x, \lambda y, \mu^{-2}\lambda t, \mu u, \mu v)$$

and that the $T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$-orbits are the fibers of the projection $\pi_{\mathrm{spl}} : \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p) \to S(\mathbf{Q}_p)$. □

Lemma 5.5. — *Two elements of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ belong to the same orbit under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$ if and only if they have the same image by $\pi_{\boldsymbol{m}}$ and $\log_p$.*

Proof. — According to proposition 4.6, two elements of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ belong to the same orbit under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ if and only if their image by $\pi_{\boldsymbol{m}}$ coincide. On the other hand, $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p) = T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p) \cap T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Z}_p)$ is the set of elements of $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}_p)$ which are sent to the origin of Γ_p by $\log_p$. Therefore if two elements of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ belong to the same orbit for $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$ their image in $\overline{\Gamma}_p$ coincides. Conversely, let x and y be elements of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ which have the same image by $\pi_{\boldsymbol{m}}$ and $\log_p$. Then there exists an element $t \in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ such that $y = tx$. Since $\log_p(x) = \log_p(y)$, if a coordinate z_δ of x is different from 0, the corresponding component of $\log_p(t)$ is 0. Taking into account the conditions (4.3) and the equations (4.6) and (4.7) which define T_{NS}, this implies that $\log_p(t)$ is the unit element and thus $t \in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. □

Remark 5.6. — The idea behind the construction of $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ is first to consider the intersection

$$\widehat{\pi}_m^{-1}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)) \cap \mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p),$$

which is stable under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. For all primes p for which there is good reduction, this intersection coincides with $\mathscr{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$. More generally, if p is good or if $p \not\equiv 1 \bmod 4$, this intersection satisfies the conditions (i) to (iii) and yields the wanted domain. On the other hand, if p is a prime dividing one of the $\Delta_{j,k}$ and such that $p \equiv 1 \bmod 4$, then for any $Q \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p))$ the intersection

$$\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(Q) \cap \mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$$

is the union of a finite number of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$-orbits. We then select a total order on Γ_p and choose the minimal element in the image of the last intersection by ϕ_p. In that way, we construct the wanted domain.

To better understand the construction, let us first describe the conditions satisfied by $\log_p(R)$ for a lifting R of a point $Q \in \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$. Let $R = (z_\delta)_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ and let $Q = (x, y, t, u, v) = \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}(R)$. Let us denote by $(\boldsymbol{r}_\delta)_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}} \in \overline{\Gamma}_p$ the

image of R by $\log_p$. We also put $\boldsymbol{n}_j = \widehat{v}_p(L_j(u,v)/m_j)$ for $j \in \{1,2,3,4\}$, $\boldsymbol{n}_0 = \widehat{v}_p(t)$ and $\boldsymbol{n}^{\pm} = \widehat{v}_p((x \pm iy)/\alpha_{\boldsymbol{m}})$. Then we have the relations

$$\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{r}_i^+ + \boldsymbol{r}_i^- \tag{5.2}$$

for $j \in \{0,\dots,4\}$, and

$$\boldsymbol{n}^{\pm} = 2\boldsymbol{r}_0^{\pm} + \sum_{j=1}^{4} \boldsymbol{r}_j^{\pm}. \tag{5.3}$$

Lemma 5.7. — *Let p be a prime number and let $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. Let Q belong to the intersection $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p) \cap \pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p))$ and let $(\boldsymbol{n}_j)_{j\in\{0,\dots,4\}}$ and $\boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{n}^-$ be the corresponding elements of $\mathbf{Z}^{\mathcal{S}_p}$ defined in remark 5.6.*

a) *One has $\boldsymbol{n}_j \geqslant 0$ for $j \in \{0,\dots,4\}$, $\boldsymbol{n}^+ \geqslant 0$ and $\boldsymbol{n}^- \geqslant 0$.*

b) *If $p \notin \mathcal{S}$, then $\min(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j) = 0$ if $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.*

c) *If $p \not\equiv 1 \bmod 4$, then $\boldsymbol{n}_0 = 0$.*

d) *One has $\min(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{n}^-) = 0$.*

e) *There exists a solution in Ξ_p to the equations* (5.2) *and* (5.3).

f) *The number of such solutions is finite.*

g) *There exists a unique solution to these equations in Ξ_p if $p \notin \mathcal{S}$ or if $p \not\equiv 1 \bmod 4$.*

Proof. — We write $\boldsymbol{m} = (m_1,\dots,m_4)$ and $Q = (x,y,t,u,v)$. As Q belongs to the set $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p))$, one has that $p|m_i$ if and only if $p \equiv 3 \bmod 4$ and $v_p(L_i(u,v))$ is odd. If these conditions are verified, $v_p(\alpha_{\boldsymbol{m}}) = 1$ and $\alpha_{\boldsymbol{m}}|L_i(u,v)$. Similarly, using the equation (4.1), we have that $\alpha_{\boldsymbol{m}}|x \pm iy$ and this concludes the proof of a).

We now assume that $p \notin \mathcal{S}$. Let i,j be such that $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Thus p does not divide $\Delta_{i,j}$. This implies that $\min(v_p(L_i(u,v)), v_p(L_j(u,v))) = 0$ and so $\min(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j) = 0$.

We now prove assertion c). If $p|t$ then by equation (4.1), it follows that $p^2|x^2 + y^2$. If we assume that $p = 2$ or $p \equiv 3 \bmod 4$ this implies that $p|x$ and $p|y$ which contradicts the fact that $\min(v_p(x), v_p(y), v_p(t)) = 0$.

Let $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p$. If $\mathfrak{p}$ divides $x + iy$, $x - iy$ and t, then p divides x, y and t. This proves assertion d).

Since Q belongs to $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}(\mathbf{Q}_p))$, the equations (5.2) and (5.3) have a solution in Γ_p. If $p \equiv 3 \bmod 4$ or $p = 2$, then the integers $r_j^{\pm} \in \mathbf{Z}$ are such that $r_j^+ = r_j^-$

for $j \in \{0, \dots, 4\}$. Therefore the equations (5.2) have a unique solution in Γ_p. By a) the coordinates of this solution are positive. If $p \equiv 1 \bmod 4$, then by choosing an element $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_p$ we are reduced to solving the equations

$$n_i = r_i^+ + r_i^-$$

for $j \in \{0, \dots, 4\}$, and

$$n^\pm = 2r_0^\pm + \sum_{j=1}^{4} r_j^\pm.$$

in $\mathbf{Z}^\Delta$, where $n_j \geqslant 0$ for $j \in \{0, \dots, 4\}$, $n^+ \geqslant 0$ and $n^- \geqslant 0$. Since we have the relation $2n_0 + \sum_{j=1}^4 n_j = n^+ + n^-$, we may write $n^+ = 2a_0^+ + \sum_{j=1}^4 a_j^+$ where $0 \leqslant a_j^+ \leqslant n_j$ for $j \in \{0, \dots, 4\}$. Then we put $a_j^- = n_j - a_j^+$ for $j \in \{0, \dots, 4\}$ to get a solution with nonnegative coordinates.

The assertion f) follows from the fact that there is only a finite number of nonnegative integral solutions to an equation of the form $n = k^+ + k^-$.

If $p \equiv 3 \bmod 4$ or $p = 2$ we have already seen that the solution to the system of equations is unique. If $p \notin \mathcal{S}$ and $p \equiv 1 \bmod 4$, then it follows from the assertions b) and d) that $r_j^\pm = \min(n_j, n^\pm)$, which implies that the solution is unique. □

Lemma 5.8. — *If p is a prime number such that $p \equiv 1 \bmod 4$ or $p \notin \mathcal{S}$, then for $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, the set $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$ satisfies the conditions (i) to (iii) and defines a fundamental domain in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$.*

Proof. — To prove the lemma it is sufficient to prove that the intersection of any nonempty fiber of $\pi_{\boldsymbol{m}}$ with $\mathscr{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$ is not empty and is an orbit under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. Let P belong to the set $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p))$. By lemma 5.4 we may lift P to a point Q which belongs to $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$. According to lemma 5.7, e), we may find an element $\boldsymbol{r} \in \Xi_p$ which is a solution to the equations (5.2) and (5.3). Let R' be any lifting of P to $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ and let $\boldsymbol{r}' = \log_p(R)$. The difference $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ belongs to $X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$. According to lemma 5.3, there exists $t \in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ such that $\log_p(t) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. Then the point $R = t.R' \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ satisfies $\log_p(R) = \boldsymbol{r}$ and R belongs to $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$.

It remains to prove that if two element R and R' of $\mathscr{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$ are in the same fibre for $\pi_{\boldsymbol{m}}$ then they belong to the same orbit under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. Their images in $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_p)$ belong to $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$ and therefore are contained in the

same orbit for the action of $T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$, which means that the equations described in remark 5.6 for $\log_p(R)$ and $\log_p(R')$ are exactly the same. We then apply assertion g) of lemma 5.7 and lemma 5.5. □

Lemma 5.9. — *If the prime number p does not belong to $\mathcal{S}$, then for $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, we have*

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p) = \mathcal{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)).$$

Proof. — We keep the notation used in the proof of the previous lemma. Using lemma 5.7, b) and d), and the positivity of the coefficients in $\boldsymbol{r}$, we get that $\min(\boldsymbol{r}_{\delta_1}, \boldsymbol{r}_{\delta_2}) = 0$ whenever $\delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing$, which means that R belongs to $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$. □

Definition 5.10. — Let $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. If $p \notin \mathcal{S}$, we put $\mathcal{D}_{\boldsymbol{m},p} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$. If $p \in \mathcal{S}$ and $p \not\equiv 1 \bmod 4$, we put

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{m},p} = \mathcal{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)).$$

It remains to define the domain for the primes $p \in \mathcal{S}$ such that $p \equiv 1 \bmod 4$.

Notation 5.11. — We put $\mathcal{S}' = \{p \in \mathcal{S},\ p \equiv 1 \bmod 4\}$. For any $p \in \mathcal{S}'$ we fix in the remainder of this text a decomposition $p = \varpi_p \overline{\varpi_p}$ for an irreducible element $\varpi_p \in \mathbf{Z}[i]$. We may then write $\mathcal{S}_p = \{\varpi_p, \overline{\varpi_p}\}$. The group Γ_p is isomorphic to $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}}$ through the map ϕ_p which applies a family $(r_{\mathfrak{p},\delta})_{(\mathfrak{p},\delta)\in\mathcal{S}_p\times\boldsymbol{\Delta}}$ onto the family $(r_{\varpi_p,\delta})_{\delta\in\boldsymbol{\Delta}}$. Let $j \neq k$ be two elements of $\{1,2,3,4\}$ such that $p|\Delta_{j,k}$. We then define $\boldsymbol{f}_{j,k} = (f_\delta)_{\delta\in\Delta} \in \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}}$ by

$$f_\delta = \begin{cases} 1 \text{ if } \delta \in \{D_j^-, D_k^+\}, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

We put $\boldsymbol{e}_{j,k} = \phi_p^{-1}(\boldsymbol{f}_{j,k})$ and consider the set

$$\Lambda_p = \Xi_p - \bigcup_{\{(j,k)\in\{1,2,3,4\} | j<k \text{ and } p|\Delta_{j,k}\}} \boldsymbol{e}_{j,k} + \Xi_p. \tag{5.4}$$

Definition 5.12. — Let $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. If $p \in \mathcal{S}$ and $p \equiv 1 \bmod 4$, then we define $\mathcal{D}_{\boldsymbol{m},p}$ to be the set of $R \in \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$ such that $\log_p(R) \in \Lambda_p$.

Remark 5.13. — In particular, one has $\mathcal{D}_{\boldsymbol{m},p} \subset \mathcal{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$ for any prime number p.

Lemma 5.14. — *If $p \in \mathcal{S}$ and $p \equiv 1 \bmod 4$, then for $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, the set $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ satisfies the conditions (i) to (iii) and defines a fundamental domain in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$.*

Proof. — According to lemma 5.5 and lemma 5.7 e), we have only to prove that for any $Q \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_p)$, there exist a unique solution of the equations (5.2) and (5.3) which belongs to Λ_p. Among the solutions in Ξ_p, there is a unique solution such that if $\boldsymbol{s} = \phi_p(\boldsymbol{r})$, the quadruple $(s_1^+, s_2^+, s_3^+, s_4^+)$ is maximal for the lexicographic order. It remains to prove that the solution satisfies this last condition if and only if $\boldsymbol{r}$ belongs to Λ_p. Let $\boldsymbol{r}$ be the solution for which the above quadruple is maximal and $\widetilde{\boldsymbol{r}}$ be any solution in Ξ_p and $\widetilde{\boldsymbol{s}} = \phi_p(\widetilde{\boldsymbol{r}})$. If $\boldsymbol{r} \neq \widetilde{\boldsymbol{r}}$, then we consider the smallest $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ such that $s_j^+ > \widetilde{s}_j^+$. With the notation of remark 5.6, this implies that $\boldsymbol{n}_j \neq 0$, $\boldsymbol{n}^+ \neq 0$ and $\boldsymbol{n}^- \neq 0$. Therefore $\boldsymbol{n}_0 = 0$ and there exists $k > j$ such that $s_k^+ < \widetilde{s}_k^+$. Since $s_j^- < \widetilde{s}_j^-$, we may conclude that $\widetilde{\boldsymbol{r}} \in \boldsymbol{e}_{j,k} + \Xi_p$. Moreover $p \mid \Delta_{j,k}$. Conversely if $\widetilde{\boldsymbol{r}}$ belongs to $\boldsymbol{e}_{j,k} + \Xi_p$, for some $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ such that $j < k$, then $\widetilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e}_{j,k} + \boldsymbol{e}_{k,j}$ is another solution to system of equations which gives a bigger quadruple for the lexicographic order. $\square$

5.3. Adelic domains and lifting of the points

Definition 5.15. — Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$. We define the open subset $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$ of $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ as the product $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R}) \times \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$.

Proposition 5.16. — *The set $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$ is a fundamental domain in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$ modulo $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$. In other words*

(i) *The open set $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$ is stable under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$;*

(ii) *For any t in $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}) - T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$, one has $t.\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}} \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}} = \varnothing$;*

(iii) *For any x in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$, there exists an element t in $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$ such that x belongs to $t.\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$.*

Proof. — The assertion (i) follows from the fact that $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ is stable under $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$ for any prime number p. If t belongs to $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}) - T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$, then, by lemma 5.3, there exists a prime number p such that $\log_p(t) \neq 0$. Thus $t.\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p} \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p} = \varnothing$, which proves (ii). Let x belong to $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$. For any prime number p, there exists an element $t_p \in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ such that $t_p.x \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$. By lemma 5.3, there exists an element $t \in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$ such that $\log_p(t) = \log_p(t_p)$ for any prime number p and $t.x \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$. $\square$

Corollary 5.17. — *Let P belong to $S(\mathbf{Q})$ and let $\boldsymbol{m}$ be the unique element of Σ such that $P \in \pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}))$. Then*

$$\sharp(\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(P) \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}) = \sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} = 2^8.$$

Proof. — This corollary follows from the last proposition and the fact that $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(x)$ is an orbit under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$. □

Let us now lift the heights to the versal torsors.

Definition 5.18. — As in notation 3.2 we put $C = \sqrt{\prod_{j=1}^{4} |a_j| + |b_j|}$. Let w be a place of $\mathbf{Q}$. We define a function H_w on $\mathbf{Q}_w^5$ by

$$H_w(x,y,t,u,v) = \begin{cases} \max(\frac{|x|_w}{C}, \frac{|y|_w}{C}, \max(|u|_w, |v|_w)^2 |t|_w) & \text{if } w = \infty, \\ \max(|x|_w, |y|_w, \max(|u|_w, |v|_w)^2 |t|_w) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for any $(x,y,t,u,v) \in \mathbf{Q}_w^5$. If $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, we shall also denote by $H_w : \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_w) \to \mathbf{R}$ the composite function $H_w \circ \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}$. We then define $H : \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(A_{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ by $H = \prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} H_w$.

Remarks 5.19. — (i) The line bundle ω_S^{-1} defines a character χ_ω on the torus $T_{\mathrm{spl}} = \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}}^2$ simply given by $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda$ and we have the relation

$$H_w(t.R) = |\chi_\omega(t)|_w H_w(R) \tag{5.5}$$

for any $t \in T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_w)$ and any $R \in T_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Q}_w)$. A similar assertion is true on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ for $\boldsymbol{m} \in \Sigma$.

(ii) As a point $Q = (x:y:t:u:v)$ in $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{R})$ satisfies the equations (4.1), we have that

$$\max(|x|, |y|)^2 \leqslant \prod_{j=1}^{4} (|a_j| + |b_j|) \max(|u|, |v|)^4 |t|^2.$$

and it follows that

$$H_\infty(Q) = \max(|u|, |v|)^2 |t|.$$

Proposition 5.20. — *Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$. For any $R \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})$, one has*

$$H(\pi_{\boldsymbol{m}}(R)) = H(R).$$

Proof. — We may define a map $\widehat{\psi}:\mathbf{Q}^5\to\mathbf{Q}^5$ by $(x,y,t,u,v)\mapsto(v^2t:uvt:u^2t:x:y)$. The restriction of the map $\widehat{\psi}$ from $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}$ to $\mathbf{A}^5_{\mathbf{Q}}-\{0\}$ is a lifting of the map $\psi:S\to S'$. On S' the height H_4 is given by

$$H_4(x_0:\cdots:x_4)=\max\left(|x_0|_\infty,|x_1|_\infty,|x_2|_\infty,\frac{|x_3|_\infty}{C},\frac{|x_4|_\infty}{C}\right)\times\prod_{p\in\mathscr{P}}\max_{0\leqslant j\leqslant 4}(|x_j|_p)$$

for any $(x_0,\dots,x_4)\in\mathbf{Q}^5$. This formula implies the statement of the lemma. □

Corollary 5.21. — *For any real number B, we have*

$$N(B)=\frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sharp\{R\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})\cap\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}},\ H(R)\leqslant B\}$$

Proof. — This corollary follows from propositions 4.9, 4.6, and 5.20 and corollary 5.17. □

Remark 5.22. — For any prime number p and any $\boldsymbol{m}\in\Sigma$, we have $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}\subset\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$. Therefore, for any $R=(R_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})}$ belonging to $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$, we have $H(R)=H_\infty(R_\infty)$.

Notation 5.23. — For any real number B, and any $\boldsymbol{m}\in\Sigma$, we denote by $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},\infty}(B)$ the set of $R\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R})$ such that the point $Q=(x,y,t,u,v)=\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}(R)$ satisfies the conditions

$$H_\infty(Q)\leqslant B\quad\text{and}\quad H_\infty(Q)\geqslant\max(|u|,|v|)^2\geqslant 1. \tag{5.6}$$

We define $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)$ as the product $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},\infty}(B)\times\prod_{p\in\mathscr{P}}\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$.

Remark 5.24. — Let F be a fiber of the morphism $\pi:S\to\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Then the Picard group of S is a free $\mathbf{Z}$-module with a basis given by the pair $([F],[\omega_S^{-1}])$. According to the formula (5.5), the function H_∞ corresponds to $[\omega_S^{-1}]$. In a similar way the map applying (x,y,t,u,v) to $\max(|u|,|v|)$ corresponds to $[F]$. On the other hand, the cone of effective divisors in $\mathrm{Pic}(S)$ is the cone generated by $[F]$ and $[E^+]+[E^-]=[\omega_S^{-1}]-2[F]$. But, by the preceding remark, the function

$$Q=(x,y,t,u,v)\longmapsto\frac{H_\infty(Q)}{\max(|u|,|v|)^2}$$

corresponds to $[E^+]+[E^-]$. Thus the lower bounds imposed in the definition of $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},\infty}(B)$ correspond to the condition (3.9) of [**Pe3**, p. 268].

These lower bounds are automatically satisfied by any point R in $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}} \cap \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})$. Indeed $Q = \widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}(R)$ belongs to $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z})$ and writing $Q = (x, y, t, u, v)$ we get that $\max(|u|, |v|) \geqslant 1$. Since $(x, y, t) \neq 0$, by equation (4.1), we also have that $t \neq 0$ and therefore $|t| \geqslant 1$ which yields the second inequality.

Corollary 5.25. — *For any real number B, we have*

$$N(B) = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sharp(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}) \cap \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)).$$

Proof. — This follows from the last remark and the preceding corollary. □

5.4. Moebius inversion formula and change of variables. — As is usual with these type of problems, we now wish to use a Moebius inversion formula to replace the coprimality conditions by divisibility conditions.

5.4.1. *First inversion.* — The first inversion corresponds to the conditions imposed at the places $p \in \mathcal{S}$ with $p \equiv 1 \bmod 4$.

Notation 5.26. — Let $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = \#(\mathbf{Z}[i]/\mathfrak{a})$ denote the norm of an ideal $\mathfrak{a}$ of the ring of Gaussian integers $\mathbf{Z}[i]$. We define

$$\widehat{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{b} \subset \mathbf{Z}[i],\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}) \in \mathfrak{D}\},$$

where

$$\mathfrak{D} = \{d \in \mathbf{Z}_{>0},\ p \mid d \Rightarrow p \equiv 1 \bmod 4\}. \tag{5.7}$$

Let A be a commutative ring. Let $\boldsymbol{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}}$ be a family of ideals of $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i]$ such that $\mathfrak{b}_{\overline{\delta}} = \overline{\mathfrak{b}_\delta}$ for any $\delta \in \boldsymbol{\Delta}$. Then $(\prod_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \mathfrak{b}_\delta)^{\mathscr{G}}$ is an ideal of $A_{\boldsymbol{\Delta}}$ and for any $\boldsymbol{n} \in \mathbf{Z}^4$, we define

$$\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\mathfrak{b}}) = \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(A) \cap \Big(\prod_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \mathfrak{b}_\delta\Big)^{\mathscr{G}}.$$

We define $\mathscr{I}_{\boldsymbol{\Delta}}(A)$ as the set of such families of ideals. For any p, the map $\log_p$ induces a map from $\mathscr{I}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Z})$ to $\overline{\Gamma}_p$. If $\log_2(\boldsymbol{\mathfrak{a}}) = 0$, then we define

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mathfrak{a}}) = \prod_{p \in \mathscr{P} - \{2\}} \exp_{\varpi_p}(\log_p(\boldsymbol{\mathfrak{a}})).$$

For any $\boldsymbol{\mathfrak{a}} \in \mathscr{I}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Z})$, we also put $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{a}}) = (\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+))_{1 \leqslant j \leqslant 4} \in \mathbf{Z}^4_{\geqslant 0}$.

If $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}}$ belongs to $T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}) \cap \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\Delta}}$, then we put $\mathrm{N}(\boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_j^+ \lambda_j^-)_{1 \leqslant j \leqslant 4} \in \mathbf{Z}^4_{>0}$ and define a morphism $m_{\boldsymbol{\lambda}} : \mathscr{Y}_{\mathrm{N}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{n}} \to \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$ using the action of the torus $T_{\boldsymbol{\Delta}}$

on $\mathbf{A}_{\mathbf{\Delta}}$. For any commutative ring A, we may define an element $\boldsymbol{\lambda} A_{\mathbf{\Delta}} \in \mathscr{I}_{\Delta}(A)$ by taking the family of ideals $(\lambda_\delta A)_{\delta \in \mathbf{\Delta}}$. If $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{Z})$ satisfies $\log_2(\mathfrak{a}) = 0$, then $\mathfrak{a} = \lambda(\mathfrak{a})\mathbf{Z}_{\mathbf{\Delta}}$. For any $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{Z})$, we similarly define $\mathfrak{a} A_{\mathbf{\Delta}}$ as $(\mathfrak{a}_\delta A)_{\delta \in \mathbf{\Delta}} \in \mathscr{I}_{\mathbf{\Delta}}(A)$.

Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and let $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_j)_{1 \leqslant j \leqslant 4} \in \widehat{\mathfrak{D}}^4$. We may see $\mathfrak{a}$ as an element of $\mathscr{I}_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{Z})$ by putting $\mathfrak{a}_j^+ = \mathfrak{a}_j$ and $\mathfrak{a}_j^- = \overline{\mathfrak{a}}_j$ for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and $\mathfrak{a}_0^+ = \mathfrak{a}_0^- = \mathbf{Z}[i]$. Let $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = (m_j \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j))_{1 \leqslant j \leqslant 4}$. Recall that $\alpha_{\boldsymbol{m}}$ is the positive square root of $\prod_{j=1}^4 m_j$. We put

$$\alpha_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}} = \alpha_{\boldsymbol{m}} \times \prod_{j=1}^{4} \lambda(\mathfrak{a})_j^+.$$

Note that $\prod_{j=1}^4 n_j = N(\alpha_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}})$. We then define a map $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}} : \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}} \to \mathbf{A}^5_{\mathbf{Z}}$ as follows: thanks to equations (4.2) and the fact that, by (3.1), the family $(a_j, b_j)_{1 \leqslant j \leqslant 4}$ generates $\mathbf{Z}^2$, the system of equations

$$L_j(U, V) = n_j(X_j^2 + Y_j^2) \tag{5.8}$$

in the variables U and V has a unique solution in the ring of functions on $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$. We also define $T = X_0^2 + Y_0^2$ and define X and Y by the relation

$$X + iY = \alpha_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}} (X_0 + iY_0)^2 \prod_{j=1}^{4} (X_j + iY_j).$$

The morphism $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}}$ is then defined by the family of functions (X, Y, T, U, V). Since these functions satisfy the relation

$$X^2 + Y^2 = T^2 \prod_{j=1}^{4} L_j(U, V),$$

the image of $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}}$ is contained in the Zariski closure $\mathscr{Y}_{\mathrm{spl}}$ of $\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}$ in $\mathbf{A}^5_{\mathbf{Z}}$.

Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathfrak{D}}^4$. For any prime number p we define $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}, p}$ as $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p) \cap \widehat{\pi}^{-1}_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$ where $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a})$. For any real number B, we also define $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}, \infty}(B)$ as the set of $R \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{R})$ such that $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}}(R)$ satisfies the conditions (5.6). We then put $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}}(B) = \mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}, \infty}(B) \times \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}, \mathfrak{a}, p}$. When $\mathfrak{a}_j = \mathbf{Z}[i]$ for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, we shall forget $\mathfrak{a}$ in the notation.

Let $\mathcal{S}'$ be the set of $p \in \mathcal{S}$ such that $p \equiv 1 \bmod 4$. For any $p \in \mathcal{S}'$, we consider the set $\mathcal{E}_p$ of subsets I of $\Delta - \{E^+, E^-\}$ such that

(i) if $\delta_j^+ \in I$ then there exists $k < j$ such that $\delta_k^- \in I$;

(ii) if $\delta_k^- \in I$ then there exists $j > k$ such that $\delta_j^+ \in I$;

(iii) if $\delta_j^+ \in I$ and $\delta_k^- \in I$ with $j \neq k$ then $p \mid \Delta_{j,k}$.

For any $I \in \mathcal{E}_p$ we define $\boldsymbol{f}_I = (f_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \in \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\Delta}}$ by

$$f_\delta = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta \in I, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Using notation 5.11, we then consider $\boldsymbol{e}_I = \varphi_p^{-1}(\boldsymbol{f}_I)$ and $\Sigma'_p = \{\exp_{\varpi_p}(\boldsymbol{e}_I),\ I \in \mathcal{E}_p\}$. We define Σ' as the subset of $\mathscr{I}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Z})$ defined by

$$\Sigma' = \left\{ \left(\prod_{p \in \mathcal{S}'} \lambda_p \right) \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\Delta}},\ (\lambda_p)_{p \in \mathcal{S}'} \in \prod_{p \in \mathcal{S}'} \Sigma'_p \right\}$$

An element $\mathfrak{a} \in \Sigma'$ is determined by the quadruple $(\mathfrak{a}_j^+)_{1 \leqslant j \leqslant 4}$ and we shall also consider Σ' as a subset of $\widehat{\mathfrak{D}}^4$. For $p \in \mathcal{S}'$ we define a map $\mu_p : \mathcal{E}_p \to \mathbf{Z}$ by the conditions

$$\mu_p(\varnothing) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{J \subset I} \mu_p(J) = 0 \text{ if } I \neq \varnothing.$$

The map $\mu : \Sigma' \to \mathbf{Z}$ is defined by $\mu(\mathfrak{a}) = \prod_{p \in \mathcal{S}'} \mu_p(I_p(\mathfrak{a}))$.

We shall denote by $\boldsymbol{A}_{f,\infty}$ the ring $\mathbf{R} \times \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathbf{Z}_p$.

Remarks 5.27. — (i) Let $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \in T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}) \cap \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\Delta}}$. Let A be a commutative ring. Then $m_{\boldsymbol{\lambda}}$ is a bijection from the set $\mathscr{Y}_{\mathrm{N}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{n}}(A)$ to the set $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\lambda} A_{\boldsymbol{\Delta}})$.

(ii) With the same notation, for the ring $A = \mathbf{Z}_p$, the set $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{d})$ is the inverse image by $\log_p$ of the set $\log_p(\boldsymbol{\lambda}) + \Xi_p$.

Lemma 5.28. — *Let $p \in \mathcal{S}'$. For any subset K of Γ_p, we denote by $\mathbf{1}_K$ its characteristic function. Then*

$$\mathbf{1}_{\Lambda_p} = \sum_{I \in \mathcal{E}_p} \mu_p(I) \mathbf{1}_{\boldsymbol{e}_I + \Xi_p}.$$

Proof. — For any j,k in $\{1,2,3,4\}$ such that $j<k$ and $p \mid \Delta_{j,k}$, we put $I_{j,k} = \{\delta_j^-, \delta_k^+\}$. Let K be a subset of $\{(j,k) \in \{1,2,3,4\}^2,\ j<k \text{ and } p \mid \Delta_{j,k}\}$. Let $I = \bigcup_{(j,k)\in K} I_{j,k}$. Then we have

$$\bigcap_{(j,k)\in K} (\boldsymbol{e}_{j,k} + \Xi_p) = \boldsymbol{e}_I + \Xi_p.$$

On the other hand, a subset I of $\boldsymbol{\Delta}$ belongs to $\mathscr{E}_p$ if and only if it is the union of subsets $I_{j,k}$ with $j<k$ and $p \mid \Delta_{j,k}$. The lemma then follows from equation (5.4) which defines Λ_p and the fact that the map $I \mapsto \boldsymbol{e}_I + \Xi_p$ reverses the inclusions. □

Lemma 5.29. — *Let $\mathfrak{a} \in \Sigma'$ and let B be a positive real number. The multiplication by $\lambda(\mathfrak{a}) \in T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q})$ maps $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}(B)$ onto $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m}}(B) \cap \mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathfrak{a}(\boldsymbol{A}_{f,\infty})_{\boldsymbol{\Delta}})$.*

Proof. — By remark 5.27 (i), the map $m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ is a bijection from the set $\mathscr{Y}_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{f,\infty})$ onto the set $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\mathfrak{a}(\boldsymbol{A}_{f,\infty})_{\boldsymbol{\Delta}})$. Let us now compare the maps $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}} \circ m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ and $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}$. The map $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}$ is given by the relations

$$\begin{cases} L_j(U,V) = \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+) m_i (X_j^2 + Y_j^2) \text{ for } j \in \{1,2,3,4\}, \\ T = X_0^2 + Y_0^2, \\ X + iY = \alpha_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}} (X_0 + iY_0)^2 \prod_{j=1}^4 (X_j + iY_j), \end{cases}$$

whereas $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}} \circ m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ is given by

$$\begin{cases} L_j(U,V) = \lambda(\mathfrak{a})_j^+ \lambda(\mathfrak{a})_j^- m_i (X_j^2 + Y_j^2) \text{ for } j \in \{1,2,3,4\}, \\ T = X_0^2 + Y_0^2, \\ X + iY = \alpha_{\boldsymbol{m}} \left(\prod_{j=1}^4 \lambda(\mathfrak{a})_j^+ \right) (X_0 + iY_0)^2 \prod_{j=1}^4 (X_j + iY_j). \end{cases}$$

Therefore $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}} \circ m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ coincides with $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}$. This proves that for any prime number p, the map $m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ maps $\widehat{\pi}^{-1}_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}(\mathbf{Z}_p)$ onto $\widehat{\pi}^{-1}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Z}_p)$. Moreover $m_{\lambda(\mathfrak{a})}$ sends the set $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\infty}(B)$ onto $\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m},\infty}(B)$. □

Proposition 5.30. — *For any real number B, we have*

$$N(B) = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} \sum_{\mathfrak{a}\in\Sigma'} \mu(\mathfrak{a}) \sharp(\mathcal{T}_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}) \cap \mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}(B)).$$

Proof. — This follows from lemma 5.28, the definition of $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)$ and lemma 5.29. □

5.4.2. *Second inversion.* — The inversion we shall now perform corresponds to the condition $\gcd(x, y, t) = 1$.

Notation 5.31. — The map $\mu : \widehat{\mathfrak{O}} \to \mathbf{Z}$ is the multiplicative function such that

$$\mu(\mathfrak{p}^k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, \\ -1 & \text{if } k = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ in $\widehat{\mathfrak{O}}$ and any integer $k \geqslant 0$.

Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\boldsymbol{\mathfrak{a}} \in \Sigma' \subset \widehat{\mathfrak{O}}^4$. Let $\boldsymbol{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}_j)_{j \in \{1,2,3,4\}} \in \widehat{\mathfrak{O}}^4$. We put $\boldsymbol{n} = \mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{a}}\boldsymbol{\mathfrak{b}})\boldsymbol{m}$ and $\mu(\boldsymbol{\mathfrak{b}}) = \prod_{j=1}^4 \mu(\mathfrak{b}_j)$. Let B be a real number. Let p be a prime number. If R belongs to $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$, we denote by X, Y, T, U and V the functions on $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$ which define $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}}\boldsymbol{\mathfrak{b}}}$. The local domain $\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},p}$ is then defined as follows:

— If $p \equiv 3 \bmod 4$ or $p = 2$, then $\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},p}$ is the set of $R \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$ such that $T(R) \in \mathbf{Z}_p^*$ and $\min(v_p(U(R)), v_p(V(R))) = 0$;

— If $p \equiv 1 \bmod 4$ then $\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},p}$ is the set of $R = (z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$ such that z_0^- belongs to $\bigcap_{j=1}^4 \mathfrak{b}_j$, such that $\min\left(v_p(T(R)), v_p\left(\prod_{j=1}^4 \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j)\right)\right) = 0$ and such that $\min(v_p(U(R)), v_p(V(R))) = 0$.

We also put $\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},\infty}(B) = \mathscr{D}^1_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\infty}(B)$ and

$$\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}}}(B) = \mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},\infty}(B) \times \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}},p}.$$

Proposition 5.32. — *For any real number B, we have the relation*

$$N(B) = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{a}} \in \Sigma'} \sum_{\boldsymbol{\mathfrak{b}} \in \widehat{\mathfrak{O}}^4} \mu(\boldsymbol{\mathfrak{a}})\mu(\boldsymbol{\mathfrak{b}}) \sharp(\mathcal{T}_{\mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{a}})\mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{b}})\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}) \cap \mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}},\boldsymbol{\mathfrak{b}}}(B)).$$

Proof. — Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, let $\boldsymbol{\mathfrak{a}} \in \Sigma'$ and let p be a prime number.

Let us first assume that $p \not\equiv 1 \bmod 4$. By lemma 5.7 c), we have $v_p(t) = 0$ for any $(x, y, t, u, v) \in \mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p)$. Conversely, let R belong to $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{a}})}(\mathbf{Z}_p)$. If $v_p(T(R)) = 0$, then $\min(v_p(X(R)), v_p(Y(R)), v_p(T(R))) = 0$.

We now assume that $p \equiv 1 \bmod 4$. For any $R = (z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\boldsymbol{\mathfrak{a}})}(\mathbf{Q}_p)$ we have the relations

$$T(R) = z_0^+ z_0^- \quad \text{and} \quad X(R) + iY(R) = \alpha_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathfrak{a}}}(z_0^+)^2 \prod_{j=1}^4 z_j^+.$$

Note that if $\varpi_p|\alpha_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}$ for any prime $p \equiv 1 \bmod 4$, then $p|\alpha_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a}}$. Therefore we have the relation $\gcd(X(R), Y(R), T(R)) = 1$ in $\mathbf{Z}_p$ if and only if R satisfies the following two conditions:

(i) One has $\min(v_p(T(R)), v_p(\mathrm{N}(\prod_{j=1}^{4} \mathfrak{a}_j))) = 0$;

(ii) There is no $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and no $\varpi \in \mathcal{S}_p$ such that $z_j^+ \in \varpi$ and $z_0^+ \in \overline{\varpi}$.

We denote by $\widehat{\mathfrak{b}}$ the unique element of $\mathscr{I}_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Z})$ such that $\widehat{\mathfrak{b}}_j^+ = \mathfrak{b}_j$ for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and $\widehat{\mathfrak{b}}_0^- = \bigcap_{j=1}^{4} \mathfrak{b}_j$. A classical Moebius inversion yields that the characteristic function of the set of the elements R in $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a})}(\mathbf{Z}_p)$ which satisfy condition (ii) is equal to

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \widehat{\mathfrak{D}}^4} \mu(\mathfrak{b}) \mathbf{1}_{\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a})}\left(\widehat{\mathfrak{b}}(\mathbf{Z}_p)_{\boldsymbol{\Delta}}\right)}.$$

By remark 5.27 (i), the multiplication map $m_{\lambda(\mathfrak{b})}$ maps $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a})}\left(\widehat{\mathfrak{b}}(\mathbf{Z}_p)_{\boldsymbol{\Delta}}\right)$ onto the set of $(z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}}$ in $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}\mathrm{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}(\mathbf{Z}_p)$ such that z_0^- belongs to $\bigcap_{j=1}^{4} \mathfrak{b}_j$. The rest of the proof is similar to the proof of lemma 5.29. □

5.4.3. *Third inversion.* — The last inversion corresponds to the condition $\gcd(u, v) = 1$, in which it will prove nonetheless useful to retain the fact that u, v cannot both be even.

Notation 5.33. — Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \Sigma'$. Let $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_j)_{j \in \{1,2,3,4\}} \in \widehat{\mathfrak{D}}^4$. We put $\boldsymbol{n} = \mathrm{N}(\mathfrak{a})\mathrm{N}(\mathfrak{b})\boldsymbol{m}$. Let ℓ be an odd integer. Let p be a prime number. The local domain $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}$ is then defined as follows:

— If $p = 2$, then $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}$ is the set of $R \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$ such that $T(R) \in \mathbf{Z}_p^*$ and $\min(v_p(U(R)), v_p(V(R))) = 0$;

— If $p \equiv 3 \bmod 4$, then $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}$ is the set of $R \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$ such that $T(R) \in \mathbf{Z}_p^*$ and ℓ divides $U(R)$ and $V(R)$.

— If $p \equiv 1 \bmod 4$ then $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}$ is the set of $R = (z_\delta)_{\delta \in \boldsymbol{\Delta}} \in \mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Z}_p)$ such that z_0^- belongs to $\bigcap_{j=1}^{4} \mathfrak{b}_j$, such that $\min\left(v_p(T(R)), v_p\left(\prod_{j=1}^{4} \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j)\right)\right) = 0$ and ℓ divides $U(R)$ and $V(R)$.

We define $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,\infty}(B) = \mathscr{D}^2_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\infty}(B)$ and

$$\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B) = \mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,\infty}(B) \times \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}.$$

Proposition 5.34. — *For any positive real number B, we have that $N(B)$ is equal to*

$$\frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sum_{\mathfrak{a}\in\Sigma'}\sum_{\mathfrak{b}\in\widehat{\mathfrak{D}}^4}\sum_{\substack{\ell=1\\ 2\nmid\ell}}^{\infty}\mu(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{b})\mu(\ell)\sharp(\mathcal{T}_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\mathrm{N}(\mathfrak{b})\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})\cap\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B)).$$

6. Formulation of the counting problem

We are now ready to begin the analytic part of the proof of theorem 3.3. Let us recall that the linear forms that we are working with take the shape

$$L_1(U,V)=U,\quad L_2(U,V)=V,\quad L_3(U,V)=a_3U+b_3V,\quad L_4(U,V)=a_4U+b_4V,$$

with integers a_3,b_3,a_4,b_4 such that $\gcd(a_3,b_3)=\gcd(a_4,b_4)=1$ and

$$\Delta=a_3b_3a_4b_4(a_3b_4-a_4b_3)\neq 0. \tag{6.1}$$

It is clear that the forms involved are all pairwise non-proportional. In this section we will further translate our counting problem in terms of the familiar multiplicative arithmetic function

$$r(n)=\sharp\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2,\ x^2+y^2=n\}=4\sum_{d\mid n}\chi(d),$$

where χ is the real non-principal character modulo 4. It is to this expression that we will be able to direct the full force of analytic number theory.

In what follows we will allow the implied constant in any estimate to depend arbitrarily upon the coefficients of the linear forms involved. Furthermore, we will reserve j for an arbitrary index from the set $\{1,2,3,4\}$. Finally, many of our estimates will involve a small parameter $\varepsilon>0$ and it will ease notation if we also permit the implied constants to depend on the choice of ε. We will follow common practice and allow ε to take different values at different parts of the argument.

Recall the definitions of Σ,Σ' from section 4 and section 5 respectively. In particular we have $m_jN(\mathfrak{a}_j^+)=O(1)$ whenever $\boldsymbol{m}\in\Sigma$ and $\mathfrak{a}\in\Sigma'$.

Proposition 6.1. — *For $B\geqslant 1$, we have*

$$N(B)=\frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma\\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}}\mu(\mathfrak{a})\sum_{\substack{\ell=1\\ 2\nmid\ell}}^{\infty}\mu(\ell)\sum_{\mathfrak{b}\in\widehat{\mathfrak{D}}^4}\mu(\mathfrak{b})\sum_{\substack{t\in\mathfrak{D}\\ \gcd(t,\mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1\\ \mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)\mid t}} r\Big(\frac{t}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)}\Big)\mathscr{U}\Big(\frac{B}{t}\Big),$$

where

$$\mathscr{U}(T) = \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbf{Z}^2\cap\sqrt{T}\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}\\ \ell|u,v\\ 2\nmid\gcd(u,v)\\ m_j\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+\mathfrak{b}_j)|L_j(u,v)}} \prod_{j=1}^{4} r\Big(\frac{L_j(u,v)}{m_j\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+\mathfrak{b}_j)}\Big)$$

and

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}} = \Big\{(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ 0<|u|,|v|\leqslant 1,\ m_jL_j(u,v)>0 \textit{ for } j\in\{1,2,3,4\}\Big\}. \tag{6.2}$$

Proof. — We apply proposition 5.34. Let $\boldsymbol{m}\in\Sigma$, $\mathfrak{a}\in\Sigma'$ and $\mathfrak{b}\in\widehat{\mathscr{D}}^4$. We wish to express $\sharp(\mathcal{T}_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\mathrm{N}(\mathfrak{b})\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q})\cap\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B))$ in terms of the function r. But given $(t,u,v)\in\mathbf{Z}^3$, the number of elements R in that intersection such that $(T(R),U(R),V(R))=(t,u,v)$ is 0 if (t,u,v) does not satisfy the conditions

$$\gcd(t,\mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1,\quad N(\textstyle\bigcap\mathfrak{b}_j)|t,\quad \ell|u,v,\quad 2\nmid t\gcd(u,v) \text{ and } m_j\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+\mathfrak{b}_j)\mid L_j(u,v)$$

and is equal to

$$r\left(\frac{t}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)}\right)\prod_{j=1}^{4} r\left(\frac{L_j(u,v)}{m_j\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+\mathfrak{b}_j)}\right)$$

otherwise. □

Let us set

$$d_j = m_j\mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+)\mathrm{N}(\mathfrak{b}_j),\quad D_j=\begin{cases}[d_j,\ell], & \text{if } j=1 \text{ or } 2,\\ d_j, & \text{if } j=3 \text{ or } 4,\end{cases} \tag{6.3}$$

where $[d_j,\ell]$ is the least common multiple of d_j, ℓ. Then d_j, D_j are odd positive integers such that $d_j\mid D_j$. We may write

$$\mathscr{U}(T) = \sum_{\substack{(u,v)\in\Gamma_{\mathbf{D}}\cap\sqrt{T}\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}\\ 2\nmid\gcd(u,v)}} \prod_{j=1}^{4} r\Big(\frac{L_j(u,v)}{d_j}\Big), \tag{6.4}$$

where

$$\Gamma_{\mathbf{D}} = \{(u,v)\in\mathbf{Z}^2,\ D_j\mid L_j(u,v)\}. \tag{6.5}$$

Before passing to a detailed analysis of the sum $\mathscr{U}(T)$ and its effect on the behaviour of the counting function $N(B)$, we will first corral together some of

the technical tools that will prove useful to us. It is clear that $\Gamma_{\mathbf{D}}$ defines a sublattice of $\mathbf{Z}^2$ of rank 2, since it is closed under addition and contains the vector $D_1D_2D_3D_4(u,v)$ for any $(u,v)\in\mathbf{Z}^2$. Let us write

$$\rho(\mathbf{D}) = \det\Gamma_{\mathbf{D}}, \tag{6.6}$$

for the determinant. It follows from the Chinese remainder theorem that there is a multiplicativity property $\rho(g_1h_1,\dots,g_4h_4)=\rho(g_1,\dots,g_4)\rho(h_1,\dots,h_4)$, whenever $g_1\cdots g_4$ and $h_1\cdots h_4$ are coprime. Recall the definition (6.1) of Δ. Then [**HB**, Eqn. (3.12)] shows that

$$\rho(p^{e_1},\dots,p^{e_4}) = p^{\max_{i<j}\{e_i+e_j\}}, \tag{6.7}$$

for any prime $p\nmid\Delta$. Likewise, when $p\mid\Delta$ one has

$$\rho(p^{e_1},\dots,p^{e_4}) \asymp p^{\max_{i<j}\{e_i+e_j\}}, \tag{6.8}$$

whence

$$\rho(\mathbf{D}) \asymp [D_1D_2, D_1D_3, D_1D_4, D_2D_3, D_2D_4, D_3D_4], \tag{6.9}$$

where the symbol $\asymp$ means that the two quantities involved have the same order of magnitude.

7. Estimating $\mathcal{U}(T)$: an upper bound

Our goal in this section is to provide an upper bound for $\mathcal{U}(T)$, which is uniform in the various parameters. This will allow us to reduce the range of summation for the various parameters appearing in our expression for $N(B)$. Our main tool will be previous work of the first two authors [**BB1**], which is concerned with the average order of arithmetic functions ranging over the values taken by binary forms.

Throughout this section we continue to adhere to the convention that all of our implied constants are allowed to depend upon the coefficients of the forms L_j. Recall the expression for $\mathcal{U}(T)$ given in (6.4), with d_j, D_j given by (6.3). We then have the following result.

Lemma 7.1. — *Let $\varepsilon>0$, let $T\geqslant 1$ and write $d=d_1d_2d_3d_4$. Then we have*

$$\mathcal{U}(T) \ll (d\ell)^{\varepsilon}\Big(\frac{T}{[D_1D_2,\dots,D_3D_4]} + \frac{T^{1/2+\varepsilon}}{\ell}\Big).$$

Proof. — Since we are only concerned with providing an upper bound for $\mathscr{U}(T)$, we may drop any of the conditions in the summation over (u,v) that we care to choose. Thus it follows that

$$\mathscr{U}(T) \leqslant \sum_{(u,v)\in\Gamma_{\mathbf{D}}\cap(0,\sqrt{T}]^2} \prod_{j=1}^{4} r\Big(\frac{|L_j(u,v)|}{d_j}\Big),$$

where $\Gamma_{\mathbf{D}}$ is the lattice defined in (6.5).

Let $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ be a minimal basis for $\Gamma_{\mathbf{D}}$. This is constructed by taking $\mathbf{e}_1 \in \Gamma_{\mathbf{D}}$ to be any non-zero vector for which $|\mathbf{e}_1|$ is least, and then choosing $\mathbf{e}_2 \in \Gamma_{\mathbf{D}}$ to be any vector not proportional to $\mathbf{e}_1$, for which $|\mathbf{e}_2|$ is least. The successive minima of $\Gamma_{\mathbf{D}}$ are the numbers $s_i = |\mathbf{e}_i|$, for $i = 1, 2$. We claim that $s_1 \geqslant \min\{D_1, D_2\} \geqslant \ell$. For this we recall the definition (6.3) of D_1, D_2 and note that $\Gamma_{\mathbf{D}} \subseteq \Lambda = \{(u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ \ D_1 \mid u,\ D_2 \mid v\}$, where $\Lambda \subseteq \mathbf{Z}^2$ is a sublattice of rank 2, with smallest successive minimum $\min\{D_1, D_2\}$. The desired inequalities are now obvious and we conclude that

$$\ell \leqslant s_1 \leqslant s_2, \quad s_1 s_2 \ll \rho(\mathbf{D}) \leqslant s_1 s_2, \tag{7.1}$$

where ρ is defined in (6.6).

Write $M_j(X,Y)$ for the linear form obtained from $d_j^{-1}L_j(U,V)$ via the change of variables $(U,V) \mapsto X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$. Each M_j has integer coefficients of size $O(\rho(\mathbf{D}))$. Furthermore, it follows from work of Davenport [**Da**, lemma 5] that $x \ll \max\{|u|, |v|\}/s_1$ and $y \ll \max\{|u|, |v|\}/s_2$ whenever one writes $(u,v) \in \Gamma_{\mathbf{D}}$ as $(u,v) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, with $x, y \in \mathbf{Z}$. Let $T_1 = s_1^{-1}\sqrt{T}$ and $T_2 = s_2^{-1}\sqrt{T}$, so that in particular $T_1 \geqslant T_2 > 0$. Then we may deduce that

$$\mathscr{U}(T) \leqslant \sum_{x \ll T_1, y \ll T_2} \prod_{j=1}^{4} r(|M_j(x,y)|).$$

Suppose that $M_j(X,Y) = a_{j1}X + a_{j2}Y$, with integer coefficients $a_{ji} = O(\rho(\mathbf{D}))$. We proceed to introduce a multiplicative function $r_1(n)$, via

$$r_1(p^\nu) = \begin{cases} 1 + \chi(p), & \nu = 1 \text{ and } p \nmid 6d\ell \prod a_{ji}, \\ (1+\nu)^4, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $d = d_1 d_2 d_3 d_4$. Then $r(n_1)r(n_2)r(n_3)r(n_4) \leqslant 2^8 r_1(n_1 n_2 n_3 n_4)$, and one checks that r_1 belongs to the class of non-negative arithmetic functions considered previously by the first two authors [**BB1**]. An application of [**BB1**, corollary

1] now reveals that

$$\mathscr{U}(T) \ll (d\ell)^{\varepsilon}(T_1T_2 + T_1^{1+\varepsilon}) \ll (d\ell)^{\varepsilon}\Big(\frac{T}{s_1s_2} + \frac{T^{1/2+\varepsilon}}{s_1}\Big),$$

for any $\varepsilon > 0$. Combining (7.1) with (6.9) we therefore conclude the proof of the lemma. □

The main purpose of lemma 7.1 is to reduce the range of summation of the various parameters appearing in proposition 6.1. Let us write $E_0(B)$ for the overall contribution to the summation from values of $\mathfrak{b}_j$, ℓ such that

$$\max \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) > \log(B)^D \quad \text{or} \quad \ell > \log(B)^L, \tag{7.2}$$

for parameters $D, L > 0$ to be selected in due course. We will denote by $N_1(B)$ the remaining contribution, so that

$$N(B) = N_1(B) + E_0(B). \tag{7.3}$$

Henceforth, the implied constants in our estimates will be allowed to depend on D and L, in addition to ε and the coefficients of the linear forms L_j. We have the following result.

Lemma 7.2. — *We have $E_0(B) \ll B\log(B)^{1-\min\{D/4, L/2\}+\varepsilon}$, for any $\varepsilon > 0$.*

Proof. — We begin observing that $\mathscr{U}(B/t) = 0$ in $E_0(B)$, unless $D_j \leqslant \sqrt{B/t}$, in the notation of (6.3). But then it follows that we must have

$$t \leqslant \frac{B}{\sqrt{D_1D_2D_3D_4}} \leqslant \frac{B\sqrt{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1),\ell)\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2),\ell)}}{\ell\sqrt{\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\cdots\mathrm{N}(\mathfrak{b}_4)}} = B_0,$$

say, in the summation over t. Here we have used the fact that $m_jN(\mathfrak{a}_j^+) = O(1)$ whenever $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \Sigma'$. It will be convenient to set $K = \mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\cdots\mathrm{N}(\mathfrak{b}_4)$.

We now apply lemma 7.1 to bound $\mathscr{U}(B/t)$, giving

$$E_0(B) \ll \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma\\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}}\sum_{\ell}\ell^{\varepsilon}\sum_{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4}K^{\varepsilon}\sum_{\substack{t\leqslant B_0\\ \mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)\mid t}} r\Big(\frac{t}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)}\Big)\Big(\frac{B}{t[D_1D_2,\dots,D_3D_4]} + \frac{B^{1/2+\varepsilon}}{t^{1/2+\varepsilon}\ell}\Big),$$

for any $\varepsilon > 0$, where the summations over ℓ and $\mathfrak{b}_j$ are subject to (7.2). In view of the elementary estimates

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{r(n)}{n^\theta} \ll \begin{cases} \log(2x) & \text{if } \theta \geqslant 1, \\ x^{1-\theta} & \text{if } 0 \leqslant \theta < 1, \end{cases} \tag{7.4}$$

we easily conclude that

$$E_0(B) \ll \sum_{\substack{\boldsymbol{m} \in \Sigma \\ \mathfrak{a} \in \Sigma'}} \sum_{\ell} \ell^\varepsilon \sum_{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4} \frac{K^\varepsilon}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)} \left(\frac{B \log(B)}{[D_1 D_2, \dots, D_3 D_4]} + \frac{B^{1/2+\varepsilon} B_0^{1/2-\varepsilon}}{\ell} \right).$$

The second term in the inner bracket is

$$\ll B \cdot \frac{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \ell)^{1/4} \gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2), \ell)^{1/4}}{\ell^{3/2-\varepsilon} K^{1/4-\varepsilon}}.$$

Similarly rapid consultation with (6.3) reveals that the first term in the inner bracket is

$$\ll \frac{B \log(B)}{(D_1 D_2)^{3/4} (D_3 D_4)^{1/4}} \ll B \log(B) \cdot \frac{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \ell)^{1/4} \gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2), \ell)^{1/4}}{\ell^{3/2} K^{1/4}}.$$

Bringing these estimates together we may now conclude that

$$E_0(B) \ll B \log(B) \sum_{\ell} \sum_{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4} \frac{1}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)} \cdot \frac{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \ell)^{1/4} \gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2), \ell)^{1/4}}{\ell^{3/2-\varepsilon} K^{1/4-\varepsilon}},$$

where the sums are over $\ell \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4 \subseteq \widehat{\mathfrak{D}}$ such that (7.2) holds.

For fixed $\ell \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $\varepsilon > 0$ we proceed to estimate the sum

$$S_\ell(T) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4 \subseteq \mathbf{Z}[i] \\ \max \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) \geqslant T}} \frac{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \ell)^{1/4} \gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2), \ell)^{1/4}}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j) K^{1/4-\varepsilon}}.$$

This is readily achieved via Rankin's trick and the observation that $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) \mid \mathrm{N}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ for any $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{Z}[i]$. Thus it follows that $\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j) \geqslant [\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \dots, \mathrm{N}(\mathfrak{b}_4)]$, whence

$$\begin{aligned} S_\ell(T) &\leqslant \frac{1}{T^\delta} \sum_{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4 \subseteq \mathbf{Z}[i]} \frac{\gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \ell)^{1/4} \gcd(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2), \ell)^{1/4}}{[\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1), \dots, \mathrm{N}(\mathfrak{b}_4)]^{1-\delta} K^{1/4-\varepsilon}} \\ &\ll \frac{1}{T^\delta} \sum_{b_1,\dots,b_4=1}^{\infty} \frac{\gcd(b_1, \ell)^{1/4} \gcd(b_2, \ell)^{1/4}}{[b_1, \dots, b_4]^{1-\delta} b_1^{1/4-\varepsilon} \cdots b_4^{1/4-\varepsilon}} \\ &\ll_\delta \ell^\varepsilon T^{-\delta}, \end{aligned}$$

provided that $\delta < 1/4$, as is obvious from the corresponding Euler product.

Armed with this we see that the overall contribution to the above estimate for $E_0(B)$ arising from $\ell, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4$ for which $\ell > \log(B)^L$ is

$$\ll B \log(B) \sum_{\ell > \log(B)^L} \ell^{-3/2+\varepsilon} S_\ell(1) \ll B \log(B)^{1-L/2+\varepsilon},$$

which is satisfactory. In a similar fashion the overall contribution arising from $\ell, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_4$ for which $\max \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) > \log(B)^D$ is

$$\ll B \log(B) \sum_{\ell} \ell^{-3/2+\varepsilon} S_\ell(\log(B)^D) \ll B \log(B)^{1-D/4+\varepsilon},$$

which is also satisfactory. The statement of lemma 7.2 is now obvious. □

8. Estimating $\mathscr{U}(T)$: an asymptotic formula

In view of our work in the previous section it remains to estimate $N_1(B)$, which we have defined as the contribution to $N(B)$ from values of $\mathfrak{b}_j, \ell$ for which (7.2) fails. Thus

$$N_1(B) = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma \\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}} \mu(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{\ell \leqslant \log(B)^L \\ 2\nmid \ell}} \mu(\ell) \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4 \in \widehat{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) \leqslant \log(B)^D}} \prod_{j=1}^{4} \mu(\mathfrak{b}_j) \sum_{\substack{t \in \mathfrak{D}\cap[1,B] \\ \gcd(t, \mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1 \\ \mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j) \mid t}} r\Big(\frac{t}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)}\Big) \mathscr{U}\Big(\frac{B}{t}\Big).$$

Here we have inserted the condition $t \leqslant B$ in the summation over t, since the innermost summand is visibly zero otherwise. Whereas the previous section was primarily concerned with a uniform upper bound for the sum $\mathscr{U}(T)$ defined in (6.4), our work in the present section will revolve around a uniform asymptotic

formula for $\mathscr{U}(T)$. The error term that arises in our analysis will involve the real number

$$\eta = 1 - \frac{1+\log(\log(2))}{\log(2)}, \tag{8.1}$$

which has numerical value $0.086071\ldots$.

Before revealing our result for $\mathscr{U}(T)$, we must first introduce some notation for certain local densities that emerge in the asymptotic formula. In fact estimating $\mathscr{U}(T)$ boils down to counting integer points on the affine variety

$$L_j(U,V) = d_j(S_j^2 + T_j^2), \quad (1 \leqslant j \leqslant 4), \tag{8.2}$$

in $\mathbf{A}^{10}_{\mathbf{Q}}$, with U, V restricted to lie in a lattice depending on $\mathbf{D}$. Thus the expected leading constant admits an interpretation as a product of local densities. Given a prime $p > 2$ and $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ as in (6.3), let

$$N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p^n) = \sharp\left\{(u,v,\mathbf{s},\mathbf{t}) \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^{10}, \begin{array}{l} L_j(u,v) \equiv d_j(s_j^2+t_j^2) \bmod p^n \\ D_j \mid L_j(u,v) \end{array}\right\}.$$

The p-adic density on (8.2) is defined to be

$$\omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p) = \lim_{n\to\infty} p^{-6n-\lambda_1-\cdots-\lambda_4} N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p^n), \tag{8.3}$$

when $p > 2$, where

$$\boldsymbol{\lambda} = \big(v_p(d_1),\ldots,v_p(d_4)\big), \quad \boldsymbol{\mu} = \big(v_p(D_1),\ldots,v_p(D_4)\big). \tag{8.4}$$

When $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ are as in (6.3) and $p > 2$, we will set

$$\sigma_p(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p). \tag{8.5}$$

Turning to the case $p = 2$, we define

$$\sigma_2(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \lim_{n\to\infty} 2^{-6n} N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(2^n) \tag{8.6}$$

where

$$N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(2^n) = \sharp\left\{(u,v,\mathbf{s},\mathbf{t}) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^{10}, \begin{array}{l} L_j(u,v) \equiv d_j(s_j^2+t_j^2) \bmod 2^n \\ 2 \nmid \gcd(u,v) \end{array}\right\}.$$

Finally, we let $\omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)$ denote the usual archimedean density of solutions to the system of equations (8.2), with $(u,v,\mathbf{s},\mathbf{t}) \in \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}} \times \mathbf{R}^8$ and $\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$ defined in (6.2). We are now ready to record our main estimate for $\mathscr{U}(T)$.

Lemma 8.1. — *Let* $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ *be as in* (6.3). *Then for any* $\varepsilon > 0$ *and* $T \geqslant 2$ *we have*

$$\mathscr{U}(T) = c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}} T + O\Big(\frac{(d_1 d_2 d_3 d_4 \ell)^{\varepsilon} T}{\log(T)^{\eta-\varepsilon}}\Big),$$

where

$$c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}} = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty) \prod_{p \in \mathscr{P}} \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}). \tag{8.7}$$

Proof. — Our primary tool in estimating $\mathscr{U}(T)$ asymptotically is the subject of allied work of the first two authors [**BB2**]. We begin by bringing our expression for $\mathscr{U}(T)$ into a form that can be tackled by the main results there. According to (6.1) we may assume that the binary linear forms L_j are pairwise non-proportional and primitive. Furthermore, it is clear that the region $\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}} \subset \mathbf{R}^2$ defined in (6.2) is open, bounded and convex, with a piecewise continuously differentiable boundary such that $m_j L_j(u, v) > 0$ for each $(u, v) \in \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$.

A key step in applying the work of [**BB2**] consists in checking that the "normalisation hypothesis" $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$ is satisfied in the present context. In fact it is easy to see that $L_j, \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$ will satisfy $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$ provided that

$$L_1(U, V) \equiv d_1 U \pmod 4, \quad L_2(U, V) \equiv V \pmod 4.$$

The second congruence is automatic since $L_2(U, V) = V$. Recalling that $L_1(U, V) = U$, we therefore conclude that $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$ holds if $d_1 \equiv 1 \bmod 4$. Alternatively, if $d_1 \equiv 3 \bmod 4$, we make the unimodular change of variables $(U, V) \mapsto (-U, V)$ to place ourselves in the setting of $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$. We leave the reader to check that this ultimately leads to an identical estimate in the ensuing argument. Thus, for the purposes of our exposition here, we may freely assume that $L_j, \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$ satisfy $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$ in $\mathscr{U}(T)$.

We proceed by writing

$$\mathscr{U}(T) = U_1(T) + U_2(T) + U_3(T), \tag{8.8}$$

where $U_1(T)$ denotes the contribution to $\mathscr{U}(T)$ from (u, v) such that $2 \nmid uv$, $U_2(T)$ denotes the contribution from (u, v) such that $2 \nmid u$ and $2 \mid v$, and finally $U_3(T)$ is the contribution from (u, v) such that $2 \mid u$ and $2 \nmid v$. For each $1 \leqslant i \leqslant 3$ we will establish an estimate of the form

$$U_i(T) = c_i T + O\Big(\frac{(d\ell)^{\varepsilon} T}{\log(T)^{\eta-\varepsilon}}\Big), \tag{8.9}$$

where $d = d_1 d_2 d_3 d_4$.

Beginning with the case $i = 1$, we observe that $U_1(T) = S_1(\sqrt{T}, \mathbf{d}, \Gamma_{\mathbf{D}})$, in the notation of [**BB2**, eq. (1.9)]. An application of [**BB2**, theorems 3 and 4] with $(j, k) = (1, 2)$ therefore reveals that (8.9) holds with

$$c_1 = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)\omega_{1,\mathbf{d}}(2) \prod_{p>2} \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p).$$

Here $\omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p)$ is given by (8.3) for $p > 2$ and $\omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)$ is defined prior to the statement of the lemma. Finally for $i \in \{0, 1\}$ the corresponding 2-adic density is given by

$$\omega_{i,\mathbf{d}}(2) = \lim_{n\to\infty} 2^{-6n} \sharp\left\{(u, v, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^{10}, \begin{array}{l} L_j(u, v) \equiv d_j(s_j^2 + t_j^2) \bmod 2^n \\ u \equiv 1 \bmod 4,\ v \equiv i \bmod 2 \end{array}\right\}.$$

Note that the notation introduced in [**BB2**] involves an additional subscript in $\omega_{i,\mathbf{d}}(2)$ whose presence indicates which of the various normalisation hypotheses the $L_j, \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$ are assumed to satisfy. Since we have placed ourselves in the context of $\mathsf{NH}_2(\mathbf{d})$ in each case, we have found it reasonable to suppress mentioning this here. Let us now shift to a consideration of the sum $U_2(T)$ in (8.8), for which one finds that $U_2(T) = S_0(\sqrt{T}, \mathbf{d}, \Gamma_{\mathbf{D}})$. Applying [**BB2**, theorems 3 and 4] with $(j, k) = (0, 2)$ therefore yields (8.9) with $i = 2$ and

$$c_2 = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)\omega_{0,\mathbf{d}}(2) \prod_{p>2} \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p).$$

Finally we turn to the sum $U_3(T)$ in (8.8). Making the unimodular change of variables $(U, V) \mapsto (V, U)$, one now sees that $U_3(T) = S_0(\sqrt{T}; \mathbf{d}, \Gamma_{\mathbf{D}})$, where the underlying region is $\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2,\ (v, u) \in \mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}\}$ and $\Gamma_{\mathbf{D}}$ is defined as for $\Gamma_{\mathbf{D}}$, but with the linear forms $L_j(U, V)$ replaced by $L_j(V, U)$. Thus an application of [**BB2**, theorems 3 and 4] with $(j, k) = (0, 2)$ produces (8.9) with $i = 3$ and

$$c_3 = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)\omega_{0,\mathbf{d}}(2) \prod_{p>2} \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p) = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)\omega_{0,\mathbf{d}}(2) \prod_{p>2} \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p).$$

Here the superscripts indicate that the local densities are taken with respect to the linear forms $L_j(V, U)$.

We are now ready to bring together our various estimates for $U_1(T)$, $U_2(T)$ and $U_3(T)$ in (8.8). This leads to the asymptotic formula in the statement of the lemma, with leading constant

$$c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}} = \omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty)\Big(\omega_{1,\mathbf{d}}(2) + \omega_{0,\mathbf{d}}(2) + \omega_{0,\mathbf{d}}(2)\Big) \prod_{p>2} \omega_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p).$$

The statement of the lemma easily follows with recourse to the definitions (8.5), (8.6) of the local densities $\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$. ☐

We will need to consider the effect of the error term in lemma 8.1 on the quantity $N_1(B)$ that was described at the start of the section. Accordingly, let us write

$$N_1(B) = N_2(B) + E_1(B), \tag{8.10}$$

where $N_2(B)$ denotes the overall contribution from the main term in lemma 8.1 and $E_1(B)$ denotes the contribution from the error term.

Lemma 8.2. — *We have* $E_1(B) \ll B\log(B)^{1+L-\eta+\varepsilon}$, *for any* $\varepsilon > 0$.

Proof. — Inserting the error term in lemma 8.1 into our expression for $N_1(B)$, we obtain

$$\begin{aligned} E_1(B) &\ll B\log(B)^{\varepsilon} \sum_{\ell \leqslant \log(B)^L} \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4 \in \widehat{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) \leqslant \log(B)^D}} \sum_{\substack{t \leqslant B \\ \mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j) \mid t}} r\left(\frac{t}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)}\right) \cdot \frac{1}{t\log(2B/t)^{\eta}} \\ &\ll B\log(B)^{L+\varepsilon} \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4 \in \widehat{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) \leqslant \log(B)^D}} \frac{1}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)} \sum_{t \leqslant B_1} \frac{r(t)}{t\log(2B_1/t)^{\eta}}, \end{aligned}$$

where we have written $B_1 = B/\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)$, for ease of notation. Combining the familiar (7.4) with partial summation, we therefore conclude that

$$E_1(B) \ll B\log(B)^{1+L-\eta+\varepsilon} \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4 \in \widehat{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j) \leqslant \log(B)^D}} \frac{1}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)} \ll B\log(B)^{1+L-\eta+\varepsilon}.$$

This concludes the proof of the lemma. ☐

Let $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ and $|z| < 1$. To proceed further we will need to calculate expressions for the geometric series

$$S^{\varepsilon}(z) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^4_{\geqslant 0}} \varepsilon^{n_1+n_2+n_3+n_4} z^{m(\mathbf{n})}, \tag{8.11}$$

where $m(\mathbf{n}) = \max_{i\neq j}\{n_i + n_j\}$. We claim that

$$(8.12)\qquad S^{-1}(z) = \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2(1+z^2)}, \quad S^{+1}(z) = \frac{1+2z+6z^2+2z^3+z^4}{(1-z)^4(1+z)^2}.$$

A similar calculation can be found in [**HB**, §8] and so we shall be brief. The key idea is to observe that

$$S^{\varepsilon}(z) = S_0^{\varepsilon}(z) + 2S_1^{\varepsilon}(z) + z^2 S^{\varepsilon}(z),$$

where for any $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, $S_0^{\varepsilon}(z)$ (resp. $S_1^{\varepsilon}(z)$) denotes the contribution from $\mathbf{n}$ such that $\min\{n_1, n_2\} = \min\{n_3, n_4\} = 0$ (resp. $\min\{n_1, n_2\} \geqslant 1$ and $\min\{n_3, n_4\} = 0$). The calculation of $S_0^{\varepsilon}(z)$ and $S_1^{\varepsilon}(z)$ is straightforward and readily confirms the expressions for $S^{\varepsilon}(z)$ in (8.12).

We now have the tools in place with which to produce a uniform upper bound for the constant (8.7) appearing in lemma 8.1. This is achieved in the following result.

Lemma 8.3. — *Let* $\varepsilon > 0$. *Then we have*

$$c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}} \ll \frac{(D_1D_2D_3D_4)^{\varepsilon}}{[D_1D_2, \dots, D_3D_4]},$$

where $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ *are given by* (6.3).

Proof. — Now it follows from [**BB2**, theorem 4] that $\omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty) = \pi^4 \operatorname{Vol}(\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}) \ll 1$. Similarly, it is easy to see that $\sigma_2(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \leqslant 2^4$, since for any $A \in \mathbf{Z}$ there are at most 2^{n+1} solutions of the congruence $s^2 + t^2 \equiv A \bmod 2^n$ by [**BB2**, eq. (2.5)]. Thus we have

$$c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}} \ll \prod_{p>2} |\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})|,$$

where $\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ is given by (8.5). For $p > 2$ a further application of [**BB2**, theorem 4] yields

$$\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^4 \sum_{\nu_1,\dots,\nu_4=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}}{\rho(p^{\max\{\mu_1,\lambda_1+\nu_1\}}, \dots, p^{\max\{\mu_4,\lambda_4+\nu_4\}})},$$

where ρ is the determinant given in (6.6) and $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ are given by (8.4). Using the multiplicativity of ρ we may clearly write

$$\prod_{p>2} |\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})| = \frac{1}{\rho(\mathbf{D})} \prod_{p>2} |\sigma_p'(\mathbf{d}, \mathbf{D})|,$$

where now

$$\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^4 \sum_{\nu_1,\dots,\nu_4=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}\rho(p^{\mu_1},\dots,p^{\mu_4})}{\rho(p^{\max\{\mu_1,\lambda_1+\nu_1\}},\dots,p^{\max\{\mu_4,\lambda_4+\nu_4\}})}.$$

In view of (6.9), it will suffice to show that

$$\prod_{p>2} |\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D})| \ll (D_1D_2D_3D_4)^{\varepsilon}, \tag{8.13}$$

in order to complete the proof of the lemma.

Recall the definition (6.1) of Δ and write $D = D_1D_2D_3D_4$. For any $\mathbf{n}\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^4$ let $m(\mathbf{n}) = \max_{i\neq j}\{n_i+n_j\}$. Then for $p\nmid \Delta D$ it follows from (6.7) that

$$\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^4 \sum_{\nu_1,\dots,\nu_4=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}}{p^{m(\boldsymbol{\nu})}}.$$

In the notation (8.11) we deduce from (8.12) that

$$\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^4 S^{+1}(1/p) = \frac{1+2/p+6/p^2+2/p^3+1/p^4}{(1+1/p)^2},$$

if $p\equiv 1 \bmod 4$, and

$$\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^4 S^{-1}(1/p) = \frac{(1-1/p^2)^2}{(1+1/p^2)},$$

if $p\equiv 3 \bmod 4$. Thus $\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) = 1+O(1/p^2)$ for $p\nmid\Delta D$.

Suppose now that $p\mid \Delta D$. Then (6.8) implies that

$$\sigma_p'(\mathbf{d},\mathbf{D}) \ll \sum_{\nu_1,\dots,\nu_4=0}^{\infty} \frac{1}{p^{m(\mathbf{n})-m(\boldsymbol{\mu})}} \ll 1$$

where $\mathbf{n} = (\max\{\mu_1,\lambda_1+\nu_1\},\dots,\max\{\mu_4,\lambda_4+\nu_4\})$. Putting this together with our treatment of the factors corresponding to $p\nmid\Delta D$, we are easily led to the desired upper bound in (8.13). This therefore concludes the proof of the lemma. □

9. The dénouement

Let $\varepsilon>0$. Take $D=4$ and $L=2\eta/3$ in lemmas 7.2 and lemma 8.2. We therefore deduce that

$$N(B) = N_2(B) + O\Big(B\log(B)^{1-\eta/3+\varepsilon}\Big)$$

via (7.3) and (8.10), where $N_2(B)$ is equal to

$$\frac{B}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma\\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}}\mu(\mathfrak{a})\sum_{\substack{\ell\leqslant\log(B)^{2\eta/3}\\ 2\nmid\ell}}\mu(\ell)\sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4\in\widehat{\mathfrak{D}}\\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j)\leqslant\log(B)^4}}\prod_{j=1}^{4}\mu(\mathfrak{b}_j)c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}\sum_{\substack{t\in\mathfrak{D}\cap[1,B]\\ \gcd(t,\mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1\\ \mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)|t}}\frac{r(t/\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j))}{t}.$$

Here $c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}$ is given by (8.7), with $\mathbf{d},\mathbf{D}$ being given by (6.3) and $\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}$ given by (6.2). The following simple result is classical and allows us to carry out the inner summation over t. The proof follows from a routine analysis of the corresponding Dirichlet series and will not be presented here.

Lemma 9.1. — *Let $m\in\mathbf{Z}_{>0}$ and let $T\geqslant 1$. Then for any $\varepsilon>0$ we have*

$$\sum_{\substack{t\in\mathfrak{D}\cap[1,T]\\ \gcd(t,m)=1}}\frac{r(t)}{t}=C_m\log(T)+O(m^{\varepsilon}),$$

where

$$C_m=2L(1,\chi)\prod_{p\equiv 3\bmod 4}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{\substack{p|m\\ p\equiv 1\bmod 4}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2.$$

Making the obvious change of variables it now follows from lemma 9.1 that

$$\sum_{\substack{t\in\mathfrak{D}\cap[1,B]\\ \gcd(t,\mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1\\ \mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)|t}}\frac{r(t/\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j))}{t}=\frac{c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\log(B)}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)}+O(1),$$

where

$$c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\begin{cases}C_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})} & \text{if }\gcd(\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j),\mathrm{N}(\mathfrak{a}))=1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

In particular it is clear that $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=O(1)$. Applying lemma 8.3 it is easy to conclude that the overall contribution to $N_2(B)$ from the error term in this estimate is

$$\begin{aligned}&\ll B\sum_{\ell\leqslant\log(B)^{2\eta/3}}\ell^{\varepsilon}\sum_{\mathrm{N}(\mathfrak{b}_j)\leqslant\log(B)^4}\frac{(\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\cdots\mathrm{N}(\mathfrak{b}_4))^{\varepsilon}}{[\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2),\dots,\mathrm{N}(\mathfrak{b}_3)\mathrm{N}(\mathfrak{b}_4)]}\\ &\ll B\log(B)^{2\eta/3+\varepsilon}\prod_{p\leqslant\log(B)^4}S^{+1}(1/p),\end{aligned}$$

in the notation of (8.11). This is therefore seen to be $O(B\log(B)^{2\eta/3+\varepsilon})$ via (8.12).

In conclusion, we may write

$$N(B) = N_3(B) + O\Big(B\log(B)^{1-\eta/3+\varepsilon}\Big),$$

where now

$$N_3(B) = \frac{B\log(B)}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma \\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}} \mu(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{\ell\leqslant\log(B)^{2\eta/3} \\ 2\nmid\ell}} \mu(\ell) \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4\in\widehat{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j)\leqslant\log(B)^4}} \frac{c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)} \prod_{j=1}^{4}\mu(\mathfrak{b}_j).$$

Here we have used (8.1) to observe that $1-\eta/3 > 2\eta/3$. Finally, through a further application of lemma 8.3, it is now a trivial matter to re-apply the proof of lemma 7.2 to show that the summations over ℓ and $\mathfrak{b}_j$ can be extended to infinity with error $O(B\log(B)^{1-\eta/3+\varepsilon})$. This therefore leads to the final outcome that

$$N(B) = cB\log(B) + O\Big(B\log(B)^{1-\eta/3+\varepsilon}\Big),$$

for any $\varepsilon > 0$, where if $c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}$ is given by (8.7) and $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ are given by (6.3), then

$$(9.1)\qquad c = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\Sigma \\ \mathfrak{a}\in\Sigma'}} \mu(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{\ell=1 \\ 2\nmid\ell}}^{\infty} \mu(\ell) \sum_{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_4\in\widehat{\mathfrak{D}}} \frac{c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}}{\mathrm{N}(\bigcap\mathfrak{b}_j)} \prod_{j=1}^{4}\mu(\mathfrak{b}_j).$$

10. Jumping down

We shall now relate the constant c defined by equation (9.1) with the one expected, as required to complete the proof of theorem 3.3.

10.1. Expression in terms of volumes. — Let us first recall that the adelic set $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ comes with a canonical measure which is defined as follows. The canonical line bundle on $\omega_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$ is trivial [**Pe3**, lemme 3.1.12] and the invertible functions on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}$ are constant. Therefore up to multiplication by a constant there exists a unique section $\check{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$ of $\omega_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$ which does not vanish. By [**We**, §2], this form defines a measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}},v}$ on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{Q}_v)$ for any place v of $\mathbf{Q}$. According to [**Pe3**, lemme 3.1.14], the product $\prod_v \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}},v}$ converges and defines a measure on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$. By the product formula, this measure does not depend on the choice of

the section $\breve{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$. Let us now describe explicitly how to construct such a section $\breve{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$.

Notation 10.1. — Let $\mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}$ be the subscheme of $\mathbf{A}^8_{\mathbf{Z}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[X_j, Y_j, 1 \leqslant j \leqslant 4])$ defined by the equations (4.2). Then $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$ is the product $\mathscr{X}_{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}}$. We denote by $\mathscr{X}^\circ_{\boldsymbol{n}}$ the complement of the origin in $\mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}$. For three distinct elements j, k, l of $\{1, 2, 3, 4\}$, let us denote by $P_{j,k,l}$ the quadratic form

$$\Delta_{j,k} n_l (X_l^2 + Y_l^2) + \Delta_{k,l} n_j (X_j^2 + Y_j^2) + \Delta_{l,j} n_k (X_k^2 + Y_k^2).$$

Then we have the relations

$$\begin{aligned} a_j P_{k,l,m} + a_k P_{l,m,j} + a_l P_{m,j,k} + a_m P_{j,k,l} = 0 \\ b_j P_{k,l,m} + b_k P_{l,m,j} + b_l P_{m,j,k} + b_m P_{j,k,l} = 0 \end{aligned}$$

whenever $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Since $\Delta_{1,2} = 1$, the scheme $\mathscr{X}^\circ_{\boldsymbol{n}}$ is the complete intersection in $\mathbf{A}^6_{\mathbf{Z}} - \{0\}$ of the quadrics defined by $P_{1,2,3}$ and $P_{1,2,4}$. Therefore the corresponding Leray form is a nonzero section of the canonical line bundle $\omega_{\mathscr{X}^\circ_{\boldsymbol{n},\mathbf{Q}}}$. On $\mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}}$, we may take the natural form $\frac{\partial}{\partial X_0} \wedge \frac{\partial}{\partial Y_0}$. The exterior product of these forms gives a form on an open subset of $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$, and by restriction a form $\breve{\omega}_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}}$ on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{n}}$ which does not vanish. We denote by $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n},v}$ the corresponding measure on $\mathscr{Y}_n(\mathbf{Q}_v)$ for $v \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q})$.

Lemma 10.2. — *Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \Sigma'$. Let $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_j)_{j \in \{1,2,3,4\}}$ belong to $\widehat{\mathfrak{D}}^4$. Let ℓ be an odd integer. Let d_j and D_j be defined by formula* (6.3). *Then for any prime number p we have*

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n},p}(\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}) = \beta_p p^{-v_p\left(\mathrm{N}\left(\bigcap_j \mathfrak{b}_j\right)\right)} \lim_{n \to +\infty} p^{-6n} N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p^n),$$

where

$$\beta_p = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } p = 2, \\ 1 - \frac{1}{p^2} & \text{if } p \equiv 3 \bmod 4, \\ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 & \text{if } p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+) \text{ and } p \equiv 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{if } p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+) \text{ and } p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. — In the product $\mathscr{X}_{N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\boldsymbol{m}} \times \mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}}$, the domain $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,p}$ decomposes as a product. The projection on the eight coordinates X_j, Y_j, where $j \in \{1,2,3,4\}$, gives an isomorphism from the complete intersection in $\mathbf{A}^{10}_{\mathbf{Z}} - \{0\}$ given by the equations

$$L_j(U,V) = n_j(X_j^2 + Y_j^2)$$

for $j \in \{1,2,3,4\}$ to the scheme $\mathscr{X}^{\circ}_{\boldsymbol{n}}$. Moreover this isomorphism map is compatible with the respective Leray forms. Since the measure defined by the Leray measure coincides with the counting measure (see, for example, [**Lac**, proposition 1.14]), the volume of the first component is equal to $\lim_{n\to+\infty} p^{-6n} N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p^n)$. The measure on $\mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}}$ is the standard Haar measure. On the other hand, the image of the domain in $\mathbf{Z}_p^2$ may be described as follows:

— It is $\mathbf{Z}[i]_{1+i} - (1+i)\mathbf{Z}[i]_{1+i}$ if $p = 2$;

— It is $\mathbf{Z}_p^2 - p\mathbf{Z}_p^2$ if $p \equiv 3 \bmod 4$;

— It is the set of $(x,y) \in \mathbf{Z}_p^2$ such that p does not divide $\mathrm{N}(x+iy)$ if $p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+)$, the prime p does not divide $\mathrm{N}(\bigcap_j \mathfrak{b}_j)$ and $p \equiv 1 \bmod 4$;

— It is empty if $p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{a}_j^+)$ and $p \mid \prod_j \mathrm{N}(\mathfrak{b}_j)$;

— It is $(\bigcap_j \mathfrak{b}_j)\mathbf{Z}_p[i]$ otherwise.

Therefore $\beta_p p^{-v_p\left(\mathrm{N}\left(\bigcap_j \mathfrak{b}_j\right)\right)}$ is the volume of this component. □

Lemma 10.3. — *Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \Sigma'$. Let $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_j)_{j\in\{1,2,3,4\}}$ belong to $\widehat{\mathfrak{D}}^4$. We put $\boldsymbol{n} = \mathrm{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\boldsymbol{m}$. Let ℓ be an odd integer. For any real number B, we have*

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n},\infty}(\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,\infty}(B)) = \frac{4L(1,\chi)\pi^4}{\prod_{j=1}^4 n_j}\mathrm{Vol}(\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}})f(B),$$

where $f(B) = \int_0^{\log(B)} ue^u \,\mathrm{d}u = B\log(B) - B + 1$.

Proof. — The functions U and V on $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}} = \mathscr{X}_{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{A}^2$ are induced by functions on $\mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}$ which we shall also denote by U and V. Let $H_{F,\infty} : \mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ and $H_{E,\infty} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by

$$H_{F,\infty}(R) = \max(|U(R)|, |V(R)|) \qquad \text{and} \qquad H_{E,\infty}(x_0,y_0) = x_0^2 + y_0^2.$$

Then the domain $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,\infty}(B)$ is the set of $(R,(x_0,y_0)) \in \mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ such that

$$H_{F,\infty}(R) \geqslant 1, \qquad H_{E,\infty}(x_0,y_0) \geqslant 1, \qquad \text{and} \qquad H_{F,\infty}(R)^2 H_{E,\infty}(x_0,y_0) \leqslant B.$$

Let us denot by $v_{\boldsymbol{n},1}(t)$ (resp. $v_2(t)$) the volume of the set of $R \in \mathscr{X}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{R})$ (resp. $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$) such that $H_{E,\infty}(R) \leqslant t$ (resp. $H_{E,\infty}(x_0, y_0) \leqslant t$). Then the functions $v_{\boldsymbol{n},1}$ and v_2 are monomials of respective degrees 2 and 1. Therefore the volume of the domain $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell,\infty}(B)$ is given by

$$v_{\boldsymbol{n},1}(1)v_2(1)\int_{\substack{t\geqslant 1, u\geqslant 1\\ t^2u\leqslant B}} 2t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = v_{\boldsymbol{n},1}(1)v_2(1)f(B).$$

To compute the value of $v_{\boldsymbol{n},1}(1)$, we may use the change of variables $x'_j = \sqrt{|n_j|}x_j$ and $y'_j = \sqrt{|n_j|}y_j$. Since the Leray form may be locally described as

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_{1,2,3}}{\partial X_1} & \frac{\partial P_{1,2,3}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial P_{1,2,4}}{\partial X_1} & \frac{\partial P_{1,2,4}}{\partial X_2} \end{vmatrix}^{-1} \mathrm{d}X_3\,\mathrm{d}X_4 \prod_{j=1}^{4} \mathrm{d}Y_j = (4\Delta_{3,4}X_1X_2)^{-1}\,\mathrm{d}X_3\,\mathrm{d}X_4 \prod_{j=1}^{4} \mathrm{d}Y_j$$

we get that $v_{\boldsymbol{n},1}(1) = v_{\boldsymbol{\varepsilon},1}(1)\prod_{j=1}^4 n_j^{-1}$, where $\varepsilon_j = \mathrm{sgn}(n_j) = \mathrm{sgn}(m_j)$. It follows that $v_{\boldsymbol{n},1}(1) = (\prod_{j=1}^4 n_j)^{-1}\pi^4 \mathrm{Vol}(\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}})$. We conclude the proof with the equalities $v_2(1) = \pi = 4L(1,\chi)$. □

Proposition 10.4. — *Let $\boldsymbol{m} \in \Sigma$ and $\mathfrak{a} \in \Sigma'$. Let $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_j)_{j\in\{1,2,3,4\}}$ belong to $\widehat{\mathfrak{D}}^4$. Let ℓ be an odd integer. Then*

$$\frac{c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}c_{\mathbf{d},\mathbf{D},\mathscr{R}}}{\mathrm{N}(\bigcap \mathfrak{b}_j)} f(B) = \mathrm{Vol}(\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B)),$$

where $f(B) = B\log(B) - B + 1$.

Proof. — This follows from lemmata 10.2 and 10.3: indeed, by [**BB2**, (2.8)], we have $\omega_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}}}(\infty) = \pi^4 \mathrm{Vol}(\mathscr{R}_{\boldsymbol{m}})$ and

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \sigma_p(\mathbf{d},\mathbf{D}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^4 n_j}\prod_{p\in\mathscr{P}} \lim_{k\to+\infty} p^{-6k} N_{\mathbf{d},\mathbf{D}}(p^k)$$

where $\boldsymbol{n} = N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\boldsymbol{m}$. □

10.2. Moebius reversion

Proposition 10.5. — *Let B be a real number and $\boldsymbol{m}$ belong to Σ. Then*

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)) = \sum_{\mathfrak{a}\in\Sigma'}\sum_{\mathfrak{b}\in\widehat{\mathfrak{D}}^4}\sum_{\ell\ \mathrm{odd}} \mu(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{b})\mu(\ell)\,\mathrm{Vol}(\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B)).$$

Proof. — For any $\boldsymbol{\lambda} \in T_{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{Q}) \cap \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\Delta}}$, and any $\boldsymbol{n} \in \mathbf{Z}^4$, the multiplication by $\boldsymbol{\lambda}$ defines an isomorphism from $\mathscr{Y}_{N(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{n}}$ to $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}$. Therefore it sends the canonical form on the adelic set $\mathscr{Y}_{N(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ onto the canonical form on $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$. Therefore the volume of $\mathscr{D}^3_{\boldsymbol{m},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ell}(B)$ coincides with the volume of its image in $\mathscr{Y}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$. The formula then follows from lemma 5.28 and the proofs of propositions 5.32 and 5.34. □

10.3. The constant

Proposition 10.6. — *We have*

$$C_H(S)B\log(B) = \frac{1}{\sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}} \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)) + O(B).$$

Proof. — The following proof is based upon the ideas of Per Salberger [**Sal**] as described in [**Pe3**, §5.3].

We may identify ω_S^{-1} with $\mathscr{O}_{S'}(1)$ (see lemma 2.2). This enables us to define an adelic metric on ω_S^{-1} by

$$\|y\|_v = \begin{cases} \min\left(\left|\frac{y}{X_0(x)}\right|, \left|\frac{y}{X_1(x)}\right|, \left|\frac{y}{X_2(x)}\right|, C\left|\frac{y}{X_3(x)}\right|, C\left|\frac{y}{X_4(x)}\right|\right) & \text{if } v = \infty, \\ \min_{0\leqslant i\leqslant 4}\left(\left|\frac{y}{X_i(x)}\right|_v\right) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

for $x \in S'(\mathbf{Q}_v)$ and y in the corresponding fiber $\mathscr{O}_{S'}(1)_x \otimes \mathbf{Q}_v$, with the constant C defined in notation 3.2. This adelic metric defines the height used throughout the text. Let v be a place of $\mathbf{Q}$. We denote by $\boldsymbol{\omega}_{H,v}$ the measure on $S(\mathbf{Q}_v)$ corresponding to the adelic metric on ω_S^{-1} (see [**Pe1**, §2]). Let us recall that on a split torus $\mathbf{G}_m^n$, the form $\bigwedge_{j=1}^n \xi_j^{-1} d\xi_j$, where $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ is a basis of $X^*(\mathbf{G}_m^n)$, up to sign does not depend on the choice of the basis. Therefore there is a canonical Haar measure on $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_v)$ which we shall denote by $\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}$. Let $\boldsymbol{m}$ be an element of Σ. The functions H_w defined in definition 5.18 may been seen as the composite of the metrics on ω_S^{-1} with the natural morphism from the universal torsor $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$ to the line bundle ω_S^{-1}. Let $U \neq \varnothing$ be an open subset of $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_v))$. According to [**Pe3**, lemme 3.1.14] and [**Pe2**, §4.4], if $s : U \to \mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_v)$ is a continuous section of $\pi_{\boldsymbol{m}}$, then the measure $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m},v}$ is characterised by the relation

$$\int_{\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(U)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m},v}(y) = \int_U \int_{T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_v)} f(t.s(x))H_v(t.s(x))\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(t)\boldsymbol{\omega}_{H,v}(x) \tag{10.1}$$

for any continuous function f on $\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(U)$ with compact support.

By lemmata 5.8 and 5.14, for any prime number p, $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ is a fundamental domain in $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)$ under the action of $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}_p)$ modulo $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)$. Moreover, by definition, we have that $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$ is contained in $\widehat{\pi}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\mathscr{T}_{\mathrm{spl}}(\mathbf{Z}_p))$ and thus H_p is equal to 1 on $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p}$. Using (10.1), we get that

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m},p}(\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(U)\cap\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p})=\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},p}(T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p))\boldsymbol{\omega}_{H,v}(U)$$

for any open subset U of $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},p})$.

The maps $\log\circ H_F$ and $\log\circ H_E$ define a map $\log_\infty:\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R})\to\mathrm{Pic}(S)^\vee\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ and using $\log_\infty\times\pi_{\boldsymbol{m}}$ we get a homeomorphism

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R})\to\mathrm{Pic}(S)^\vee\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}\times\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R})).$$

Let

$$T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R})=\{\,t\in T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R}),\ \forall\chi\in\mathrm{Pic}(S),|\chi(t)|=1\,\}.$$

Then for any real number B and any open subset U of $\pi_m(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},\infty}(B)$, we get

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m},\infty}(\pi_{\boldsymbol{m}}^{-1}(U)\cap\mathscr{D}_{\boldsymbol{m},\infty}(B))\\&=\int_{\{y\in C_{\mathrm{eff}}(S)^\vee,\ \langle\omega_S^{-1},y\rangle\leqslant\log(B)\}}e^{\langle\omega_S^{-1},y\rangle}\,\mathrm{d}y\times\omega_{T_{\mathrm{NS}}}(T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R}))\,\omega_{H,\infty}(U)\\&=\alpha(S)\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},\infty}(T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R}))\,\boldsymbol{\omega}_{H,\infty}(U)f(B),\end{aligned}$$

where $C_{\mathrm{eff}}(S)^\vee$ is the dual to the closed cone in $\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ generated by the effective divisors.

Taking the product over all places of $\mathbf{Q}$, we get the formula

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m}}(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B))&=\alpha(S)\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},\infty}(T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R}))\boldsymbol{\omega}_{H,\infty}(\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{R})))\int_0^{\log(B)}ue^u\,\mathrm{d}u\\&\times\left(\prod_{p\in\mathscr{P}}L_p(1,\mathrm{Pic}(\overline{S}))\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},p}(T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p))\right)\\&\times\left(\prod_{p\in\mathscr{P}}L_p(1,\mathrm{Pic}(\overline{S}))^{-1}\boldsymbol{\omega}_{H,p}(\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{Q}_p)))\right).\end{aligned}\tag{10.2}$$

By lemma 5.3, the map from $T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$ to $\bigoplus_{p\in\mathscr{P}}X_*(T_{\mathrm{NS}})_p$ is surjective. It follows that

$$T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbb{A}_{\mathbf{Q}})=(T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R})\times\prod_{p\in\mathscr{P}}T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p)).T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})$$

and we get an exact sequence

$$1 \longrightarrow T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} \longrightarrow T^1_{\mathrm{NS}}(\mathbf{R}) \times \prod_{p\in\mathscr{P}} T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Z}_p) \longrightarrow T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})/T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q}) \longrightarrow 1.$$

Combining this with formula (10.2) and the definitions of the adelic measures, we get the formula

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m}}(\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}(B)) = \sharp T_{\mathrm{NS}}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}\alpha(S)\tau(T_{\mathrm{NS}})\,\boldsymbol{\omega}_H(\pi_m(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}))) \int_0^{\log(B)} ue^u\,\mathrm{d}u,$$

where $\tau(T_{\mathrm{NS}})$ denotes the Tamagawa number of T_{NS}. By Ono's main theorem [**Ono2**, §5], $\tau(T_{\mathrm{NS}})$ is equal to $\sharp H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{S})/\sharp Ш^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$ and using Salberger's argument [**Sal**, proof of lemma 6.17] and prop. 4.9, any point in $S(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ belongs to exactly $\sharp Ш^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$ sets of the form $\pi_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}))$. This concludes the proof of the proposition. □

References

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BB1] R. de la Bretèche and T. D. Browning, *Sums of arithmetic functions over values of binary forms*, Acta Arith. **125** (2007), 291–304.

[BB2] ———, *Binary linear forms as sums of two squares*, Compositio Math. **144** (2008), 1375–1402.

[Ch1] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseignement Math. (2) **5** (1959), 153–170.

[Ch2] ———, *Points rationnels sur certaines surfaces cubiques*, Colloque Intern. CNRS, les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres (Clermond-Ferrand, 1964), Paris, 1966, pp. 67–75.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS3] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[CTSSD1] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107.

[CTSSD2] ———, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

[Co] R. J. Cook, *Simultaneous quadratic equations*, J. London Math. Soc. (2) **4** (1971), 319–326.

[CoTs] D. F. Coray and M. A. Tsfasman, *Artithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), n° 1, 25–87.

[Da] H. Davenport, *Cubic forms in 16 variables*, Proc. Roy. Soc. A (1963), n° 272, 285–303.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[HB] D. R. Heath-Brown, *Linear relations amongst sums of two squares*, Number theory and algebraic geometry, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 303, Cambridge University Press, 2003, pp. 133–176.

[HBS] D. R. Heath-Brown and A. Skorobogatov, *Rational solutions of certain equations involving norms*, Acta Math. **189** (2002), n° 2, 161–177.

[Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.

[Ono1] T. Ono, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), n° 1, 101–139.

[Ono2] ———, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n° 1, 47–73.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[Pe4] ———, *Points de hauteur bornée et mesures de Tamagawa*, J. Théorie des nombres de Bordeaux **15** (2003), 319–349.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in math., vol. 144, Cambridge University Press, 2001.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

February 15, 2024

Régis de la Bretèche, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586 Case 7012, Université Paris 7 – Denis Diderot 2, place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05, France
E-mail : breteche@math.jussieu.fr

Tim Browning, School of Mathematics, University of Bristol, Bristol BS8 1TW, England
E-mail : t.d.browning@bristol.ac.uk

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France • *E-mail :* Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr
Url : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre

LIBERTÉ ET ACCUMULATION

par

Emmanuel Peyre

***Résumé.* —** Le principe de Batyrev et Manin et ses variantes donne une interprétation conjecturale précise pour le terme dominant du nombre de points de hauteur bornée d'une variété algébrique dont l'opposé du faisceau canonique est suffisamment positif. Comme l'a clairement montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel la mise en œuvre de ce principe nécessite l'exclusion de domaines d'accumulation qui sont le plus souvent déterminés en procédant par récurrence sur la dimension de la variété. Cette méthode ne donne cependant pas de critère direct permettant de dire si un point rationnel donné doit être exclu ou pas. L'ambition de cet article est de définir une mesure de la liberté d'un point rationnel de sorte que les points d'une liberté suffisante se répartissent effectivement de manière uniforme sur la variété, c'est-à-dire qu'ils soient distribués sur l'espace adélique associé à la variété conformément à la mesure de distribution adélique introduite dans un article antérieur de l'auteur. De ce point de vue, les points assez libres devraient être ceux qui respectent le principe de Batyrev et Manin.

Je remercie l'université Grenoble Alpes, le CNRS, l'Institute for Advanced Studies de l'université de Bristol et le projet ANR GARDIO pour leur soutien durant la rédaction de cet article.

Abstract. — The principle of Batyrev and Manin and its variants give a precise conjectural interpretation for the dominant term for the number of points of bounded height on an algebraic variety for which the opposite of the canonical line bundle is sufficiently positive. As was clearly shown by the counter-example of Batyrev and Tschinkel, the implementation of this principle requires the exclusion of accumulating domains which, up to now, are found using an induction procedure on the dimension of the variety. However this method does not yield a direct caracterisation of the points to be excluded. The aim of this paper is to propose a measure of freedom for rational points so that the points with sufficiently positive freedon are randomly distributed on the variety according to a probability measure on the adelic space introduced by the author in a previous paper. From that point of view the rational points which are sufficiently free ought be the ones which respect the principle of Batyrev and Manin.

Table des matières

1. Introduction

Le programme développé par Y. I. Manin et ses collaborateurs dans les années 1980 ([**BM**] et [**FMT**]) a permis une compréhension en profondeur du comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur les variétés algébriques et en particulier sur les variétés dont l'opposé du faisceau canonique est suffisamment positif, telles que les variétés de Fano.

Un des points-clefs de ce programme est le concept de sous-variété accumulatrice [**BM**, p. 30], qu'on peut décrire, au sens le plus faible, comme une sous-variété stricte de la variété considérée dont la contribution au nombre total de points sur la variété n'est pas négligeable. Lorsque la hauteur choisie n'est pas

relative à l'opposé du faisceau canonique, la variété peut être réunion de telles sous-variétés, c'est ainsi le cas pour le produit de deux droites projectives, cette situation est décrite plus en détail par V. V. Batyrev et Y. Tschinkel dans [**BT3**]. Supposons maintenant que la hauteur est relative à l'opposé du fibré canonique. Le contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel à la question initiale de V. V. Batyrev et Y. I. Manin [**BT2**] montre que, même dans le cas d'une variété de Fano, la réunion de ces sous-variétés peut, en général, être Zariski dense. Différentes études basées sur la géométrie des variétés ont révélé que cette situation est en fait très générale ([**LTT**] et [**BL**]).

L'esprit du programme de Manin est qu'en dehors de ces sous-variétés accumulatrices, le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée s'interprète en termes d'invariants globaux de la variété. Dans [**Ru**], C. Le Rudulier fait sauter un verrou supplémentaire en démontrant que sur certains espaces de Hilbert les sous-variétés accumulatrices au sens précédent sont denses pour la topologie de Zariski, mais le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire se comporte de la façon espérée. Comme nous le verrons plus loin, C. Le Rudulier donne également un exemple d'un ensemble mince faiblement accumulateur qui ne s'obtient pas à partir d'une réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices.

Dans [**Pe1**, §3] nous allions plus loin sur la question de la distribution asymptotique, en construisant une mesure de probabilité sur l'espace adélique correspondant à la variété, qui donnerait conjecturalement la distribution asymptotique des points de hauteur bornée en dehors des sous-variétés accumulatrices. Notons au passage que pour cette mesure, les points adéliques d'une sous-variété stricte forment un ensemble de mesure nulle, il en résulte que cette distribution asymptotique ne saurait être valable que sur le complémentaire des sous-variétés accumulatrices au sens précédent.

La méthode décrite dès l'article de V. V. Batyrev et Y. I. Manin pour trouver les sous-variétés accumulatrices est de procéder par réccurence sur la dimension des sous-variétés. En effet, si l'on note B la borne choisie pour la hauteur, le comportement asymptotique attendu sur une variété V en dehors des sous-variétés accumulatrices est de la forme $CB^a \log(V)^{b-1}$, où a et b ont des interprétations géométriques. À partir de ces invariants géométriques, on peut donc définir une notion de sous-variétés *géométriquement* accumulatrices : ce sont celles pour lequel la prédiction pour le nombre de points de la sous-variété est au moins du même ordre de grandeur que celui prédit pour la variété dans son ensemble. Cette approche s'est révelé très efficace dans la plupart des cas connus jusqu'à aujourd'hui.

Toutefois, elle a l'inconvénient de ne pas donner de critère permettant de déterminer directement si un point rationnel donné doit être exclu du dénombrement. Il est alors enrichissant de comparer cette situation avec l'analogue géométrique. Dans l'étude des espaces de morphismes d'une courbe dans une variété donnée, il convient de considérer les morphismes très libres dont les déformations permettent de couvrir la variété. Ces morphismes sont aisément caractérisés à l'aide des pentes de l'image inverse du fibré tangent sur la courbe. Or la géométrie d'Arakelov et notamment la théorie des pentes développée par J.-B. Bost fournissent un analogue arithmétique à ces pentes. Toutefois, comme toujours dans cette traduction, l'invariant obtenu au lieu d'être entier est réel et on peut donc être confronté à des situations où la pente minimale d'une famille de points rationnels tend vers 0.

L'ambition de ce texte est donc d'utiliser les pentes de la géométrie d'Arakelov pour définir un invariant qui mesure la *liberté* d'un point rationnel. L'invariant que nous construisons est un élément de l'interval réel $[0, 1]$. Il fait intervenir le choix d'une métrique adélique dont on munit la variété, métrique qui est l'analogue dans notre cadre adélique d'une métrique riemannienne. Dans les exemples étudiés, nous montrons que les points qu'il convient d'exclure ont une liberté qui tend vers 0 lorsque leur hauteur tend vers $+\infty$, ce qui permet d'énoncer une variante de la conjecture raffinée de Batyrev et Manin qui ne semble pas en contradiction avec les exemples considérés ici.

Certes, il convient de relativiser les progrès que permettent ce nouvel invariant en raison de la difficulté de sa détermination en général ; néanmoins c'est un invariant très naturel et les quelques indices qui suivent confirment sa capacité à détecter une obstruction à la distribution uniforme des points rationnels.

Ce texte est organisé de la façon suivante : on commence par fixer le cadre géométrique, avant de préciser la notion de métrique adélique. Le paragraphe suivant consiste en des rappels sur les notions de pentes, ce qui nous permet de définir l'invariant qui est l'objet de cet article. Nous en donnons ensuite quelques propriétés élémentaires avant d'introduire une nouvelle variante du principe de Batyrev et Manin, la formule empirique (F). Le reste de l'article est consacré à l'application de la notion de liberté à divers exemples ou contre-exemples connus : l'espace projectif, le produit de variétés, les quadriques, le contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel ainsi que ceux de C. Le Rudulier.

Je remercie T. Browning, É. Gaudron et D. Loughran pour plusieures discussions et suggestions qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

2. Cadre

On fixe un corps de nombres $\mathbf{K}$. Pour toute $\mathbf{K}$-algèbre commutative A et toute variété V sur $\mathbf{K}$, on note V_A le produit schématique $V \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})} \mathrm{Spec}(A)$ et $V(A)$ l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}(\mathrm{Spec}(A), V)$ des A-points de V.

On note $\mathrm{Val}(\mathbf{K})$ l'ensemble des places du corps de nombres $\mathbf{K}$. Soit w une place de $\mathbf{K}$. On note $\mathbf{K}_w$ le complété de $\mathbf{K}$ pour w. Soit v la place de $\mathbf{Q}$ déduite de w par restriction, on pose

$$|x|_w = |N_{\mathbf{K}_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

pour $x \in \mathbf{K}_w$. Si $\mathbf{K}_w$ est isomorphe au corps des complexes, $|\cdot|_w$ correspond au carré du module, sinon l'application $|\cdot|_w$ est une valeur absolue représentant w. Cette normalisation permet d'écrire la formule du produit pour $\mathbf{K}$ sous la forme

$$\prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} |x|_w = 1 \tag{1}$$

pour $x \in \mathbf{K}^\times$.

Convention 2.1. — Dans la suite, on ne considère que de *belles* variétés sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire des variétés projectives lisses et géométriquement intègres sur le corps de nombres $\mathbf{K}$.

3. Métriques adéliques

3.1. Normes w-adiques. — Nous introduisons maintenant une notion de *norme classique* sur les espaces vectoriels sur les complétés du corps de nombres $\mathbf{K}$.

Définition 3.1. — Soit w une place de $\mathbf{K}$. Soit E un espace vectoriel sur le corps complété $\mathbf{K}_w$. Dans ce texte, on appelle *norme w-adique* une application $\|\cdot\|_w : x \mapsto \|x\|_w$ de E dans $\mathbf{R}$ qui vérifie les conditions suivantes

(i) On a la relation $\|\lambda x\|_w = |\lambda|_w \|x\|_w$ pour $\lambda \in \mathbf{K}_w$ et $x \in E$;

(ii) Si w est ultramétrique, alors on a l'inégalité $\|x+y\|_w \leqslant \max(\|x\|_w, \|y\|_w)$ pour $x, y \in E$;

(iii) Si w est une place réelle, alors $\|x+y\|_w \leqslant \|x\|_w + \|y\|_w$;

(iv) Enfin, si w est complexe, alors $\|x+y\|_w^{1/2} \leqslant \|x\|_w^{1/2} + \|y\|_w^{1/2}$;

Nous dirons que cette norme est *classique* si elle vérifie en outre les conditions suivantes :

(ii′) Si w est ultramétrique, l'image de $\|\cdot\|_w$ est contenue dans l'image de la valeur absolue $|\cdot|_w$;

(iii′) Si w est réelle, il existe une forme quadratique définie positive q sur E telle que $\|x\|_w = \sqrt{q(x)}$;

(iv′) Si w est complexe, il existe une forme hermitienne définie positive h sur E telle que $\|x\|_w = h(x)$.

Remarque 3.2. — On notera que pour une place ultramétrique w, la donnée d'une norme classique $\|\cdot\|_w$ sur un $\mathbf{K}_w$-espace vectoriel E est équivalente à la donnée du $\mathscr{O}_w$-module

$$\mathscr{E} = \{\, x \in E \mid \|x\|_w \leqslant 1 \,\},$$

qui est libre de rang la dimension de E. En outre, pour tout $x \in E$, on a dans ce cas l'égalité

$$\|x\|_w = \min\{|\lambda|_w^{-1},\ \lambda \in \mathbf{K}_w - \{0\} \text{ tels que } \lambda x \in \mathscr{E}\}.$$

3.2. Normes adéliques. — Dans ce paragraphe, la lettre V désigne une *belle* variété sur $\mathbf{K}$. Du point de vue de la géométrie d'Arakelov, une hauteur va être définie à partir d'un fibré en droites muni de normes.

Définition 3.3. — Soit E un fibré vectoriel sur V. On note $\pi : E \to V$ son morphisme structural. Pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ et tout $x \in V(\mathbf{L})$, on note $E(x)$ le $\mathbf{L}$-espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$. Soit $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. Une *norme w-adique* sur E est une application $\|\cdot\|_w : x \mapsto \|x\|_w$ de $E(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$, la restriction de $\|\cdot\|_w$ à $E(x)$ est une norme w-adique.

(ii) Pour tout ouvert U de V et toute section s de E sur U, l'application de $U(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \|s(x)\|_w$ est continue pour la topologie w-adique.

Cette norme $\|\cdot\|_w$ est dite *classique* si sa restriction à $E(x)$ est classique pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$.

Exemple 3.4. — On suppose donné un *modèle* de V sur $\mathscr{O}_w$, c'est-à-dire un schéma $\mathscr{V}$ projectif et lisse sur $\mathscr{O}_w$ muni d'un isomorphisme de $\mathscr{V}_{\mathbf{K}_w}$ sur $V_{\mathbf{K}_w}$ et un modèle de E au-dessus de $\mathscr{V}$, c'est-à-dire un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ au-dessus de $\mathscr{V}$ muni d'un isomorphisme de fibrés vectoriels de $\mathscr{E}_{\mathbf{K}_w}$ sur $E_{\mathbf{K}_w}$. Alors, comme $\mathscr{V}$ est projective, l'application naturelle de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_w)$ dans $V(\mathbf{K}_w)$ est bijective. Soit $x \in V(\mathbf{K}_w)$. Soit $\tilde{x}$ le point correspondant de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_w)$. Alors $\tilde{x}^*(\mathscr{E})$ définit un sous-$\mathscr{O}_w$-module de $E(x)$, que l'on notera $\mathscr{E}(x)$, qui est libre de rang la dimension de $E(x)$. Par la remarque 3.2, cela définit une norme classique sur $E(x)$. On

obtient ainsi une norme w-adique classique sur E qu'on dira *associée au modèle* $\mathscr{E}$ de E.

Définition 3.5. — Soit E un fibré vectoriel au-dessus de V. Une *norme adélique* sur E est une famille $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$, où $\|\cdot\|_w$ est une norme w-adique sur E pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, de sorte que la condition suivante soit vérifiée : il existe un ensemble fini de places S et un modèle $\mathscr{E}$ de E sur l'anneau $\mathscr{O}_S$ des S-entiers tels que pour toute place $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$, la norme $\|\cdot\|_w$ soit la norme associée à $\mathscr{E}_{\mathscr{O}_w}$. On dira que cette norme adélique est *classique* si toutes les normes $\|\cdot\|_w$ sont classiques.

Un *fibré vectoriel (* resp. *fibré en droites) adéliquement normé* sur V est la donnée d'un fibré vectoriel (resp. un fibré en droites) E au-dessus de V, muni d'une norme adélique. Un *fibré adélique* désigne, dans ce texte, un fibré adéliquement normé dont la norme est classique.

Dans ce texte, nous réserverons la terminologie « *métrique adélique sur* V »[1] à la donnée d'un norme adélique classique sur le fibré tangent T_V de V.

Exemples 3.6. — a) Le fibré en droites trivial $V \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$, muni des normes naturelles $\|\cdot\|_w$ définies par $(x,\lambda) \mapsto |\lambda|_w$ pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ est un fibré vectoriel adéliquement normé qu'on dira également trivial. Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des familles $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$, où f_w est une application continue de $V(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}_{>0}$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, et où f_w est constante de valeur de 1 en dehors d'un ensemble fini de places. Alors l'application qui à un élément $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$ de $\mathscr{F}$ associe la famille $(f_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ est une bijection de $\mathscr{F}$ sur les normes adéliques sur le fibré en droites trivial.

b) Plus généralement, soit L un fibré en droites et soit $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ une norme adélique sur L. Toute norme adélique sur le fibré L est de la forme $(f_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ pour une unique famille $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$ de $\mathscr{F}$. Cela découle du fait que si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont des modèles d'un fibré vectoriel E sur un anneau de S-entiers $\mathscr{O}_S$, alors il existe un ensemble fini de places S' contenant S de sorte que l'isomorphisme de $\mathscr{E}_{\mathbf{K}}$ sur $\mathscr{E}'_{\mathbf{K}}$ provienne d'un isomorphisme de $\mathscr{E}_{\mathscr{O}_{S'}}$ sur $\mathscr{E}'_{\mathscr{O}_{S'}}$.

c) Soient E (resp. E') un fibré vectoriel sur la variété V muni d'une norme adélique classique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp.$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$). Alors on définit une

1. Dans des textes antérieurs, j'ai appelé métrique adélique ce que j'appelle ici plus justement norme adélique pour éviter des confusions.

norme adélique classique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $E\oplus E'$ par les conditions suivantes :

(i) Si $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$ est une place non archimédienne, alors on pose $\|(y,y')\|''_w = \max(\|y\|_w, \|y'\|'_w)$ pour tout $x\in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y\in E(x)$ et tout $y'\in E'(x)$.

(ii) Si w est une place réelle de $\mathbf{K}$, alors on pose $\|(y,y')\|''_w = (\|y\|_w^2 + \|y'\|_w'^{\,2})^{1/2}$ pour tout $x\in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y\in E(x)$ et tout $y'\in E'(x)$.

(iii) Si w est une place complexe, alors on définit $\|(y,y')\|''_w = \|y\|_w + \|y'\|'_w$ pour tout $x\in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y\in E(x)$ et tout $y'\in E'(x)$.

Le fibré vectoriel adéliquement normé ainsi obtenu sera appelé la *somme directe* des fibrés vectoriels adéliquement normés E et E'.

d) Soient E (resp. E') un fibré vectoriel sur la variété V muni d'une norme adélique classique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp.$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$). Alors il existe une unique norme adélique classique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $E\otimes E'$ qui vérifie :

$$\|y\otimes y'\|''_w = \|y\|_w\|y'\|'_w$$

pour $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x\in V(\mathbf{K}_w)$, $y\in E(x)$ et $y'\in E'(x)$. Le fibré vectoriel adéliquement normé ainsi obtenu sera appelé la *produit tensoriel* des fibrés vectoriels adéliquement normés E et E'.

e) Soit E un fibré vectoriel sur V muni d'une norme adélique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Soit F un sous-fibré de E. La famille de normes $(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel F définie par les relations

$$\|y\|'_w = \|y\|_w$$

pour $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x\in V(\mathbf{K}_w)$ et $y\in F(x)$ est une norme adélique appelée la *restriction* de la norme adélique de E à F. Si la norme adélique de E est classique, sa restriction à F l'est également.

f) On conserve les notations de l'exemple précédent. Soit $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, on définit une application $E/F(\mathbf{K}_w)\to\mathbf{R}_+$ par

$$\|\overline{y}\|''_w = \inf_{y\in\overline{y}}\|y\|_w$$

pour $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x\in V(\mathbf{K}_w)$ et $\overline{y}\in E(x)/F(x)$. Mais comme cette borne inférieure est atteinte, $\|\cdot\|''_w$ est une norme sur le fibré E/F. En outre, si $\|\cdot\|_w$ est défini par un modèle $\mathscr{E}$ et la restriction $\|\cdot\|'_w$ par un sous-fibré $\mathscr{F}$, alors la norme $\|\cdot\|''_w$ est définie par le quotient $\mathscr{E}/\mathscr{F}$.

La norme adélique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel E/F est appelée *norme déduite de la norme adélique de E par passage au quotient*. Supposons que la norme adélique de E soit classique. La norme qui s'en déduit par passage au quotient l'est également. De manière plus précise, soit w une place de $\mathbf{K}$ et soit x un élément de $V(\mathbf{K}_w)$. Si w est une place finie, alors le sous-$\mathscr{O}_w$-module de $E(x)/F(x)$ associé à $\|\cdot\|''_w$ est le quotient du $\mathscr{O}_w$-module associé à $\|\cdot\|_w$ par son intersection avec l'intersection avec $F(x)$; si w est réelle (resp. complexe) alors la projection définit un isomorphisme d'espace quadratique (resp. hermitien) de l'orthogonal de $F(x)$ sur $E/F(x)$.

g) Soit E un fibré adélique et n un entier positif. On définit une norme adélique classique sur le fibré $\Lambda^n E$ de façon à obtenir une structure de λ-anneau sur l'anneau de Grothendieck des fibrés vectoriels munis de normes adéliques classiques (pour la définition de cette structure, voir [**Be**, §2], pour une telle structure pour les fibrés hermitiens, voir [**Ro**]). En particulier, si E est une somme directe $F\oplus F'$, les normes choisies doivent être compatibles avec l'isomorphisme canonique de $\Lambda^n E$ sur

$$\bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p F\otimes\Lambda^q F'.$$

Soit w une place de K et $x\in V(\mathbf{K}_w)$ si w est non-archimédienne, la restriction de $\|\cdot\|_w$ à $\Lambda^n E(x)$ est donné par le $\mathscr{O}_w$-module engendré par les produits $y_1\wedge\cdots\wedge y_n$, où $y_i\in E(x)$ avec $\|y_i\|_w\leqslant 1$ pour $i\in\{1,\dots,n\}$. Si w est une place archimédienne, alors on prend la norme associée à la forme bilinéaire caractérisée par la formule

$$\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_n, y_1\wedge\cdots\wedge y_n\rangle_{\Lambda^n E} = \det(\langle x_i, y_i\rangle_E),$$

où $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in E(x)$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ désigne la forme définissant la norme sur $E(x)$. En particulier, si $(e_1,\dots,e_r)$ est une base orthonormée de $E(x)$, alors les produits $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ avec $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant r$ forment une base orthonormée de $\Lambda^n E(x)$. En prenant pour n le rang de E, on munit ainsi le fibré $\det(E)=\Lambda^n E$ d'une structure de fibré en droite adéliquement normé. En particulier, une métrique adélique sur V permet de définir une norme adélique classique sur le fibré anticanonique $\omega_V^{-1}=\det(T_V)$.

h) Soit X une belle variété sur K et soit $f: X\to Y$ un morphisme de variétés. Soit E un fibré vectoriel au-dessus de Y muni d'une norme adélique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Soit $x\in X(\mathbf{K})$. On peut identifier $f^*(E)(x)$ avec $E(f(x))$. Pour tout place w de $\mathbf{K}$, la norme $\|\cdot\|_w$ sur $E(f(x))$ induit donc une norme sur $f^*(E)(x)$. Le fibré vectoriel $f^*(E)$ muni de la norme adélique ainsi définie est appelé l'*image inverse par f* du fibré vectoriel adéliquement normé E.

Définition 3.7. — Soient E et F des fibrés adéliquement normés au-dessus de V. On note $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp. $(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$) la norme adélique sur E (resp. F).

Un *morphisme de E dans F* est un morphisme φ de fibrés vectoriels de E dans F.

Un *plongement de E dans F* est un morphisme φ de fibrés vectoriels de E dans F tel que pour toute place w de $\mathbf{K}$, tout point x appartenant à $V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y\in E(x)$, on ait $\|\varphi(y)\|'_w = \|y\|_w$.

Les fibrés vectoriels adéliquement normés E et F seront dits *équivalents* si et seulement s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi : E \to F$ et une famille $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de nombres réels tels que

(i) L'ensemble $\{\, w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1\,\}$ est fini ;

(ii) Le produit $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\lambda_w$ vaut 1 ;

(iii) On a la relation $\|\varphi(y)\|'_w = \lambda_w\|y\|_w$ pour tout $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, tout $x\in V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y\in E(x)$.

L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droites munis d'une norme adélique pour la relation d'équivalence précédente forme un groupe pour le produit tensoriel, qu'on note $\mathscr{H}(V)$.

Exemple 3.8. — Dans le cas où $V = \mathrm{Spec}(\mathbf{K})$, la donnée d'un fibré adélique sur V est équivalente à celle d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une famille de normes classiques $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de sorte que pour toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de E, il existe un ensemble fini de places S tel que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_w = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|_w)$$

pour toute place w en dehors de S et tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{K}_w^n$. L'ensemble M des éléments x de E tels que $\|x\|_w \leqslant 1$ pour toute place finie w de K est alors un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module projectif de rang constant n. Notons qu'inversement $\|\cdot\|_w$ est la norme w-adique définie par $M\otimes_{\mathscr{O}_K}\mathscr{O}_w$, si bien que la donnée d'un fibré adélique sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ est également équivalente à celle d'un *réseau adélique sur* $\mathbf{K}$, c'est-à-dire d'un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module projectif M de rang fini constant muni, pour tout place archimédienne w d'une norme classique $\|\cdot\|_w$ sur $M_w = M\otimes_{\mathscr{O}_K}\mathbf{K}_w$.

En particulier, un fibré en droites sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ muni d'une norme adélique adélique est défini par un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension un muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de sorte que pour tout élément non nul e de E l'ensemble de places $\{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \|e\|_w\neq 1\}$ soit fini. Par la formule du

produit (1), le produit $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|e\|_w$ est indépendant de l'élément non nul e de E et on peut définir le *degré* de E par la formule

$$\widehat{\deg}(E) = -\log\left(\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|e\|_w\right). \tag{2}$$

Supposons que le degré de E soit égal à 0. Soit e une élément non nul de E et posons $\lambda_w = \|e\|_w^{-1}$ pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. Alors l'application linéaire $\varphi : \mathbf{K} \to E$ qui envoie 1 sur e définit un isomorphisme de fibré adélique du fibré adélique trivial (exemple 3.6 a)) sur E muni de la norme adélique $(\lambda_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Par conséquent, le degré définit un isomorphisme de groupes de $\mathscr{H}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K}))$ sur $\mathbf{R}$.

Proposition 3.9. — *Soient E et F des fibrés vectoriels adéliquement normés au-dessus de la variété V et soit φ un morphisme de E dans F. On note $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (*resp. *$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$) la norme adélique sur E (*resp. *F). Alors il existe une famille $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de nombres réels tels que*

(i) *L'ensemble $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1 \,\}$ est fini ;*

(ii) *On a la relation $\|\varphi(y)\|'_w \leqslant \lambda_w \|y\|_w$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y \in E(x)$.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{P}(E)$ le fibré projectif sur V correspondant aux droites des fibres de E. Pour tout $v \in T$, on considère l'application $\rho_v : \mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v) \to \mathbf{R}_{>0}$ définie par la relation $\|\varphi(y)\|'_v = \rho_v(x)\|y\|_v$ pour tout $x \in \mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v)$ et tout y non nul appartenant à la droite correspondante de E. Comme $\mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v)$ est compact, l'application ρ_v est majorée et atteint sa borne supérieure qu'on note λ_v. Pour presque toute place finie v de $\mathbf{K}$, le morphisme φ est induit par un morphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$, pour un modèle $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) de E (resp. F) définissant la norme considérée. Pour toute telle place, on a $\lambda_v \leqslant 1$. Cela prouve la proposition. □

Notations 3.10. — Sous les hypothèses de la proposition, pour toute place v de $\mathbf{K}$ et tout x de $V(K_v)$, on note $|||\varphi_x|||_v$ le plus petit nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\|\varphi(y)\|_v \leqslant \lambda\|y\|_v$$

pour $y \in E(x)$. Si x appartient à $V(\mathbf{K})$, on pose également

$$|||\varphi_x||| = \prod_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} |||\varphi_x|||_v.$$

3.3. Hauteurs d'Arakelov. — Rappelons maintenant comment un fibré en droites muni d'une norme adélique permet de définir une hauteur sur une variété.

Définition 3.11. **—** Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres et V une belle variété sur $\mathbf{K}$. On appelle *hauteur d'Arakelov* sur V un fibré en droites sur V muni d'une norme adélique. Soit L une hauteur d'arakelov sur V et $x \in V(\mathbf{K})$ un point rationnel de V. L'image inverse $x^*(L)$ de L par x (exemple 3.6 h)) définit un élément du groupe $\mathscr{H}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K}))$. La *hauteur logarithmique de x relativement à L* est définie par

$$h_L(x) = \widehat{\deg}(x^*(L)).$$

La *hauteur exponentielle de x relativement à L* est définie par

$$H_L(x) = \exp(h_L(x)).$$

Exemple 3.12. **—** Munissons $\mathbf{R}^{n+1}$ de sa structure euclidienne usuelle et, pour un nombre premier p, l'espace vectoriel $\mathbf{Q}_p^{n+1}$ de la norme usuelle :

$$||(x_0, \dots, x_n)||_p = \max_{0 \leqslant i \leqslant n}(|x_i|_p).$$

En identifiant l'ensemble des points de l'espace projectif sur un corps $\mathbf{K}$ à celui des droites de $\mathbf{K}^{n+1}$, l'espace tangent en la droite L peut s'identifier au quotient $L^\vee \otimes \mathbf{K}^{n+1}/L^\vee \otimes L$. Les normes précédentes induisent par restriction, produit tensoriel et quotient une métrique adélique sur l'espace projectif, et donc une norme adélique sur $\omega^{-1}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}}$. La hauteur correspondante est donnée par

$$H_n(x) = \widehat{\deg}(T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}^{\,n+1}.$$

si $x = (x_0 : \dots : x_n)$ avec $x_0, \dots, x_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble.

4. Pentes à la Bost

4.1. Pentes d'un réseau adélique. — Nous allons tout d'abord rappeler la définition des pentes arithmétiques pour un réseau adélique.

Définition 4.1. **—** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E muni d'une part d'un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-sous-module M projectif de rang constant égal à la dimension de E et, pour toute place archimédienne w de $\mathbf{K}$, d'une norme classique $||\cdot||_w$ sur $E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. Soit n

la dimension de E, la construction de l'exemple 3.6 g) munit alors $\det(E) = \Lambda^n E$ d'une norme adélique et on définit le *degré arithmétique de E* par la relation

$$\widehat{\deg}(E) = \widehat{\deg}(\det(E)),$$

où la définition dans le cas de la dimension 1 est donnée par la formule (2). Par définition, le degré arithmétique de l'espace vectoriel nul est 0.

Remarques 4.2. — Ce degré peut également être décrit de la façon suivante : les normes définissent une norme euclidienne sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ qui est isomorphe au $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\bigoplus_{w|\infty} E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. Notons ι le plongement canonique de E dans $E_{\mathbf{R}}$. Le module $\iota(M)$ est un réseau de $E_{\mathbf{R}}$ et le degré est donné par

$$\widehat{\deg}(E) = -\log(\mathrm{Vol}(E_{\mathbf{R}}/\iota(M)))$$

où $\mathrm{Vol}(E_{\mathbf{R}}/\iota(M))$ est, par définition, le volume euclidien d'un domaine fondamental pour le réseau $\iota(M)$.

Exemple 4.3. — Plaçons-nous dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, soit E un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel muni d'un réseau Λ et d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour toute droite vectorielle F de E, le degré arithmétique de F pour la structure induite est $-\log(\|f\|)$ où f est un des deux générateurs de l'intersection $\Lambda \cap F$.

Définition 4.4. — Étant donné un réseau adélique E de dimension n, le *polygone de Newton* $\mathscr{P}(E)$ de E est l'enveloppe convexe des points $(\dim(F), \widehat{\deg}(F))$ du plan où F décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E munis des structures adéliques induites. Le covolume des sous-réseaux de E étant minoré, le polygone est borné supérieurement par le graphe d'une application affine par morceaux et on définit une application m_E de $[0, n]$ dans $\mathbf{R}$ par la relation

$$m_E(x) = \sup\{y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in \mathscr{P}(E)\} \tag{3}$$

pour tout x de $[0, n]$. Les *pentes arithmétiques* de E sont alors données par

$$\mu_i(E) = m_E(i) - m_E(i-1)$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ce sont les pentes des segments formant le graphe de m_E.

Remarques 4.5. — a) Notons que nous avons les inégalités

$$\mu_n(E) \leqslant \mu_{n-1}(E) \leqslant \ldots \leqslant \mu_1(E)$$

et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(E) = \widehat{\deg}(E).$$

b) On a également la relation $\mu_i(E) = -\mu_{n+1-i}(E^\vee)$ pour $1 \leqslant i \leqslant \dim(E)$ où $E^\vee$ désigne l'espace dual de E [**BK**, (3.5)].

c) Dans le cadre du programme de Batyrev et Manin, il est naturel d'utiliser des hauteurs qui ne sont pas normalisées, et donc ne sont pas invariantes par extension de corps. De façon cohérente, nous n'utilisons pas les pentes normalisées : contrairement à Bost [**Bos**, p. 195] nous ne divisons pas par le degré du corps de nombres. Ces pentes ne sont donc pas invariantes par extension de corps.

Notations 4.6. — Avec les notations de la définition précédente, on notera également $\mu_{\max}(E)$ pour $\mu_1(E)$ et $\mu_{\min}(E)$ pour $\mu_n(E)$. La *pente de E* est la moyenne des pentes : $\mu(E) = \frac{\widehat{\deg}(E)}{\dim(E)}$.

Remarques 4.7. — a) La notion de pentes a été généralisée par E. Gaudron aux normes non classiques [**Ga**].

b) Le i-ème minima de E, noté $\lambda_i(E)$ peut être défini comme la borne inférieure des nombres $\theta \in \mathbf{R}_{>0}$ tels qu'il existe une famille libre $(x_1, \dots, x_i)$ de E vérifiant les inégalités

$$\prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|x_i\|_w \leqslant \theta$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (*cf.* [**Th**]). Le théorème de Minkowski permet d'obtenir une constante explicite $C_{\mathbf{K}}$ de sorte que

$$0 \leqslant \log(\lambda_i(E)) + \mu_i(E) \leqslant C_{\mathbf{K}}$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$; cet encadrement est donné par E. Gaudron dans [**Ga**, théorème 5.20], compte tenu du fait que $\Delta(\overline{E}) = 1$ dans notre cas, avec une référence à un travail de T. Borek [**Bo**].

4.2. Pentes d'un point rationnel. — Nous allons maintenant appliquer cette construction aux points rationnels d'une variété

Définition 4.8. — Soit V une belle variété de dimension n sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. Soit E un fibré adélique sur la variété V. Soit r le rang du fibré E. Étant donné un point rationnel x de V, les *pentes de x relativement à E* sont données par la formule $\mu_i^E(x) = \mu_i(E(x))$ où $i \in \{1, \dots, r\}$.

En particulier, lorsque la variété V est muni d'une métrique adélique, les *pentes de x* sont les pentes arithmétiques de l'espace tangent T_xV. On les note simplement $\mu_i(x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Remarques 4.9. — a) La somme $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)$ est le degré arithmétique de l'espace tangent T_xV c'est à dire le degré arithmétique de la fibre en x du fibré anticanonique, qui n'est rien d'autre que la hauteur logarithmique de x relativement à ce fibré.

b) La définition des pentes dans le cadre arithmétique est un analogue de celle introduite pour les fibrés vectoriels sur les courbes algébriques. Plus précisément, soit $\mathscr{C}$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps k et soit V une bonne variété sur k. Étant donné un morphisme de variétés φ de $\mathscr{C}$ dans V, le polygône d'Harder-Narasimhan du fibré vectoriel $\phi^*(TV)$ est défini comme l'enveloppe convexe des couples $(\mathrm{rg}(F), \deg(F))$ où F décrit l'ensemble des sous-fibrés de $\phi^*(TV)$. Les pentes d'un point rationnel $\mu_i(x)$ définies ici correspondent donc aux pentes $\mu_i(\phi^*(TV))$. Dans le cas particulier où la courbe $\mathscr{C}$ est la droite projective sur k, le fibré $\phi^*(TV)$ est isomorphe à une unique somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{O}(a_i)$ avec $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et on a les égalités $\mu_i(\phi^*(TV)) = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Notations 4.10. — Avec les notations de la définition précédente, on définit

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) \qquad \text{et} \qquad H(x) = \exp(h(x))$$

pour tout point rationel x de V. La fonction $H : V(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ ainsi définie est donc une hauteur exponentielle relative au fibré anticanonique.

On pose également $\mu_{\min}(x) = \mu_n(x)$, $\mu_{\max}(x) = \mu_1(x)$ et $\mu(x) = \mu(T_xV) = h(x)/n$.

4.3. Liberté d'un point rationnel. — Nous allons utiliser le pentes définies au paragraphe précédent pour définir une notion de liberté pour les points rationnels. Cette notion est inspirée de la notion de courbe très libre. De manière plus précise, le fait d'avoir une liberté strictement positive pour un point rationnel correspond au fait d'être très libre pour un morphisme de la droite projective dans la variété. Notons que cette notion de mesure de la liberté, qui, à la connaissance de l'auteur, n'a pas été formalisé dans le cadre géométrique, pourrait également avoir un intérêt dans ce cadre-là.

Définition 4.11. — Soit V une belle variété de dimension $n > 0$ sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. On suppose que la variété V est munie d'une métrique adélique. Pour tout point rationnel x de V, la liberté de x est le nombre réel

$$l(x) = \frac{\mu_{\min}(x)}{\mu(x)}$$

si $\mu_{\min}(x) > 0$ et vaut 0 sinon.

Remarques 4.12. — a) Soit x un point rationnel de V. Rappelons que $\mu(x) = \frac{h(x)}{n}$ n'est rien d'autre que la moyenne des pentes.

b) Par définition, $l(x) \in [0, 1]$.

c) La liberté $l(x)$ est nulle si et seulement si la pente minimale est négative.

d) On a l'égalité $l(x) = 1$ si et seulement toutes les pentes sont égales :

$$\mu_1(x) = \mu_2(x) = \cdots = \mu_n(x) = \frac{h(x)}{n}.$$

Cela revient à dire que l'espace tangent T_xV est semi-stable (*cf.* [**BC**, §1.2]). C'est par exemple le cas sur $\mathbf{Q}$ si le réseau dans T_xV est engendré par une base orthonormale.

e) La liberté d'un point rationnel dépend du choix de la métrique sur V. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette dépendance diminue avec la hauteur du point considéré.

f) Bien que nos conventions font que les pentes d'un point ne sont pas stables par extension de corps, la liberté d'un point rationnel est, quant à elle, stable par extension de corps.

g) La remarque 4.7 b) fournit une constante C de sorte que

$$|\mu_n(x) - \log(\lambda_1(T_xV^\vee))| \leqslant C.$$

Par conséquent, à un terme borné près, la condition $l(x) \leqslant \varepsilon$ pour un point $x \in V(\mathbf{K})$ peut être vue comme l'existence d'un élément $y \in T_xV^\vee$ tel que

$$\prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|y\|_w \leqslant H(x)^\varepsilon.$$

L'objectif du reste de cet article est de motiver le slogan suivant

Slogan 4.13. — *Les mauvais points d'une variété du point de vue de l'équidistribution sont ceux dont la liberté est réduite.*

5. Propriétés élémentaires

5.1. Dépendance de la liberté en la métrique. — Nous commençons par un résultat élémentaire concernant les morphismes de fibrés.

Lemme 5.1. — *Soit V une belle variété sur le corps de nombres* $\mathbf{K}$*, Soient E et F des fibrés vectoriels adéliquement normés au-dessus de V et soit φ un morphisme de E*

dans F. Alors, il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que, pour tout point x de $V(\mathbf{K})$ en lequel l'application induite $\varphi_x : E(x) \to F(x)$ est surjective, on a

$$m_{F(x)^\vee}(i) \leqslant m_{E(x)^\vee}(i) + C$$

pour $i \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(F)\}$. En particulier,

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + C.$$

Démonstration. — Par dualité, le morphisme φ définit un morphisme $\varphi^\vee$ de $F^\vee$ dans $E^\vee$. Soit x un élément de $V(\mathbf{K})$ en lequel φ_x est surjectif. L'application linéaire $\varphi_x^\vee$ est injective. Pour tout sous-espace H de $F(x)^\vee$ de dimension k et tout $y \in \Lambda^k H$, en utilisant les notations 3.10, on a les relations

$$|| \wedge^k \varphi(y)||_w \leqslant ||| \wedge^k \varphi_x^\vee |||_w ||y||_w$$

pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, ce qui implique l'inégalité

$$\widehat{\deg}(\varphi_x^\vee(H)) \geqslant \widehat{\deg}(H) - \log(||| \wedge^k \varphi_x^\vee |||).$$

En posant $C_x = \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{rg}(F)}(\log(||| \wedge^k \varphi_x^\vee |||))$, on en déduit que

$$m_{F(x)^\vee}(i) \leqslant m_{E(x)^\vee}(i) + C_x$$

pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}(F)$. Compte tenu de la proposition 3.9, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $C_x \leqslant C$ pour tout $x \in V(K)$. En particulier, on obtient l'inégalité

$$\mu_1(F(x))^\vee) \leqslant \mu_1(E(x)^\vee) + C.$$

La formule de la remarque 4.5 b) donne alors l'inégalité

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + C$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 5.2. — Notons que la preuve donne en fait une inégalité plus précise :

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{rg}(F)} \left(\frac{\log(||| \wedge^k \varphi_x^\vee |||)}{k} \right).$$

Comme annoncé, nous allons maintenant démontrer que la liberté dépend peu de la métrique choisie.

Lemme 5.3. — *Soit V une belle variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, soit E un fibré vectoriel de rang r sur V. Soient $(\|\cdot\|_w)_{w\in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})}$ et $(\|\cdot\|'_w)_{w\in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})}$ des normes adéliques classiques sur E. On note μ_i^E et $\mu_i^{E'}$ les fonctions de pentes associées. Il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que*

$$|\mu_i^E(x) - \mu_i^{E'}(x)| \leqslant C$$

pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $x \in V(\mathbf{K})$.

Démonstration. — En appliquant le lemme 5.1 à l'endomorphisme identité, on obtient que les applications $x \mapsto m'_{E(x)}(i) - m_{E(x)}(i)$ sont bornées. Le lemme en résulte. □

Proposition 5.4. — *Soit V une belle variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, munie de deux métriques. On note l et l' les fonctions libertés associées à ces métriques et h la fonction hauteur définie par la première d'entre elles. Alors il existe une constante réelle $C > 0$ telle que*

$$|l(x) - l'(x)| < \frac{C}{h(x)}$$

pour tout $x \in V(\mathbf{K})$ tel que $h(x) > 0$.

Démonstration. — Notons μ_i (resp. μ'_i) les fonctions de pente correspondant à la première métrique (resp. la seconde). On primera de même la notation pour la hauteur. Il résulte du lemme 5.3 qu'il existe des constantes réelles strictement positives C_1 et C_2 telles que

$$|\mu_n(x) - \mu'_n(x)| \leqslant C_1 \qquad \text{et} \qquad |h(x) - h'(x)| \leqslant C_2$$

pour $x \in V(\mathbf{K})$. Par définition, on a la majoration $|l(x) - l'(x)| \leqslant 1$, il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $h(x) > 2C_2$. Notons qu'on a alors les inégalités $h'(x) > h(x) - C_2 > h(x)/2$ et, par conséquent, $1/h'(x) < 2/h(x)$. Si $\mu'_n(x) \leqslant 0$ et $\mu_n(x) \leqslant 0$, on a $l(x) = l'(x) = 0$ ce qui démontre le résultat. Si $\mu'_n(x) < 0$ et $\mu_n(x) > 0$, alors on obtient les relations $l(x) = n\mu_n(x)/h(x) \leqslant nC_1/h(x)$. Si $\mu'_n(x) > 0$ et $\mu_n(x) < 0$, on obtient de même $l'(x) \leqslant 2nC_1/h(x)$. Enfin si les deux pentes minimales sont strictement positives, on a les inégalités

$$|l(x) - l'(x)| = n\left|\frac{\mu_n(x)}{h(x)} - \frac{\mu'_n(x)}{h'(x)}\right| \leqslant \frac{nC_1}{h(x)} + \frac{n\mu'_n(x)C_2}{h(x)h'(x)} \leqslant \frac{nC_1 + C_2}{h(x)}.$$

□

5.2. Liberté et morphismes de variétés

Proposition 5.5. — *Soient X et Y de belles variétés sur* $\mathbf{K}$ *de dimensions respectives m et n et soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de variétés. Alors il existe une constante $C \geqslant 0$ telle qu'en tout $x \in X(\mathbf{K})$ en lequel l'application tangente $T_x\varphi$ est surjective,*

$$\mu_{\min}(x) \leqslant \mu_{\min}(\varphi(x)) + C.$$

Si, en outre, $h(x)$ est strictement positif, Il en résulte que

$$l(x) \leqslant \frac{m\, h(\varphi(x))}{n\, h(x)} l(\varphi(x)) + \frac{mC}{h(x)}.$$

Démonstration. — La première assertion résulte du lemme 5.1 appliqué au morphisme tangent $T\varphi : TX \to \varphi^*(TY)$, la seconde de la définition de la liberté. □

Remarque 5.6. — Il résulte de cette proposition que, si $y \in Y(\mathbf{K})$ et X_y désigne la fibre de φ au-dessus de y, alors la liberte $l(x)$ converge vers 0 lorsque $h(x)$ tend vers $+\infty$ dans $X_y(\mathbf{K})$ en dehors des points critiques.

Le résultat suivant montre le lien entre la liberté d'une courbe rationnelle et celle de ses points.

Notations 5.7. — Soit $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ un morphisme de variétés, le fibré $\varphi^*(T_V)$ est isomorphe à un unique fibré de la forme $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ avec $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. On note $\mu_i(\varphi) = a_i$ pour $i \in 1, \ldots, n$ et $\deg(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\varphi)$. On définit alors la liberté de φ comme le nombre rationnel $l(\varphi) = n\mu_n(\varphi)/\deg(\varphi)$ si $\mu_n(\varphi) > 0$. On pose $l(\varphi) = 0$, si $\mu_n(\varphi) < 0$.

Proposition 5.8. — *Soit $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ un morphisme de variétés non constant, alors*

a) *Si $\mu_n(\varphi) < 0$, alors $l(\varphi(x)) = 0$ pour tout x de $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ en dehors d'une partie finie ;*

b) *Si $\mu_n(\varphi) \geqslant 0$, alors $l(\varphi(x))$ converge vers $l(\varphi)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ pour le filtre de Fréchet du complémentaire des parties finies.*

Démonstration. — On peut munir $\varphi^*(TV)$ de deux métriques : d'une part de celle déduite par image inverse de la métrique de V, et d'autre part de celle issue de l'isomorphisme de $\varphi^*(TV)$ sur $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(\mu_i(\varphi))$. D'après le lemme 5.3, on en déduit que

$$\mu_n(\varphi(x)) = \mu_n^{\varphi^*(TV)}(x) = \mu_n(\varphi) h_1(x) + O(1)$$

et

$$h(\varphi(x)) = \deg(\varphi)h_1(x) + O(1)$$

où $h_1(x)$ désigne une hauteur sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ relative au fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(1)$. L'assertion a) en résulte par définition de la liberté. D'autre part, comme le morphisme φ est non constant, l'application dérivée de φ donne un morphisme non trivial de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ dans $\varphi^*(TV)$ ce qui prouve que $\mu_1(\varphi) \geqslant 2$. En particulier, dans le cas b), $\deg(\varphi) > 0$ ce qui complète la preuve. □

6. Empirisme

6.1. Rappels sur la constante empirique. — Nous allons rappeler ici l'interprétation envisagée pour la constante qui apparaît dans le terme dominant du nombre de bons points rationnels de hauteur bornée. Une première version de cette constante a d'abord été définie dans [**Pe1**]. Par la suite, Batyrev et Tschinkel dans [**BT1**] l'ont corrigée en rajoutant le facteur entier $\beta(V)$. Depuis, une réinterprétation de cette constante par Salberger dans [**Sal**] et les nombreux exemples connus ont confirmé son intérêt. D'autre part, Batyrev et Tschinkel l'ont généralisée dans le cas où la hauteur n'est pas relative au fibré anticanonique [**BT3**] mais cette généralisation sort du cadre de cet article.

Dans ce paragraphe, la lettre V désigne une belle variété munie d'une métrique adélique. Pour pouvoir définir la constante, nous supposerons en outre que

(i) Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2 ;

(ii) Le groupe de Picard géométrique de $\overline{V}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini.

Pour toute place v de $\mathbf{K}$, on note $\mathrm{d}x_v$ la mesure de Haar sur $\mathbf{K}_v$ normalisée de la façon suivante :

— Si v est une place réelle, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$;
— Si v est une place complexe, alors $\mathrm{d}x_v = i\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
— Sinon $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$.

La métrique adélique sur V induit une norme adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le faisceau anticanonique. Rappelons la construction de la mesure de Tamagawa à partir de cette norme adélique. Pour tout place v de $\mathbf{K}$, on peut alors définir une mesure borélienne sur l'espace $V(\mathbf{K}_v)$ donnée dans un système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_v = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{n,v}.$$

La formule de changement de variables [**We**] permet de montrer que cette expression est bien indépendante du système de coordonnées choisi.

Lemme 6.1. — *Soit v une place de $\mathbf{K}$. Supposons que la norme $\|\cdot\|_v$ est définie par un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}_v$ de $\mathbf{K}_v$. Soit $\mathfrak{m}_v$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_v$ et $\mathbf{F}_v$ le corps $\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v$; pour tout entier k notons*

$$\pi_k : V(\mathbf{K}_v) \longrightarrow \mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$$

l'application de réduction modulo $\mathfrak{m}_v^k$. Alors $\boldsymbol{\omega}_v$ est la mesure naturelle *caractérisée par les relation*

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X)) = \frac{\sharp X}{\sharp \mathbf{F}_v^{nk}} \tag{4}$$

où k parcourt les entiers strictement positifs et X les parties de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$. En particulier, on a l'égalité

$$\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v)) = d_v(V) = \frac{\sharp \mathscr{V}(\mathbf{F}_v)}{\sharp \mathbf{F}_v^n}.$$

Démonstration. — Cette propriété est locale, il suffit donc de démontrer la formule (4) dans le cas où X est un singleton. Comme $\mathscr{V}$ est supposée projective et lisse sur $\mathscr{O}_v$, on choisit un plongement $\mathscr{V} \to \mathbf{P}^N_{\mathscr{O}_v}$ de sorte que les fonctions rationnelles $x_1 = \frac{X_1}{X_0}, \dots, x_n = \frac{X_n}{X_0}$ forment un système de coordonnées sur l'image inverse de X dans $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$ et que $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ donne la $\mathscr{O}_v$-structure sur le fibré tangent $T\mathscr{V}_{|W}$. L'application $f : W \to \mathbf{K}_v^n$ définie par $(x_1, \dots, x_n)$ préserve alors la congruence modulo $\mathfrak{m}_v^k$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ est de norme 1 sur W. Par conséquent, il existe $x_0 \in \mathbf{K}_v^n$ de sorte que

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X)) = \int_{x_0 + \mathfrak{m}_v^k} \mathrm{d}x_{1,v} \dots \mathrm{d}x_{n,v} = \sharp \mathbf{F}_v^{-nk}. \quad \square$$

Comme dans [**Pe1**, §2.1], il résulte alors de la formule de Lefschetz et de la conjecture de Weil démontrée par Deligne [**De**], que, sous les hypothèses (i) et (ii) faites ci-dessus, on a pour presque toute place v de $\mathbf{K}$ la formule

$$\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v)) = d_v(V) = 1 + \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_v} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_v \,|\, \mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_v} \otimes \mathbf{Q})) + O(\sharp \mathbf{F}_v^{-3/2}).$$

Suivant le principe de construction des mesures de Tamagawa sur les espaces adéliques, cela amène à la renormalisation suivante :

Définition 6.2. — On fixe une extension galoisienne $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ qui déploie le groupe de Picard de V. Notons S une partie finie de $\mathrm{Val}(\mathbf{K})$ contenant l'ensemble des places archimédiennes ainsi que les places se ramifiant dans l'extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. Pour tout $v \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$, La substitution de Frobenius correspondant à une extension w de v à $\mathbf{K}$ sera notée $(w, \mathbf{L}/\mathbf{K})$ (*cf.* [**Se1**, §1.8]). On pose alors, pour tout nombre complexe s dont la partie réelle $\Re(s)$ est strictement positive,

$$L_v(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - \sharp\mathbf{F}_v^{-s}(w, \mathbf{L}/\mathbf{K}) \mid \mathrm{Pic}(\overline{V}))}.$$

et, pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$,

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S} L_v(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})),$$

se produit convergeant d'après [**Art**, théorème 7]. La mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ est alors définie par

$$\boldsymbol{\omega}_V = \frac{\lim_{s \to 1}(s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})}{\sqrt{d_{\mathbf{K}}}^{\dim(V)}} \prod_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \frac{1}{L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))} \boldsymbol{\omega}_v.$$

Remarque 6.3. — Notons que cette mesure est indépendante du choix de l'ensemble S. Par contre, elle dépend de la métrique adélique dont est équipée V.

Comme l'a fait remarquer Swinnerton-Dyer, le bon domaine d'intégration pour la valeur de la constante est forcément l'adhérence des points rationnels dans l'espace adélique. Toutefois cette adhérence n'est a priori pas connue, ce qui pourrair empêcher de calculer explicitement la constante dans des cas particuliers. En conséquence, comme c'est maintenant usuel dans l'exploration du programme de Batyrev et Tschinkel, nous allons supposer implicitement que l'obstruction de Brauer-Manin [**Ma**] à l'approximation faible est la seule. Rappelons rapidement la construction de cette obstruction (*cf.* [**Pe3**] pour un survol plus détaillé). On note $\mathrm{Br}(F) = H^2(F, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer d'un corps F. La théorie du corps de classe global (*cf.* [**NSW**, theorem 8.1.17]) donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathbf{K}) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathrm{Br}(\mathbf{K}_v) \xrightarrow{\sum_{v \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Notons $\mathrm{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de V. Pour toute extension L de $\mathbf{K}$ et tout L-point x de V, la fonctorialité du groupe de

Brauer donne un morphisme de spécialisation $\text{év}_x : \operatorname{Br}(V) \to \operatorname{Br}(L)$. On peut donc définir un accouplement de $\operatorname{Br}(V) \times V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par

$$\langle A, (x_v)_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{K})}\rangle = \sum_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{K})} \operatorname{inv}_v(\text{év}_{x_v}(A))$$

pour $A \in \operatorname{Br}(V)$ et $(x_v)_{v\in\operatorname{Val}(\mathbf{K})} \in V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$. Autrement dit, pour tout point x de l'espace des adèles, on obtient un morphisme de groupes $\omega_x : \operatorname{Br}(V) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par $A \mapsto \langle A, x\rangle$. Compte tenu de la suite exacte (5), ce morphisme est trivial si le point x provient d'un point rationnel et on appelle ω_x *l'obstruction de Brauer-Manin en x*. Par continuité des applications considérées, l'adhérence des points rationnels dans l'espace adélique est contenue dans *l'espace de Brauer Manin* :

$$V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}} = \{\, x \in V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \mid \omega_x = 0 \,\}.$$

***Définition 6.4.* —** Rappelons que V désigne une belle variété munie d'une métrique adélique et que V vérifie les conditions (i) et (ii). On définit alors *le nombre de Tamagawa-Brauer-Manin* de V par

$$\tau^{\mathrm{Br}}(V) = \boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}).$$

Pour compléter la définition de la constante empirique, il reste à multiplier ce nombre par deux invariants de la variété, dont nous rappelons maintenant la définition.

***Définition 6.5.* —** On définit la constante $\alpha(V)$ par la formule

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!} \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y\rangle} \mathrm{d}y$$

où on note $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône fermé de $\operatorname{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs et $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ le cône dual :

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\, y \in \operatorname{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in C^1_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0 \,\}.$$

La mesure sur $\operatorname{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}^\vee$ est normalisée de façon à ce que le réseau défini par $\operatorname{Pic}(V)^\vee$ soit de covolume 1.

***Remarque 6.6.* —** Un simple changement de variables montre que cette constante $\alpha(V)$ peut être également vue comme le volume, convenablement normalisé, de l'intersection du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ avec l'hyperplan affine d'équation $\langle \omega_V^{-1}, y\rangle = 1$ (*cf.* [**Pe1**, définition 2.4]). On en déduit que, dans le cas où le

cône effectif $C^1_{\text{eff}}(V)$ est engendré par un nombre fini de classes de diviseurs effectifs, la constante $\alpha(V)$ est rationnelle. C'est le cas dans les exemples considérés ultérieurement.

Définition 6.7. — La constante $\beta(V)$ est l'entier

$$\beta(V) = \sharp H^1(\mathbf{K}, \operatorname{Pic}(\overline{V})).$$

Remarque 6.8. — Rappelons que l'introduction de ce terme est dûe à Batyrev et Tschinkel [**BT1**].

Définition 6.9. — Dans cet article, la *constante empirique* associée à la variété V munie de sa métrique adélique est

$$C(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau^{\mathrm{Br}}(V).$$

Remarque 6.10. — Salberger dans [**Sal**] a donné une interprétation naturelle de la constante en termes des torseurs versels au-dessus de la variété, qu'on peut décrire de la façon suivante : les torseurs versels sont munis d'une forme de jauge qui définit une mesure canonique sur l'espace des adèles associé. La constante s'interprète alors en termes de la somme, sur les différentes classes de torseurs versels ayant un point adélique, du volume d'un domaine d'adèles convenable (*cf.* également [**Pe2**]).

6.2. Formule empirique améliorée. — Dans l'étude des espaces de modules de courbes rationnelles, les courbes très libres sont caractérisées par le fait que leurs pentes sont strictement positives. Comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent, dans le contexte arithmétique, les points d'une sous-variété faiblement accumulatrice fixée semblent avoir une liberté qui tend vers 0. Toutefois, les points vérifiant la condition $l(x) < \varepsilon$ pour un nombre réel $\varepsilon < 1$ peuvent contribuer au terme principal du nombre de points de hauteur bornée, même dans le cas d'une variété homogène comme $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Cela nous amène à considérer une condition plus faible dans la formule empirique suivante.

Définitions 6.11. — On notera $\mathscr{D}$ l'ensemble des applications ε de $[1, +\infty[$ dans $]0, 1[$ continues et décroissantes telles que

(i) L'application ε tend vers 0 en $+\infty$;

(ii) Pour tout $\alpha \in]0, 1]$, l'application $t \mapsto \log(t)^\alpha \varepsilon(t)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Soit V une belle variété de dimension $n > 0$ sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. On suppose V munie d'une métrique adélique. Soit ε une application de $\mathscr{D}$. Pour tout $B \geqslant 1$ on définit l'ensemble des points ε-*libres* et de hauteur inférieure à B :

$$V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} = \{\, x \in V(\mathbf{K}) \,|\, H(x) \leqslant B \text{ et } l(x) \geqslant \varepsilon(B)\,\}.$$

Si un multiple de la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} peut s'écrire comme la somme d'un faisceau ample et d'un diviseur à croisement normaux stricts, on dira que la variété est *vaste* [(2)].

Remarque 6.12. — Les fonctions ε envisagée sont du type

$$t \mapsto \max(1, \log(\log(t)))^{-\alpha}$$

pour un réel $\alpha > 0$.

Formule empirique 6.13. — *Soit V une belle variété sur $\mathbf{K}$ de dimension strictement positive et munie d'une métrique adélique. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *La variété V est vaste;*

(ii) *Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2;*

(iii) *Le groupe de Picard géométrique de $\overline{V}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini;*

(iv) *Les points rationnels de V sont denses pour la topologie de Zariski;*

On note t le rang de $\operatorname{Pic}(V)$. *Pour une application ε convenable de l'ensemble $\mathscr{D}$,*

$$\sharp V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} \sim C(V) B \log(B)^{t-1} \tag{F}$$

lorsque B tend vers $+\infty$.

Remarque 6.14. — À la connaissance de l'auteur, on ne dispose à l'heure actuelle d'aucun résultat pour une variété V dont la partie transcendante du groupe de Brauer, c'est-à-dire l'image de l'extension des scalaires $\operatorname{Br}(V) \to \operatorname{Br}(\overline{V})$ est non nulle. On n'a donc pas d'exemple permettant de confirmer que la constante $\beta(V) = H^1(k, \operatorname{Pic}(\overline{V}))$ est la bonne dans une telle situation.

2. Le terme anglais « big » signifie une grande taille à la fois en hauteur et en largeur, le terme « vaste » convient donc pour traduire une condition plus forte que la simple grosseur.

6.3. La distribution asymptotique. — Comme déjà expliqué dans [**Pe1**, §5] la validité de la formule empirique pour tout choix de métrique implique une équidistribution des points rationnels vis-à-vis de la mesure de probabilité à densité continue obtenue en renormalisant la mesure introduite dans la définition de la constante empirique.

Pour parler d'équidistribution nous allons commencer par rappeler quelques notions concernant les mesures de comptage. Pour toute partie finie non vide X de l'espace adélique, la *mesure de comptage associée à* X est la mesure définie sur $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ par

$$\boldsymbol{\delta}_X = \frac{1}{\sharp X} \sum_{x \in X} \delta_x,$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac en x. Soit $B \geqslant 1$; lorsque l'ensemble $V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B}$ est fini et non vide, on note $\boldsymbol{\delta}^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B}$ la mesure ainsi associée à $V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B}$.

***Définition 6.15.* —** Sur l'espace adélique, sous les hypothèses (i) à (iv) de la formule empirique 6.13, qui garantit en particulier que l'espace de Brauer-Manin n'est pas vide, nous définissons également une mesure de probabilité borélienne supportée par l'espace de Brauer-Manin à partir de la mesure $\boldsymbol{\omega}_V$:

$$\boldsymbol{\mu}_V(U) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})} \boldsymbol{\omega}_V(U \cap V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}).$$

***Remarque 6.16.* —** Notons que si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}} = V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$, cette mesure est le produit des mesures $\boldsymbol{\mu}_{V,v} = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v))} \boldsymbol{\omega}_v$ qui est convergent. Par le lemme 6.1, pour presque toute place finie v, la mesure de probabilité $\boldsymbol{\mu}_{V,v}$ est donnée par la *mesure de probabilité* définie par un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_v$, caractérisée par la relation

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X)) = \frac{\sharp X}{\sharp \mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)} \tag{6}$$

où k parcourt les entiers entiers strictement positif et X les parties de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$, en notant π_k la réduction modulo $\mathfrak{m}_v^k$. Cette remarque s'étend sans peine *mutatis mutandis* au cas où $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}} = W \times \prod_{v \notin S} V(\mathbf{K}_v)$, pour un ensemble fini S de places et une partie W ouverte et fermée dans $\prod_{v \in S} V(\mathbf{K}_v)$.

***Distribution empirique 6.17.* —** *Sous les hypothèses* (i) *à* (iv) *de la formule empirique, pour toute application* ε *de* $\mathscr{D}$,

$$\boldsymbol{\delta}^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B} \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_V \tag{E}$$

au sens faible lorsque B tend vers ∞.

Remarque 6.18. — Cette distribution empirique implique que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule.

7. Compatibilité avec les exemples

7.1. L'espace projectif

7.1.1. *Minoration de la liberté.* — Nous allons tout d'abord donner une expression pour la liberté d'un point de l'espace projectif et en déduire que cette liberté est minorée par une constante strictement positive. Pour l'expression de la liberté, nous allons d'abord fixer une métrique sur l'espace projectif, qui généralise l'exemple 3.12. Soit n un entier strictement positif. Notons $E = \mathbf{K}^{n+1}$. Soit w une place de $\mathbf{K}$. On définit une norme $\|\cdot\|_w$ sur $E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$ qu'on peut identifier avec $\mathbf{K}_w^{n+1}$ par les formules :

(i) $\|y\|_w = \sqrt{\sum_{i=0}^n y_i^2}$ si w est une place réelle ;

(ii) $\|y\|_w = \sum_{i=0}^n |y_i|^2$ si w est une place complexe ;

(iii) $\|y\|_w = \max_{0\leqslant i\leqslant n}(|y_i|_w)$ sinon

pour tout $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}_w^{n+1}$. Aux places non archimédiennes, la norme est donc définie par le $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ et $\widehat{\deg}(E) = -\frac{n+1}{2}\log|\Delta_{\mathbf{K}}|$, où $\Delta_{\mathbf{K}}$ désigne le discriminant de $\mathbf{K}$.

Notons $s : \mathbf{P}(E) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{K})$ le morphisme structural. Les normes précédentes définissent une norme adélique sur le fibré vectoriel $s^*(E)$. En considérant le fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(-1)$ comme un sous-fibré de $s^*(E)$, on peut munir $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(-1)$ d'une norme adélique. Mais le fibré tangent est canoniquement isomorphe à un quotient de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(1) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}} s^*(E)$, ce qui permet de le munir de la norme adélique induite. Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est muni de la norme adélique induite.

Proposition 7.1. — *Soit x un point de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$. Alors*

$$l(x) = \frac{n}{n+1} + \min_F \left(\frac{-n\,\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}_E(F)h(x)} \right),$$

où F décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de E contenant la droite vectorielle correspondant à x et $\operatorname{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

Remarque 7.2. — Si $n = 1$, l'unique F qui intervient est la droite vectorielle correspondant à x ce qui redonne $l(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, formule qui découle directement de la définition de la liberté dans ce cas.

Lemme 7.3. — *Pour tout sous-espace vectoriel F de E on a la relation*

$$-\widehat{\deg}(F) \geqslant \frac{\dim(F)}{2} \log|\Delta_{\mathbf{K}}|.$$

Démonstration. — Choisissons une partie I de l'ensemble $\{0,\ldots,n\}$ de sorte que la projection $(x_0,\ldots,x_n) \mapsto (x_i)_{i\in I}$ définisse un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de F sur $\mathbf{K}^{\dim(F)}$. Compte tenu des normes choisies, cette projection induit des projections orthogonales lorsqu'on tensorise par un complété archimédien. L'image de l'intersection $M_F = F \cap \mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ est contenue dans $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{\dim(F)}$. Donc

$$\operatorname{Vol}(F_{\mathbf{R}}/M_F) \geqslant \operatorname{Vol}(\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}/\mathscr{O}_{\mathbf{K}})^{\dim(F)}. \qquad \square$$

Démonstration de la proposition 7.1. — Notons D la droite vectorielle de E correspondant à x. L'espace tangent à $\mathbf{P}^n(E)$ en x est canoniquement isomorphe au quotient $D^\vee \otimes E/\mathbf{K}$ où l'injection de $\mathbf{K}$ dans le produit tensoriel $D^\vee \otimes E$ est la composée de l'isomorphisme canonique de $\mathbf{K}$ sur $D^\vee \otimes D$ et du plongement de $D^\vee \otimes D$ dans $D^\vee \otimes E$.

Soit F' un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{P}^n(E)$. On note $\widetilde{F}'$ son image inverse dans $D^\vee \otimes E$. Il existe un unique sous-espace vectoriel F de E tel que $\widetilde{F}'$ soit $D^\vee \otimes F$. L'espace vectoriel F' est donc isomorphe au quotient $D^\vee \otimes F/\mathbf{K}$. Cet isomorphisme est compatible avec les normes adéliques choisies, il en résulte que

$$\widehat{\deg}(F') = \widehat{\deg}(F) + \dim(F)\,\widehat{\deg}(D^\vee) = \widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D)$$

D'un autre côté, la hauteur de x n'est rien d'autre que le degré arithmétique de l'espace tangent en ce point, c'est à dire $h(x) = -(n+1)\,\widehat{\deg}(D)$. Par définition du polygône de Newton, on obtient que le valeur de $m_{T_x\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(n-1)$ est donnée par

$$\max_F \left(\frac{\widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D) + (n+1)\,\widehat{\deg}(D)}{n+1-\dim(F)} \right) - (n+1)\,\widehat{\deg}(D)$$

$$= -n\,\widehat{\deg}(D) + \max_F \left(\frac{\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}(F)} \right),$$

où F parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de E contenant D. Par conséquent,

$$\mu_n(T_x\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}) = -\widehat{\deg}(D) + \min_F \left(\frac{-\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}(F)}\right).$$

Compte tenu du lemme 7.3, cette quantité est positive puisque $|\Delta_{\mathbf{K}}| \geqslant 1$. La définition de la liberté de x et l'expression pour la hauteur de x donne les relations

$$l(x) = \frac{n}{h(x)}\mu_n(T_x(\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}})) = \frac{n}{n+1} + \min_F \left(\frac{-n\,\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}_E(F)h(x)}\right)$$

comme annoncé. □

Corollaire 7.4. — *Avec la norme définie ci-dessus, la liberté d'un point rationnel de l'espace projectif de dimension n est minorée par* $\frac{n}{n+1}$.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition, du lemme 7.3 et du fait que le discriminant vérifie $|\Delta_{\mathbf{K}}| \geqslant 1$. □

Remarques 7.5. — a) Ce résultat dépend de la métrique adélique choisie ; en effet, il est possible de modifier une métrique adélique de façon à donner une valeur arbitraire dans $[0, 1]$ à la liberté d'un point fixé. Toutefois compte-tenu du lemme 5.3, pour tout espace projectif $\mathbf{P}$ de dimension n muni d'une métrique adélique et tout $\alpha < \frac{n}{n+1}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}(\mathbf{K}) \mid l(x) < \alpha\}$$

est fini.

b) Notons également que si l'on choisit un sous-espace vectoriel strict F de E, alors la liberté d'un point x de $\mathbf{P}(F) \subset \mathbf{P}(E)$ tend vers $\frac{n}{n+1}$ lorsque sa hauteur tend vers $+\infty$. Le lemme 7.7 qui suit montre que ce comportement est « atypique ».

Corollaire 7.6. — *Pour tout choix de métrique adélique, l'espace projectif vérifie la formule empirique* (F) *et la distribution empirique* (E).

Démonstration. — Rappelons que $\varepsilon(B)$ tend vers 0 lorsque B tend vers $+\infty$. Pour la hauteur choisie dans ce paragraphe, compte tenu du corollaire 7.4, il existe un nombre réel B_0 tel que l'ensemble des points rationnels de l'espace projectif vérifiant $l(P) \leqslant \varepsilon(B)$ soit vide pour tout $B > B_0$. Pour une hauteur arbitraire, lorsque $B > B_0$, il résulte de la proposition 5.4 que tout point rationnel de l'espace projectif tel que $l(P) \leqslant \varepsilon(B)$ a une hauteur bornée par une constante

réelle. Le résultat découle alors des propositions 6.1.1 et du corollaire 6.2.17 de [**Pe1**], qui se basent en partie sur l'étude de S. Schanuel [**Sc**]. □

7.1.2. *liberté moyenne.* — Nous allons maintenant démontrer que le nombre de points de l'espace projectif dont la liberté vérifie $l(x) < 1 - \eta$ est négligeable devant B et donne donc une contribution négligeable.

Proposition 7.7. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\eta > 0$ on ait la majoration*

$$\sharp\{x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \mid H(x) \leqslant B \text{ et } l(x) < 1 - \eta\} < CB^{1-\eta}$$

pour tout nombre réel $B \geqslant 1$.

Démonstration. — Par la remarque 7.2, le résultat est vrai pour $n = 1$. On suppose donc $n \geqslant 2$. Compte tenu de la proposition 7.1, la condition $l(x) < 1 - \eta$ est équivalente à l'existence d'un sous-espace F de E de codimension c qui contient la droite D correspondant à x et tel que

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n\,\widehat{\deg} F}{c\,h(x)} \leqslant 1 - \eta$$

c'est-à-dire

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant \frac{c}{n}\left(\frac{1}{n+1} - \eta\right) h(x). \tag{7}$$

Considérons un instant la grassmannienne $\mathrm{Gr}(n+1-c, E)$ des sous-espaces de codimension c dans E. L'espace tangent en un point F est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(F, E/F)$. On en déduit que la hauteur logarithmique de F, relativement au fibré anticanonique de la grassmannienne peut être donné par

$$h(F) = -c\,\widehat{\deg}(F) + (n+1-c)\,\widehat{\deg}(E/F) = -(n+1)\,\widehat{\deg}(F).$$

D'après l'estimation de points de hauteur bornée sur la grassmannienne (*cf.* [**FMT**][§2]), il existe donc une constante C telle que le nombre de sous-espaces F de codimension c de E tels que $-\widehat{\deg}(F) \leqslant \log(P)$ soit majoré par CP^{n+1} pour tout $P > 1$.

D'autre part, pour un sous-espace F fixé, on reprend la démonstration de S. Schanuel dans [**Sc**]. Pour chaque classe d'idéaux $\overline{\mathfrak{a}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$, on choisit un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$ représentant $\overline{\mathfrak{a}}$. On considère alors l'ensemble $\mathscr{D}(F, \mathfrak{a}, B)$ des droites D avec $H(D) \leqslant B$ pour lesquelles la classe du $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module $D \cap \mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ soit $\overline{\mathfrak{a}}$. Soit $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ le $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module $\mathfrak{a}^{n+1} \cap F$; il forme un réseau du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$;

la longueur minimale d'un vecteur de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ admet une minoration indépendante de F.

Pour toute place archimédienne w, notons $E_w = E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. On identifie $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ avec $\bigoplus_{w|\infty} E_w$. Soit

$$\mathbf{log} : \prod_{w|\infty} E_w - \{0\} \to \prod_{w|\infty} \mathbf{R}$$

l'application $(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\log(||x_w||_w))_{w|\infty}$ et soit σ l'application linéaire sur $L = \prod_{w|\infty} \mathbf{R}$ donnée par $(x_w)_{w|\infty} \mapsto \sum_{w|\infty} x_w$ et pr la projection orthogonale de L sur $\ker(\sigma)$. Rappelons que l'application $\mathbf{log} : \prod_{w|\infty} \mathbf{K}_w^* \to L$ donnée par $(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\log(|x_w|_w))_{w|\infty}$ envoie $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^*$ sur un réseau Λ de $\ker(\sigma)$. On note Δ un domaine fondamental pour Λ dans $\ker(\sigma)$, donné par une base de Λ. On considère le domaine $\mathscr{B}$ définit par la relation

$$\mathscr{B} = \{ y \in E_{\mathbf{R}} - \{0\} \mid \mathrm{pr}(\mathbf{log}(y)) \in \Delta \text{ et } \sigma(\mathbf{log}(y)) \leqslant 0 \} \cup \{0\}.$$

L'ensemble $\mathbf{log}^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(\Delta))$ est le domaine fondamental pour l'action du groupe $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^*$ modulo les racines de l'unité $\mu_\infty(\mathbf{K})$ tel qu'il est défini par Schanuel [**Sc**, p. 437]. L'ensemble $\mathscr{B}$ est invariant par les applications de la forme

$$(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\sigma_w(x_w))_{w|\infty} \tag{8}$$

où σ_w est une isométrie de l'espace euclidien E_w.

L'espace $F_{\mathbf{R}} = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$, vu comme sous-espace de $E_{\mathbf{R}}$ est la somme directe des $F_w = F \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$ pour $w \mid \infty$. Il existe donc une famille d'isométries $(\sigma_w)_{w|\infty}$ telle que l'application donnée par (8) envoie $F_{\mathbf{R}}$ sur $F_{0\mathbf{R}}$, où F_0 est donné par l'annulation des c dernières coordonnées. L'ensemble $\mathscr{B}_F = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cap \mathscr{B}$ est donc isométrique à l'ensemble $\mathscr{B}_{F_0}$. Le domaine $\mathscr{B}_F$ est donc un domaine borné dont le bord est une réunion finie d'images d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ et le nombre d'applications lipshitziennes intervenant ainsi que les constantes de Lipschitz ne dépend pas de F.

Le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}(F, \mathfrak{a}, B)$ est majoré par le nombre de points de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ dans le domaine dilaté $T\mathscr{B}_F$, où le nombre réel T est défini par la relation $B = N(\mathfrak{a})^{-n-1} T^{[\mathbf{K}:\mathbf{Q}](n+1)}$. D'autre part, le réseau $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathbf{K}}}$. À l'aide de [**MV**, p. 437, lemma 2], on obtient donc une majoration

du nombre de droites dans $\mathscr{D}(F,\mathfrak{a},B)$ de la forme

$$C\left(\frac{B^{\frac{\dim(F)}{n+1}}}{\exp(-\widehat{\deg}F)}+B^{\frac{\dim(F)-1}{n+1}}\right).$$

À l'aide d'une sommation par partie on en déduit que le cardinal des droites D avec $H(D)\leqslant B$ qui sont contenues dans un sous-espace F de codimension c vérifiant (7) est majoré par

$$C\left(B^{n\frac{c}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\eta\right)+\frac{n+1-c}{n+1}}+B^{(n+1)\frac{c}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\eta\right)+\frac{n+1-c-1}{n+1}}\right)$$
$$=C(B^{1-c\eta}+B^{1-\frac{n-c}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n}c\eta}).$$

La proposition s'obtient en sommant cette majoration sur $c\in\{1,\dots,n\}$. □

Remarque 7.8. — Cette proposition implique que le cardinal de l'ensemble

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant\log(B)}=\{x\in\mathbf{P}^n(\mathbf{K})\mid\mu_{\max}(x)\leqslant\log(B)\}$$

est minoré par une expression de la forme $C_\varepsilon B^{n(1-\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon>0$. En effet, si $l(x)\geqslant 1-\eta$, alors $\mu_{\min}(x)\geqslant\frac{h(x)}{n}(1-\eta)$ et donc

$$\mu_{\max}(x)\leqslant h(x)-(n-1)\mu_{\min}(x)\leqslant\frac{h(x)}{n}(1+(n-1)\eta).$$

Par conséquent, si on pose $\varepsilon=1-(1+(n-1)\eta)^{-1}$, les conditions $l(x)\geqslant 1-\eta$ et $H(x)\leqslant B^{n(1-\varepsilon)}$ entraînent la condition $\mu_{max}(x)\leqslant\log(B)$. Il semble raisonnable d'espérer que le cardinal de cet ensemble est en fait équivalent à une expression de la forme $C'(\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}})B^n$.

Corollaire 7.9. — *La moyenne de la liberté, définie par*

$$\frac{1}{\sharp\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}\sum_{x\in\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}l(x)$$

converge vers 1 *lorsque* B *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. — Par la proposition précédente, pour tout $\eta>0$, et tout $B\geqslant 1$,

$$1\geqslant\frac{1}{\sharp\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}\sum_{x\in\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}l(x)\geqslant(1-\eta)(1-CB^{-\eta}).$$ □

7.2. Le produit de variétés

7.2.1. *Préliminaires.* — Nous allons commencer par un lemme classique sur les pentes d'une somme directe.

Lemme 7.10. — *Soient E_1 et E_2 des espaces vectoriels munis de normes adéliques classiques de dimensions respectives n_1 et n_2. Soient $\mathscr{P}(E_1)$ et $\mathscr{P}(E_2)$ les polygônes de Newton correspondants. Alors le polygône de Newton de la somme $E_1 \oplus E_2$ est*

$$\mathscr{P}(E_1 \oplus E_2) = \mathscr{P}(E_1) + \mathscr{P}(E_2).$$

En particulier, on a la relation $\mu_{n_1+n_2}(E_1 \oplus E_2) = \min(\mu_{n_1}(E_1), \mu_{n_2}(E_2))$.

Démonstration. — Soit F un sous-espace vectoriel de $E_1 \oplus E_2$. Notons p_1 la projection de $E_1 \oplus E_2$ sur E_1. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2 \cap F \longrightarrow F \longrightarrow p_1(F) \longrightarrow 0.$$

Par définition de la somme de fibrés adéliquement normés (*cf.* l'exemple 3.6 c)), pour toute place w, la projection induite $(E_1 \oplus E_2) \otimes \mathbf{K}_w$ sur $E_2 \otimes \mathbf{K}_w$ est 1-lipschitzienne, et, par conséquent, $\widehat{\deg}(F/(E_2 \cap F)) \leqslant \widehat{\deg}(p_1(F))$ et $\widehat{\deg}(F) \leqslant \widehat{\deg}(E_2 \cap F \oplus p_1(F))$.

Le polygône $\mathscr{P}(E_1 \oplus E_2)$ est donc l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de la forme $(\dim(F_1) + \dim(F_2), \widehat{\deg}(F_1) + \widehat{\deg}(F_2))$ où F_i est un sous-espace vectoriel de E_i pour $i \in 1, 2$. Cela démontre la première assertion. Compte tenu de la définition des fonctions m, on obtient l'égalité

$$m_{E_1 \oplus E_2}(n_1 + n_2 - 1) = \max(m_{E_1}(n_1) + \widehat{\deg}(E_2), \widehat{\deg}(E_1) + m_{E_2}(n_2))$$

La seconde relation en découle. □

7.2.2. *Un cas particulier.* — Avant de passer au cas général du produit de deux variétés, nous allons traiter le cas particulier d'un produit de droites projectives qui illustre bien la notion de liberté.

Proposition 7.11. — *Soit n un entier strictement positif. Pour toute application ε de $\mathscr{D}$, la variété $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$ vérifie la formule empirique 6.13.*

Démonstration. — Dans cette preuve, V désigne $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$. Le fibré tangent TV est isomorphe à la somme des images inverses des fibres $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ et on munit V de la métrique induite par les métriques utilisées pour $\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$, suivant l'exemple 3.6 c). Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un point rationnel de V. L'espace tangent $T_{\boldsymbol{x}}V$ est isomorphe

à $\bigoplus_{i=1}^n T_{x_i}\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ et on déduit du lemme précédent que $\mu_n(\boldsymbol{x}) = \min_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_1(x_i))$. Mais $\mu_1(x_i) = h(x_i)$ ce qui donne la formule

$$l(\boldsymbol{x}) = \frac{n\min_{1\leqslant i\leqslant n}(h(x_i))}{\sum_{i=1}^n h(x_i)}.$$

Fixons $B \geqslant 2$ et ε un nombre réel strictement positif. Il nous faut donc estimer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n h(x_i) \leqslant \min\Big(\log(B), \frac{n}{\varepsilon}\min_{1\leqslant i\leqslant n}(h(x_i))\Big) \right\},$$

qu'on note $V(\mathbf{K})^{l\geqslant\varepsilon}_{H\leqslant B}$, à partir de l'estimation de E. Landau [**Lan**]

$$\sharp\{x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K}) \mid h(x) \leqslant \log(B)\} = cB + O(B^{1-\delta})$$

avec $c = C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})$ et $\delta > 0$. On fixe temporairement η avec $0 < \eta < 1$. Soit $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_n) \in \mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$. On écrit $|\boldsymbol{t}| = \sum_{i=1}^n t_i$. On a donc

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\sharp\left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \;\middle|\; (h(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^n [t_i, t_i+\eta] \right\}\\ &= c^n e^{|\boldsymbol{t}|}(e^\eta - 1)^n + O(e^{|\boldsymbol{t}|-\delta\min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i)})\\ &= c^n e^{|\boldsymbol{t}|}\eta^n + O(e^{|\boldsymbol{t}|}\eta^{n+1}) + O(e^{|\boldsymbol{t}|-\delta\min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i)}).\end{aligned}$$

On considère alors le simplexe compact $\Delta_\varepsilon(B)$ de $\mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ défini par l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n t_i \leqslant \min(\log(B), \frac{n}{\varepsilon}\min_{1\leqslant i\leqslant n} t_i).$$

Notons que, si $\boldsymbol{t} \in \Delta_\varepsilon(B)$, le terme d'erreur de (9) est majoré par $O(e^{|\boldsymbol{t}|}\eta^{n+1}) + O(e^{(1-\delta\varepsilon/n)|\boldsymbol{t}|})$. Quadrillons maintenant $\mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ par des cubes de côté η ; le nombre de cubes rencontrant le bord de $\Delta_\varepsilon(B)$ est majoré par $O((\log(B)/\eta)^{n-1})$. En faisant une comparaison entre somme et intégrale on obtient donc l'estimation

$$\sharp V(\mathbf{K})^{l\geqslant\varepsilon}_{H\leqslant B} = c^n \int_{\Delta_\varepsilon(B)} e^{|\boldsymbol{t}|}\mathrm{d}\boldsymbol{t} + O(B\log(B)^n\eta) + O\left(\left(\frac{\log(B)}{\eta}\right)^n B^{1-\delta\varepsilon/n}\right),$$

les constantes implicites dans les O étant indépendantes de ε. En prenant $\eta = B^{-\delta\varepsilon/2n^2}$ on obtient un terme d'erreur en $O(\log(B)^n B^{1-\delta\varepsilon/(2n^2)})$. L'intégrale vaut $BP_\varepsilon(\log(B))$ où P_ε est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant

$\frac{1}{(n-1)!} + O(\varepsilon)$. En utilisant l'égalité $C(V) = \frac{1}{(n-1)!}c^n$, on en déduit la formule empirique 6.13. $\square$

Remarque 7.12. — Il convient de noter que cette démonstration donne un excellent contrôle du terme d'erreur, mais avec une constante différente, si on considère les points de liberté strictement supérieure à un nombre réel ε *fixé*. En particulier, le polynôme en $\log(B)$ dans ce cas ne provient que de l'intégrale $\int_{\Delta_\varepsilon(B)} e^{|\boldsymbol{t}|}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$. Cette situation est en contraste avec l'étude faite par S. Pagelot [**Pa**] de $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2_{H \leqslant B}$. En effet, dans ce cas, un calcul direct démontre que chaque fibre verticale ou horizontale au dessus d'un point rationnel P de la droite projective a une contribution équivalente à $\frac{C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})}{H(P)}B$ dans l'estimation asymptotique et contribue donc au deuxième terme du polynôme B. Minorer la liberté des points décomptés par ε majore cette contribution par

$$\frac{C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})}{H(P)} \min(B, H(P)^{2/\varepsilon}).$$

7.2.3. *Cas général.* — Revenons maintenant au cas général. Soient V_1 et V_2 de belles variétés de dimensions respectives n_1 et n_2 strictement positives. On les suppose munies de métriques adéliques. Pour $i \in \{1,2\}$, on note p_i la projection de $V_1 \times V_2$ sur V_i, h_i la hauteur logarithmique définie par la métrique sur V_i et l_i la fonction liberté associée. Comme le fibré tangent $T(V_1 \times V_2)$ est isomorphe à la somme directe $p_1^* TV_1 \oplus p_2^* TV_2$, on peut munir $V_1 \times V_2$ de la métriques induite sur la somme directe (*cf.* exemple 3.6 c)).

Proposition 7.13. — *Soient $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$. Si $h_1(x_1)$ ou $h_2(x_2)$ est négatif alors $l(x_1, x_2) = 0$. Dans le cas contraire, on a la relation*

$$l(x_1, x_2) = (n_1 + n_2)\frac{\min(l_2(x_2)h_2(x_2)/n_2, l_1(x_1)h_1(x_1)/n_1)}{h_1(x_1) + h_2(x_2)}.$$

Démonstration. — En effet, dans ce cas on a $\mu_{n_i}(T_{x_i}V_i) = h_i(x_i)l_i(x)/n_i$ pour $i \in \{1,2\}$ et on applique le lemme 7.10. $\square$

Remarque 7.14. — Comme noté dans un cadre plus général dans la remarque 5.6, si on fixe un point x_1 de $V_1(\mathbf{K})$, la liberte de $y \in p_1^{-1}(x_1)$ tend vers 0 quand sa hauteur tend vers $+\infty$.

On pose $n = n_1 + n_2$. Soient ε et ε' des applications de l'ensemble $\mathscr{D}$ introduit dans la définition 6.11. On note $\varepsilon' \geqslant \varepsilon$ si $\varepsilon'(B) \geqslant \varepsilon(B)$ pour $B \geqslant 1$. Dans le

théorème qui suit, on désigne par ε une application de l'ensemble $\mathscr{D}$ qui vérifie, en plus des conditions (i) et (ii) de la définition 6.11, la condition suivante :

(iii) L'application $t \mapsto \log(t)^{1/2}\varepsilon(t)$ est croissante.

Théorème 7.15. — *On suppose que les variétés V_1 et V_2 vérifient les conditions* (i) *à* (iv) *de la formule empirique et que, pour $i \in \{1,2\}$ et toute application $\varepsilon' \in \mathscr{D}$ telle que $\varepsilon' \geqslant \frac{n_i^2}{2n^2}\varepsilon^2$, on ait l'estimation* (F) *:*

$$\sharp V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i\leqslant B} = C(V_i)B\log(B)^{t_i-1}(1+o_{\varepsilon'}(B)),$$

avec $t_i = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V_i))$. Alors on a l'expression

$$\sharp(V_1\times V_2)(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} = C(V_1\times V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1}(1+o_{\varepsilon}(B)).$$

Démonstration. — Quitte à remplacer ε par l'application $t \mapsto \min(\frac{1}{2}, \varepsilon(t))$, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer $\varepsilon(1) \leqslant \frac{1}{2}$. Soit $i \in \{1,2\}$. Étant donné une application ε' comme dans l'énoncé du théorème, l'application de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{N}$ définie par $B \mapsto V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i\leqslant B}$ est croissante. La condition $l_i(x) \geqslant \varepsilon'(B)$ impose l'inégalité $H_i(x) > 1$, si bien qu'elle vaut 0 en 1. En outre, elle est égale à sa limite à droite en tout point, donc nulle sur un voisinage de 1. On peut donc poser, pour $t \geqslant 1$,

$$\eta_{i,\varepsilon'}(t) = \sup_{B>t}\left|\frac{V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i\leqslant B}}{C(V_i)B\log(B)^{t_i-1}} - 1\right|.$$

Cela définit une application décroissante qui converge vers 0 lorsque B tend vers $+\infty$.

Remarque 7.16. — Si S est un ensemble *fini* d'applications ε' comme ci-dessus. L'application définie par la relation $\eta_{i,S}(t) = \max_{\varepsilon'\in S}\eta_{i,\varepsilon}$ jouit de propriétés analogues.

Soit (x_1,x_2) un point rationnel du produit. Par la proposition 7.13, la condition $l(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon(B)$ implique tout d'abord que $h_1(x_1) > 0$ et $h_2(x_2) > 0$. Par suite, elle implique également les inégalités

$$l_1(x_1) \geqslant \frac{n_1}{n}\varepsilon(B) \qquad \text{et} \qquad l_2(x_2) \geqslant \frac{n_2}{n}\varepsilon(B).$$

On note dans la suite $\varepsilon_1 = \frac{n_1}{n}\varepsilon$ et $\varepsilon_2 = \frac{n_2}{n}\varepsilon$. Nous allons découper la preuve en une série de lemmes.

Lemme 7.17. — *Soit* $\lambda \in]0,1[$ *et soit* $\varepsilon' = \lambda\varepsilon$. *Soit* $B > 1$, *pour tout* $P \in [B^{1/2}, B]$, *on a les inégalités*

$$\varepsilon'(B) \leqslant \varepsilon'(P) \leqslant 2\varepsilon'(B),$$

et, pour tout $P \in [B^{\varepsilon'(B)}, B]$, *on a*

$$\varepsilon'(B) \leqslant \varepsilon'(P) \leqslant \sqrt{\varepsilon'(B)}.$$

Démonstration. — Les inégalités de gauche résultent du fait que ε est supposée décroissante. Comme $t \mapsto \log(t)\varepsilon'(t)$ est croissante, on a $\log(B^{1/2})\varepsilon'(B^{1/2}) \leqslant \log(B)\varepsilon'(B)$ ce qui donne la première majoration. De même, l'inégalité

$$\sqrt{\log(B^{\varepsilon'(B)})}\varepsilon'(B^{\varepsilon'(B)}) \leqslant \sqrt{\log(B)}\varepsilon'(B)$$

permet de prouver la seconde. □

Lemme 7.18. — *Le cardinal de l'ensemble des* $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ *vérifiant les conditions*

$$H_1(x_1) \leqslant B^{1/2}, \quad H_2(x_2) \leqslant B^{1/2}, \quad l_1(x_1) \geqslant \varepsilon_1(B) \quad \textit{et} \quad l_2(x_2) \geqslant \varepsilon_2(B)$$

est, à une constante près, majoré par $B\log(B)^{t_1+t_2-2}$.

Démonstration. — Le lemme précédent permet de majorer le cardinal considéré par celui de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1) \leqslant B^{1/2},\ H_2(x_2) \leqslant B^{1/2},\ l_1(x_1) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1(B^{1/2}) \text{ et } l_2(x_2) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_2(B^{1/2})$$

et on applique les hypothèses du théorème à $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ et $\frac{1}{2}\varepsilon_2$. □

Par symétrie, compte tenu du dernier lemme, il nous suffit d'estimer le cardinal de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1) \geqslant B^{1/2}, \quad H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B, \quad \text{et} \quad l(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon(B).$$

La condition sur la liberté est la conjonction des deux conditions suivantes :

(i) $l_1(x_1) \geqslant \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{h_1(x_1)}\varepsilon_1(B)$;

(ii) $l_2(x_2) \geqslant \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{h_2(x_2)}\varepsilon_2(B)$.

Sous les hypothèses $H_1(x_1) \geqslant B^{1/2}$ et $H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B$, on a

$$\frac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_1(x_1)} \in [1,2] \quad \text{et} \quad \frac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_2(x_2)} \in \left[\frac{\log(B)}{2h_2(x_2)}+1, \frac{\log(B)}{h_2(x_2)}\right].$$

On introduit les quatres conditions suivantes

(i_B^+) $l_1(x_1) \geqslant \varepsilon_1(B)$, (i_B^-) $l_1(x_1) \geqslant 2\varepsilon_1(B)$,

(ii_B^+) $l_2(x_2) \geqslant \left(\dfrac{\log(B)}{2h_2(x_2)}+1\right)\varepsilon_2(B)$, (ii_B^-) $l_2(x_2) \geqslant \dfrac{\log(B)}{h_2(x_2)}\varepsilon_2(B)$.

Comme $l_2(x_2) \leqslant 1$, la condition (ii_B^+) implique que $H_2(x_2) \geqslant B^{\frac{\varepsilon_2(B)}{2}}$. Considérons maintenant les conditions

(iii_B^+) $l_2(x_2) \geqslant \varepsilon_2(B)$ et $H_2(x_2) \geqslant B^{\frac{\varepsilon_2(B)}{2}}$;

(iii_B^-) $l_2(x_2) \geqslant \sqrt{\varepsilon_2(B)}$ et $H_2(x_2) \geqslant B^{\sqrt{\varepsilon_2(B)}}$.

Alors, sous les hypothèses précédentes, on a les implications

$$(\mathrm{i}_B^-) \Longrightarrow (\mathrm{i}) \Longrightarrow (\mathrm{i}_B^+)$$

et

$$(\mathrm{iii}_B^-) \Longrightarrow (\mathrm{ii}_B^-) \Longrightarrow (\mathrm{ii}) \Longrightarrow (\mathrm{ii}_B^+) \Longrightarrow (\mathrm{iii}_B^+).$$

Pour $P \in [B^{\frac{1}{2}}, B]$, on note $N_1^+(P,B)$ (resp. $N_1^-(P,B)$) le cardinal des $x_1 \in V_1(\mathbf{K})$ tels que $H_1(x_1) \leqslant P$ et qui vérifient la condition (i_B^+) (resp. (i_B^-)). On note $\mathscr{E}_2^+(B)$ (resp. $\mathscr{E}_2^-(B)$) l'ensemble des $x_2 \in V_2(\mathbf{K})$ tels que $H_2(x_2) \leqslant B^{\frac{1}{2}}$ et qui vérifient la condition (iii_B^+) (resp. (iii_B^-)). Le nombre qui nous intéresse est minoré (resp.. majoré) par

$$\sum_{x_2 \in \mathscr{E}_2^-(B)} \left(N_1^-\left(\frac{B}{H_2(x_2)}, B\right) - N_1^-(B^{\frac{1}{2}}, B)\right),$$

(resp. par

$$\sum_{x_2 \in \mathscr{E}_2^+(B)} \left(N_1^+\left(\frac{B}{H_2(x_2)}, B\right) - N_1^+(B^{\frac{1}{2}}, B)\right)\Bigg).$$

En appliquant une nouvelle fois le lemme 7.18, nous constatons que la contribution de $\sum_{x \in \mathscr{E}_2^+} N_1^+(B^{\frac{1}{2}}, B)$ est négligeable devant $B\log(B)^{t_1+t_2-1}$. Il nous reste à estimer la somme pour le terme principal.

Lemme 7.19. — *Il existe une application* $\eta_1' : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ *décroissante et tendant vers* 0 *en* $+\infty$ *telle que*

$$\left| \frac{N_1(P,B)}{C_1(V)P\log(P)^{t_1-1}} - 1 \right| \leqslant \eta_1'(B)$$

pour $N_1 \in \{N_1^+, N_1^-\}$, $B > 1$ *et* $P \in [B^{\frac{1}{2}}, B]$.

Démonstration. — Comme $P \in [B^{\frac{1}{2}}, B]$, le lemme 7.17 donne les inégalités $\frac{1}{2}\varepsilon_1(P) \leqslant \varepsilon_1(B) \leqslant \varepsilon_1(P)$. En appliquant la remarque 7.16 à l'ensemble $S = \{\frac{1}{2}\varepsilon_1, \varepsilon_1, 2\varepsilon_1\}$ on obtient une application décroissante η_1 de sorte que les termes d'erreur du lemme soient majorés par $\eta_1(P)$. L'application $\eta_1' : B \mapsto \eta_1(B^{1/2})$ satisfait alors la conclusion du lemme. □

Ce lemme nous permet donc de nous ramener à estimer

$$\sum_{x_2 \in \mathscr{E}_2(B)} \frac{1}{H_2(x_2)} \log\left(\frac{B}{H_2(x_2)}\right)^{t_!-1}$$

pour $\mathscr{E}_2 \in \{\mathscr{E}_2^+, \mathscr{E}_2^-\}$. On considère l'application $f_B : [1, B^{\frac{1}{2}}] \to \mathbf{R}$ définie par $P \mapsto \frac{1}{P}(\log(B) - \log(P))^{t_1-1}$. On note g_B^+ (resp. g_B^-) l'application qui à $P \in [1, B^{\frac{1}{2}}]$ associe le cardinal des $x \in V_2(\mathbf{K})$ tels que $H_2(x) \leqslant P$ et $l_2(x) \geqslant \varepsilon_2(B)$ (resp. $l_2(x) \geqslant \sqrt{\varepsilon_2(B)}$). En utilisant les notations des intégrales de Stieltjes (*cf.* [**Te**, §I.0.1]), les sommes ci-dessus se mettent donc sous la forme

$$\int_{B^{\varepsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} f_B(u)\mathrm{d}g_B(u) = [f_B(u)g_B(u)]_{B^{\varepsilon'}(B)}^{B^{\frac{1}{2}}} - \int_{B^{\varepsilon'}(B)}^{B^{\frac{1}{2}}} f_B'(u)g_B(u)\mathrm{d}u, \tag{10}$$

où $\varepsilon' \in \{\varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2}\}$ et $g_B \in \{g_B^+, g_B^-\}$; l'égalité vient de la formule d'Abel qui s'écrit ici comme une intégration par partie.

Lemme 7.20. — *Il existe une application* $\eta_2' : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ *décroissante et tendant vers* 0 *en* $+\infty$ *telle que*

$$\left| \frac{g_B(P)}{C_2(V)P\log(P)^{t_2-1}} - 1 \right| \leqslant \eta_2'(B)$$

pour $B > 1$, $P \in [B^{\varepsilon_2(B)}, B^{\frac{1}{2}}]$ *et* $g_B \in \{g_B^+, g_B^-\}$.

Démonstration. — Comme $P \in [B^{\varepsilon_2(B)}, B^{\frac{1}{2}}]$, le lemme 7.17 donne les inégalités $\varepsilon_2(P)^2 \leqslant \varepsilon_2(B) \leqslant \varepsilon_2(P)$. En appliquant la remarque 7.16 à l'ensemble $S = \{\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_2}\}$, on obtient une application décroissante η_2 de sorte que les termes d'erreur du lemme soient majorés par $\eta_2(P)$. L'application $\eta_2' : B \mapsto \eta_2(B^{\varepsilon_2(B)})$ satisfait alors la conclusion du lemme puisque l'application $B \mapsto \log(B)\varepsilon_2(B)$ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. $\square$

Fin de la preuve du théorème 7.15. — La dérivée de l'application f_B est donné par $f_B'(t) = -1/t^2$ si $t_1 = 1$ et par

$$f_B'(t) = \frac{-1}{t^2}((\log(B) - \log(t))^{t_1-1} + (t_1 - 1)(\log(B) - \log(t))^{t_1-2})$$

si $t_1 \geqslant 2$. Il résulte du lemme 7.20 que

$$\begin{aligned}[f_B(u)g_B(u)]_{B^{\varepsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} \leqslant f_B(B^{\frac{1}{2}})g_B(B^{\frac{1}{2}}) &\leqslant C(V_2)\log(B^{\frac{1}{2}})^{t_1-1}\log(B^{\frac{1}{2}})^{t_2-1}(1+\eta_2'(B))\\ &\leqslant C(V_2)\log(B)^{t_1+t_2-2}(1+\eta_2'(B)).\end{aligned}$$

Ce terme est donc négligeable devant $\log(B)^{t_1+t_2-1}$. D'autre part, pour $0 < \lambda < \mu < 1$ et pour un entier $m \geqslant 1$, on a les égalités

$$\begin{aligned}&\int_{B^\lambda}^{B^\mu} \frac{1}{u^2}(\log(B) - \log(u))^{m-1} u \log(u)^{t_2-1} \mathrm{d}u\\ &= \log(B)^{t_2+m-1} \int_{B^\lambda}^{B^\mu} \left(1 - \frac{\log(u)}{\log(B)}\right)^{m-1} \left(\frac{\log(u)}{\log(B)}\right)^{t_2-1} \mathrm{d}\left(\frac{\log(u)}{\log(B)}\right)\\ &= \log(B)^{t_2+m-1} \int_\lambda^\mu (1-u)^{m-1} u^{t_2-1} \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Comme les applications ε_2 et $\sqrt{\varepsilon_2}$ convergent vers 0 en $+\infty$, le terme de droite de (10) est équivalent à

$$C(V_2)\log(B)^{t_1+t_2-1} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u)^{t_1-1} u^{t_2-1} \mathrm{d}u.$$

Le cardinal de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1) \geqslant B^{1/2}, \quad H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B, \quad \text{et} \quad l(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon(B)$$

est donc équivalent à

$$C(V_1)C(V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u)^{t_1-1} u^{t_2-1} \mathrm{d}u.$$

Par symétrie, le cardinal de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_2(x_2) \geqslant B^{1/2}, \quad H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B, \quad \text{et} \quad l(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon(B)$$

est équivalent à

$$C(V_1)C(V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u.$$

Mais compte tenu des propriétés de la fonction bêta, on a l'égalité

$$\int_0^1 (1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u = \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!}.$$

Il nous reste pour conclure à rappeler la formule suivante (cf. [**Pe1**, proposition 4.1]) :

$$C(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!}C(V_1)C(V_2). \quad \square$$

Remarques 7.21. — a) Le terme d'erreur donné par cette démonstration est explicite mais assez pitoyable, en particulier si on le compare avec celui obtenu dans le cas particulier d'un produit de droites projectives. Nous manquons actuellement d'exemples pour savoir quel résultat optimal pourrait être attendu ici.

b) Notons que l'ensemble

$$V(K)_{\mu_{\max}\leqslant B} = \{x \in V(\mathbf{K}) \mid \mu_{\max}(x) \leqslant \log(B)\}.$$

se comporte mieux avec le produit puisque l'ensemble $V_1 \times V_2(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant\log(B)}$ est tout simplement le produit des ensembles $V_i(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant\log(B)}$.

7.2.4. *Équidistribution.* — L'équidistribution au sens de la distribution empirique 6.17, est également stable par produit. On conserve les notations précédant le théorème 7.15.

Théorème 7.22. — *On suppose que les variétés V_1 et V_2 vérifient les conditions* (i) *à* (iv) *de la formule empirique et que, pour $i \in \{1,2\}$ et toute application $\varepsilon' \in \mathscr{D}$ telle que $\varepsilon' \geqslant \frac{n_i^2}{2n^2}\varepsilon^2$ la variété V_i vérifie la formule empirique* (F) *et la distribution* (E). *Alors $V_1 \times V_2$ vérifie également* (E).

Démonstration. — Compte tenu de [**Pe1**, §3] et du théorème précédent, il suffit de vérifier que, pour tout bon ouvert $W \subset V_1 \times V_2(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$, c'est-à-dire tout ouvert

dont le bord ∂W est de mesure nulle pour la mesure adélique, le cardinal de l'ensemble $(V_1 \times V_2(\mathbf{K}) \cap W)^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B}$ est équivalent à

$$\alpha(V_1 \times V_2)\beta(V_1 \times V_2)\boldsymbol{\omega}_{V_1 \times V_2}(W \cap V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})B\log(B)^{t_1+t_2-1}.$$

En outre, il suffit de le démontrer pour les ouverts qui sont de la forme $W_1 \times W_2$ où W_1 (resp. W_2) est un bon ouvert de V_1 (resp. V_2). La démonstration s'obtient alors en remplaçant simplement $V_i(\mathbf{K})$ par $V_i(\mathbf{K}) \cap W_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ dans la démonstration du théorème 7.15. □

7.3. Compatibilité avec la méthode du cercle. — Il est connu que les résultats de la méthode du cercle sont compatibles avec la version initiale du principe de Batyrev et Manin ([**FMT**, §1.4] et [**Pe1**, corollaire 5.4.9]) en prenant comme ouvert de Zariski la variété elle-même. La difficulté ici, comme dans le cas de l'espace projectif, est donc de démontrer que les points de petite liberté et de hauteur bornée donnent une contribution négligeable.

Soit V une intersection complète lisse de m hypersurfaces de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$ avec $d_i \geqslant 2$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. On pose $|\boldsymbol{d}| = \sum_{i=1}^m d_i$. On suppose que la dimension $n = N - m$ de V vérifie $n \geqslant 3$. Rappelons que, dans ce cas, le torseur universel de V s'identifie au cône épointé $W \subset \mathbf{A}^{N+1}_{\mathbf{K}} - \{0\}$ au-dessus de V. On note π la projection de W vers V. On munit l'espace projectif de la même métrique adélique qu'au paragraphe 7.1. Le fibré tangent de V est alors un sous-fibré de l'image inverse de $T\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$ sur V et on le munit de la métrique adélique induite.

***Proposition 7.23.* —** *Soit $x \in V(\mathbf{K})$ et soit $y \in \pi^{-1}(x)$. Alors la liberté $l(x)$ est donnée par l'expression*

$$\frac{n}{h(x)} \max\left(0, \min_F \left(\frac{\widehat{\deg}(T_y W) - \widehat{\deg}(F)}{n + 1 - \dim(F)}\right) - \widehat{\deg}(D)\right)$$

qui, à un terme $O(\frac{1}{h(x)})$ près, peut s'écrire

$$\frac{n}{N + 1 - |\boldsymbol{d}|} \max\left(0, 1 + \min_F \left(\frac{m - |\boldsymbol{d}| - (N + 1 - |\boldsymbol{d}|)\widehat{\deg}(F)/h(x)}{n + 1 - \dim(F)}\right)\right)$$

où F décrit l'ensemble des sous-espaces stricts de $T_y W$ contenant y.

***Remarque 7.24.* —** Par la remarque 4.7 b), à un terme en $O(\frac{1}{h(x)})$ près, il suffit de considérer les hyperplans F de $T_y W$. La condition $l(x) < \varepsilon(B)$ se traduit donc

essentiellement par l'existence d'un hyperplan $F \subset T_y W$ tel que

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant \left(\frac{\varepsilon(B)}{n} + \frac{|\boldsymbol{d}|-1-n}{N+1-|\boldsymbol{d}|}\right) h(x).$$

Cette condition peut être vue comme l'existence d'un « petit » vecteur dans le réseau dual du réseau $T_y W \cap \mathbf{Z}^{N+1}$.

Démonstration. — Notons $E = \mathbf{K}^{n+1}$ et D la droite de l'espace vectoriel E correspondant au point x. L'espace tangent $T_x V$ s'identifie alors au quotient de l'espace $D^\vee \otimes T_y W$ par $D^\vee \otimes D$. Soit F' un sous-espace de $T_x V$. Il existe un unique sous-espace F de $T_y W$ contenant D tel que F' corresponde par l'identification précédente au quotient de $D^\vee \otimes F$ par $D^\vee \otimes D$. Par conséquent

$$\widehat{\deg}(F') = \widehat{\deg}(F) + \dim(F)\,\widehat{\deg}(D^\vee) = \widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D).$$

Or $h(x)$ vaut $\widehat{\deg}(T_x V) = \widehat{\deg}(T_y W) - (n+1)\widehat{\deg}(D)$. Par conséquent, la pente minimale de $T_x V$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\mu_n(T_x V) &= \min_F \left(\frac{\widehat{\deg}(T_y W) - (n+1)\widehat{\deg}(D) - (\widehat{\deg}(F) - \dim(F)\widehat{\deg}(D))}{n - (\dim(F) - 1)}\right)\\ &= \min_F \left(\frac{\widehat{\deg}(T_y W) - \widehat{\deg}(F)}{n+1-\dim(F)}\right) - \widehat{\deg}(D).\end{aligned}$$

En divisant par $h(x)/n$, on obtient l'expression de la liberté. Pour la deuxième expression, il suffit de remarquer que $|h(x) + (N+1-|\boldsymbol{d}|)\widehat{\deg}(D)|$ est majoré par une constante puisque le fibré anticanonique est isomorphe à $\mathscr{O}_V(N+1-|\boldsymbol{d}|)$. □

Remarque 7.25. — Contrairement au cas de l'espace projectif, on ne peut évidemment pas espérer, en général, trouver de minimum absolu strictement positif pour la liberté. Par exemple, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ se réalise comme une quadrique déployée et on a vu que la borne inférieure de la liberté dans ce cas est nulle. De même, si on considère une surface cubique, les points sur les 27 droites de la surface ont forcément une liberté nulle à l'exception près d'un nombre fini d'entre eux.

Proposition 7.26. — *Soit Q une quadrique projective lisse de dimension $n \geqslant 3$ sur $\mathbf{Q}$, Alors pour tout application ε de l'ensemble $\mathscr{D}$, on a l'équivalence*

$$\sharp Q(\mathbf{Q})^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B} \sim C(Q)B$$

quand B tend vers $+\infty$.

Démonstration. — Compte tenu de [**Pe1**][corollaire 5.4.9] qui repose sur le résultat très général de Birch [**Bir**], il suffit de démontrer que dans ce cas particulier, le nombre de points x de la quadrique vérifiant $H(x) \leqslant B$ et $l(x) < \varepsilon(B)$ sont en nombre négligeable. Dans ce cas particulier, la formule de la proposition 7.23 donne

$$l(x) \geqslant 1 + \min_F \left(\frac{-1 - n\,\widehat{\deg}(F)/h(x)}{n + 1 - \dim(F)} \right) + O\left(\frac{1}{h(x)}\right).$$

Soit $W \subset \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{Q}} - \{0\}$ le cône épointé au-dessus de la quadrique Q. Soit y un représentant de x dans $\mathbf{Q}^{n+1}$. La condition $l(x) < \varepsilon(B)$ implique donc l'existence d'un sous-espace vectoriel F de T_yW de codimension 1 dans cet espace tel que

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant C + \frac{1}{n}\varepsilon(B)\log(B).$$

En reprenant le raisonnement fait pour démontrer la proposition 7.7, le nombre de tels sous-espaces est majoré à une constante près par $B^{\frac{n+2}{n}\varepsilon(B)}$ et chacun d'entre eux contient au plus $C'B^{\frac{n}{n+1}}$ points x avec $H(x) < B$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 7.27. — Malheureusement, cette preuve ne s'étend pas directement au cas du degré $d \geqslant 3$.

8. Compatibilité avec les contre-exemples

L'objectif de cette partie de l'article est de vérifier que la condition sur la liberté détecte bien les mauvais points. Nous allons donc passer en revue un certain nombre de contre-exemples connus à la question initiale de Batyrev et Manin et analyser la liberté des points rationnels des variétés faiblement accumulatrices dans chacun de ces cas.

8.1. Rappels sur les parties accumulatrices. — Commençons par rappeler quelques notions concernant les sous-ensembles accumulateurs. Pour les ensembles minces, on étend la définition de Serre [**Se2**, §9.1] de la façon suivante :

Définition 8.1. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, une partie *mince* de $V(\mathbf{K})$ est une partie M telle qu'il existe un morphismes de variétés $\pi : X \to V$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) La partie M est contenue dans l'image $\pi(X(\mathbf{K}))$;

(ii) La fibre de π au point générique est finie et l'application π n'a pas de section rationnelle.

Remarque 8.2. — Notons qu'avec cette définition, l'ensemble des points rationnels d'une courbe elliptique est mince. En effet en choisissant un système de représentants $(P_1, \ldots, P_k)$ du quotient fini $E(\mathbf{K})/2E(\mathbf{K})$, on définit l'application $\pi : \coprod_{i=1}^{k} E \to E$ qui envoie un point P de la i-ème copie de E sur $2P + P_i$.

D'après [**Se2**, §13.1, théorème 3], dans l'espace projectif, la contribution du nombre de points de hauteur bornée d'un ensemble mince est négligeable. Du point de vue du programme de Batyrev et Manin, un ensemble mince qui ne vérifie pas cela est pathologique. Définissons cela plus précisément.

Définition 8.3. — Soit V une bonne variété sur $\mathbf{K}$ munie d'une métrique adélique et soit T une partie mince non vide de $V(\mathbf{K})$. On dit que T est *faiblement accumulatrice* si pour tout ouvert U de V pour la topologie de Zariski qui rencontre l'adhérence de T, il existe un ouvert de Zariski non vide W de $V(\mathbf{K})$ tel que

$$\overline{\lim_{B \to +\infty}} \frac{\sharp(T \cap U(\mathbf{K}))_{H \leqslant B}}{\sharp(W(\mathbf{K}))_{H \leqslant B}} > 0,$$

la limite supérieure étant considérée dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Les contre-exemples connus à la question initiale de Batyrev et Manin proviennent d'ensembles minces faiblement accumulateurs qui sont denses pour la topologie de Zariski.

8.2. Les surfaces. — Dans le cas des surfaces, les ensembles accumulateurs connus sont donnés par des *courbes exceptionnelles*, que nous définissons ici comme les courbes rationnelles lisses d'auto-intersection négative. Nous parlerons de *belle surface* pour une belle variété de dimension 2.

Proposition 8.4. — *Soit S une belle surface sur* $\mathbf{K}$ *et soit L une courbe exceptionnelle de S. Alors $l(x) = 0$ pour tout point x de $L(\mathbf{K})$ en dehors d'un nombre fini.*

Démonstration. — Par la formule d'adjonction, on a la relation

$$\deg(\omega_L) = L.L + L.\omega_S$$

où le point désigne le degré d'intersection. Comme L est une courbe rationnelle exceptionnelle, on en déduit que $L.\omega_S^{-1} < 2$. Fixons un isomorphisme $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to L$. On obtient l'inégalité $\mu_1(\varphi) + \mu_2(\varphi) < 2$. Mais l'application $T\varphi$ fournit un morphisme non nul de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ dans $\varphi^*(TS)$, ce qui prouve que $\mu_1(\varphi) \geqslant 2$ et donc $\mu_2(\varphi) < 0$. On applique alors la proposition 5.8. □

Remarque 8.5. — La proposition indique que pour toute application ε appartenant à $\mathscr{D}$, le cardinal de l'intersection de l'ensemble $S(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ avec $L(\mathbf{K})$ est majoré par une constante indépendante de B.

8.3. Les fibrations. — Rappelons que le contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel [**BT2**] repose sur le fait géométrique que, dans une fibration, le rang du groupe de Picard d'une fibre peut varier en étant éventuellement supérieur au rang du groupe de Picard de la fibre générique, auquel cas le nombre de points sur chacune de ces fibres peut faire apparaître une puissance de $\log(B)$ supérieure à celle attendue pour l'ensemble de la variété. Nous allons maintenant voir que le fait d'imposer en outre une minoration sur la liberté borne la hauteur des points considérés dans une fibre donnée si bien qu'il n'y a plus de contradiction entre le nombre de points esperé dans une fibre et celui espéré pour la variété.

Proposition 8.6. — *Soit X et Y de belles variétés de dimensions respectives m et n avec $n < m$. Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme dominant. Soit ε une application de $\mathscr{D}$. Il existe une constante C telle que, pour tout point rationnel y de Y qui n'est pas une valeur critique pour φ, tout point x de $X_y(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ vérifie*

$$H(x) \leqslant \min(B, CH(y)^{\frac{m}{n\varepsilon(B)}}).$$

Démonstration. — Cela découle de la proposition 5.5 et du fait que la liberté de y est majorée par 1. □

Remarque 8.7. — Le minimum est donné par le deuxième terme dès que

$$H(y) < \left(\frac{B}{C}\right)^{\frac{n\varepsilon(B)}{m}}.$$

Calcul 8.8. — Nous allons maintenant tenter d'expliquer comment cette proposition apporte conjecturalement une réponse au contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel. Rappelons que ce contre-exemple est donné par l'hypersurface X de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ d'équation $\sum_{i=0}^3 Y_i X_i^3 = 0$. Notons $\varphi : V \to \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ la seconde projection. Pour tout $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ de $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$ on désigne par X_y la fibre correspondante qui est une surface cubique non singulière si $\prod_{i=0}^3 y_i \neq 0$. L'application $H : X(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x, y) = H_3(x) H_3(y)^3,$$

où H_3 est définie dans l'exemple 3.12, est une hauteur sur V relative au fibré anticanonique. On note T l'ensemble des points $y \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$ en lesquels la fibre X_y est non singulière et a un groupe de Picard de rang strictement supérieur à 1. Pour tout $y \in T$, on note U_y le complémentaire des 27 droites de X_y. On fera l'*hypothèse* qu'il existe une constante $C_y > 0$ vérifiant

$$\sharp U_y(\mathbf{Q})_{H \leqslant B} \leqslant C_y B \log(B)^5$$

pour $y \in T$ et $B \geqslant 2$ et qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\sum_{\{y \in T | H(y) \geqslant B\}} C_y \leqslant B^{-\delta}$. Cette hypothèse est, à la connaissance de l'auteur, compatible avec le comportement attendu pour le nombre de points de hauteur bornée sur une surface cubique. Choisissons $0 < \eta < \frac{3}{5}$. Sous les hypothèses précédentes, on obtient les majorations

$$\begin{aligned}
&\sum_{y \in T} \sharp U_y(\mathbf{Q})^{\varepsilon - l}_{H \leqslant B} \\
&\leqslant \sum_{\{y \in T | H(y) \leqslant B^{\eta\varepsilon(B)}\}} C_y \bigl(C H(y)^{\frac{5}{3\varepsilon(B)}}\bigr) \log(B)^5 + \sum_{\{y \in T | H(y) \geqslant B^{\eta\varepsilon(B)}\}} C_y B \log(B)^5 \\
&\leqslant C' B^{\eta \frac{5}{3}(1+\varepsilon(B))} \log(B)^5 + C' B^{1 - \eta\delta\varepsilon(B)} \log(B)^5,
\end{aligned}$$

pour une constante C' convenable. Compte tenu de la condition (ii) introduite dans la définition 6.11 pour l'ensemble $\mathscr{D}$, le terme $B^{1-\eta\varepsilon(B)} \log(B)^5$ est négligeable devant B. En prenant $\eta < \frac{3}{5}$, la condition (i) de cette définition assure que le premier terme est également négligeable devant B. Sous l'hypothèse faite sur les fibres dont le groupe de Picard est grand, la condition de minoration de la liberté rendrait donc bien négligeable la contribution de cet ensemble mince.

Remarque 8.9. — Il est important de noter que la liberté d'un point ne distingue pas les points dans les « mauvaises » fibres, c'est-à-dire celles pour lesquelles le rang du groupe de Picard est strictement plus grand que 1. Du point de vue de la liberté, tout point de grande hauteur au-dessus d'un point de petite hauteur est considéré comme « mauvais ». De prime abord, on peut croire que c'est un défaut de cet invariant. Néanmoins, l'appartenance à une fibre dont le groupe de Picard est grand n'est pas stable par extension de corps. En fait, de ce point de vue, tout point est potentiellement mauvais : il suffit de passer à une extension qui déploie l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard de la fibre ; a contrario, la liberté d'un point rationnel est stable par extension de corps.

8.4. Des exemples de C. Le Rudulier. — Dans sa thèse, C. Le Rudulier a construit de nouveaux contre-exemples à la question initiale de V. Batyrev et Y. Manin [**Ru**]. Ces exemples sont des espaces de modules de Hilbert pour des surfaces.

8.4.1. *Le cas du produit de droites projectives.* — Nous allons commencer par rappeler les détails d'un de ces contre-exemple. On considère la variété V définie comme le schéma de Hilbert des points de degré deux sur la surface $S = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. On note Y le produit symétrique $\mathrm{Sym}^2(S)$. La variété Y est singulière le long de l'image Δ de la diagonale de S^2 et le morphisme de Hilbert-Chow $f : V \to Y$ est une désingularisation de Y. On dispose également du morphisme de projection $g : S^2 \to Y$. On note $Z = f^{-1}(\Delta)$. L'ensemble $M = f^{-1}(g(S^2(\mathbf{Q}))) - Z(\mathbf{Q})$ est une partie mince dans V mais dense pour la topologie de Zariski. D'autre part, on a un morphisme

$$p_1 : \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \to V$$

provenant de l'application

$$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2 \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \to (\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2$$

donnée par $((x,y),z) \mapsto ((x,z),(y,z))$. On obtient également un morphisme

$$p_2 : \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) \to V$$

par symétrie. On notera Z' l'adhérence de la réunion des images de p_1 et p_2 dans V. L'ensemble $U_0 = V - Z \cup Z'$ est un ouvert de Zariski non vide de V. Le théorème 5.1 de [**Ru**] contient le résultat suivant :

***Théorème 8.10* (C. Le Rudulier). —** *Il existe un nombres réel $c > 0$ tel que pour tout ouvert non vide U de V contenu dans U_0 on ait les équivalences*

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} \sim cB \log(B)^3$$

et

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) - M)_{H \leqslant B} \sim C(V) B \log^2(B),$$

quand B tend vers $+\infty$.

***Remarque 8.11.* —** Comme le rang du groupe de Picard de V vaut 3, le terme de droite de la seconde équivalence correspond au comportement espéré pour la version raffinée du principe de Batyrev et Manin.

Les points de l'ensemble mince M peuvent êtres caractérisés de la façon suivante : on considère le morphisme de variétés

$$\Delta : \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) = \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$$

définie par $\Delta(a : b : c) = (a^2 : b^2 - 4ac : c^2)$. On obtient alors par composition un morphisme qu'on note Δ_1

$$V \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(S) \longrightarrow (\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}))^2 \xrightarrow{\Delta \circ \mathrm{pr}_1} \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}.$$

On définit de même $\Delta_2 : V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. On note également $\square : \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ l'application définie par $(u : v : w) \mapsto (u^2 : v^2 : w^2)$. Les éléments de M sont les éléments de $V(\mathbf{Q})$ dont les images par Δ_1 et Δ_2 sont dans l'image de l'application $\square$. Le calcul fait dans le paragraphe précédent pour les fibrations s'applique aussi bien à Δ_1 qu'à Δ_2, si bien que la liberté d'un point d'une fibre fixée de Δ_1 ou de Δ_2 tend vers 0.

***Remarque 8.12.* —** Cet argument repose de façon cruciale sur le fait que le rang du groupe de Picard de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ est strictement supérieur à 1. Cet argument peut être étendu aux autres surfaces de Del Pezzo dont le groupe de Picard vérifie cette condition.

8.4.2. *Le cas du plan projectif.* — Dans ce paragraphe, la lettre V désigne le schéma de Hibert des points de de degré deux sur le plan projectif. On note également Y le produit symétrique $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})$ et $f : V \to Y$ le morphisme de Hilbert-Chow qui est l'éclatement de Y le long de l'image Δ de la diagonale. On désigne par g la projection de $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ dans Y et par U_0 le complémentaire de $f^{-1}(\Delta)$ dans V. Soit $M = f^{-1}(g(\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})^2)) \cap U_0(\mathbf{Q})$. L'ensemble M est mince

mais dense dans V pour la topologie de Zariski. D'après [**Ru**], on peut choisir une hauteur H relative à ω_V^{-1} sur V de sorte qu'on ait la relation

$$H(P) = H_2(x)^3 H_2(y)^3$$

pour tous $x, y \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ et tout $P \in V(\mathbf{Q})$ tel que $f(P) = g(x,y)$. Rappelons l'enoncé du théorème 3.7 de [**Ru**] :

***Théorème 8.13* (C. Le Rudulier). —** a) *Pour tout ouvert U non vide de V, on a l'équivalence*

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} \sim \frac{8}{\zeta(3)^2} B \log(B).$$

lorsque B tend vers $+\infty$.

b) *On a l'équivalence*

$$\sharp(V(\mathbf{Q}) - M)_{H \leqslant B} \sim C(V) B \log(B).$$

Nous allons en démontrer un corollaire :

***Corollaire 8.14.* —** a) *Pour tout fermé strict F de V on a*

$$\sharp(F(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} = o(B \log(B)).$$

b) *Pour tout ouvert non vide U de V, il existe une hauteur H relative à l'opposé du fibré canonique sur V telle que le quotient*

$$\frac{\sharp U(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}{C_H(V) B \log(B)}$$

ne converge pas vers 1 *lorsque B tend vers $+\infty$, où $C_H(V)$ désigne ici la constante empirique associée à la norme adélique choisie sur le fibré ω_V^{-1}.*

***Remarques 8.15.* —** a) La première assertion signifie que la partie M n'est pas réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices et ne peut donc pas être détectée par une méthode de récurrence sur la dimension.

b) La seconde assertion implique que la formule (2.3.1) de [**Pe1**] n'est pas vérifiée, bien que la réponse à la question initiale de Batyrev et Tschinkel soit positive dans ce cas.

Démonstration. — La première assertion du corollaire est une conséquence de l'assertion a) du théorème de Cécile Le Rudulier. Pour l'assertion b) nous allons nous inspirer d'une idée de D. Loughran, en nous basant sur le lemme suivant :

***Lemme 8.16.* —** *Il existe une partie fermée F de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient M et qui est de mesure nulle pour toute mesure définie par une norme adélique sur ω_V^{-1}.*

Démonstration. — Le schéma de Hilbert considéré est défini sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ avec une bonne réduction en tout nombre premier impair. Soit p un nombre premier impair. Dans $V(\mathbf{F}_p)$, il y a trois types de points :

a) Ceux sur l'image inverse de Δ ;

b) Ceux correspondant à des paires de points distincts de $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$;

c) Les points de degré deux dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_q}$.

On note $N_a(p)$, $N_b(p)$ et $N_c(p)$ le cardinal des trois ensembles correspondants. Ils sont donnés par

$$N_a(p) = (1+p+p^2)(1+p), \quad N_b(p) = \frac{(1+p+p^2)(p+p^2)}{2} \quad \text{et} \quad N_c(p) = \frac{p^4-p}{2}.$$

En particulier $N_b(p)/\sharp V(\mathbf{F}_p)$ converge vers 1/2 lorsque le nombre premier p tend vers $+\infty$. Notons $V_b(p)$, pour p premier impair, l'ensemble des points de $V(\mathbf{Q}_p)$ qui se réduisent modulo p en un point de type b). Alors l'ensemble

$$F = V(\mathbf{R}) \times V(\mathbf{Q}_2) \times \prod_{p \notin \{2,\infty\}} V_b(p).$$

est une partie fermée de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient M et de mesure nulle pour toute mesure induite par une norme adélique sur ω_V^{-1}. □

Fin de la preuve du corollaire 8.14. — Soit U un ouvert non vide de V. On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout choix de norme le quotient converge vers 1. Par la démonstration de l'assertion (c) de la proposition (3.3) de [**Pe1**], les points de $U(\mathbf{Q})$ vérifie la propriété (E_U) de [**Pe1**, §3]. En appliquant cela au complémentaire du fermé F donné par le lemme précédent, il en résulte que le quotient

$$\frac{\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B}}{\sharp U(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}$$

tend vers 0 quand B tend vers $+\infty$, ce qui contredit l'assertion a) du théorème de C. Le Rudulier. □

En ce qui concerne les pentes, contrairement au cas précédent, on ne dispose pas d'un morphisme de variétés φ qui permette d'utiliser la proposition 8.6 et qui vérifie en outre $\varphi(M) \neq \varphi(V(\mathbf{Q}))$. Toutefois, l'application qui à une paire de points distincts $\{P_1, P_2\}$ associe la droite projective (P_1P_2) définit un morphisme surjectif de variétés $V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ dont la fibre au-dessus d'une droite projective D est isomorphe à $\mathrm{Hilb}^2(D)$, c'est-à-dire à un plan projectif. Compte tenu de la

proposition 8.6, il existe une constante C de sorte que, pour tout point x de M donné par une paire $\{P_1, P_2\}$ contenue dans une droite D du plan projectif, la condition $l(x) > \varepsilon(B)$ implique

$$H(P_1)H(P_2) \leqslant CH(D)^{\frac{2}{\varepsilon(B)}}.$$

Cette condition ne découle pas d'une condition de la forme $l(P_1, P_2) \geqslant \varepsilon'(B)$ où (P_1, P_2) est vu comme un point de $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})^2$. Il n'y a donc plus de contradiction directe entre le résultat connu pour $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ et celui espéré pour V. Toutefois je n'ai pas réussi à démontrer que le cardinal $M^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ est effectivement de la forme $o(B\log(B))$ ce qui prouverait que les pentes permettent d'écarter assez de mauvais points dans ce cas particulier. Une étude plus approfondie de ce cas mériterait d'être faite.

9. Conclusion

À l'issu de ce travail, l'auteur est persuadé que les pentes de l'espace tangent donnent effectivement un indicateur fidèle permettant de détecter les points qui s'accumulent. Toutefois il est encore difficile de prédire avec certitude quelle condition précise se révèlera la plus efficace pour poursuivre le programme de Batyrev et Manin. Deux critères de nature différente apparaissent ici : la condition $l(x) > \varepsilon(B)$, qui vient s'ajouter à la condition de hauteur, et la condition $\mu_{\max}(x) \leqslant \log(B)$. Si le second point de vue amène un changement de paradigme plus profond, il peut être plus naturel. Une troisième solution consisterait à imposer une minoration sur la pente minimale de la forme $\mu_{\min}(x) \geqslant \eta\log(\log(B))$. Cette solution qui peut être plus facile à vérifier dans certains cas a l'inconvénient que l'ensemble des « bons » points diminue avec B, elle n'a donc pas été retenue par l'auteur pour des raisons métamathématiques. Seule l'étude d'autres cas permettra de trancher définitivement.

Références

[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), n° 1, 89–108.

[BM] V. V. Batyrev et Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Be] P. Berthelot, *Généralités sur les λ-anneaux (exposé V)*, Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch (SGA6), Lecture Notes in Math., vol. 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 297–364.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bo] T. Borek, *Successive minima and slopes of Hermitian vector bundles over number fields*, J. Number Theory **113** (2005), n° 2, 380–388.

[Bos] J.-B. Bost, *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*, Publ. Math. I.H.E.S. **93** (2001), 161–221.

[BC] J.-B. Bost et H. Chen, *Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry*, J. Math. Pures Appl. (9) **99** (2013), n° 4, 436–488.

[BK] J.-B. Bost et K. Künnemann, *Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers*, Adv. Math. **223** (2010), n° 3, 987–1106.

[BL] T. Browning et D. Loughran, *Varieties with too many rational points*, Math. Zeit. **285** (2017), n° 3, 1249–1267.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Ga] É. Gaudron, *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008), 21–95.

[Lan] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen un der Ideale*, Teubner, Leipzig, 1918.

[LTT] B. Lehmann, S. Tanimoto et Y. Tschinkel, *Balanced line bundles on Fano varieties*, à paraître dans Journ. Reine und Angew. Math. (2016).

[Ma] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[MV] D. Masser et J. D. Vaaler, *Counting algebraic numbers with large height II*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), n° 1, 427–445.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Pa] S. Pagelot, *Étude de la distribution asymptotique fine des points rationnels de hauteur bornée*, Texte non publié, 2009.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ______, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ______, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Séminaire Bourbaki 56-ème année, 2003/04, n° 931.

[Ro] D. Roessler, *Lambda-structure on Grothendieck groups of hermitian vector bumdles*, Israel J. Math. **122** (2001), 279–304.

[Ru] C. Le Rudulier, *Points algébriques de hauteur bornée sur une surface*, `http://cecile.lerudulier.fr/Articles/surfaces.pdf` (2013).

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ______, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan, Vandœuvre lès Nancy, 1990.

[Th] J. L. Thunder, *An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma*, J. reine angew. Math. **475** (1996), 167–185.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

---

15 février 2024

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR IM^{2}AG, Université Grenoble Alpes et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
E-mail : `Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

BEYOND HEIGHTS: SLOPES AND DISTRIBUTION OF RATIONAL POINTS

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — The distribution of rational points of bounded height on algebraic varieties is far from uniform. Indeed the points tend to accumulate on thin subsets which are images of non-trivial finite morphisms. The problem is to find a way to characterise the points in these thin subsets. The slopes introduced by Jean-Benoît Bost are a useful tool for this problem. These notes will present several cases in which this approach is fruitful. We shall also describe the notion of locally accumulating subvarieties which arises when one considers rational points of bounded height near a fixed rational point.

Résumé. — La distribution des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés algébriques est loin d'être uniforme les points peuvent s'accumuler sur l'image de variétés formant un ensemble mince. La difficulté est de pouvoir caractériser les points de ces ensembles accumulateurs. Les pentes de la géométrie d'Arakelov forment un outil utile pour attaquer cette problématique. Ces notes présenteront différents exemples où cette approche est efficace. On évoquera également la question des sous-variétés localement accumulatrices qui apparaissent lorsqu'on considère les points de hauteur bornée au voisinage d'un point rationnel.

Contents

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — Primary 11D45; secondary 11G50, 14G40.

The author was supported by the ANR Grant Gardio 14-CE25-0015.

1. Introduction

For varieties with infinitely many rational points, one may equip the variety with a height and study asymptotically the finite set of rational points with a bounded height. The study of many examples shows that the distribution of rational points of bounded height on algebraic varieties is far from uniform. Indeed the points tend to accumulate on thin subsets which are images of non-trivial finite morphisms. It is natural to look for new invariants to characterise the points in these thin subsets. First of all, it is natural to consider all possible heights, instead of one relative to a fixed line bundle. But the geometric analogue

described in section 5 suggests to go beyond heights to find a property similar to being very free for rational curves. The slopes introduced by Jean-Benoît Bost give the tool for such a construction. In section 6, we describe the notion of freeness which measures how free a rational point is. This section will present several cases in which this approach is fruitful. In section 7, we also describe its use in connection with the notion of locally accumulating subvarieties which arises when one considers rational points of bounded height near a fixed rational point.

The author thanks D. Loughran for a discussion which led to a crucial improvement of this paper.

2. Norms and heights

2.1. Adelic metric. — In this chapter, I am going to use heights defined by an adelic metric, which I use in a more restrictive sense than in the rest of the volume. In fact, an adelic metric will be an analogue of the notion of Riemannian metric in the adelic setting. Let me fix some notation for the remaining of this chapter.

Notation 2.1. — The letter $\mathbf{K}$ denotes a number field. The set of places of $\mathbf{K}$ is denoted by $\mathrm{Val}(\mathbf{K})$, and its set of finite places by $\mathrm{Val}(\mathbf{K})_f$. Let w be a place of $\mathbf{K}$. We denote by $\mathbf{K}_w$ the completion of $\mathbf{K}$ at w. For an ultrametric place, $\mathscr{O}_w$ is the ring of integers of $\mathbf{K}_w$ and $\mathfrak{m}_w$ its maximal ideal. Let $v \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$ denote the restriction of w to $\mathbf{Q}$. We consider the map $|\cdot|_w : \mathbf{K}_w \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ defined by

$$|x|_w = |N_{\mathbf{K}_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

for $x \in \mathbf{K}_w$, where $N_{\mathbf{K}_w/\mathbf{Q}_v}$ denotes the norm map. The Haar measure on the locally compact field $\mathbf{K}_w$ is normalized as follows:

a) $\int_{\mathscr{O}_w} \mathrm{d}x_w = 1$ for a non-archimedean place w;

b) $\mathrm{d}x_w$ is the usual Lebesgue measure if w is real;

c) $\mathrm{d}x_w$ is twice the usual euclidean measure for a complex place.

Remark 2.2. — The map $|\cdot|_w$ is an absolute value if w is ultrametric or real, it is the square of the modulus for a complex place. This choice of notation is motivated by the fact that $|\lambda|_w$ is the multiplier of the Haar measure for the change of variables $y = \lambda x$:

$$\mathrm{d}y_w = |\lambda|_w \mathrm{d}x_w$$

and we have the product formula:

$$\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} |x|_w = 1$$

for any $x \in \mathbf{K}^*$.

Terminology 2.3. — The varieties we consider are integral separated schemes of finite type over a field. We shall say that a variety V is *nice* if it is smooth, projective, and geometrically integral.

Notation 2.4. — Let X be a variety over $\mathbf{K}$.. For any commutative $\mathbf{K}$-algebra A, we denote by X_A the product $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})} \mathrm{Spec}(A)$ and by $X(A)$ the set of A-points which is defined as $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}(\mathrm{Spec}(A), X)$. For any place w of $\mathbf{K}$, we equip $X(\mathbf{K}_w)$ with the w-adic topology.

For the rest of this chapter, we denote by V a nice variety on the number field $\mathbf{K}$. The Picard group of V, denoted by $\mathrm{Pic}(V)$, is thought as the set of isomorphism classes of line bundles on V. A line bundle L is said to be *big* if a multiple of its class may be written as a sum of an ample class and an effective one.

Definition 2.5. — Let $\pi : E \to V$ be a vector bundle on V. For any extension $\mathbf{L}$ of $\mathbf{K}$ and any $\mathbf{L}$-point P of V, we denote by $E_P \subset E(\mathbf{L})$ the $\mathbf{L}$-vector space corresponding to the fiber $\pi^{-1}(P)$ of π at P. In this text, a *classical adelic norm on E* is a family $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ of continuous maps

$$\|\cdot\|_w : E(\mathbf{K}_w) \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$$

such that:

(i) If w is non-archimedean, for any $P \in V(\mathbf{K}_w)$, the restriction $\|\cdot\|_{w|E_P}$ is an ultrametric norm with values in $\mathrm{im}(|\cdot|_w)$;

(ii) If $\mathbf{K}_w$ is isomorphic to $\mathbf{R}$, then, for any P in $V(\mathbf{K}_w)$, the restriction $\|\cdot\|_{w|E_P}$ is a euclidean norm;

(iii) If $\mathbf{K}_w$ is isomorphic to $\mathbf{C}$, then, for any P in $V(\mathbf{K}_w)$, there exists a positive definite hermitian form ϕ_P on E_P such that

$$\forall y \in E_P, \quad \|y\|_w = \phi_P(y, y);$$

(iv) There exists a finite set of places $S \subset \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ containing the set of archimedean places and a model $\mathscr{E} \to \mathscr{V}$ of $E \to V$ over $\mathscr{O}_S$ such that for any place w in $\mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$ and any $P \in \mathscr{V}(\mathscr{O}_w)$

$$\mathscr{E}_P = \{\, y \in E_P \mid \|y\|_w \leqslant 1 \,\},$$

where $\mathscr{E}_P$ denotes the $\mathscr{O}_w$-submodule of E_P defined by $\mathscr{E}$.

In the rest of this chapter, we shall say adelic norm for classical adelic norm. An *adelically normed vector bundle* is a vector bundle equipped with an adelic norm. We call *adelic metric* an adelic norm on the tangent bundle TV.

The point of using this type of norms is that you can do all the usual constructions:

Examples 2.6. — a) If E and F are vector bundles equipped with classical adelic norms, then we can define adelic norms on the dual $E^\vee$, the direct sum $E \oplus F$ and the tensor product $E \otimes F$.

b) If E is a vector bundle equipped with a classical norm, then we define a classical norm on the exterior product $\Lambda^m E$ in the following manner (see also chapter II, §2.2). Let $P \in V(\mathbf{K}_w)$. If w is an ultrametric space, then let

$$\mathscr{E}_P = \{ y \in E_P \mid \|y\|_w \leqslant 1 \}.$$

The set $\mathscr{E}_P$ is a $\mathscr{O}_w$-submodule of E_P of maximal rank. Then we take on $\Lambda^m E_P$ the norm defined by the module $\Lambda^m \mathscr{E}_P$. In the archimedean case, we choose the norm on $\Lambda^m E_P$ so that if $(e_1, \dots, e_r)$ is an orthonormal basis of E_P then the family $(e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \dots \wedge e_{k_m})_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_m \leqslant r}$ is an orthonormal basis of $\Lambda^m E_P$.

c) It is possible to define pull-backs for morphisms of nice varieties over $\mathbf{K}$.

d) If $V = \operatorname{Spec}(\mathbf{K})$, then we may consider a vector bundle on V as a $\mathbf{K}$-vector space. Let E be a $\mathbf{K}$ vector space of dimension r equipped with an adelic norm $(\|\cdot\|)_{w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})}$. Then

$$\mathscr{E} = \{ y \in E \mid \forall w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})_f, \|y\|_w \leqslant 1 \}$$

is a projective $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$ module of constant rank r.

If $r = 1$, by the product formula, the product

$$\prod_{w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \|y\|_w$$

is constant for $y \in E - \{0\}$. So we can define

$$\widehat{\deg}(E) = - \sum_{w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \log(\|y\|_w).$$

Let $\widehat{\operatorname{Pic}}(\operatorname{Spec}(\mathbf{K}))$ be the set of isomorphism classes of line bundles with an adelic norm on $\operatorname{Spec}(\mathbf{K})$. Let r_1 be the number of real places and r_2 the number of complex places. Let $\operatorname{Val}(\mathbf{K})_\infty \subset \operatorname{Val}(\mathbf{K})$ be the set of archimedean places. Let

$H \subset \mathbf{R}^{\mathrm{Val}(\mathbf{K})_\infty}$ be the hyperplane given by the equation $\sum_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})_\infty} X_w = 0$. Then the map

$$x \mapsto (\log(|x|_w))_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})_\infty}$$

induces a map from $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^*$ to H. Let $\boldsymbol{T}$ be the quotient of H by the image of this map. The group $\boldsymbol{T}$ is a compact torus of dimension $r_1 + r_2 - 1$ and we get an exact sequence

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{T} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K})) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbf{K}})) \times \mathbf{R} \longrightarrow 0$$

where a line bundle E equipped with an adelic norm $(\|\cdot\|_w)_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ is sent on the pair $([\mathscr{E}], \widehat{\deg}(E))$ where $[\mathscr{E}]$ is the class of $\mathscr{E}$ in the ideal class group of $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$.

For arbitrary rank r, we may define:

$$\widehat{\deg}(E) = \widehat{\deg}(\Lambda^r(E)).$$

2.2. Arakelov heights

Definition 2.7. — For any vector bundle E over V equipped with an adelic norm, the corresponding *logarithmic height* is defined as the map $h_E : V(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ given by $P \mapsto \widehat{\deg}(E_P)$, where E_P is the pull-back of E by the map $P : \mathrm{Spec}(\mathbf{K}) \to V$. The corresponding *exponential height* is defined by $H_E = \exp \circ h_E$.

Remark 2.8. — If $r = \mathrm{rk}(E)$, we have that $h_E = h_{\Lambda^r E} = h_{\det(E)}$. Therefore we do not get more than the heights defined by line bundles.

Example 2.9. — For any $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, we may consider the map $\|\cdot\|_w : \mathbf{K}_w^{N+1} \to \mathbf{R}$ defined by

$$\|(y_0, \dots, y_N)\|_w = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i|_w.$$

This does not define a classical norm on $\mathbf{K}_w^{N+1}$ in the sense above, however it defines a norm on the tautological line bundle as follows. Let $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. The fibre of the tautological $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}}(-1)$ over a point $P \in \mathbf{P}^N(\mathbf{K}_w)$ may be identified with the line corresponding to the point. By restricting $\|\cdot\|_w$ to these lines, we obtain an adelic norm $(\|\cdot\|_w)_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ on $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}}(-1)$ and by duality on $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}}(1)$. If $(y_0, \dots, y_N) \in \mathbf{K}^{N+1} - \{0\}$, let P, also denoted by $[y_0 : \dots : y_N]$, be the corresponding point in $\mathbf{P}^N(\mathbf{K})$. Then $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathscr{O}(-1)_P$ and we get the formula

$$H_{\mathscr{O}(-1)}(P) = \prod_{w \in \mathrm{Val}(K)} \|y\|_w^{-1}.$$

Thus $H_{\mathscr{O}(1)}(P) = \prod_{w\in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|y\|_w$. In the case where $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ and $y_0, \dots, y_N$ are coprime integers, we have $\|(y_0, \dots, y_N)\|_v = 1$ for any finite place v and the height may be written as

$$H_{\mathscr{O}(1)}(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |y_i|$$

which is one of the naïve heights for the projective space.

Notation 2.10. — For any function $H : V(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$, any subset $W \subset V(\mathbf{K})$ and any positive real number B, we consider the set

$$W_{H\leqslant B} = \{ P \in V(\mathbf{K}) \mid H(P) \leqslant B \}.$$

Our aim is to study such sets for heights H as B goes to infinity. Let us motivate this study with a few pictures of such sets.

Examples 2.11. — Figure 1 represents rational points of bounded height in the projective plane. More precisely this drawing represents

$$\{ (x,y) \in \mathbf{Q}^2 \mid H_{\mathscr{O}(1)}(x : y : 1) < 40, |x| \leqslant 1 \text{ and } |y| \leqslant 1 \}.$$

Figure 2 represents rational points of bounded height in the one-sheeted hyperboloid defined by the equation $xy = zt$ in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$:

$$\{ P = (x,y) \in \mathbf{Q}^2 \mid H_{\mathscr{O}(1)}(xy : 1 : x : y) \leqslant 50, |x| \leqslant 1 \text{ and } |y| \leqslant 1 \}.$$

This quadric is the image of the Segre embedding

$$([u_1 : v_1], [u_2 : v_2]) \longmapsto [u_1u_2 : v_1v_2 : u_1v_2 : v_1u_2]$$

and therefore isomorphic to the product $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. The last picture represents

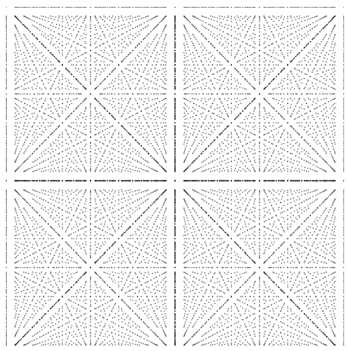


FIGURE 1. Projective plane

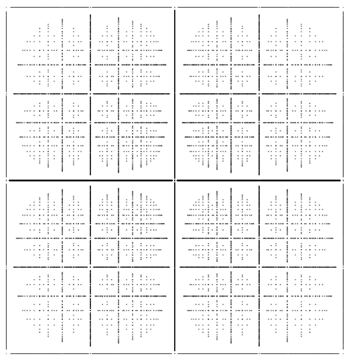


FIGURE 2. Hyperboloid

rational points of bounded height on the sphere:

$$\{ P = [x : y : z : t] \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathscr{O}(1)}(P) \leqslant B \text{ and } x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \}.$$

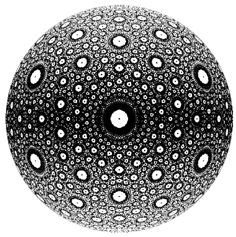


FIGURE 3. The sphere

Proposition 2.12. — *If L is a big line bundle and H a height relative to L, then there exists a dense open subset $U \subset V$ for Zariski topology such that for any $B \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, the set $U(\mathbf{K})_{H \leqslant B}$ is finite.*

Proof. — It is enough to prove the result for a multiple of L. Thus we may assume that we can write L as $E + A$ where E is effective and A very ample. Taking U as the complement of the base locus of E, and choosing a basis $(s_0, \ldots, s_N)$ of $\Gamma(V, L)$, we get an embedding

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}.$$

Using the height of example 2.9 on $\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$, we get that

$$\frac{H(\varphi(x))}{H(x)} = \prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \|s_i(x)\|_w.$$

Thus there exists a constant $C \in \mathbf{R}_{>0}$ such that

$$\forall x \in V(\mathbf{K}), \quad H(\varphi(x)) \leqslant CH(x).$$

Using Northcott theorem (see [**No1**], [**No2**]), the set of points of bounded height in the projective space is finite. A fortiori, the set $U(\mathbf{K})_{H \leqslant B}$ is finite. □

The height depends on the metric, but in a bounded way:

Proposition 2.13. — *Let H and H' be heights defined by adelic norms on a line bundle L then the quotient H/H' is bounded: there exist real constants* $0 < C < C'$ *such that*

$$\forall P \in V(\mathbf{K}), \quad C \leqslant \frac{H'(P)}{H(P)} < C'.$$

Proof. — The quotient of the norms $\frac{\|\cdot\|'_w}{\|\cdot\|_w}$ induces a continuous map from the compact set $V(\mathbf{K}_w)$ to $\mathbf{R}_{>0}$. Thus it is bounded from below and above. Moreover the adelic condition imposes that the norms coincide for all places outside a finite set. □

3. Accumulation and equidistribution

In this chapter, I shall first consider the distribution of rational points of bounded height on the variety.

3.1. Sandbox example: the projective space. — First, I have to explain what I mean by distribution. Let us for example consider the picture in figure 4. We have selected a "simple" open subset W in $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, which is drawn in grey.

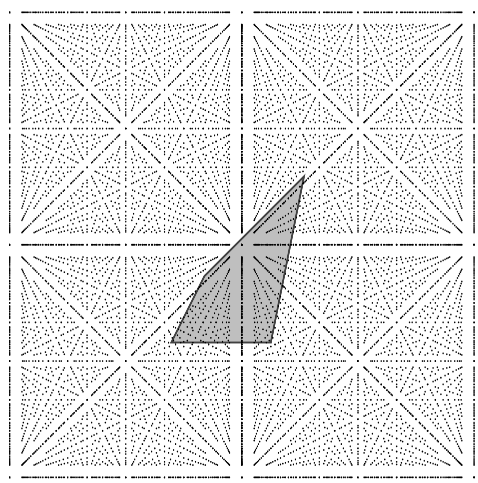


FIGURE 4. Open subset

We may then study asymptotically the proportion of rational points of bounded height in this open set. More precisely, one may formulate the following question:

Question 3.1. — *Does the quotient*

$$\frac{\sharp(W \cap \mathbf{P}^n(\mathbf{Q}))_{H \leqslant B}}{\sharp \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}.$$

have a limit as B goes to $+\infty$ *and how can we interpret its value?*

Similarly, let us fix some integer $M > 0$ and consider the reduction modulo M of the points. More precisely, let A be a commutative ring. The set of A-points of the projective space, denoted by $\mathbf{P}^n(A)$, is the set of morphisms from $\operatorname{Spec}(A)$ to $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$. This defines a covariant functor from the category of rings to the category of sets. A $(n+1)$-tuple $(a_0, \dots, a_n)$ in A^{n+1} is said to be primitive if the generated ideal $(a_0, \dots, a_n)$ is A itself; this is equivalent to the existence of $(u_0, \dots, u_n) \in A^{n+1}$ such that $\sum_{i=0}^n u_i a_i = 1$. The group of invertible elements acts by multiplication on the set of primitive elements in A^{n+1}. Then the $\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ points of the projective space $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$ may be described as the orbits for the action of $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^*$ on the set of primitive elements in $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^{n+1}$. For any point P in $\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$, we may choose homogeneous coordinates $[y_0 : \dots : y_n]$ so that $y_0, \dots, y_n$ are coprime integers. The reduction modulo M of P, is the point of $\mathbf{P}^n(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$ defined by the primitive element $(\overline{y_0}, \dots, \overline{y_n})$, where $\bar{y}$ denotes the reduction modulo M of the integer y. This define a map

$$r_M : \mathbf{P}^n(\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}).$$

This description of the reduction map generalises easily to any quotient of a principal ring. Then for any subset W of $\mathbf{P}^n(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$, we may consider the question

Question 3.2. — *Does the quotient*

$$\frac{\sharp(r_M^{-1}(W))_{H \leqslant B}}{\sharp \mathbf{P}^N(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}$$

converges as B goes to infinity?

With the adelic point of view, we can see questions 3.1 and 3.2 as particular cases of the following more general question:

Question 3.3. — *Let* $\mathbf{K}$ *be a number field. Let*

$$\mathbf{P}^N(\mathcal{A}_{\mathbf{K}}) = \prod_{w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w)$$

be the adelic projective space and let $f : \mathbf{P}^N(A_{\mathbf{K}}) \to \mathbf{R}$ be a continuous function. Does the quotient

$$S_B(f) = \frac{1}{\sharp \mathbf{P}^n(\mathbf{K})_{H\leqslant B}} \sum_{P\in \mathbf{P}^n(\mathbf{K})_{H\leqslant B}} f(P)$$

have a limit as B goes to infinity?

The answer is positive and we shall state it as a proposition:

Proposition 3.4. — *With the notations introduced in question 3.3,*

$$S_B(f) \xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}(A_{\mathbf{K}})} f\,\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}^n}$$

where $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}^n}$ is the probability measure given as the product $\prod_{w\in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \boldsymbol{\mu}_w$ where $\boldsymbol{\mu}_w$ is the borelian probability measure on $\mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w)$ defined by:

- *If w is a non-archimedean place, let $\pi_k : \mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w) \to \mathbf{P}^n(\mathscr{O}_w/\mathfrak{m}_w^k)$ be the reduction modulo $\mathfrak{m}_w^k$ then we equip $\mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w)$ with the natural probability measure:*

$$\boldsymbol{\mu}_w(\pi_k^{-1}(W)) = \frac{\sharp W}{\sharp \mathbf{P}^n(\mathscr{O}_w/\mathfrak{m}_w^k)}$$

  for any subset W of $\mathbf{P}^n(\mathscr{O}_w/\mathfrak{m}_w^k)$;
- *If w is archimedean, let $\pi : \mathbf{K}_w^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w)$ be the natural projection. Than μ_w is defined by*

$$\mu_w(U) = \frac{\mathrm{Vol}(\pi^{-1}(U)\cap B_{\|\cdot\|_w}(1))}{\mathrm{Vol}(B_{\|\cdot\|_w}(1))},$$

  for any borelian subset U in $\mathbf{P}^n(\mathbf{K}_w)$, where $B_{\|\cdot\|_w}(1)$ denotes the ball of radius 1 for $\|\cdot\|_w$.

As a consequence, we may give a precise answer to questions 3.1 and 3.2:

Corollary 3.5. — *If W is an open subset of $\mathbf{P}^n(A_{\mathbf{K}})$ such that $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}^n}(\partial W) = 0$ then*

$$\frac{\sharp(W\cap \mathbf{P}^n(\mathbf{K}))_{H\leqslant B}}{\sharp \mathbf{P}^n(\mathbf{K})_{H\leqslant B}} \xrightarrow[B\to+\infty]{} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}^n}(W).$$

Sketch of the proof of proposition 3.4 for $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$. — Take an open cube $\mathscr{C} = \prod_{i=0}^n]a_i, b_i[$ where a_i and b_i are real numbers with $a_i < b_i$ for $i \in \{0,\dots,n\}$, an integer $M \geqslant 1$ and an element $P_0 \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$. We imbed $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ and

consider $\mathscr{C}$ as an open subset of the projective space. We choose a primitive element y_0 in $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^{n+1}$ representing P_0. We then want to estimate

$$\begin{aligned}
&\sharp\{P\in\mathbf{P}^n(\mathbf{Q}) \mid H(P)\leqslant B, P\in\mathscr{C} \text{ and } \pi_M(P)=P_0\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\in(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^*}\sharp\{y\in\mathbf{Z}^{n+1} \mid y \text{ primitive}, \|y\|_\infty\leqslant B, y\in\pi^{-1}(\mathscr{C})\\
&\qquad\qquad \text{and } y\equiv\lambda y_0\,[M]\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\substack{d>0\\ \lambda\in\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}^*}}\mu(d)\sharp\{y\in(d\mathbf{Z})^{n+1}-\{0\} \mid \|y\|_\infty\leqslant B, y\in\pi^{-1}(\mathscr{C})\\
&\qquad\qquad \text{and } y\equiv\lambda y_0\,[M]\}
\end{aligned}$$

where $\mu:\mathbf{N}-\{0\}\to\{-1,0,1\}$ denotes the Möbius function. As y_0 is primitive, the set we obtained in the sum is empty if M and d are not coprime. Otherwise it is the intersection of the translation of a lattice of covolume $(dM)^{n+1}$, the cone $\pi^{-1}(\mathscr{C})$ and the ball $B_{\|\cdot\|_\infty}(B)$. Thus its cardinal may be approximated by

$$\frac{\mathrm{Vol}(\pi^{-1}(\mathscr{C})\cap B_{\|\cdot\|_\infty}(1))B^{n+1}}{(dM)^{n+1}}$$

with an error term which is bounded up to a constant by $\left(\frac{B}{d}+1\right)^n$. Up to an error term left to the reader, we get that the sum is equivalent to

$$\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\pi^{-1}(\mathscr{C})\cap B_{\|\cdot\|_\infty}(1))\times\frac{\varphi(M)}{M^{n+1}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p^{n+1}}\right)}\times\frac{1}{\zeta_{\mathbf{Q}}(n+1)}B^{n+1}.$$

In this product, the term

$$\frac{\varphi(M)}{M^{n+1}\prod_{p|M}\left(1-\frac{1}{p^{n+1}}\right)}$$

is $\sharp(\mathbf{P}^n(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}))^{-1}$. In particular, this implies that

$$\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(B_{\|\cdot\|_\infty}(1))/\zeta_{\mathbf{Q}}(n+1)$$

is the limit of $\sharp\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}/B^{n+1}$ as B goes to infinity. □

3.2. Adelic measure. — By choosing different norms on the anticanonical line bundle, and thus different heights on a variety, one realizes that the measure which gives the asymptotic distribution as B goes to infinity may be directly defined from the adelic norm on ω_V^{-1}, exactly as a Riemannian metric defines a volume form. This construction in fact applies to any nice variety equipped with an adelic metric.

Construction 3.6. — Let V be a nice variety with a rational point. We fix an adelic norm $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ on $\omega_V^{-1} = \det(TV)$. The formula for the change of variables (see [**We**, §2.2.1]) proves that the local measures

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial}{\partial x_2}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right\|_w \mathrm{d}x_{1,w}\,\mathrm{d}x_{2,w}\ldots\mathrm{d}x_{n,w}, \tag{1}$$

where $(x_1,\ldots,x_n):\Omega\to\mathbf{K}_w^n$ is a local system of coordinates defined on an open subset Ω of $V(\mathbf{K}_w)$, does not depend on the choice of coordinates; therefore by patching together these measures, we get a measure $\boldsymbol{\omega}_{V,w}$ on $V(\mathbf{K}_w)$, which induces a probability measure

$$\boldsymbol{\mu}_{V,w} = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_{V,w}(V(\mathbf{K}_w))}\boldsymbol{\omega}_{V,w}.$$

Then the product

$$\boldsymbol{\mu}_V = \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\boldsymbol{\mu}_{V,w}$$

is a probability measure on the adelic space $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$.

Remark 3.7. — For the projective space, this construction gives the right asymptotic distribution for the points of bounded height. So it is natural to try to generalise to other varieties. To state precisely our question, we introduce the counting measure defined by the set of points of bounded height.

Definition 3.8. — For any non-empty subset $W\subset V(\mathbf{K})$ we define, for B a real number bigger than the smallest height of a point of W,

$$\boldsymbol{\delta}_{W_{H\leqslant B}} = \frac{1}{\sharp W_{H\leqslant B}}\sum_{P\in W_{H\leqslant B}}\boldsymbol{\delta}_P,$$

where $\boldsymbol{\delta}_P$ denotes the Dirac measure at P on the adelic space.

Naïve equidistribution 3.9. *We shall say that the* naïve equidistribution (NE) *holds if the measure $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{K})_{H\leqslant B}}$ converges to $\boldsymbol{\mu}_V$ as B goes to infinity for the weak topology.*

Remark 3.10. — In other words, the naïve equidistribution holds if for any continuous function $f : V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \to \mathbf{R}$, one has the convergence

$$\int_{V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})} f \delta_{V(\mathbf{K})_{H \leqslant B}} \xrightarrow[B \to +\infty]{} \int_{V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})} f \mu_V.$$

This equidistribution may seem to be overoptimistic and one may wonder whether there exists any case besides the projective space for which it is valid.

Theorem 3.11. — *If V is a generalized flag variety, that is a quotient G/P where G is a linear algebraic group over* $\mathbf{K}$ *and P a parabolic subgroup of G, then* (NE) *is true.*

Example 3.12. — Grassmannian are examples of such flag varieties. Any smooth quadric with a rational point is a generalized flag variety for the orthogonal group. Therefore any smooth quadric with a rational point satisfies the naive equidistribution.

Tools of the proof of theorem 3.11. — To prove this result one may use harmonic analysis on the adelic space $G/P(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ and apply Langland's work on Eisenstein series (see [**Pe1**, corollaire 6.2.17], [**Lan**]). □

So we have solved the case of hypersurfaces of degree 2. In higher degrees, the equidistribution, when the number of variables is large enough, is an easy consequence of the very general result of Birch [**Bir**] based on the circle method. His result implies the following theorem:

Theorem 3.13. — *Let $V \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ be a smooth hypersurface of degree d such that $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$ with $n > (d-1)2^d$, then V satisfies* (NE).

Remark 3.14. — In fact, it applies to all the cases considered by Birch, that is for smooth complete intersection of m hypersurfaces of the same degree d if $n > m(m+1)(d-1)2^{d-1}$.

3.3. Weak approximation. — The first indications of the naïveté of (NE) appear when one considers obvious consequences of it. Let us recall the definition of weak approximation:

Definition 3.15. — A nice variety V satisfies *weak approximation* if the rational points of V are dense in the adelic space $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$.

Remarks 3.16. — a) Let V be a nice variety with a rational point. If it satisfies the naïve equidistribution, then it satisfies weak approximation and therefore $V(\mathbf{K})$ is dense for Zariski topology.

This follows from the fact that for any real number B, the support of the measure $\delta_{V(\mathbf{K})_{H\leqslant B}}$ in $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ is contained in the closure $\overline{V(\mathbf{K})}$ of the set of rational points. But the support of the measure $\boldsymbol{\mu}_V$ is the whole adelic space. Thus (NE) implies that $\overline{V(\mathbf{K})} = V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$. Let then U be a non-empty open subset for Zariski topology. If V has an adelic point, the implicit function theorem ensures that for any place w, the set $U(\mathbf{K}_w)$ is a non-empty open subset of $V(\mathbf{K}_w)$. If $V(\mathbf{K})$ is dense in $V(\mathbf{K}_w)$, it follows that U contains a rational point and the rational points are Zariski dense.

b) So (NE) has to fail for any variety in which the rational points are not Zariski dense. In that case, one may consider the desingularisation of the closure of the rational points for Zariski topology and ask wether the principle holds for that variety. But even such a modified question fails because examples are known where rational points are dense for Zariski topology but the variety does not satisfy weak approximation.

Convention 3.17. — From now on, we assume that V is a nice variety in which the set of rational points $V(\mathbf{K})$ is Zariski dense.

About weak approximation, we are going to give a quick overview of the Brauer–Manin obstruction, which was introduced by Y. Manin in [**Ma**] to explain the previously known counterexamples to weak approximation (see also [**Pe3**] for a survey).

Construction 3.18. — For a nice variety V, we define its *Brauer group* as the cohomology group

$$\mathrm{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m)$$

which defines a contravariant functor from nice varieties to the category of abelian groups. In the case of the spectrum of a field of characteristic 0, we get the Brauer group of $\mathbf{L}$, which is defined in terms of Galois cohomology by

$$\mathrm{Br}(\mathbf{L}) = H^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{L}}/\mathbf{L}), \mathbf{G}_m),$$

where $\overline{\mathbf{L}}$ is an algebraic closure of $\mathbf{L}$. Class field theory gives for any place w an injective morphism

$$\mathrm{inv}_w : \mathrm{Br}(\mathbf{K}_w) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

which is an isomorphism if w is not archimedean, so that the sequence

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathbf{K}) \to \bigoplus_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathrm{Br}(\mathbf{K}_w) \xrightarrow{\sum_w \mathrm{inv}_w} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \tag{2}$$

is an exact sequence. Therefore we may define a pairing

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(V) \times V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K}) &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (\alpha, (P_w)_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})}) &\longmapsto \sum_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathrm{inv}_w(\alpha(P_w)) \end{aligned}$$

where $\alpha(P_w)$ denotes the pull-back of α by the morphism $\mathrm{Spec}(\mathbf{K}_w) \to V$ defined by P_w. Let us denote by $\mathrm{Br}(V)^\vee$ the group $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ then the above pairing may be seen as a map

$$\eta : V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{Br}(V)^\vee.$$

If $P \in V(\mathbf{K})$ then the fact that (2) is a complex implies that

$$\sum_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathrm{inv}_w(\alpha(P)) = 0;$$

in other words, $\eta(P) = 0$. By arguments of continuity, one gets that

$$\overline{V(\mathbf{K})} \subset V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})^{\mathrm{Br}} = \{\, P \in V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K}) \mid \eta(P) = 0 \,\}.$$

The element $\eta(P)$ is called the *Brauer–Manin obstruction* to weak approximation at P.

Remark 3.19. — Let $\overline{\mathbf{K}}$ be an algebraic closure of $\mathbf{K}$ and $\overline{V} = V_{\overline{\mathbf{K}}}$. Since we assume V to have a rational point, there is an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathbf{K}) \to \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V})) \to H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}), \mathrm{Pic}(\overline{V})) \to 0.$$

Also the exponential map gives an exact sequence

$$\begin{aligned} &H^1(V_\mathbf{C}, \mathscr{O}_V) \to \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to H^2(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to \\ &\qquad\qquad H^2(V_\mathbf{C}, \mathscr{O}_V) \to \mathrm{Br}(\overline{V}) \to H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} \end{aligned}$$

Thus assuming that $H^i(V, \mathscr{O}_V) = \{0\}$ for $i = 1$ and $i = 2$, which is automatic for Fano varieties by Kodaira's vanishing theorem, we get first that the geometric Picard of the variety is finitely generated. Thus the action of the Galois group on the Picard group is trivial over a finite extension of the ground field. Therefore, in this case, the groups $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}), \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ and $\mathrm{Br}(\overline{V})$ are finite. Hence the

cokernel of the morphism $\mathrm{Br}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Br}(V)$ is finite, which implies that $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}$ is open and closed in the adelic space.

If one hopes that the Brauer–Manin obstruction to the weak approximation is the only one, then it is natural to define the measure induced by the probability measure $\boldsymbol{\mu}_V$ on the space on which the obstruction is 0. Since we assume that the variety V has a rational point, the space $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}$ is not empty. In that setting, we may give the following definition:

Definition 3.20. — The measure $\boldsymbol{\mu}_V^{\mathrm{Br}}$ is defined as follows: for any Borelian subset W of $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$

$$\boldsymbol{\mu}_V^{\mathrm{Br}}(W) = \frac{\boldsymbol{\mu}_V(W \cap V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})}{\boldsymbol{\mu}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})}.$$

The following question then takes into account the Brauer–Manin obstruction to weak approximation:

Global equidistribution 3.21. *We shall say that* global equidistribution *holds if the measure $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{K})_{H\leqslant B}}$ converges weakly to $\boldsymbol{\mu}_V^{\mathrm{Br}}$ as B goes to infinity.*

Potential counterexamples to global equidistribution have been known for quite a long time (see for example [**Se2**]), but Y. Manin was the first to consider accumulating subsets, which we will study at length in the next section.

3.4. Accumulating subsets. — In fact, the support of the limit of the measure $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{K})_{H\leqslant B}}$ is, in general, much smaller than the closure $\overline{V}(\mathbf{K})$ of the set of rational points. Let me give a few examples.

3.4.1. *The plane blown up in one point.* — The blowing up of the projective plane at the point $P_0 = [0:0:1]$ may be described as the hypersurface V in the product $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ defined by the equation $XV = YU$, where X, Y, Z denote the coordinates on the first factor and U, V the coordinates on the second one. Let π be the projection on the first factor. Then $E = \pi^{-1}(P_0)$ is an exceptional divisor on V and the second projection pr_2 defines an isomorphism from E to $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Let U be the complement of E in V. The projection π induces an isomorphism from U to $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} - \{P_0\}$. As an exponential height, we may use the map

$$\begin{aligned} H : V(\mathbf{Q}) &\longrightarrow \mathbf{R}_{>0} \\ (P, Q) &\longmapsto H_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}}(1)}(P)^2 H_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}}(1)}(Q). \end{aligned}$$

This example as been used as a sandbox case for the study of rational points of bounded height by many people, including J.-P Serre [**Se2**, §2.12], as well as V. V. Batyrev and Y. I. Manin [**BM**, proposition 1.6] and the results may be summarized as follows:

Proposition 3.22. — *On the exceptional line, the number of points of bounded height is given by*

$$\sharp E(\mathbf{Q})_{H\leqslant B} \sim \frac{2}{\zeta_{\mathbf{Q}}(2)} B^2$$

as B goes to infinity, whereas on its complement it is given by

$$\sharp U(\mathbf{Q})_{H\leqslant B} \sim \frac{8}{3\zeta_{\mathbf{Q}}(2)^2} B\log(B)$$

as B goes to infinity.

Remark 3.23. — Thus there are much more rational points on the exceptional line E than on the dense open subset U. In fact, since the points on the exceptional line are distributed as on $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$, we get that the measure $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}$ converges to $\boldsymbol{\mu}_E$ for the weak topology.

On the other hand, if we only consider the rational points on the open set U, we get the right limit:

Proposition 3.24. — *The measure $\delta_{U(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}}$ converges to $\boldsymbol{\mu}_V$ for the weak topology as B goes to infinity.*

Remarks 3.25. — a) Let W be an infinite subset of $V(\mathbf{K})$. If the measure $\boldsymbol{\delta}_{W_{H\leqslant B}}$ converges to $\boldsymbol{\mu}_V$ for the weak topology, then, for any strict closed subvariety F in V, we have that

$$\sharp(W \cap F(\mathbf{Q}))_{H\leqslant B} = o(\sharp W_{H\leqslant B})$$

since we have $\boldsymbol{\mu}_V(F(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})) = 0$. Thus any strict closed subset with a strictly positive contribution to the number of points has to be removed to get equidistribution.

b) It may seem counterintuitive that by removing points, we get a measure with a larger support. But this comes from the fact that we divide the counting measure on U by a smaller term. From this example, it follows that it is natural to consider only the points outside a set of "bad" points. The problem is that this set of bad points might be quite big.

3.4.2. *The principle of Manin.* — The principle suggested by Manin and his collaborators in the founding papers [**BM**] and [**FMT**] is that, on Fano varieties, there should be an open subset on which the points of bounded height behave as expected. Let us give a precise expression for this principle, in a slightly more general setting. Since this principle deals with the number of points of bounded height rather than their distribution, we have to introduce another normalisation of the measures to get a conjectural value for the constant, which is defined as a volume.

Notation 3.26. — Let $\mathrm{NS}(V)$ be the Néron-Severi group of V, that is the quotient of the Picard group by the connected component of the neutral element. We put $\mathrm{NS}(V)_{\mathbf{R}} = \mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ and denote by $C_{\mathrm{eff}}(V)$ the closed cone in $\mathrm{NS}(V)_{\mathbf{R}}$ generated by the classes of effective divisors. We write $C_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee}$ for the dual of the effective cone in the dual space $\mathrm{NS}(V)_{\mathbf{R}}^{\vee}$:

$$C_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee} = \{ y \in \mathrm{NS}(V)_{\mathbf{R}}^{\vee} \mid \forall x \in C_{\mathrm{eff}}(V), \langle y, x \rangle \geqslant 0 \}.$$

To construct the constant, we shall restrict ourselves to a setting in which the local measures can be normalized using the action of the Galois group of $\mathbf{K}$ on the Picard group. Therefore, we make the following hypothesis:

Hypotheses 3.27. — From now on, V is a nice variety, which satisfies the following conditions:

(i) A multiple of the class of ω_V^{-1} is the sum of an ample divisor and a divisor with normal crossings;

(ii) The set $V(\mathbf{Q})$ is Zariski dense;

(iii) The groups $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ are $\{0\}$ if $i \in \{1, 2\}$;

(iv) The geometric Brauer group $\mathrm{Br}(\overline{V})$ is trivial and the geometric Picard group $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ has no torsion;

(v) The closed cone $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ is generated by the classes of a finite set of effective divisors.

Remark 3.28. — The first four conditions are satisfied by Fano varieties, that is varieties for which ω_V^{-1} is ample. The fifth has been conjectured by V. V. Batyrev for these varieties [**Ba**].

Construction 3.29. — We choose a finite set S of places containing the archimedean places and the places of bad reduction for V. Let $\mathbf{L}$ be a finite extension of $\mathbf{K}$ such that the Picard group $\mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}})$ is isomorphic to the geometric

Picard group $\mathrm{Pic}(\overline{V})$. We assume that S contains all the places which ramify in the extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. With this assumption, for any place $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$, let $\mathbf{F}_w$ be the residual field at w. The Frobenius lifts to an element $(w, \mathbf{L}/\mathbf{K})$ in $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ which is well defined up to conjugation (see [**Se1**, §1.8]). Then we can consider the local factors of the L function defined by the Picard group:

$$L_w(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\det(1 - \sharp\mathbf{F}_w^{-s}(w, \mathbf{L}/\mathbf{K}) \,|\, \mathrm{Pic}(\overline{V}))},$$

where s is a complex number with $\Re(s) > 0$. If the real part of s satisfies $\Re(s) > 1$, then a theorem of Artin [**Art**, Satz 3] implies that the eulerian product

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S} L_w(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

converges. For $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, we define $\lambda_w = L_w(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))^{-1}$ if w does not belong to S and $\lambda_w = 1$ otherwise. We put $t = \mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(V))$. It follows from the Weil's conjecture proven by P. Deligne [**Del**] that the product of measures

$$\boldsymbol{\omega}_V = \frac{\lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))}{\sqrt{d_{\mathbf{K}}}^{\dim(V)}} \prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \lambda_w \boldsymbol{\omega}_{V,w} \tag{3}$$

converges (see [**Pe1**, §2.1]), where $d_{\mathbf{K}}$ denotes the absolute value of the discriminant of $\mathbf{K}$. We may then define the *Tamagawa–Brauer–Manin volume of V* as

$$\tau^{\mathrm{Br}}(V) = \boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}).$$

We also introduce the constant

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!} \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y \rangle} \mathrm{d}y$$

which is a rational number under the hypothesis 3.27 (v), and the integer

$$\beta(V) = \sharp(\mathrm{Br}(V)).$$

Then the *empirical constant* associated to the chosen metric on V is the constant

$$C(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau^{\mathrm{Br}}(V).$$

Batyrev–Manin principle 3.30. *Let V be a variety which satisfies the conditions 3.27. We say that V satisfies the* refined Batyrev–Manin principle *if there exists a dense open subset U of V such that*

$$\sharp U(\mathbf{K})_{H \leqslant B} \sim C(V) B \log(B)^{t-1} \tag{4}$$

as B goes to infinity.

For equidistribution, we may introduce the following notion

Relative equidistribution 3.31. *Let W be an infinite subset of $V(\mathbf{K})$, we say that* the points of W are equidistributed in V *if the counting measure $\delta_{W_{H\leqslant B}}$ converges to μ_V.*

Remark 3.32. — The relation between the Batyrev-Manin principle as stated here and the equidistribution may be described as follows: if the principle holds for a given open subset U for any metric on V, then the points of $U(\mathbf{K})$ are equidistributed on V. Conversely if the principle holds for a particular choice of the metric and an open subset U and if the points of $U(\mathbf{K})$ are equidistributed, then the principle holds for any choice of the metric (see [**Pe1**, §3]).

3.4.3. *The counterexample of V. V. Batyrev and Y. Tschinkel.* — This example was described in [**BT1**]. We consider the hypersurface V in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ defined by the equation

$$\sum_{i=0}^{3} X_i Y_i^3 = 0.$$

We denote by $\mathscr{O}_V(a,b)$ the restriction to V of the line bundle $\mathrm{pr}_1^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}}(a)) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}}(b))$ Then the anticanonical line bundle on V is given by $\mathscr{O}_V(3,1)$ and therefore the function $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ defined by

$$H(P,Q) = H_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}}(1)}(P)^3 H_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}}(1)}(Q)$$

defines a height relative to the anticanonical line bundle on V. Let π be the projection on the first factor and for any $P \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$, let $V_P = \pi^{-1}(P)$ the fibre over P. If $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_2]$ with $\prod_{i=0}^3 x_i \neq 0$, then the fibre V_P is a smooth cubic surface which contains 27 projective lines. The complement U_P of these 27 lines is defined over $\mathbf{Q}$. For cubic surfaces, it is expected that the Batyrev-Manin principle holds for any dense open subset contained in U_P. For any P as above, let $t_P = \mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(V_P))$ be the rank of the Picard group of the cubic surface corresponding to P. Thus, according to (4), one expects that for any $U \subset U_P$, one has

$$\sharp U(\mathbf{Q})_{H\leqslant B} \sim C(V_P) B \log(B)^{t_P - 1}$$

as B goes to infinity. One can show that $t_P \in \{1,2,3,4\}$ and that $t_P = 4$ if all the quotients x_i/x_j are cubes, that is if P is in the image of the morphism c from $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ to $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ defined by $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0^3 : x_1^3 : x_2^3 : x_3^3]$. But, on the other hand, by Lefschetz theorem, the application $(a,b) \mapsto \mathscr{O}_V(a,b)$ induces an

isomorphims of groups from $\mathbf{Z}^2$ to $\mathrm{Pic}(V)$. Therefore, the principle of Batyrev and Manin would be satisfied for V if and only if there existed an open subset U of V such that

$$\sharp U(\mathbf{Q})_{H\leqslant B} \sim C(V)B\log(B)$$

as B goes to infinity. Since the rational points in the image of c are dense for Zariski topology, the open set U has to intersect an open set U_P for some P. Thus the principle can not hold for both the cubic surfaces and V itself.

Remarks 3.33. — a) In fact, V. V. Batyrev and Y. Tschinkel proved in [**BT1**] that any dense open set of V contains too many rational points over $\mathbf{Q}(j)$, where j is a primitive third root of unity. More recently, C. Frei, D. Loughran, and E. Sofos proved in [**FLS**] that it is in fact the case over any number field.

b) One may look at the set

$$T = \{\, P \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q}) \mid \mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(V_P)) > 1 \,\}$$

that is the set of points for which the rank of the Picard group is bigger than the generic one. As we are about to explain,

$$\sharp T_{H\leqslant B} = o(\sharp \mathbf{P}^3(\mathbf{Q})_{H\leqslant B})$$

which means that most of the fibers have a Picard group of rank one.

This example led to the introduction of a new kind of accumulating subsets, namely thin subsets (see J.-P. Serre [**Se3**, §3.1]).

Definition 3.34. — Let V be a nice variety over the number field $\mathbf{K}$. A subset $T \subset V(\mathbf{K})$ is said to be *thin*, if there exists a morphism of varieties $\varphi : X \to V$ which satisfies the following conditions:

(i) The morphism φ is generically finite;

(ii) The morphism φ has no rational section;

(iii) The set T is contained in the image of φ.

Remarks 3.35. — a) If E is an elliptic curve, the group $E(\mathbf{K})/2E(\mathbf{K})$ is a finite group. Let $(P_i)_{i\in I}$ be a finite family of points of $E(\mathbf{K})$ containing a representant for each element of $E(\mathbf{K})/2E(\mathbf{K})$. Then the morphism $\varphi : \coprod_{i\in I} E \to E$ which maps a point P in the i-th component to $P_i + 2P$ gives a surjective map onto the sets of rational points. This shows that $E(\mathbf{K})$ itself is thin.

b) In the example of Batyrev and Tschinkel, as T is a thin subset in $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$, it follows from [**Se2**, §13, theorem 3] that

$$\sharp T_{H\leqslant B} = o(\sharp \mathbf{P}^3(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}).$$

The set

$$V_T = \bigcup_{P \in T} V_P(\mathbf{Q})$$

is itself a thin subset of $V(\mathbf{Q})$. Conjecturally we may hope that

$$\sharp(V(\mathbf{Q}) - V_T)_{H \leqslant B} \sim C_H(V) B \log(B)$$

as B goes to infinity. In other words, the points on the complement of the accumulating subset should behave as expected. We shall explain below how a result of this kind was proven by C. Le Rudulier for a Hilbert scheme of the projective plane [**Ru**]. More recently, T. Browning and D.R. Heath-Brown [**BHB**] proved that for the hypersurface of $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ defined by the equation

$$\sum_{i=0}^{3} X_i Y_i^2$$

the number of points on the complement of an accumulating thin subset behaves as expected.

c) The work of B. Lehmann, S. Tanimoto and Y. Tschinkel [**LTT**] shows how common varieties with accumulating thin subsets probably are.

d) We may assume that φ is a proper morphism. Then $\varphi(X(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})) \subset V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ is a closed subset. Under mild hypotheses, T. Browning and D. Loughran proved in [**BL**] that

$$\boldsymbol{\mu}_V(\varphi(X(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}))) = 0.$$

Thus the existence of such a thin subset with a positive contribution to the asymptotic number of points is an obstruction to the global equidistribution of points.

3.4.4. *The example of C. Le Rudulier.* — C. Le Rudulier considers the Hilbert scheme V which parametrizes the points of degree 2 in $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ [**Ru**]. To describe this scheme, let us consider the scheme Y defined as the second symmetric product of $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$:

$$Y = \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}) = (\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2/\mathfrak{S}_2.$$

More precisely, we may define it as the projective scheme associated to the ring of invariant polynomials $\mathbf{Q}[X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2]^{\mathfrak{S}_2}$. Let us denote by Δ_Y the image of the diagonal Δ in Y. The scheme Y is singular along this diagonal and V may be seen as the blowing up of Y along the diagonal Δ_Y. From this point

of view, the variety V is a desingularization of Y. Let us define P as the blowing up of $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ along the diagonal. We get a cartesian square

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2 \arrow[d, "\pi"] \\ V \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd}$$

We put $\Delta_V = b^{-1}(\Delta_Y)$ and $U_0 = V - \Delta_V$. Then the set

$$T = \tilde{\pi}(P(\mathbf{Q})) \cap U_0(\mathbf{Q})$$

is a Zariski dense thin accumulating subset. More precisely, C. Le Rudulier proves the following theorem:

Theorem 3.36 **(C. Le Rudulier). —** a) *Asymptotically the points of T give a positive contribution to the total number of points:*

$$\frac{\sharp T_{H\leqslant B}}{\sharp U_0(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}} \xrightarrow[B\to+\infty]{} c$$

for a real number $c > 0$. But for any strictly closed subset $F \subset V$, one has

$$\sharp(F(\mathbf{Q}) \cap T)_{H\leqslant B} = o(U_0(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}).$$

b) *On the complement of T, one has*

$$\sharp(U_0(\mathbf{Q}) - T)_{H\leqslant B} \sim C(V) B \log(B)$$

as $B \to +\infty$.

***Remarks 3.37.* —** a) It follows from this theorem that the set T is a thin subset which is not the union of accumulating subvarieties but which gives a positive contribution to the total number of points of bounded height on the variety. In the adelic space the closure of the points of T are contained in a closed subset F with a volume $\boldsymbol{\mu}_V(F)$ equal to 0. Therefore this thin accumulating subset is an obstruction to the equidistribution of the points on V.

b) Hopefully, in general, if ω_V^{-1} is "big enough", there should be a natural "small" subset T such that the points of bounded height on $W = V(\mathbf{K}) - T$ should behave as expected. The problem is to describe this subset T.

c) W. Sawin recently proved that, in the example described in theorem 3.36, the empiric formula [**Pe4**, formule empirique 6.13] is *false* [**Sa**]. However the approach described below involving several heights might still be correct.

d) In these notes, so far, we did not go into the distribution of the rational points of bounded height for a height associated to an ample line with a class which is not a multiple of ω_V^{-1}. The description in that case requires to introduce more complicated measures and we refer the interested reader to the work of V. V. Batyrev and Y. Tschinkel (see [**BT2**]).

4. All the heights

4.1. Heights systems. — A natural approach to select the points we wish to keep is to introduce more invariants. The rest of this chapter is devoted to such invariants. Let us start by considering other heights. Traditionally, most authors in arithmetic geometry consider only one height given by a given ample line bundle. However there are no reason to do so, and we may consider the whole information given by heights. In order to do this, let us introduce the notion of family of heights.

Definition 4.1. — Let L and L' be adelically normed line bundles on a nice variety V. Let $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ be the adelic norm on L. We say that L and L' are *equivalent* if there is an integer $M > 0$, a family $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ in $\mathbf{R}_{>0}^{(\mathrm{Val}(\mathbf{K}))}$, such that its support $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1\,\}$ is finite and $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\lambda_w = 1$, and an isomorphism of adelically normed line bundles from the line bundle $L^{\otimes M}$ equipped with the adelic norm $(\lambda_w\|\cdot\|_w^{\otimes M})_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ to the adelically normed line bundle $L'^{\otimes M}$. We denote by $\mathscr{H}(V)$ the set of equivalence classes of adelically normed line bundles. It has a structure of group induced by the tensor product of line bundles, we call this group the group of *Arakelov heights on V*.

Remark 4.2. — The height introduced in definition 2.7 depends only on the equivalence class of the adelically normed line bundle $\det(E)$. From that point of view, the group $\mathscr{H}(V)$ does parametrize the heights on V. If V satisfies weak approximation and has an adelic point, then two distinct elements of $\mathscr{H}(V)$ define heights which differ at least at one rational point.

Example 4.3. — If V is a point, that is the spectrum of a field, then the height defines an isomorphism from $\mathscr{H}(V)$ to $\mathbf{R}_{>0}$. Indeed, it is surjective and if we take a representative L of an element of $\mathscr{H}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K}))$ of height 1, then let y be an nonzero element of L. The unique morphism of vector spaces from $\mathbf{K}$ to L which maps 1 to y then induces an isomorphism from $\mathbf{K}$ equipped with the adelic norm $(\|y\|_w|\cdot|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ to L.

Definition 4.4. — A *system of Arakelov heights* on our nice variety V is a section $\boldsymbol{s}$ of the forgetful morphism of groups

$$\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V).$$

Such a system defines a map

$$\boldsymbol{h} : V(\mathbf{K}) \to \mathrm{Pic}(V)^{\vee}_{\mathbf{R}}$$

constructed as follows: for any $P \in V(\mathbf{K})$ and any $L \in \mathrm{Pic}(V)$, the real number $\boldsymbol{h}(P)(L)$ is the logarithmic height of the point P relative to the Arakelov height $\boldsymbol{s}(L)$ (see definition 2.7). We shall call $\boldsymbol{h}(P)$ the *multiheight* of the point P. By abuse of language, a function of the form $P \mapsto \exp(\langle u, \boldsymbol{h}(P)\rangle)$ for some $u \in \mathrm{Pic}(V)_{\mathbf{R}}$ will also be called an exponential height on V.

Since $\mathrm{Pic}(V)$ is finitely generated, we may fix a system of Arakelov heights on our nice variety V. We still assume that V satisfies the hypotheses 3.27. Then one can study the multiheights of rational points.

Lemma 4.5. — *Under the hypotheses 3.27, there is a dense open subset U of V and an element $c \in \mathrm{Pic}(V)^{\vee}_{\mathbf{R}}$ such that*

$$\forall P \in U(\mathbf{K}), \quad \boldsymbol{h}(P) \in c + C_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee}.$$

Proof. — Let $L_1, \dots, L_m$ be line bundles the classes of which generate the effective cone in $\mathrm{Pic}(V)_{\mathbf{R}}$. We may assume that they have nonzero sections. Let U be the complement of the base loci of these line bundles. Let $i \in \{1, \dots, m\}$. Then choosing a basis $(s_0, \dots, s_{N_i})$ of the space of sections of the line bundle L_i, we get a morphism from U to a projective space $\mathbf{P}^{N_i}_{\mathbf{K}}$. For any place w, there exist a constant c_w such that $\|s_j(x)\|_w \leqslant c_w$ for any $x \in V(\mathbf{K}_w)$ and any $j \in \{0, \dots, N_i\}$. Moreover we may take $c_w = 1$ outside a finite set of places. Therefore there exists a constant C such that for any $x \in U(\mathbf{K})$ there is an $j \in \{0, \dots, N_i\}$ with

$$0 < \prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|s_j(x)\| \leqslant C.$$

It follows that there exists a constant $c_i \in \mathbf{R}$ such that $h_i(P) \geqslant c_i$ for any $P \in U(\mathbf{K})$. The statement of the lemma follows. □

Remark 4.6. — Let $C^{\circ}_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee}$ be the interior of the dual cone $C_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee}$. This lemma shows that it is quite natural to count the number of rational points in

$V(K)$ such that $\boldsymbol{h}(P) \in \mathscr{D}_B$ for some compact domain $\mathscr{D}_B \subset C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ depending on a parameter $B \in \mathbf{R}_{>0}$. In the following, we shall consider domains of the form

$$\mathscr{D}_B = \mathscr{D}_1 + \log(B)u$$

where $u \in C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ and $\mathscr{D}_1$ is a compact polyhedron in $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$. In other words, we get a finite number of conditions of the form

$$aB \leqslant H(P) \leqslant bB$$

where H is an exponential height on V, in the sense of definition 4.4, and $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$.

Notation 4.7. — We define the measure ν on $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ as follows: for a compact subset $\mathscr{D}$ of $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$,

$$\nu(\mathscr{D}) = \int_{\mathscr{D}} e^{\langle \omega_V^{-1}, \boldsymbol{y} \rangle} \mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

where the Haar measure $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ on $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ is normalised so that the covolume of the dual of the Picard group is one.

For any domain $\mathscr{D} \subset \mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$, we define

$$V(\mathbf{K})_{\boldsymbol{h} \in \mathscr{D}} = \{ P \in V(\mathbf{K}) \mid \boldsymbol{h}(P) \in \mathscr{D} \}$$

With these notations, we may ask the following question:

Question 4.8. — *We assume that our nice variety V satisfies the conditions of the hypothesis 3.27. Let $\mathscr{D}_1$ be a compact polyhedron of $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ and u be an element of the open cone $C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$. For a real number $B > 1$, let $\mathscr{D}_B = \mathscr{D}_1 + \log(B)u$. Can we find a "small" subset T so that we have an equivalence of the form*

$$\sharp(V(\mathbf{K}) - T)_{h \in \mathscr{D}_B} \sim \beta(V)\nu(\mathscr{D}_1)\boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})B^{\langle \omega_V^{-1}, u \rangle} \tag{5}$$

as B goes to infinity?

Remarks 4.9. — a) One may note that in the right hand side of (5), one may use $\nu(\mathscr{D}_B) = \nu(\mathscr{D}_1)B^{\langle \omega_V^{-1}, u \rangle}$.

b) One can easily imagine variants of this question. For example, some methods from analytic number theory give much better error terms if ones use smooth functions instead of characteristic functions of sets. So it would be natural to consider a smooth function $\varphi : \mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ with compact support and ask whether we have

$$\sum_{P \in V(\mathbf{K})} \varphi(\boldsymbol{h}(P) - Bu) \sim \beta(V) \int_{\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}} \varphi \mathrm{d}\nu \, \boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})B^{\langle \omega_V^{-1}, u \rangle}$$

as B goes to infinity.

c) Let us compare formula (5) with formula (4). First we may note that

$$\nu(\{y\in C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y,\omega_V^{-1}\rangle \leqslant \log(B)\}) \sim \alpha(V)B\log(B)^{t-1}$$

Thus using remark 4.9 a), formula (4) may be seen as integrating formula (5) over

$$\mathscr{D}_B=\{y\in C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y,\omega_V^{-1}\rangle \leqslant \log(B)\}.$$

In this context in which we consider all the possible heights, we may consider again the question of the global equidistribution.

Global equidistribution 4.10. *We shall say that the* global equidistribution holds for $\boldsymbol{h}$ *if, for any compact polyhedron* $\mathscr{D}_1$ *in* $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ *and any* u *in the open cone* $C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$*, the measure* $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{K})_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B}}$ *converges weakly to* $\boldsymbol{\mu}_V^{\mathrm{Br}}$ *as* B *goes to infinity.*

Note that the expected limit probability measure is the same as before and does not depend on u.

4.2. Compatibility with the product. — A positive answer to question 4.8 is compatible with the product of varieties in the following sense:

Proposition 4.11. — *Let* V_1 *and* V_2 *be nice varieties equipped with system of heights which satisfy the conditions 3.27. If the sets* $V_1(\mathbf{K})-T_1$ *and* $V_2(\mathbf{K})-T_2$ *satisfy the equivalences* (5) *for any compact polyhedra, then this is also true for the product*

$$(V_1(\mathbf{K})-T_1)\times(V_2(\mathbf{K})-T_2),$$

equipped with the induced system of heights.

If these varieties satisfy the global equidistribution 4.10, then so does their product.

Proof. — We put $W_i=V_i(\mathbf{K})-T_i$ for $i\in\{1,2\}$. Let W be the product $W_1\times W_2$. For $i\in\{1,2\}$, we denote by $\boldsymbol{h}_i$ the multiheight on V_i, and fix a compact polyhedron $\mathscr{D}_{i,1}$ in $\mathrm{Pic}(V_i)^\vee_{\mathbf{R}}$, as well as an element $u_i\in C^\circ_{\mathrm{eff}}(V_i)^\vee$. Let us first note that by [**Ha**, exercise III.12.6], the natural morphism induced by pull-backs $\mathrm{Pic}(V_1)\times\mathrm{Pic}(V_2)\to\mathrm{Pic}(V)$ is an isomorphism which maps the product $C_{\mathrm{eff}}(V_1)\times C_{\mathrm{eff}}(V_2)$ onto $C_{\mathrm{eff}}(V)$ and $(\omega_{V_1}^{-1},\omega_{V_2}^{-1})$ on ω_V^{-1} (see [**Ha**, exercise II.8.3]). Therefore we identify these groups and consider $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_{1,1}\times\mathscr{D}_{2,1}$ as a subset of $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ and $u=(u_1,u_2)$ as an element of $C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$. If we put $\mathscr{D}_B=\log(B)u+\mathscr{D}_1$, we have

$$\sharp W_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B}=\sharp(W_1)_{\boldsymbol{h}_1\in\mathscr{D}_{1,B}}\times\sharp(W_2)_{\boldsymbol{h}_2\in\mathscr{D}_{2,B}}$$

and the result follows from the compatibility of equivalence with products. To extend the result to an arbitrary polyhedra $\mathscr{D}$, we find domains $\mathscr{D}'$ and $\mathscr{D}''$ which are finite unions of products of polyhedra with disjoint interiors such that $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{D}''$ and use the fact that the equivalence is valid for such a finite union.

Similarly for the equidistribution, it is enough to count the points in open subsets U of $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}$ which are of the form $U = U_1 \times U_2$ for open subsets U_1 and U_2 such that $\boldsymbol{\omega}_{V_1}(\partial U_1) = 0$ and $\boldsymbol{\omega}_{V_2}(\partial U_2) = 0$. But in that case,

$$\sharp(W \cap U)_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B} = \sharp(W_1 \cap U_1)_{\boldsymbol{h}_1\in\mathscr{D}_{1,B}} \times \sharp(W_2 \cap U_2)_{\boldsymbol{h}_2\in\mathscr{D}_{2,B}}$$

and we may conclude in the same way. □

It is worthwile to note that this proof is much simpler than the proof of the compatibility of the principle of Batyrev and Manin for products (see [**FMT**, §1.1]). It illustrates the fact that in question 4.8 we cut out the "spikes" where the heights of the components of the points are very different.

4.3. Lifting to versal torsors. — Following Salberger [**Sal**], we shall now explain how the question lifts naturally to versal torsors (see also [**Pe2**]). Let us start by a quick reminder on versal torsors. In our setting, the geometric Picard is supposed to be without torsion, thus we shall restrict ourselves to torsors under algebraic tori.

Definition 4.12. — Let $\mathbf{L}$ be a field and $\mathbf{L}^s$ be a separable closure of $\mathbf{L}$. For any scheme X over $\mathbf{L}$, we write X^s for the product $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{L})} \mathrm{Spec}(\mathbf{L}^s)$.

An algebraic group G over a field $\mathbf{L}$ is said to be *of multiplicative type* if there exists an integer n such that G^s is isomorphic to a closed subgroup of $\mathbf{G}^n_{m,\mathbf{L}^s}$. A *torus* $\mathbf{T}$ over $\mathbf{L}$ is an algebraic group $\mathbf{T}$ over $\mathbf{L}$ such that $\mathbf{T}^s$ is isomorphic to a power $\mathbf{G}^n_{m,\mathbf{L}^s}$ of the multiplicative group.

The *group of characters* of an algebraic group G, denoted by $X^*(G^s)$ is the group of group homomorphisms from G^s to $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}^s}$. If G is of multiplicative type, it is a finitely generated $\mathbf{Z}$-module. If G is a torus, it is a free $\mathbf{Z}$-module of rank n. In both cases, it is equipped with an action of the absolute Galois group of $\mathbf{L}$, that is $\mathscr{G}_{\mathbf{L}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}^s/\mathbf{L})$, which splits over a finite separable extension of $\mathbf{L}$.

Conversely, let us define a *Galois module L over* $\mathbf{L}$ (resp.a *Galois lattice L over* $\mathbf{L}$) as a finitely generated $\mathbf{Z}$-module (resp.a free $\mathbf{Z}$-module of finite rank) equipped with an action of the Galois group $\mathscr{G}_{\mathbf{L}}$ which splits over a finite extension. To a Galois module L, we may associate the monoid algebra $\mathbf{L}^s[L]$ and thus the

algebraic variety

$$\mathbf{T} = \operatorname{Spec}(\mathbf{L}^s[L]^{\mathscr{G}_{\mathbf{L}}})$$

equipped with the algebraic group structure induced by the coproduct ∇ on $\mathbf{L}^s[L]$ defined by $\nabla(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$ for any $\lambda \in L$. This algebraic group is an algebraic group of multiplicative type, which we shall say to be *associated to* L.

Example 4.13. — As a basic example, the group of characters of $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}^n$ is $\mathbf{Z}^n$ with a trivial action of the Galois group and the torus associated with $\mathbf{Z}^n$ is isomorphic to $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}^n$.

Remark 4.14. — These constructions are functorial and we get a contravariant equivalence of categories between the category of tori (resp. groups of multiplicative type) over $\mathbf{L}$ and the category of Galois lattices (resp. Galois modules) over $\mathbf{L}$.

Notation 4.15. — We shall denote by $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$ the torus associated to the Galois lattice $\operatorname{Pic}(\overline{V})$.

We are going to use pointed torsors, that is torsors in the category of pointed schemes.

Definition 4.16. — Let G be an algebraic group over a field $\mathbf{L}$ and let X be an algebraic variety over $\mathbf{L}$. A *G-torsor T* over X is an algebraic variety T over $\mathbf{L}$ equipped with a faithfully flat morphism $\pi : T \to X$ and an action $\mu : G \times T \to T$ of G such that $\pi \circ \mu = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ and the morphism given by $(g,y) \mapsto (gy,y)$ is an isomorphism from $G \times T$ to $T \times_X T$.

A *pointed variety* over $\mathbf{L}$ is a variety X over $\mathbf{L}$ equipped with a chosen rational point $x \in X(\mathbf{L})$. A *pointed torsor* over the pointed variety X is a torsor T over X equipped with a rational point $t \in T(\mathbf{L})$ such that $\pi(t) = x$.

Example 4.17. — For any line bundle L over X, we can define a $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$ torsor by considering $L^\times$ which is the complement of the zero section in L. Conversely for a nice variety X, given a $\mathbf{G}_m$ torsor T, we get a line bundle by considering the contracted product $T \times^{\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}} \mathbf{A}^1_{\mathbf{L}}$ which is the quotient $(T \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{L}})/\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$ where $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$ acts by $t.(y,a) = (t.y, t^{-1}.a)$. We get in that way the equivalence of category between the line bundles and the $\mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$-torsors over X.

4.3.1. *Versal and universal torsors.* — The versal torsors were introduced by J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc in the study of the Brauer-Manin obstruction for Hasse principle and weak approximation (see [**CTS1**], [**CTS2**], and [**CTS3**]) . For a survey on versal torsors, the reader may also look at [**Pe3**].

In topology, universal coverings for an unlaceable pointed space X answers a universal problem for coverings: it is a pointed covering E over X such that for any pointed covering $C \to X$ there exists a unique morphism $E \to C$ of pointed spaces over X (see [**Bki**, TA IV, §1, n°3]). We could in fact restrict ourselves to Galois coverings, that is connected coverings with an automorphism group which acts transitively on the fibre over the marked point of X. Fixing a point in the space X is necessary to guarantee the unicity, up to a unique isomorphism, of the universal covering. The universal torsor is the answer to a similar problem for torsor under groups of multiplicative type.

Definition 4.18. — Let $\mathbf{L}$ be a field and $\overline{\mathbf{L}}$ be an algebraic closure of $\mathbf{L}$. Let X be a smooth and geometrically integral variety over $\mathbf{L}$ with a rational point such that all invertible functions on $\overline{X}$ are constant: $\Gamma(\overline{X}, \mathbf{G}_m) = \overline{\mathbf{L}}^*$. We see X as a pointed space by fixing a rational point $x \in X(\mathbf{L})$. Then a *universal torsor* is a pointed torsor T_u over the pointed space X under a group of multiplicative type $\mathbf{T}_u$ such that for any pointed torsor T over X under a group of multiplicative type $\mathbf{T}$, there is a unique morphism of group $\varphi : \mathbf{T}_u \to \mathbf{T}$ and a unique morphism $\psi : T_u \to T$ over X, compatible with the actions of $\mathbf{T}_u$ and $\mathbf{T}$ and the marked points.

Remarks 4.19. — a) If such a torsor exists it is by definition unique up to a unique isomorphism.

b) Using the cohomological characterisation of universal torsors [**CTS3**, §2], one may show that the extension of scalars of a universal torsor is also a universal torsor.

c) Let us assume that there exists a universal torsor T_u. Let x be the chosen point of X. For any line bundle L over X, we can consider the $\mathbf{G}_m$-torsor $L^\times$ and fix a point in its fibre over x. Thus there exists a unique morphism of pointed torsors from T_u to $L^\times$ compatible with a morphism $\mathbf{T}_u \to \mathbf{G}_m$. By duality, it corresponds to a homomorphism of groups from $\mathbf{Z}$ to the group of characters of $\mathbf{T}_u$. Moreover if $L^{\otimes n}$ is isomorphic to the trivial line bundle, the image of $n \in \mathbf{Z}$ in $X^*(\mathbf{T}_u)$ is trivial. Therefore, over $\mathbf{L}^s$, we get a homomorphism of groups from $\operatorname{Pic}(X^s)$ to $X^*(\mathbf{T}_u^s)$, which is compatible with the Galois actions.

Conversely, for any torsor T under a multiplicative group $\mathbf{T}$ and any group character $\chi : \mathbf{T} \to \mathbf{G}_m$, the contracted product $T \times^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$ is a $\mathbf{G}_m$ torsor over $\mathbf{L}$. We get a homomorphism of groups from $X^*(\mathbf{T}^s)$ to $\operatorname{Pic}(X^s)$. It is possible

to deduce from such arguments that the character group of $\mathbf{T}_u$ over $\mathbf{L}^s$ has to be isomorphic to $\operatorname{Pic}(X^s)$.

Construction 4.20. — Let us now explain how it is possible to construct such universal torsors. We shall assume again hypothesis 3.27, and fix a rational point $x \in V(\mathbf{K})$. In that case the group $\mathbf{T}_u$ is canonically isomorphic to the Néron-Severi torus $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$. Over $\overline{\mathbf{K}}$, the construction of remark 4.19 c) gives an isomorphism of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$-torsor from a universal torsor $\overline{T}_u$ to the product $L_1^\times \times_V \cdots \times_V L_t^\times$ where $([L_1], \dots, [L_t])$ is a basis of $\operatorname{Pic}(\overline{V})$. But the unicity of the universal torsor shows that, by marking $\overline{T}_u$ with a point in the fibre of x, there exists no non-trivial automorphism of $\overline{T}_u$ as a pointed torsor over X. By descent theory, $\overline{T}_u$ comes from a unique pointed $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$-torsor T_u over X.

Remark 4.21. — In particular, as a non-pointed $\overline{\mathbf{T}}_{\mathrm{NS}}$-torsor over $\overline{V}$, the torsor $\overline{T}_u$ does not depend on the choice of the point x in $V(\mathbf{K})$. This is not true over $\mathbf{K}$.

Definition 4.22. — A *versal torsor* over V is a $\mathbf{K}$-form of the $\overline{\mathbf{T}}_{\mathrm{NS}}$-torsor $\overline{T}_u$.

Remark 4.23. — The automorphisms of $\overline{T}_u$ as a $\overline{\mathbf{T}}_{\mathrm{NS}}$-torsor over $\overline{V}$ are given by the action of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\overline{\mathbf{K}})$. It follows that if we fix a rational point, and therefore a universal torsor T_u, the versal torsors are classified by the group of Galois cohomology $H^1(\mathbf{K}, \mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$ and we get a map from $V(\mathbf{K})$ to $H^1(\mathbf{K}, \mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$ which maps a point to the class of the corresponding universal torsor. In general this cohomology group is infinite. But Colliot-Thélène and Sansuc proved in [**CTS2**, proposition 2] that the image of the map is finite. In other words, there exists a finite family $(T_i)_{i\in I}$ of non-isomorphic versal torsors over V with a rational point such that

$$V(\mathbf{K}) = \coprod_{i\in I} \pi_i(T_i(\mathbf{K})),$$

where $\pi_i : T_i \to V$ is the structural morphism.

4.3.2. *Structures on versal torsors.* — Let T_u be a universal torsor over V. By definition of the torsors, there is a natural isomorphism

$$T_u \times_V T_u \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_{\mathrm{NS}} \times T_u$$

which shows that the pull-back of T_u to T_u is trivial. But from the universality of T_u it is possible to show that the pull-back of any pointed torsor under a group of multiplicative type is trivial [**CTS3**, proposition 2.1.1]. By this proposition, we also have that invertible functions on T_u are constant: $\Gamma(T_u, \mathbf{G}_m) = \mathbf{K}^*$.

Moreover, by [**Pe2**, lemme 2.1.10], ω_{T_u} is isomorphic to the pull-back of ω_V. We get the following assertion concerning *volume forms*, that is non-vanishing sections of ω_{T_u}.

Proposition 4.24. — *Let T be a versal torsor over V. Then up to multiplication by a constant there exists a unique volume form on T.*

Construction 4.25. — Let T be a versal torsor on V with a rational point. By the proposition, we may take a non-vanishing section ω of ω_T. For any place w of $\mathbf{K}$, the expression

$$\left|\left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle\right|_w \mathrm{d}x_{1,w}\,\mathrm{d}x_{2,w}\ldots\mathrm{d}x_{n,w},$$

defines a local measure, which, like in construction 3.6, we may patch together to get a measure $\boldsymbol{\omega}_{T_u,w}$ on $T_u(\mathbf{K}_w)$.

We then choose a finite set S of places containing all the places of bad reduction for V, the archimedean places, as well as the ramified places in a extension splitting the action of the Galois group on the Picard group of V. Moreover, we may assume that any isomorphism class of versal torsors with a rational point has a model over the ring of S-integers $\mathscr{O}_S$ and that the projection maps $T(\mathbf{K}_w) \to V(\mathbf{K}_w)$ are surjective for $w \notin S$ ([**CTS3**, lemme 3.2.3]). Let us fix such a model $\mathscr{T}$ of our versal torsor T. Then for any place w outside a finite set of places, one can prove (see the proof of theorem 4.33 below) that

$$\boldsymbol{\omega}_{T,w}(\mathscr{T}(\mathscr{O}_w)) = L_w(1, \mathrm{Pic}(\overline{V}))^{-1}\boldsymbol{\omega}_{V,w}(V(\mathbf{K}_w)).$$

Using the arguments of construction 3.29, it follows that we can define the product of the measures

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{1}{\sqrt{d_{\mathbf{K}}}^{\dim T}} \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \boldsymbol{\omega}_{T,w}.$$

on the adelic space $T(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$. By the product formula, this measure does not change if we multiply ω by a nonzero constant. Thus we may call $\boldsymbol{\omega}_T$ the *canonical measure* on the adelic space of the versal torsor T.

Example 4.26. — For a smooth hypersurface V of degree d in $\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$, with $N \geqslant 4$, any versal torsor is isomorphic to the cone over the hypersurface in $\mathbf{A}^{N+1}_{\mathbf{K}} - \{0\}$, and the canonical measure is given by the Leray form [**Le**, chapter IV, §1]. If F

is a homogeneous equation for V, then locally the measure may be defined as

$$\boldsymbol{\omega}_{T,w} = \frac{1}{|F(1,x_1,\dots,x_N)|_w}\mathrm{d}x_{1,w}\dots\mathrm{d}x_{N,w}.$$

Let us now turn to the lifting of heights to versal torsors. We have to take into account that the rank of the Picard group at a place w depends on w.

Construction 4.27. — We choose a system of representants $(T_i)_{i\in I}$ of the isomorphism classes of versal torsors over V which have a rational points over $\mathbf{K}$. For each $i \in I$, we also fix a point $y_i \in T_i(\mathbf{K})$. Let $\mathbf{L}$ be a Galois extension of $\mathbf{K}$ which splits the Picard group of V. Let $\boldsymbol{s}_{\mathbf{L}} : \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}}) \to \mathscr{H}(V_{\mathbf{L}})$ be a system of heights over $\mathbf{L}$. We also fix a place w_0 of $\mathbf{K}$. Let $i \in I$. For any line bundle L over $\mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}})$ there exists a morphism $\phi_L : T_i \to L^\times$ over V, which is compatible with the character $\chi_L : (\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})_{\mathbf{L}} \to \mathbf{G}_{m,\mathbf{L}}$ defined by L. This morphism is unique up to multiplication by a constant. Let us choose a representant $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{L})}$ of $s_{\mathbf{L}}([L])$ defining the exponential height $H_{\mathbf{L}}$ on $V(\mathbf{L})$. For any $v \in \mathrm{Val}(\mathbf{L})$, we may then consider the map from $T_i(\mathbf{L}_v)$ to $\mathbf{R}$ given by

$$y \longmapsto \|y\|_v^L = \begin{cases} \frac{\|\phi_L(y)\|_v}{\|\phi_L(y_i)\|_v} \text{ if } v \not| w_0 \\ \frac{\|\phi_L(y)\|_v}{\|\phi_L(y_i)\|_v} H_L(\pi_i(y_i))^{-\frac{[\mathbf{L}_v:\mathbf{K}_{w_0}]}{[\mathbf{L}:\mathbf{K}]}} \text{ otherwise.}\end{cases}$$

This map does not depend on the choice of ϕ_L nor on the choice of the representant of $s_{\mathbf{L}}([L])$ and satisfies

$$\forall y \in T_i(\mathbf{L}), \quad H_L(\pi_i(y)) = \prod_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{L})} (\|y\|_v^L)^{-1}.$$

Moreover it satisfies the formula $\|t.y\|_v^L = |\chi_L(t)|_v\|y\|_v^L$, for $t \in \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{L}_v)$ and y in $T_i(\mathbf{L}_v)$. We get a map

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_v : T_i(\mathbf{L}_v) \longrightarrow (\mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}_v}))^\vee_{\mathbf{R}}$$

defined by the relations

$$\|y\|_v^L = q_v^{-\langle \widetilde{\boldsymbol{h}}_v(y),[L]\rangle}$$

for $y \in T_i(\mathbf{L}_v)$ and $[L] \in \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}_v})$, with q_v the cardinal of the residue field $\mathbf{F}_v$ if v is ultrametric, $q_v = e$ for a real place and $q_v = e^2$ for a complex one. Let

us now write V_w for $V_{\mathbf{K}_w}$. Using the inclusion $T_i(\mathbf{K}_w) \to \prod_{v|w} T_i(\mathbf{L}_v)$ and the projection $\mathrm{pr} : \prod_{v|w} \mathrm{Pic}(V_{L_v})^\vee_{\mathbf{R}} \to \mathrm{Pic}(V_w)^\vee_{\mathbf{R}}$, we define a map

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_w : T_i(\mathbf{K}_w) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V_w)^\vee_{\mathbf{R}}.$$

so that the diagram

$$\begin{tikzcd} \prod_{v|w} T_i(\mathbf{L}_v) \arrow[r] & \prod_{v|w} \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}_v})^\vee_{\mathbf{R}} \arrow[d, "\frac{1}{[\mathbf{L}:\mathbf{K}]}\mathrm{pr}"] \\ T_i(\mathbf{K}_w) \arrow[u] \arrow[r, "\widetilde{\boldsymbol{h}}_w"] & \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{K}_w})^\vee_{\mathbf{R}} \end{tikzcd} \tag{6}$$

commutes.

If L is line bundle over X and if $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{L})}$ is an adelic norm for the extension of scalars $L_{\mathbf{L}}$, then it induces an adelic norm on L defined by

$$\forall w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}), \forall y \in L(\mathbf{K}_w), \|y\|_w = \left(\prod_{v|w} \|y\|_v\right)^{\frac{1}{[\mathbf{L}:\mathbf{K}]}}.$$

Therefore the system of heights $\boldsymbol{s}_{\mathbf{L}}$ induces a system of heights $\boldsymbol{s} : \mathrm{Pic}(V) \to \mathscr{H}(V)$. For any point $y \in T_i(\mathbf{K})$ we have the formula

$$\boldsymbol{h}(\pi_i(y)) = \sum_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \log(q_w)\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y).$$

These construction enables us to lift a system of heights to versal torsors with a rational point.

4.3.3. *Lifting of the asymptotic formula.* — We now wish to express the asymptotic formula (5) at the torsor level. The fibre of the projection map $\pi_i : T_i(\mathbf{K}) \to V(\mathbf{K})$ is either empty or a principal homogeneous space under $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$. Therefore we now need to use the description of the rational points of the torus $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$, as described in the work of Ono ([**Ono1**] and [**Ono2**]).

Definition 4.28. — Let $\mathbf{T}$ be an algebraic torus over $\mathbf{K}$. We denote by $W(\mathbf{T})$ the torsion subgroup of $\mathbf{T}(\mathbf{K})$. By an abuse of notation, for any place w of $\mathbf{K}$, we denote by $\mathbf{T}(\mathscr{O}_w)$ the maximal compact subgroup of $\mathbf{T}(\mathbf{K}_w)$. Let us put $K_{\mathbf{T}} = \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \mathbf{T}(\mathscr{O}_w)$ which is a compact subgroup of $\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbf{K}})$. We also have that $W(\mathbf{T}) = K_{\mathbf{T}} \cap \mathbf{T}(\mathbf{K})$ For any place w, there is an injective morphism of groups

$$\log_w : \mathbf{T}(\mathbf{K}_w)/\mathbf{T}(\mathscr{O}_w) \longrightarrow X^*(\mathbf{T}_w)^\vee_{\mathbf{R}}$$

so that for any $t \in \mathbf{T}(\mathbf{K}_w)$ and any $\chi \in X^*(\mathbf{T}_w)$, we have $q_w^{\langle \log_w(t), \chi\rangle} = |\chi(t)|_w$. For almost all places w the image of $\log_w$ coincide with $X^*(\mathbf{T}_w)^\vee$. In fact, by [**Ono1**, theorem 4] and [**Ono2**, §3] there exists a finite set of places S_T such that the induced map gives an exact sequence

$$(7) \qquad 1 \longrightarrow \mathbf{T}(\mathscr{O}_{S_T}) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{K}) \longrightarrow \bigoplus_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S_T} X^*(\mathbf{T})_w^\vee \longrightarrow 0$$

and there is an exact sequence

$$(8) \qquad 1 \longrightarrow W(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathscr{O}_{S_T}) \xrightarrow[\log_{S_T}]{} \bigoplus_{w \in S_T} X^*(\mathbf{T}_w)_{\mathbf{R}}^\vee,$$

where $\log_{S_T}$ is the map defined by taking $\log_w$ for $w \in S_T$. For any $w \in S_T$, the extension of scalars defines a linear map $\pi_w : X^*(T_w)_{\mathbf{R}}^\vee \to X^*(T)_{\mathbf{R}}^\vee$. We then consider the linear map $\pi = \sum_{w \in S_T} \log(q_w)\pi_w$:

$$\bigoplus_{w \in S_{\mathbf{T}}} X^*(\mathbf{T}_w)_{\mathbf{R}}^\vee \longrightarrow X^*(\mathbf{T})_{\mathbf{R}}^\vee.$$

By the product formula, the image of $\mathbf{T}(\mathscr{O}_{S_T})$ is contained in $\ker(\pi)$. The image $M = \pi(\mathbf{T}(\mathscr{O}_{S_\mathbf{T}}))$ is a lattice in the $\mathbf{R}$-vector space $\ker(\pi)$. Let $(e_1, \dots, e_m)$ be a basis for this lattice and let

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i e_i,\ (t_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in [0, 1[^m \right\}.$$

By construction, Δ is a fundamental domain for the action of $\mathbf{T}(\mathscr{O}_{S_\mathbf{T}})$ on $\ker(\pi)$.

Construction 4.29. — By increasing the finite set of places S introduced in construction 3.6, we assume that we may take $S_{\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}} = S$ for the finite set of places considered in the last definition. In particular, we get that outside of S, the map

$$\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_w) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V_w)^\vee$$

is surjective. For each of the chosen torsors we may also fix models $\mathscr{T}_i$ over $\mathscr{O}_S$. We may further assume that, for a family of line bundles which generates $\mathrm{Pic}(V_\mathbf{L})$ and is invariant under the action of the Galois group $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$, the heights are given by models of the corresponding line bundles and that the maps ϕ_L from the chosen versal torsors to a line bundle L of the family are defined over $\mathscr{O}_S$. We

may also assume that the adelic metrics outside S are compatible with the action of the Galois group. For any i in I, we define the set $\Delta(T_i)$ as

$$\{y \in T_i(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \mid \mathrm{pr}((\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y_w))_{w\in S}) \in \Delta \text{ and } \forall w \notin S,\ y_w \in \mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w)\},$$

where pr is a linear projection on $\ker(\pi)$.

Lemma 4.30. — *For any place $w \notin S$, the projection map $\mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w) \to V(\mathbf{K}_w)$ is surjective and the map $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w$ is characterized by the following two conditions:*

(i) *We have the relation $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(t.y) = -\log_w(t) + \widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y)$ for any $t \in \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_w)$ and any $y \in T_i(\mathbf{K}_w)$;*

(ii) *The integral points of $\mathscr{T}_i$ are given by*

$$\mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w) = \{y \in T_i(\mathbf{K}_w) \mid \widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y) = 0\}.$$

Proof. — Relation (i) follows from the formula for $\|t.y\|_w^{\mathbf{L}}$ and the description in (ii) from the fact that all maps are compatible with the models. By the choice of S, for any place $w \notin S$, the projection $\pi_i : T_i(\mathbf{K}_w) \to V(\mathbf{K}_w)$ is surjective. Moreover the functions $\|\cdot\|_w^{\mathbf{L}}$ are compatible with the action of the Galois group. By the diagram (6), it follows that $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y)$ belongs to $\mathrm{Pic}(V_w)^\vee$. Since the map $\log_w$ is surjective, we may find in any fibre an element y such that $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y) = 0$. By (ii), this element is an integral point. Since the map $\pi_i : \mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w) \to V(\mathbf{K}_w)$ is surjective, conditions (i) and (ii) characterize $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w$. □

Theorem 4.31. — *The set $\Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K})$ is a fundamental domain for the action of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$ modulo $W(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$. In other words, it satisfies the following conditions:*

(i) *We have $T_i(\mathbf{K}) = \cup_{t\in\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})} t.\left(\Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K})\right)$;*

(ii) *For any $t \in \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$, we have*

$$\left(\Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K})\right) \cap t.\left(\Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K})\right) \neq \varnothing$$

if and only if $t \in W(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$.

(iii) *For $t \in W(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$, we have*

$$t.\left(\Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K})\right) = \Delta(T_i) \cap T_i(\mathbf{K}).$$

Proof. — Let $y \in T_i(\mathbf{K})$. By the lemma, for any $w \notin S$, $\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y) \in \mathrm{Pic}(V_w)^\vee$. Thus, using the exact sequence (7), we get an element $t \in \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$ such that $t.y \in \mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w)$ for $w \notin S$. Using the exact sequence (8) and the definition of Δ,

there is an element t' in $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathscr{O}_S)$ such that $(t't).y \in \Delta(T_i)$. Assertions (ii) and (iii) follow from the definition of Δ. $\square$

Notation 4.32. — For any $i \in I$, we define the map

$$\widetilde{\boldsymbol{h}} : \Delta(T_i) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$$

by the relation $\widetilde{\boldsymbol{h}}(y) = \pi\Big((\widetilde{\boldsymbol{h}}_w(y_w))_{w\in S}\Big)$.

Theorem 4.33. — *We assume conditions 3.27. Let W be a borelian subset of $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$. Let $\mathscr{D}$ be a borelian subset of* $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$. *Then*

$$\beta(V)\nu(\mathscr{D})\boldsymbol{\omega}_V(W \cap V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})$$
$$= \frac{1}{W(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})} \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_{T_i}(\{y \in \Delta(T_i) \cap \pi_i^{-1}(W) \mid \widetilde{\boldsymbol{h}}(y) \in \mathscr{D}\}).$$

Proof. — This proof follows the ideas of Salberger [**Sal**] (see also [**Pe2**, §3.5] for more details). If $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ is a basis of $X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}) = \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{L}})$, then $\bigwedge_{i=1}^r \xi_i^{-1} \mathrm{d}\xi_i$ is a section of $\omega_{\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}}$, which, up to sign, does not depend on the choice of the basis. This defines a canonical Haar measure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}_{\mathrm{NS}},w}$ on $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_w)$ for any place w of $\mathbf{K}$. Let $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$. Locally for w-adic topology, we may choose a section of $\pi_i : \mathscr{T}_i(\mathscr{O}_w) \to V(\mathbf{K}_w)$ and the measure $\boldsymbol{\omega}_{T_i,w}$ on $\mathscr{T}_i(\mathbf{K}_w)$ is locally isomorphic to the measure

$$L_w(1, X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}))|\omega_V(t)|_w \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}_{\mathrm{NS}},w} \times \lambda_w \boldsymbol{\omega}_{V,w}.$$

where ω_V is seen as a character of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$. Let us also consider the groups $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^1$, defined as

$$\left\{ (t_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \in \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \;\middle|\; \forall \xi \in X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}), \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} |\xi(t_w)|_w = 1 \right\},$$

and $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1$, defined as

$$\left\{ (t_w)_{w\in S} \in \prod_{w\in S} \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_w) \;\middle|\; \forall \xi \in X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}), \prod_{w\in S} |\xi(t_w)|_w = 1 \right\}.$$

The lattice $X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})^\vee$ normalises the Haar measure on $X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})^\vee_{\mathbf{R}}$ and therefore on the quotient $\prod_{w\in S} \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_w)/\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1$. Using the measure $\prod_{w\in S} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}_{\mathrm{NS}},w}$

on the product, we get a normalised Haar measure ω_{T^1} on $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1$. We consider the fibration

$$\widetilde{\boldsymbol{h}} \times \pi_i : \prod_{w\in S} T_i(\mathbf{K}_w) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}} \times \prod_{w\in S} V(\mathbf{K}_w),$$

which, over its image, is a principal homogeneous space under $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1$. By choosing a local adequate section of this fibration, we get that the measure $\prod_{w\in S} \boldsymbol{\omega}_{T_i,w}$ on $\prod_{w\in S} T_i(\mathbf{K}_w)$ is the measure induced by the product measure $\nu \times \prod_{w\in S} \boldsymbol{\omega}_{V,w}$ on the image and the measure ω_{T^1} on $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1$. Taking the product over all places, and multiplying by the normalisation terms, we get that

$$\frac{1}{\sharp W(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})}\boldsymbol{\omega}_{T_i}(\{y\in\Delta(T_i)\cap\pi_i^{-1}(W)\mid \widetilde{\boldsymbol{h}}(y)\in\mathscr{D}\})$$
$$= \tau(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})\nu(\mathscr{D})\boldsymbol{\omega}_V(\pi_i(T_i(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}))\cap W),$$

where $\tau(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$ is the Tamagawa number of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$, that is the normalized volume of the compact quotient $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^1/\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K})$ which is isomorphic to the product

$$\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathbf{K}_S)^1/\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathscr{O}_S) \times \prod_{w\notin S} \mathbf{T}_{\mathrm{NS}}(\mathscr{O}_w).$$

By Ono's theorem ([**Ono3**, §3]), the Tamagawa number of $\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}$ is given by

$$\tau(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}) = \frac{\sharp H^1(\mathbf{K}, X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}))}{\sharp Ш^1(\mathbf{K},\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})}$$

where $Ш^1(\mathbf{K},\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}) = \ker(H^1(\mathbf{K},\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}) \to \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} H^1(\mathbf{K}_w,\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}))$. By definition, $\beta(V) = \sharp H^1(\mathbf{K}, X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{NS}}))$. To conclude the proof, we use the crucial fact, first proven by Salberger [**Sal**], that for any $x \in V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}}$, the number of $i\in I$ such that $x\in\pi_i(T_i(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}))$ is precisely equal to $\sharp Ш^1(\mathbf{K},\mathbf{T}_{\mathrm{NS}})$. □

Remarks 4.34. — a) Using theorems 4.31 and 4.33, we see that the equivalence formula (5) of question 4.8, reduces to an equivalence of the form

$$\sharp\{y\in T_i(\mathbf{K})\cap\Delta(T_i)\mid \widetilde{\boldsymbol{h}}(y)\in\mathscr{D}_B\}$$
$$\sim \boldsymbol{\omega}_{T_i}(\{y\in\Delta(T_i)\mid \widetilde{\boldsymbol{h}}(y)\in\mathscr{D}_B\})$$

as $B\to+\infty$.

b) The conditions $y \in T_i(\mathscr{O}_w)$ for $w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$ correspond to an integrality condition combined with a gcd condition. For example, if V is a smooth complete intersection of dimension $\geqslant 3$ in the projective space $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$,

then the unique versal torsor T is the corresponding cone in $\mathbf{A}^{N+1}_{\mathbf{Q}} - \{0\}$ and the condition $(y_0,\dots,y_N) \in T(\mathbf{Z}_p)$ corresponds to $(y_0,\dots,y_N) \in \mathbf{Z}_p^{N+1}$ and $\gcd(y_0,\dots,y_N) = 1$. Therefore to reduce to counting integral points in a bounded domain, the next step is to use a Moebius inversion formula to remove the gcd condition. Such an inversion formula is described in [**Pe2**, §2.3].

c) In the preceding description, we were not very careful about the choice of the finite set S of bad places. For practical reasons, to use this method, it is in fact more efficient to use a small set of bad primes.

d) The lifting to the versal torsors has been used in many cases, see for example [**Bre**] or [**BBP**]. For practical reasons, it is often simpler to consider an intermediate torsor corresponding to the Picard group $\mathrm{Pic}(V)$ (see for example the work of K. Destagnol [**Des**]). The main difference in the new approach described in this section is that the domain obtained after lifting does not have "spikes". In other words, the area of the boundary has a smaller rate of growth, which should remove some of the problems encountered when using a single height relative to the anticanonical line bundle.

4.4. Varieties of Picard rank one. — If the rank of $\mathrm{Pic}(V)$ is one, then without loss of generality formula (5) is reduced to estimating a difference of the form

$$\sharp(V(\mathbf{K}) - T)_{H \leqslant bB} - \sharp(V(\mathbf{K}) - T)_{H \leqslant aB} \tag{9}$$

as B goes to infinity, where H is a height relative to the anticanonical line bundle and a, b are real numbers with $0 < a < b$. Therefore, in that case, a positive answer to question 4.8 is true if the principle of Batyrev and Manin is valid for $V(\mathbf{K}) - T$. Similarly the global equidistribution in the sense of 4.10, follows from global equidistribution 3.21. However the knowledge of estimates for the difference (9) does not gives an estimate for $(V(\mathbf{K}) - T)_{H \leqslant B}$, unless we have a uniform upper bound for the error term.

But several examples of Fano varieties of Picard rank one with acccumulating subvarieties are known in dimension $\geqslant 3$ (see the list given in [**BL**]). For example, if we consider a cubic volume, the projective lines it contains are parametrized by the Fano surface, which is of general type. Each of these rational lines has degree 2 and as we shall explain in section 6.4.1, these lines give a non negligible contribution to the total number of points thus contradicting the global equidistribution. In the case of a smooth complete intersection of two quadrics in $\mathbf{P}^5$, the situation is even worse since the projective lines it contains may be Zariski dense.

This shows that in higher dimension, even in the case of varieties with a Picard group of rank one, there might be accumulating subvarieties of codimension $\geqslant 2$ which are not detected by heights on line bundles. Thus one needs to go beyond heights. To help us in that direction we shall first consider the geometric analogue of this problem.

5. Geometric analogue

The geometric analogue of the study of rational points of bounded height is the study of rational curves of bounded degree. This is a very active subject in algebraic geometry, and we are going to give a very superficial survey of some particular aspects of this subject in this section. In fact, there is a very classical dictionary between number fields, global fields of positive characteristic and function fields of curves. To simplify the description, we shall mostly restrict ourselves to morphisms from $\mathbf{P}^1_k$ to a variety V defined over k.

Notation 5.1. — Let k be a field and let $\mathscr{C}$ be a smooth geometrically integral projective curve over k. In this section, we denote by $\mathbf{K} = k(\mathscr{C})$ the function field of $\mathscr{C}$. Let V be a nice variety over k. The image of the generic point gives a bijection between the set of rational point $V(\mathbf{K})$ and the set of morphisms $f : \mathscr{C} \to V$. From now on, we shall identify these sets. Let $f : \mathscr{C} \to V$ be a point of this space. Then the pull-back map is a morphism of groups $f^* : \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{C})$. The composition $\deg \circ f^*$ is an element of $\mathrm{Pic}(V)^\vee$, which we call the *multidegree of f* and denote by $\mathbf{deg}(f)$.

The constructions of Grothendieck [**Gr**, §4.c] prove that for any $d \in \mathrm{Pic}(V)^\vee$, there exists a variety $\mathscr{H}om^d(\mathscr{C}, V)$ defined over k, which parametrizes the morphisms from $\mathscr{C}$ to V of multidegree d.

In that geometric setting, we want to describe *asymptotically* the geometric properties of the variety $\mathscr{H}om^d(\mathscr{C}, V)$ as the distance from d to the boundary of the dual of the effective cone goes to infinity. The problem is to give a framework for the asymptotic study of a variety. We shall use the framework given by the ring of integration which was introduced by Kontsevich (see also [**DL**]).

5.1. The ring of motivic integration. — Of course, the dimension of the variety $\mathscr{H}om^d(\mathscr{C}, V)$ goes to infinity as the multidegree d grows. But, as suggested

by the work of J. Ellenberg [**Ell**], we could consider the stabilisation of cohomology groups. The ring of motivic integration enables us to consider the limit of a class associated to the variety.

Construction 5.2. — We denote by $\mathscr{M}_k$ the Grothendieck ring of varieties over k: as a group it is generated by the isomorphism classes of varieties over k, where the class of a variety V is denoted by $[V]$, with the relations

$$[V] = [F] + [U]$$

for any closed subvariety F of V, with $U = V - F$. We can then extend the definition of a class to non reduced schemes. Then $\mathscr{M}_k$ is equipped with the unique ring structure such that

$$[V_1] \times [V_2] = [V_1 \times_k V_2],$$

for any varieties V_1 and V_2 over k. We define the Tate symbol as $\boldsymbol{L} = [\mathbf{A}^1_k]$ and consider the localized ring $\mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}} = \mathscr{M}_k[\boldsymbol{L}^{-1}]$. We then introduce a decreasing filtration on this ring where, for $i \in \mathbf{Z}$,

$$F^i \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}$$

is the subgroup of $\mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}} = \mathscr{M}_k[\boldsymbol{L}^{-1}]$ generated by symbols of the form $[V]\boldsymbol{L}^{-n}$ if $\dim(V) - n \leqslant -i$. We have the inclusion

$$F^i \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}.F^j \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}} \subset F^{i+j} \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}},$$

for $i, j \in \mathbf{Z}$. Thus the inverse limit $\widehat{\mathscr{M}_k} = \varprojlim_i \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}/F^i \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}$ comes equipped with a structure of topological ring so that the natural map $\mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}} \to \widehat{\mathscr{M}_k}$ is a morphism of rings.

Remark 5.3. — The morphism $\mathscr{M}_k \to \mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}$ is not injective (see [**Bo**]), so we loose information by looking at classes in $\widehat{\mathscr{M}_k}$.

With this ring we may formulate the analogue of question 4.8:

Question 5.4. — *We assume that the nice variety V over k is rationally connected, satisfies conditions (i) and (iii) to (v) of hypotheses 3.27 and that the rational points over $k(T)$ are Zariski dense. Does the symbol*

$$\left[\mathscr{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, V)\right] \boldsymbol{L}^{-\langle \omega_V^{-1}, d\rangle}$$

converges in $\widehat{\mathscr{M}_k}$ for $d \in \mathrm{Pic}(V)^\vee \cap C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ as $\mathrm{dist}(d, \partial C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee)$ goes to infinity and can we interpret the limit as some adelic volume?

5.2. A sandbox example: the projective space. — In the case of the projective space, it turns out that the symbol in fact stabilizes, and thus converges:

Proposition 5.5. — *If $d \geqslant 1$, then*

$$\left[\mathcal{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, \mathbf{P}^n_k)\right]\boldsymbol{L}^{-(n+1)d} = \frac{\boldsymbol{L}^{n+1}-1}{\boldsymbol{L}-1}(1-\boldsymbol{L}^{-n}).$$

Proof. — In this proof, we shall describe the sets of k-points of our varieties and gloss over the description of the varieties themselves. So if we consider the set $W_d(k)$ of $(P_0, \dots, P_n) \in k[T]^{n+1}$ such that $\gcd_{0\leqslant i\leqslant n}(P_i) = 1$ and $\max_{0\leqslant i\leqslant n}(\deg(P_i)) = d$ then W_d is a $\mathbf{G}_m$ torsor over the space $\mathcal{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, \mathbf{P}^n_k)$ which is locally trivial for Zariski topology. Hence

$$(\boldsymbol{L}-1)\left[\mathcal{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, \mathbf{P}^n_k)\right] = [W_d]. \tag{10}$$

But if we consider the space of $(n+1)$-tuples of polynomials $(P_0, \dots, P_n)$ such that $\max_{0\leqslant i\leqslant n}(\deg(P_i)) = d$, then it is naturally isomorphic to $\mathbf{A}^{(n+1)(d+1)} - \mathbf{A}^{(n+1)d}$ and we may decompose it as a disjoint union according to the degree of the gcd of the polynomials. The piece corresponding to the families with $\deg(\gcd_{0\leqslant i\leqslant n}(P_i)) = k$ is isomorphic to $[W_{d-k}] \times \mathbf{A}^k$ where $\mathbf{A}^k$ parametrizes the gcd which is a unitary polynomial of degree k. We get the formula

$$\boldsymbol{L}^{(n+1)(d+1)} - \boldsymbol{L}^{(n+1)d} = \sum_{k=0}^{d} \boldsymbol{L}^k [W_{d-k}].$$

We may introduce formal series in $\widehat{\mathscr{M}_k}[[T]]$ to get the formula

$$\sum_{d\geqslant 0} (\boldsymbol{L}^{n+1}-1)\boldsymbol{L}^{(n+1)d} T^d = \Big(\sum_{k\geqslant 0} \boldsymbol{L}^k T^k\Big)\Big(\sum_{d\geqslant 0} [W_d] T^d\Big).$$

From which we deduce

$$\sum_{d\geqslant 0} [W_d] T^d = (1-\boldsymbol{L}T)(\boldsymbol{L}^{n+1}-1) \sum_{d\geqslant 0} \boldsymbol{L}^{(n+1)d} T^d.$$

Therefore, if $d \geqslant 1$, we get

$$\begin{aligned}[W_d] &= (\boldsymbol{L}^{n+1}-1)(\boldsymbol{L}^{(n+1)d} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{(n+1)(d-1)})\\ &= (\boldsymbol{L}^{n+1}-1)\boldsymbol{L}^{(n+1)d}(1-\boldsymbol{L}^{-n}).\end{aligned}$$

Combining with formula (10) gives the formula of the proposition. □

Remarks 5.6. — a) Let us quickly explain how the constant obtained might be interpreted as an adelic volume. First, for the projective space the L function associated to the Picard group coincide with the usual zeta function. This has a motivic analogue decribed by M. Kapranov in [**Ka**]:

$$Z_{\mathbf{C}(T)}(U)=\sum_{d\geqslant 0}[(\mathbf{P}^1_k)^{(d)}]U^d$$

where $(\mathbf{P}^1_k)^{(d)}$ is the symmetric product $(\mathbf{P}^1_k)^d/\mathfrak{S}_d$ and is isomorphic to $\mathbf{P}^d_k$. The parameter U should be understood as $\boldsymbol{L}^{-s}$. The residue of the zeta function at $s=1$ corresponds to

$$\begin{aligned}
&\Big((1-\boldsymbol{L}U)Z_{\mathbf{C}(T)}(U)\Big)(\boldsymbol{L}^{-1})\\
&=\Big((1-\boldsymbol{L}U)\sum_{d\geqslant 0}\frac{\boldsymbol{L}^{d+1}-1}{\boldsymbol{L}-1}U^d\Big)(\boldsymbol{L}^{-1})\\
&=\frac{1}{\boldsymbol{L}-1}\left((1-\boldsymbol{L}U)\left(\frac{\boldsymbol{L}}{1-\boldsymbol{L}U}-\frac{1}{1-U}\right)\right)(\boldsymbol{L}^{-1})\\
&=\frac{1}{\boldsymbol{L}-1}\left(\frac{\boldsymbol{L}-1}{1-U}\right)(\boldsymbol{L}^{-1})\\
&=\frac{1}{1-\boldsymbol{L}^{-1}}.
\end{aligned}$$

By translating the formula (3), the expected constant should formally have the form

$$C=\frac{\boldsymbol{L}^n}{1-\boldsymbol{L}^{-1}}\prod_{P\in\mathbf{P}^1_k}(1-\boldsymbol{L}^{-\deg(P)})[\mathbf{P}^n_{\kappa(P)}]\boldsymbol{L}^{-n\deg(P)},$$

where $\mathbf{L}^{-1}$ plays the rôle of the square root of the discriminant. The term appearing in the product may be simplified as $1-\boldsymbol{L}^{-(n+1)\deg(P)}$. However this formal constant involves a product over a possibly uncountable set $\mathbf{P}^1_k$. Nevertheless, in this very particular case, we may consider the *inverse* of this product. Then, we get

$$\prod_{P\in\mathbf{P}^1_k}\sum_{m\geqslant 0}\boldsymbol{L}^{-(n+1)m\deg(P)},$$

where the product is taken over closed points of $\mathbf{P}^1_k$. If we admit that it makes sense to develop this product, we get, noting that we get a sum over all divisors

of $\mathbf{P}^1_k$,

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{P\in(\mathbf{P}^1_k)^{(m)}(k)} \boldsymbol{L}^{-(n+1)m}.$$

But we may now interpret each interior sum as a motivic integral and get, using the fact that $(\mathbf{P}^1_k)^{(m)}$ is isomorphic to the projective space $\mathbf{P}^m_k$,

$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant 0}[\mathbf{P}^m_k]\boldsymbol{L}^{-(n+1)m} &= \sum_{m\geqslant 0}\frac{1-\boldsymbol{L}^{m+1}}{1-\boldsymbol{L}}\boldsymbol{L}^{-(n+1)m}\\ &= \frac{1}{1-\boldsymbol{L}}\left(\frac{1}{1-\boldsymbol{L}^{-n-1}}-\frac{\boldsymbol{L}}{1-\boldsymbol{L}^{-n}}\right)\\ &= \frac{1}{1-\boldsymbol{L}}\times\frac{1-\boldsymbol{L}}{(1-\boldsymbol{L}^{-n})(1-\boldsymbol{L}^{-n-1})}\end{aligned}$$

Finally we get

$$C=\frac{\boldsymbol{L}^{n+1}-1}{\boldsymbol{L}-1}(1-\boldsymbol{L}^{-n})$$

as wanted.

b) This type of result is compatible with products and we get a result for products of projective spaces for free. D. Bourqui has more general results for toric varieties [**Bou**].

c) M. Bilu in [**Bil**] has defined an Euler product giving a precise meaning for the expected constant in this setting [1].

5.3. Equidistribution in the geometric setting. — In the geometric setting equidistribution may be described as follows.

Construction 5.7. — Let $\mathscr{S}$ be a subscheme of dimension 0 of $\mathscr{C}$, then we may consider the moduli space $\mathcal{H}om(\mathscr{S},V)$ which parametrizes the morphisms from $\mathscr{S}$ to V. For any subvariety W of $\mathcal{H}om(\mathscr{S},V)$, we may then consider the set of morphisms $f:\mathbf{P}^1_k\to V$ of multidegree d such that the restriction $f_{|\mathscr{S}}$ belongs to W. This is parametrized by a variety $\mathcal{H}om^d_W(\mathscr{C},V)$ contained in $\mathcal{H}om^d(\mathscr{C},V)$.

1. The construction of M. Bilu and the work of D. Bourqui suggest that the filtration described here is not the correct one to get the expected limit. In fact, one may need a filtration such that if X and Y are geometrically irreducible varieties then $[\mathbf{L}^{-\dim(X)}X]-[\mathbf{L}^{-\dim(Y)}Y]$ belongs to $F^1\mathscr{M}_{k,\mathrm{loc}}$.

Naïve geometric equidistribution 5.8. *We shall say that* naïve equidistribution *holds for V if for any subscheme $\mathscr{S}$ of dimension* 0 *in $\mathscr{C}$ and any subvariety W of $\mathcal{H}om(\mathscr{S}, V)$, the symbol*

$$\left(\left[\mathcal{H}om^d_W(\mathscr{C}, V)\right]\left[\mathcal{H}om(\mathscr{S}, V)\right] - \left[\mathcal{H}om^d(\mathscr{C}, V)\right][W]\right)\mathbf{L}^{-\langle\omega_V^{-1}, d\rangle}$$

converges to 0 *in $\widehat{\mathscr{M}_k}$ for $d \in \mathrm{Pic}(V)^\vee \cap C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ as the distance from d to $\partial C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ goes to infinity.*

Remark 5.9. — This statement gives a precise meaning to the idea of a convergence

$$\frac{\left[\mathcal{H}om^d_W(\mathscr{C}, V)\right]}{\left[\mathcal{H}om^d(\mathscr{C}, V)\right]} \longrightarrow \frac{[W]}{\left[\mathcal{H}om(\mathscr{S}, V)\right]}.$$

5.4. Crash course about obstruction theory. — Obstruction theory gives a sufficient condition for the moduli spaces to have the expected dimension. Let us give a very short introduction to these tools, the interested reader may turn to the book of O. Debarre [**De**] for a more serious introduction to this subject.

let $f : \mathbf{P}^1_k \to V$ be a morphism of multidegree d then we may consider the tangent space at f and the dimension at f. There is a natural isomorphism

$$T_f \mathcal{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{P}^1_k, f^*(T_V))$$

and

$$\dim_f\left(\mathcal{H}om^d(\mathbf{P}^1_k, V)\right) \geqslant h^0(\mathbf{P}^1_k, f^*(T_V)) - h^1(\mathbf{P}^1_k, f^*(T_V)).$$

On the other hand, on $\mathbf{P}^1_k$, any vector bundle splits into a direct sum of line bundles. In other words, there exists an isomorphism

$$f^*(TV) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_k}(a_i)$$

with $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ and $(a_1, \ldots, a_n)$ is uniquely determined. If $a_n \geqslant 0$, then we get that $h^1(\mathbf{P}^1_k, f^*(TV)) = 0$ and

$$\begin{aligned}\dim_f\left(\mathcal{H}om(\mathbf{P}^1_k, V)\right) &= h^0(\mathbf{P}^1_k, f^*(T_V)) = \sum_{i=1}^n h^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_k}(a_i))\\ &= \sum_{i=1}^n a_i + 1 = n + \langle d, \omega_V^{-1}\rangle,\end{aligned}$$

which is the expected dimension. Thus a sufficient condition to get the expected dimension is $a_n \geqslant 0$.

But let us now add some conditions related to equidistribution. Let $\mathscr{S}$ be a subscheme of $\mathbf{P}^1_k$ of dimension 0. Then $\mathscr{S}$ corresponds to a divisor $D = \sum_{P\in I} n_P P$ on $\mathbf{P}^1_k$ and may described as $\operatorname{Spec}(\times_{P\in I}\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_k,P}/\mathfrak{m}_P^{n_P})$, where $\mathfrak{m}_P$ is the maximal ideal of the local ring $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_k,P}$. Let s be the degree of D, that is $\sum_{P\in I} n_P[\kappa(P) : k]$. Then $\mathscr{H}om(\mathscr{S}, V)$ has dimension ns; therefore if we fix $\varphi : \mathscr{S} \to V$, the expected dimension of $\mathscr{H}om^d_{\{\varphi\}}(\mathbf{P}^1_k, V)$ ought to be $n(1-s) + \langle d, \omega_V^{-1}\rangle$. But obstruction theory in that setting relates the deformation at f to the vector bundle $f^*(TV)\otimes\mathscr{O}(-D)$ therefore a sufficient condition for the dimension of the moduli space $\mathscr{H}om^d_{\{\varphi\}}(\mathbf{P}^1_k, V)$ at f to be the correct one is $a_n - s \geqslant 0$. In particular a curve is said to be *very free* if $a_n > 0$. Therefore if one wishes to have geometric equidistribution, then one ought to look at the limit as a_n goes to $+\infty$.

One should note that the counter-examples introduced in section 4.4, like the intersection of two quadrics, also show the necessity to go beyond degrees in the geometric setting.

6. Slopes à la Bost

Following the geometric analogue, we need a notion which is the arithmetic translation of the notion of very free curves. This analogue, introduced in [**Pe4**], is given by Arakelov geometry and is based upon the slopes as they are considered by J.-B. Bost.

6.1. Definition. — In this section, we again consider a nice variety V over a number field $\mathbf{K}$.

6.1.1. *Slopes of an adelic vector bundle over* $\operatorname{Spec}(\mathbf{K})$. — The following definition is a variant of the definition described in chapter II, §3.2 of this volume.

Definition 6.1. **—** Let E be a $\mathbf{K}$-vector space of finite dimension n equipped with

— A projective $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-submodule Λ_E of rank n;

— For any complex place $w \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})$, a map

$$\|\cdot\|_w : E_w = E\otimes_{\mathbf{K}}\mathbf{K}_w \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$$

such that there exists a positive definite hermitian form ϕ on E_w so that $||y||_w = \phi(y, y)$;

— For any real place $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ a euclidean norm

$$||\cdot||_w : E_w \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}.$$

Let F be a vector subspace of E. We equip it with $\Lambda_F = \Lambda \cap F$ and the restrictions of the norms. The *Newton polygon*, which we denote by $\mathscr{P}(E)$ is defined as the convex hull of the set of pairs $(\dim(F), \widehat{\deg}(F))$ where F describes the set of vector subspaces of E.

Remark 6.2. — Let us assume that $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$. If we consider the subspaces F of dimension 1, then $\widehat{\deg}(F)$ is given as $-\log(||y_0||_\infty)$ where y_0 is a generator of $\Lambda \cap F$. Thus we get the points $(1, -\log(||y||_\infty))$ where y goes over the primitive elements of the lattice Λ. In particular, there is an upper bound for the possible values of the second coordinate. More generally $\mathscr{P}(E)$ is bounded from above. In the figure 5, we represented how the points $(\dim(F), \widehat{\deg}(F))$ and the upper part of the convex hull may look like.

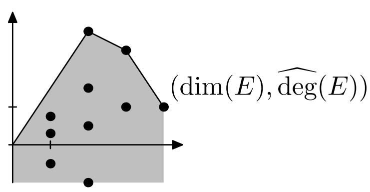


FIGURE 5. Convex hull

Construction 6.3. — Since the set $\mathscr{P}(E)$ is bounded from above, we may define the function $m_E : [0, n] \to \mathbf{R}$ by

$$m_E(x) = \max\{\, y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in \mathscr{P}(E) \,\}.$$

This function is concave and affine in each interval $[i-1, i]$ for $i \in \{1, \dots, \dim(E)\}$. The slopes of E are then given as

$$\mu_i(E) = m_E(i) - m_E(i-1)$$

for $i \in \{1, \dots, \dim(E)\}$.

Remarks 6.4. — a) By construction, we have the inequalities

$$\mu_1(E) \geqslant \mu_2(E) \geqslant \dots \geqslant \mu_{\dim(E)}(E).$$

These inequalities might not be strict. Moreover

$$\widehat{\deg}(E) = \sum_{i=1}^{\dim(E)} \mu_i(E).$$

Therefore the *slope* of E, which is defined as $\mu(E) = \frac{\widehat{\deg}(E)}{\dim(E)}$ is the mean of the slopes:

$$\mu(E) = \frac{1}{\dim(E)} \sum_{i=1}^{\dim(E)} \mu_i(E).$$

b) The value of $m_E(i)$ may differ from $\max_{\dim(F)=i}(\widehat{\deg}(F))$. However, following E. Gaudron [**Ga**, definition 5.18], we may define the successive minima of the arithmetic lattice E as follows: for $i \in \{1, \dots, \dim(E)\}$, the i-th minima $\lambda_i(E)$ is the infimum of the numbers $\theta \in \mathbf{R}_{>0}$ such that there exists a family of strictly positive real numbers $(\theta_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ and a free family $(x_1, \dots, x_i)$ in E such that

(i) The set $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \theta_w \neq 1 \,\}$ is finite;

(ii) The product $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \theta_w$ is equal to θ;

(iii) We have the inequalities

$$\|x_j\|_w \leqslant \theta_w$$

for $j \in \{1, \dots, i\}$ and $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$.

Then Minkowski's theorem gives an explicit constant $C_{\mathbf{K}}$ such that

$$0 \leqslant \log(\lambda_i(E)) + \mu_i(E) \leqslant C_{\mathbf{K}}$$

for $i \in \{\, 1, \dots, \dim(E) \,\}$. Other definitions of successive minima are given in chapter II, §3.1 and are similarly related to slopes.

c) In this chapter, the slopes are not invariant under field extensions since we did not normalise them by $\frac{1}{[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]}$. This conforms to the usual convention for heights in Manin's program, which has been chosen to get a formulation of the expected estimate which does not depend on the degree of the field.

6.1.2. *Slopes on varieties, freeness.* — We now apply the constructions of last paragraph to vector bundles on varieties.

Definition 6.5. — Let E be a vector bundle on the nice variety V of dimension n. We assume that E is equipped with an adelic norm $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ then

for any rational point $P \in V(\mathbf{K})$, the fibre E_P is an adelic vector bundle over $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ and we may define

$$\mu_i^E(P) = \mu_i(E_P).$$

In particular, if V is equipped with an adelic metric (see definition 2.5), we may define the *slopes* of a rational point $P \in V(\mathbf{K})$ as

$$\mu_i(P) = \mu_i(T_P V)$$

for $i \in \{1, \dots, n\}$.

Remarks 6.6. — a) From remark 6.4 (i), we deduce that for any rational point $P \in V(\mathbf{K})$, we have

$$\mu_n(P) \leqslant \mu_{n-1}(P) \leqslant \dots \leqslant \mu_1(P)$$

and $\widehat{\deg}(T_P V) = \sum_{k=1}^n \mu_i(P)$. But we may interpret this degree $\widehat{\deg}(T_P V) = \widehat{\deg}((\omega_V^{-1})_P)$ as the logarithmic height of P, that is $h(P) = \log(H(P))$, where the height H is defined by the induced metric on the anticanonical line bundle.

b) From the previous remark we deduce the inequalities

$$\mu_n(P) \leqslant \frac{h(P)}{n} \leqslant \mu_1(P)$$

for any rational point $P \in V(\mathbf{K})$.

Definition 6.7. — The *freeness* of a rational $P \in V(\mathbf{K})$ is defined by

$$l(P) = \begin{cases} n\frac{\mu_n(P)}{h(P)} \text{ if } \mu_n(P) > 0, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Remarks 6.8. — a) By definition the freeness of a point $l(P)$ belongs to the interval $[0, 1]$.

b) We have the equality $l(P) = 0$ if and only if the minimal slope $\mu_n(P) \leqslant 0$.

c) The equality $l(P) = 1$ occurs if and only if the lattice $T_P V$ is semi-stable, that is $\mu_1(P) = \dots = \mu_n(P)$ and $h(P) > 0$. In other words this means that $\mu(F) \leqslant \mu(T_P V)$ for any subspace F of $T_P V$. This is, for example, the case if the lattice is the usual lattice $\mathbf{Z}^n$ in $\mathbf{R}^n$ equipped with its standard euclidean structure. Up to scaling, this occurs for a point $(P, \dots, P)$ on the diagonal of $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$. Another example of a semi-stable lattice in dimension 2 is the classical hexagonal lattice $\mathbf{Z}[j]$ generated by a primitive third root of 1, as shown in figure 6. More generally for two dimensional lattices we may consider that Λ is isomorphic to the lattice $a(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau) \subset \mathbf{C}$, where a is some positive real number, $\Re(\tau) \in [-1/2, 1/2]$, $|\tau| \geqslant 1$

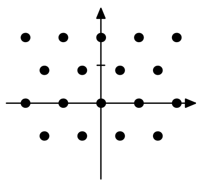


FIGURE 6. Hexagonal lattice

and $\Im(\tau) > 0$. Then a lattice is semistable if and only if $\Im(\tau) \leqslant 1$, which is drawn in grey on figure 7.

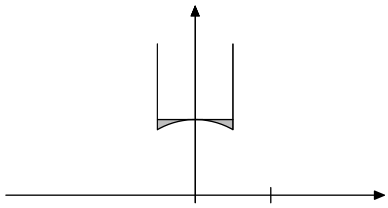


FIGURE 7. Semi-stable lattices

d) For any rational point on a curve, we have $l(P) = 1$.

e) For a surface S over $\mathbf{Q}$, an adelic metric define two invariants, namely the height H and a map $S(\mathbf{Q}) \to \mathbf{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, where $\mathbf{H}$ denotes the Poincaré half-plane $\{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$ which sends a point P to the class of τ_P such that the lattice in T_PS is isomorphic to $a_P(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau_P)$ with $a_P \in \mathbf{R}_{>0}$. Then, taking τ_P in the usual fundamental domain, the freeness of P is given by

$$l(P) = \begin{cases} 1 \text{ if } \Im(\tau_P) \leqslant 1 \text{ and } h(P) > 0, \\ 1 - \frac{\log(\Im(\tau_P))}{h(P)} \text{ if } 1 < \Im(\tau_P) < H(P), \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Indeed, in that case, we have $h(P) = -2\log(a_p) - \log(\Im(\tau_P))$ and, since $|\tau_P| \geqslant 1$, the first slope is given by

$$\mu_1(P) = \max\left(-\log(a_P), \frac{h(P)}{2}\right)$$

We get that $\mu_1(P) = \mu_2(P)$ if and only if $\Im(\tau_P) \leqslant 1$ and

$$\mu_2(P) = -\log(a_p) - \log(\Im(\tau_P)) = \frac{h(P) - \log(\Im(\tau_P))}{2}$$

otherwise.

f) By definition, the freeness $l(P)$ is invariant under field extensions. Thus a condition of the form $l(P) > \varepsilon$ does not depend on the field of definition and makes sense for algebraic points in $V(\overline{\mathbf{K}})$. On the other hand the defining condition for a thin subset, namely $P \in \varphi(X(\mathbf{K}))$ for a morphism φ as in definition 3.34 does not make sense for algebraic points.

6.2. Properties. — Let us first describe how the freeness depends on the choice of the metric.

Proposition 6.9. — *Let $\varphi : E \to F$ be a morphism of vector bundles and let $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (*resp.*$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$) be an adelic norm on E (*resp.*F) then there exists a family $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ such that*

(i) *For any $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, any $P \in V(\mathbf{K}_w)$, and any $y \in E_P$, we have*

$$\|\varphi(y)\|'_w \leqslant \lambda_w \|y\|_w;$$

(ii) *The set $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1 \,\}$ is finite.*

Proof. — Let $\mathbf{P}(E)$ be the projective bundle of the lines in E and $E^\times$ be the complement of the zero section in E. Then for any place w of $\mathbf{K}$, we may define a map $f_w : E^\times(\mathbf{K}_w) \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ by $f_w(y) = \frac{\|\varphi(y)\|'_w}{\|y\|_w}$. This map is constant on the lines and induces a continuous map $\mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_w) \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Since the space $\mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_w)$ is compact, this function is bounded from above by a constant λ_w. Moreover for almost all $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ the norms on E and F are defined by model and the morphism φ is defined over $\mathscr{O}_w$. For such a place w, for any $P \in V(\mathbf{K}_w)$, we get that

$$\varphi(\{\, y \in E_P \mid \|y\|_w \leqslant 1 \,\}) \subset \{\, y \in F_P \mid \|y\|'_w \leqslant 1 \,\},$$

therefore we may take $\lambda_w \leqslant 1$. □

Remark 6.10. — From this proposition, it follows that, if we consider norms $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ and $(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ on a vector bundle, then the quotient $\frac{\|\cdot\|'_w}{\|\cdot\|_w}$ is bounded from above and from below by a strictly positive constant. Moreover, by definition the norms are equal for almost all places. This implies the existence of a constant C such that, for any rational point $P \in V(\mathbf{K})$ and any subspace F of $T_P V$,

$$|\,\widehat{\deg}(F) - \widehat{\deg}'(F)| \leqslant C.$$

where $\widehat{\deg}'$ is the degree corresponding to the second norm.

Corollary 6.11. — *Let μ_i and μ'_i be the slopes defined by two different metrics on V and let l and l' be the corresponding freeness, then*

(i) *The difference $|\mu_i - \mu'_i|$ is bounded on $V(\mathbf{K})$;*

(ii) *There exists $C \in \mathbf{R}_{>0}$ such that*

$$|l(P) - l'(P)| < \frac{C}{h(P)}$$

for any $P \in V(\mathbf{K})$ such that $h(P) > 0$.

We now wish to describe a strong link between the geometric and arithmetic settings. Let us first define the freeness in the geometric setting.

Definition 6.12. — Let $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ be a morphism of varieties. The pull-back of the tangent bundle $\varphi^*(TV)$ is isomorphic to a direct sum $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ with $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. The slopes of φ are the integers $\mu_i(\varphi) = a_i$. We may consider $\deg_{\omega_V^{-1}}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\varphi)$ and the *freeness of* φ is defined by

$$l(\varphi) = \begin{cases} \frac{n a_n}{\deg_{\omega_V^{-1}}(\varphi)} \text{ if } a_n > 0, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Remark 6.13. — By construction $l(\varphi) \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ and $l(\varphi) > 0$ if and only if φ is very free, that is $a_n > 0$.

Proposition 6.14. — *Let $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ be a non constant morphism of varieties and assume that V is equipped with an adelic metric. Then*

$$l(\varphi(P)) \longrightarrow l(\varphi)$$

as $h_{\mathscr{O}(1)}(P) \to +\infty$.

Proof. — Let us fix an isomorphism from $\varphi^*(TV)$ to a direct sum $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ with $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. On $\varphi^*(TV)$ we consider the pull-back of the adelic metric on V and we equip the sum $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ with the direct sums of the norms induced by a norm on $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(1)$. Using the corollary 6.11, we get that the differences $|\mu_i(\varphi(P)) - a_i h_{\mathscr{O}(1)}(P)|$ is bounded, as well as $|h(\varphi(P)) -$

$\sum_{i=1}^{n} a_i h_{\mathscr{O}(1)}(P)|$. If $a_n \geqslant 0$, then the sum $\sum_{i=1}^{n} a_i$ is strictly positive since the morphism is not constant and we get

$$\left| l(\varphi(P)) - \frac{a_n n}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right| < \frac{C}{h_{\mathscr{O}(1)}(P)}.$$

If $a_n < 0$, then we get that $l(\varphi(P)) = 0$ except for a finite number of $P \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$. □

6.3. Explicit computations

6.3.1. *In the projective space.* — Let us compute the freeness for points of the projective space. We denote by H the usual height on $\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$ relative to $\omega^{-1}_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}} = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}}(N+1)$ and write $h = \log \circ H$.

Proposition 6.15. — *Let $P \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$, then*

$$l(P) = \frac{n}{n+1} + \min_F \left(\frac{-n \widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}(F) h(P)} \right)$$

where F goes over the subspaces $F \subsetneq \mathbf{K}^{n+1}$ such that $P \in \mathbf{P}(F)$.

Proof. — Let $D \subset E$ be the line in E corresponding to the projective point P. There is a canonical isomorphism from the tangent space $T_P \mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ to the quotient $D^\vee \otimes E/D^\vee \otimes D$ where $D^\vee$ is the dual of D. This gives a bijection from the set of subspaces F of E such that $D \subset F \subsetneq E$ to the strict subspaces of $T_P \mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ which maps the subspace F to the quotient $D^\vee \otimes F/D^\vee \otimes D$. Since $D^\vee \otimes D$ is canonically isomorphic to $\mathbf{K}$, the arithmetic degree of the subspace of $T_P \mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ is given by

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(D^\vee \otimes F/D^\vee \otimes D) = \widehat{\deg}(D^\vee \otimes F) - \widehat{\deg}(\mathbf{K}) \\ = \widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D). \end{aligned}$$

On the other hand, by the description of the tangent space,

$$h(P) = -(n+1)\,\widehat{\deg}(D).$$

We get that the smallest slope is given by

$$\mu_n(P) = -\widehat{\deg}(D) + \min_F \left(\frac{-\widehat{\deg} F}{\operatorname{codim}_E(F)} \right)$$

and the freeness by

$$l(P) = \frac{n}{n+1} + \min_F \left(\frac{-n\,\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}_E(F) h(P)} \right). \quad \square$$

Corollary 6.16. — *For any point $P \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$, we have*

$$l(P) \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

Remarks 6.17. — a) If we take a fixed projective subspace F in E, then $l(P)$ converges to $\frac{n}{n+1}$ as $h(P)$ goes to $+\infty$ with $P \in F$.

b) One can show that for any $\eta > 0$, there exists a constant $C > 0$ such that, for $B > 1$,

$$\sharp\{P \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \mid H(P) \leqslant B \text{ and } l(P) < 1 - \eta\} < CB^{1-\eta}.$$

Since we have an equivalence

$$\sharp\{P \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \mid H(P) \leqslant B\} \sim C(\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}})B$$

as B goes to infinity, this means that the number of points P with a freeness $l(P) < 1 - \eta$ is in fact asymptotically negligible.

6.3.2. *Products of lines.* — Despite the previous example, the freeness of points can be very small even on a homogeneous variety. Let us prove that for $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$. We equip $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$ with the product of the adelic metrics. We denote by H the usual height on $\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ relative to $\omega^{-1}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}} = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ and write $h = \log \circ H$. We shall also use h (resp.H) to denote the logarithmic (resp exponential) height on $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$.

Proposition 6.18. — *For any $\boldsymbol{P} = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n$, one gets*

$$l(\boldsymbol{P}) = \frac{n \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(h(P_i))}{\sum_{i=1}^n h(P_i)}.$$

Proof. — The tangent space $T_{\boldsymbol{P}}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$ is canonically isomorphic to $\bigoplus T_{P_i}\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ and, by construction, this isomorphism is compatible with the norms. Let us choose a permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ such that

$$h(P_{\sigma(1)}) \geqslant h(P_{\sigma(2)}) \geqslant \dots \geqslant h(P_{\sigma(n)}).$$

Then we get that $\mu_i(\boldsymbol{P}) = h(P_{\sigma(i)})$, since the the subspace of dimension i with the biggest arithmetic degree is given by $\bigoplus_{j=1}^i T_{P_{\sigma(j)}}\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$. $\square$

Corollary 6.19. — *For any* $\varepsilon > 0$, *there exist a constant* C_ε *such that*

$$\frac{\sharp\{P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \mid H(P) \leqslant B \text{ and } l(P) > \varepsilon\}}{\sharp\{P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \mid H(P) \leqslant B\}} \longrightarrow C_\varepsilon$$

as $B \to +\infty$. *Moreover* $1 - C_\varepsilon = O(\varepsilon)$.

Proof. — Let us consider the map $\boldsymbol{h} : \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \to \mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ given by $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \mapsto (h(P_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ and, for $\boldsymbol{t} = (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, write $|\boldsymbol{t}| = \sum_{i=1}^n t_i$. The height of point $\boldsymbol{P}$ in $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n$ is given by $h(\boldsymbol{P}) = |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{P})|$. By proposition 6.18, we only have to estimate the cardinal of the set

$$\left\{ (P_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n h(P_i) \leqslant \min\left(\log(B), \frac{n}{\varepsilon} \min_{1\leqslant i\leqslant n}(h(P_i))\right) \right\}.$$

Let us introduce the compact simplex $\Delta_\varepsilon(B)$ in $\mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ defined by

$$|\boldsymbol{t}| \leqslant \min\left(\log(B), \frac{n}{\varepsilon} \min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i)\right).$$

Then we may write the above set as

$$\{\boldsymbol{P} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \mid \boldsymbol{h}(\boldsymbol{P}) \in \Delta_\varepsilon(B)\}.$$

Using the estimate of S. H. Schanuel [**Sc**, theorem 1], we get

$$\sharp\{P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K}) \mid H(P) \leqslant B\} = C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})B + O(B^{1/2}\log(B)),$$

we get that, for real numbers η, δ with $0 < \eta < 1$ and $0 < \delta < 1/2$ and any $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$, we have

$$\begin{aligned}(11) \qquad &\sharp\left\{ \boldsymbol{P} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \,\middle|\, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{P}) \in \prod_{i=1}^n [t_i, t_i + \eta] \right\} \\ &= C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n e^{|\boldsymbol{t}|}(e^\eta - 1)^n + O(e^{|\boldsymbol{t}| - \delta \min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i)}) \\ &= C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n e^{|\boldsymbol{t}|}\eta^n + O(e^{|\boldsymbol{t}|}\eta^{n+1}) + O(e^{|\boldsymbol{t}| - \delta \min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i)}).\end{aligned}$$

Covering $\Delta_\varepsilon(B)$ with cubes with edges of length η, the number of such cubes meeting the boundary of the simplex is bounded by $O((\log(B)/\eta)^{n-1})$. Therefore comparing sum and integral, we get the following estimate for the cardinal of our set:

$$C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n \int_{\Delta_\varepsilon(B)} e^{|\boldsymbol{t}|} \mathrm{d}\boldsymbol{t} + O(B(\log(B))^n \eta) + O\left(\left(\frac{\log(B)}{\eta}\right)^n B^{1-\delta\varepsilon/n}\right).$$

We may take $\eta = B^{-\delta\varepsilon/(2n^2)}$ to have a sufficiently small error term. The computation of the integral gives $BP_\varepsilon(\log(B))$ where P_ε is a polynomial of degree $n-1$ and leading coefficient $\frac{1}{(n-1)!} + O(\varepsilon)$. To conclude, we note that $C((\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n) = \frac{1}{(n-1)!}C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$. □

Remarks 6.20. — a) The proof shows that the number of points with freeness $< \varepsilon$ is not negligible in this case!

b) If we consider as in section 4 the points P in $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n_{h\in\mathscr{D}_B}$ where $\mathscr{D}_B = \mathscr{D}_1 + \log(B)u$, with $u = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, then

$$l(P) \longrightarrow \frac{n\min_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i)}{\sum_{i=1}^n u_i}$$

as B goes to infinity. Thus, in this case, the set

$$\{\, P \in V(\mathbf{K}) \mid h(P) \in \mathscr{D}_B,\ l(P) < \varepsilon \,\}$$

is empty for B big enough.

6.4. Accumulating subsets and freeness. — We are now going to show that the freeness gives valuable information about points related to accumulating phenomena.

6.4.1. *Rational curves of low degree.* — Conjecturally the accumulating subsets on projective surfaces are rational curves of low degree. More precisely, the number of points on a rational curve L in a nice variety V for a height given by an adelic metric is equivalent to $C(L)B^{2/\langle L,\omega_V^{-1}\rangle}$. Therefore such a curve would be accumulating if $\langle L,\omega_V^{-1}\rangle < 2$ and could be weakly accumulating if $\langle L,\omega_V^{-1}\rangle = 2$ and the rank of the Picard group of the variety is 1. On a surface S, by the adjunction formula,

$$-2 = \deg(\omega_L) = \langle L, L\rangle + \langle L, \omega_S\rangle.$$

If the rank of the Picard group $\mathrm{Pic}(V)$ is one, any effective divisor is ample since S is projective, in that case $\langle L, L\rangle > 0$, hence $\langle L, \omega_S^{-1}\rangle > 2$ which excludes the last case for a surface. The remaining cases are covered by the following proposition.

Proposition 6.21. — *Let V be a nice variety on the number field $\mathbf{K}$, and let L be a rational curve in V such that $\langle L,\omega_V^{-1}\rangle < 2$. Then the set*

$$\{\, P \in L(\mathbf{K}) \mid l(P) > 0 \,\}$$

is finite.

Proof. — Choose a morphism $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to L$ which is birational and an isomorphism $\varphi^*(TS) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ with $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Then $\mu_i(\varphi) = a_i$ and $\sum_{i=1}^n \mu_i(\varphi) = \langle L, \omega_V^{-1}\rangle < 2$. We have a natural morphism $T\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to \varphi^*(TV)$ which implies that $a_1 \geqslant 2$. Therefore $a_2 < 0$ and we may apply proposition 6.14. □

Remarks 6.22. — a) If we consider only the rational points which satisfy the condition $l(P) > \varepsilon(B)$ for some decreasing function ε with values in $\mathbf{R}_{>0}$, then we exclude all points of L outside a finite set.

b) In dimension $\geqslant 3$, if $\langle L, \omega_V^{-1}\rangle = 2$, then we get that the freeness $l(P)$ goes to 0 on L. This applies to the projective lines in cubic volumes or complete intersections of two quadrics in $\mathbf{P}^6$.

6.4.2. *Fibrations*. — We remind the reader that, in the counter-example of Batyrev and Tschinkel [**BT1**], the accumulating subset is the reunion of fibers of a fibration. We are now going to explain that the freeness also detects such abnormality.

Proposition 6.23. — *Let $\varphi : X \to Y$ be a dominant morphism of nice varieties. Then there exists a constant C such that for any $P \in X(\mathbf{K})$ such that the linear map $T_P\varphi$ is onto,*

$$\mu_{\dim(X)}(P) \leqslant \mu_{\dim(Y)}(\varphi(P)) + C.$$

If, moreover, the logarithmic height of P is strictly positive, we get the inequality:

$$l(P) \leqslant \frac{mh(\varphi(P))}{nh(P)} l(\varphi(P)) + \frac{mC}{h(P)}$$

with $m = \dim(X)$ and $n = \dim(Y)$.

Proof. — The linear map $T_P\varphi$ induces a dual map $T_P\varphi^\vee : T_{\varphi(P)}Y^\vee \to T_PX^\vee$ which is injective. Using $|||\cdot|||$ to denote the usual operator norm, we get an inequality

$$\begin{aligned}\mu_1(T_{\varphi(P)}Y^\vee) &\leqslant \mu_1(T_PX^\vee) + \max_{1\leqslant k\leqslant \dim(Y)} \left(\frac{\log\left(\left|\left|\left|\bigwedge^k T_P\varphi^\vee\right|\right|\right|\right)}{k}\right)\\ &\leqslant \mu_1(T_PX^\vee) + C.\end{aligned}$$

We conclude with the duality formula for slopes. □

Corollary 6.24. — *Let $Q \in Y(\mathbf{K})$ be a non critical value of φ, then $l(P)$ converges to 0 as $h(P)$ goes to $+\infty$ with P in the fibre $X_Q(\mathbf{K})$.*

Remark 6.25. — In particular, this detects bad points in the counter-example of Batyrev and Tschinkel. Of course this result applies to $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^2$ as well. In fact it is the very property which makes freeness efficient to detect bad points in the counter-example of Batyrev and Tschinkel which implies that the proportion of rational points in $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^2$ with small freeness is not negligible. Section 7 will show how the freeness reveals subvarieties which are locally accumulating even if they are not globally accumulating.

6.5. Combining freeness and heights. — To conclude this part, let us suggest a formula which takes into account both the freeness and all the heights.

Definition 6.26. — Let $\mathscr{D}_1$ be a compact polyhedron in $\mathrm{Pic}(V)^\vee_{\mathbf{R}}$ and let $u \in C^\circ_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$. For any $B > 1$ we define $\mathscr{D}_B = \mathscr{D}_1 + \log(B)u$. Let $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ be small enough, relatively to the distance from u to the boundary of $C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$. Then we define

$$V(\mathbf{K})^{l>\varepsilon}_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B} = \{\, P \in V(\mathbf{K}) \mid \boldsymbol{h}(P) \in \mathscr{D}_B, l(P) > \varepsilon \,\}.$$

Instead of using a constant ε, we could also consider a slowly decreasing function in B as in [**Pe4**]. With these notations, we can present our final problematic:

Question 6.27. — *We assume that our nice variety V satisfies the conditions of the hypothesis 3.27. Do we have an equivalence*

$$\sharp V(\mathbf{K})^{l>\varepsilon}_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B} \sim \beta(V)\nu(\mathscr{D}_1)\boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})B^{\langle\omega_V^{-1},u\rangle} \tag{12}$$

as B goes to infinity?

Equidistribution 6.28. *We shall say that* free points are equidistributed for $\boldsymbol{h}$ *if the measure $\boldsymbol{\delta}_{V(\mathbf{K})^{l>\varepsilon}_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B}}$ converges weakly to $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Br}}_V$ as B goes to infinity.*

7. Local accumulation

The rational points on $\mathbf{P}^2_{\mathbf{K}}$ and $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^2$ are equidistributed in the sense of naïve equidistribution 3.9. But if one looks at figures 1 and 2, we see lines, which are all projective lines for the projective plane and the fibres of the two projections for the product of two projective lines. To interpret these lines, we need to go beyond the global distribution.

7.1. Local distribution. — Let us assume that $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ to simplify the discussion. Instead of looking at the proportion of points in a fixed open subset U in the adelic space, we may look at the rational points of bounded height in a open subset U_B depending on B and ask the very broad question

Question 7.1. — *For which families $(U_B)_{B>1}$ of open subsets in $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ can we hope to have*

$$\frac{\sharp U_B \cap V(\mathbf{Q})_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B}}{\sharp V(\mathbf{Q})_{\boldsymbol{h}\in\mathscr{D}_B}} \sim \boldsymbol{\mu}_V^{\mathrm{Br}}(U_B)$$

as B goes to infinity?

A particularly interesting case is the distribution around a rational point. Fix $P_0 \in V(\mathbf{Q})$ and choose a local diffeomorphism $\rho : W \to W'$, where W is an open subset in $V(\mathbf{R})$ and W' is an open subset of $T_{P_0}V_{\mathbf{R}}$, which maps P_0 to 0 and such that the differential at P_0 is the identity map. Then we may try to zoom in on the point P_0 with some power of B. More precisely, let us consider the ball

$$\mathscr{B}(0,R) = \{y \in T_{P_0}V_{\mathbf{R}} \mid \|y\|_\infty \leqslant R\}.$$

We may then introduce the probability measure on $\mathscr{B}(0,R)$ defined by

$$\delta^{\alpha}_{R,B} = \frac{1}{\sharp(V(\mathbf{Q})_{H\leqslant B} \cap \rho^{-1}(\mathscr{B}(O,RB^{-\alpha})))} \sum_{\substack{P\in V(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}\\ \rho(P)\in\mathscr{B}(0,RB^{-\alpha})}} \delta_{B^{\alpha}\rho(P)}.$$

Remarks 7.2. — a) Let us assume that P_0 belongs to a Zariski open subset of V on which the rational points of bounded height are equidistributed in the sense of 3.31. For $\alpha = 0$, we get the measure induced on $B(0,R)$ by $\rho_*(\mu_\infty)$.

b) Under the same hypothesis, if α is small, corresponding to a small zoom, we may expect that the points are evenly distributed: the measure converges to the probability measure induced by the Lebesgue measure.

c) If α is big enough, diophantine approximation tells us that there is no rational point that near to the rational point P_0. In other words, for α big enough the above measure is the Dirac measure at P_0.

We are interested in the critical values of α, that is those for which the asymptotic behaviour of the measure $\delta^{\alpha}_{R,B}$ changes. In particular, we can consider the smallest value of α for which the measure is not the Dirac measure at P_0, which is the biggest of the critical values. This is directly related to the generalisation of the measures of irrationality introduced by D. McKinnon and M. Roth in [**MR**].

In our context, with a height defined by an adelic metric on V, the archimedean metric defines a distance d_∞ on $V(\mathbf{R})$. Then if W is a constructible subset of V containing P_0, we define in this text $\alpha_W(P_0)$ as the infimum of the set of $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$ such that for any $C \in \mathbf{R}$ the set

$$\left\{ Q \in W(\mathbf{Q}) \,\middle|\, d_\infty(Q, P_0) < \frac{C}{H(Q)^\alpha} \right\}$$

is finite. Since ρ is a diffeomorphism, $\alpha_V(P_0)$ corresponds to the biggest critical value.

Remark 7.3. — In this text, we take the inverse of the constant defined by D. McKinnon and M. Roth in their paper (*loc. cit.*), since it better expresses the power appearing in the zoom factor.

In [**Mc**], D. McKinnon suggests that there should exist rational curves L in V such that $\alpha_V(P_0) = \alpha_L(P_0)$. In other words the best approximations should come from rational curves. On the other hand D. McKinnon and M. Roth [**MR**, theorem 2.16] give the following formula for $\alpha_L(P_0)$: let $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to L$ be a normalisation of the curve L

$$\alpha_L(P_0) = \max_{Q \in \varphi^{-1}(P_0)} \frac{r_Q m_Q}{d}$$

where $d = \deg(\varphi^*(\omega_V^{-1}))$, m_Q is the multiplicity of the branch of L through x corresponding to Q and r_Q corresponds to the approximation of Q by rational points in $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ and is given by Roth theorem [**Ro**]:

$$r_Q = \begin{cases} 0 \text{ if } \kappa(Q) \not\subset \mathbf{R}, \\ 1 \text{ if } \kappa(Q) = \mathbf{Q}, \\ 2 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

On the other hand, if we take a sequence of rational points $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on $L(\mathbf{Q})$ which converges to P_0 then $(H(Q_n))_{n\in\mathbf{N}}$ goes to $+\infty$ and therefore, by proposition 6.14, we have that $(l(Q_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converges to $l(\varphi)$. In the case where there exists a branch of degree 1 through P_0, if the deformations of the morphism φ are contained in a strict subvariety, this means that all the tangent vectors in $T_{P_0}V$ can not be obtained by a deformation of φ and thus φ can not be very free. Under these assumptions, we get that $l(\varphi) \leqslant 0$ and therefore $(l(Q_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converges to 0. Therefore, if the locally accumulating subvarieties are dominantly covered

by rational curves, we may expect that the freeness of the points on these locally accumulating subvarieties tends to 0.

In [**Hu1**], [**Hu2**], and [**Hu3**], 黄治中 studies the local distribution of points on various toric surfaces, exhibiting phenomena like local accumulating subvarieties, and locally accumulating thin subsets.

8. Another description of the slopes

Construction 8.1. — For any vector bundle E of rank r on V, we may define the *frame bundle of* E, denoted by $F(E)$, as the GL_r-torsor of the basis in E: for any extension $\mathbf{L}$ of $\mathbf{K}$ and any point $P \in V(\mathbf{L})$, the fibre of $F(E)$ at P is the set of basis of the fibre E_P. For a line bundle L, the frame bundle $F(L)$ is equal to $L^{\times}$.

Let us now assume that the vector bundle E is equipped with an adelic norm $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Then for any place w, any point $P \in V(\mathbf{K}_w)$ and any basis $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_r) \in F(E)_P$ we get an element M_w in $\mathrm{GL}_r(\mathbf{K}_w)/K_w$ where

$$K_w = \begin{cases} \mathrm{GL}_r(\mathscr{O}_w) \text{ if } w \text{ is ultrametric,} \\ O_r(\mathbf{R}) \text{ if } w \text{ is real,} \\ U_r(\mathbf{R}) \text{ if } w \text{ is complex.} \end{cases}$$

which is the class of the matrix of the coordinates of $(e_1, \dots, e_r)$ in a basis of the $\mathscr{O}_w$ lattice (resp. orthonornal basis) defined by $\|\cdot\|_w$ if w is ultrametric (resp. non-archimedean). We get a map

$$F(E)(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})/K,$$

where K is the compact subgroup $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} K_w$. Taking the quotient by $\mathrm{GL}_r(\mathbf{K})$ for the rational points we get a map

$$V(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbf{K})\backslash \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})/K.$$

Let us denote by Q_r the biquotient on the right, we get a map

$$\tau_E : V(\mathbf{K}) \longrightarrow Q_r.$$

The determinant composed with product of the norms gives a morphism of groups from the adelic group $\mathrm{GL}_n(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ to $\mathbf{R}_{>0}$ which is invariant under the action of K on the right and the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ on the left, this gives a map $|\det| : Q_r \to \mathbf{R}_{>0}$. The composition $|\det| \circ \tau_E$ coincides with the exponential height H_E defined by E with its adelic norm.

Similarly, since the slopes μ_i^E are defined in terms of the $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module defined by the norms at the ultrametric places equipped with the non-archimedean

norms, we may factorise the slopes through Q_r, and the freeness of a rational point P may also be computed in terms of $\tau_{TV}(P)$.

Remarks 8.2. — a) In Q_r, we may consider the subset Q_r^1 of points P such that $|\det|(P) = 1$. The determinant map then defines a map $Q_r^1 \to \mathbf{K}^*\backslash\mathbf{G}_m(\mathcal{A}_\mathbf{K})^1/K_{\mathbf{G}_m}$ where $K_{\mathbf{G}_m}$ is the product over the places w of the maximal compact subgroup in $\mathbf{G}_m(\mathbf{K}_w)$. We get a map $c : Q_r^1 \to \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_\mathbf{K})$; the composition map $c \circ \tau_E$ maps a rational point P onto the class of the projective $\mathscr{O}_\mathbf{K}$-module defined by the ultrametric norms in E_P. As an example, for the projective space $\mathbf{P}^n_\mathbf{K}$, with $E = TV$, this maps a point $P = [y_0 : \dots : y_n]$ with integral homogeneous coordinates to $(n+1)$ times the class of the ideal $(y_0, \dots, y_n)$.

b) For surfaces, as described in remark 6.8 e), the slopes, and thus the freeness, measures the deformation of the lattice or the proximity to the cusp in the modular curve $X(1)$. The above construction generalises this description in higher dimension.

c) The frame bundle would enable GL_n descent on varieties for which the lifting to versal torsors is not sufficient. In fact we may extend this and consider bundles giving geometric elements in the Brauer group. This may provide a method to generalise the construction of Salberger [**Sal**] in the case the geometric Brauer group is not trivial.

9. Conclusion and perspectives

In these notes we made a quick survey of the various directions to upgrade the principle of Batyrev and Manin to include the cases of Zariski dense accumulating subsets. Let me summarize these options:

1. Remove accumulating thin subsets. This method has been successful in several cases. However, this notion depends on the ground field and we could imagine situations in which there are infinitely many thin subsets to remove, similar to the situation of K3-surfaces containing infinitely many rational lines which are all accumulating.
2. Consider all heights. This method may apply to fibrations and other cases in which the accumulating subsets come from line bundles. However, as shown by examples of Picard rank one, this is not enough to detect accumulating subsets of higher codimension.
3. As in [**Pe4**], we could use a height defined by an adelic metric and the freeness. But the freeness condition tends to remove too many points as

shown by the product of projective lines. A recent example by W. Sawin [**Sa**] indicates this is not enough.

4. Combine all heights and freeness. This combination is inspired by the geometric analogue.

This list is far from exhaustive. In fact, we could consider the slopes given by norms on any vector bundle on our variety which gives a profusion of probably redundant invariants. Arakelov geometry is a very natural tool to attack this question of redundancy and look for a minimal set of slopes controlling the distribution of points.

The freeness, which is in part suggested by the analogy with the geometric setting, is very efficient to detect local adelic deformations which correspond to local or global accumulation. However this invariant is particularly difficult to compute efficiently. Indeed its explicit computation is related to the finding of a non-zero vector of minimal length in a lattice which is known to be computationally difficult. At the time of writing, the following question is still open [(2)]:

Question 9.1. — *Let V be a smooth hypersurface of degree d in $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, with $d \geqslant 3$ and $N > (d-1)2^d$. Is the cardinal of points $x \in V(\mathbf{Q})$ with $l(x) < \varepsilon$ and $H(x) < B$ negligible as B goes to infinity?*

In other words, the author is still lacking methods giving lower bounds for the smallest slope, but again we may hope that the techniques of Arakelov geometry may provide the necessary tools.

References

[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), n° 1, 89–108.

[Ba] V. V. Batyrev, *The cone of effective divisors of threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

2. A result in that direction was obtained by T. Browning and W. Sawin [**BS**]

[BT2] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Bil] M. Bilu, *Motivic Euler products and motivic height zeta functions*, `http://arxiv.org/abs/1802.06836` (2018).

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bo] Lev A. Borisov, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*, J. of Algebraic Geometry **27** (2018), 203–209.

[Bki] N. Bourbaki, *Topologie Algébrique, Chapitre 4*, Springer-Verlag, Berlin, 2015.

[Bou] D. Bourqui, *Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques*, Compos. Math. **145** (2009), 1360–1400.

[Bre] R. de la Bretèche, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[BBP] R. de la Bretèche, T. D. Browning, and E. Peyre, *On Manin's conjecture for a family of Châtelet surfaces*, Ann. of Math. **175** (2012), 297–343.

[BHB] T. Browning and D.R. Heath-Brown, *Density of rational points on a quadric bundle in* $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$, `http://arxiv.org/abs/1805.10715` (2018).

[BL] T. Browning and D. Loughran, *Varieties with too many rational points*, Math. Zeit. **285** (2017), n° 3, 1249–1267.

[BS] T. Browning and W. Sawin, *Free rational points on smooth hypersurfaces*, `http://arxiv.org/abs/1906.08463` (2019), pp. 1–23.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ______, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS3] ______, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[De] O. Debarre, *Higher dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Del] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[DL] J. Denef and F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), 201–232.

[Des] K. Destagnol, *La conjecture de Manin sur les surfaces de Châtelet*, Acta Arith. **174** (2016), 31–97.

[Ell] Jordan S. Ellenberg, Akshay Venkatesh, and Craig Westerland, *Homological stability for Hurwitz spaces and the Cohen-Lenstra conjecture over function fields.*, Ann. Math. (2) **183** (2016), 729–786.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[FLS] C. Frei, D. Loughran, and E. Sofos, *Rational points of bounded height on general conic bundle surfaces*, Proc. London Math. Soc. **117** (2018), n° 2, 407–440, `http://arxiv.org/abs/1609.04330`.

[Ga] É. Gaudron, *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008), 21–95.

[Gr] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki 13-ème année, 1960/61, n° 221.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.

[Hu1] 黄治中 (Huáng Zhì Zhōng), *Distribution locale des points rationnels de hauteur bornée sur une surface de del Pezzo de degré 6*, Int. J. of Number Theory **7** (2017), 1895–1930.

[Hu2] ———, *Approximation diophantienne et distribution locale sur une surface torique II*, Bull. Soc. Math. Fr. (2018), To appear.

[Hu3] ———, *Approximation diophantienne et distribution locale sur une surface torique*, Acta Arith. **189** (2019), n° 1, 1–94.

[Ka] M. Kapranov, *The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups*, `http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0001005` (2001).

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[LTT] B. Lehmann, S. Tanimoto, and Y. Tschinkel, *Balanced line bundles on Fano varieties*, à paraître dans Journ. Reine und Angew. Math. (2016).

[Le] J. Leray, *Hyperbolic differential equations*, The Institute for Advanced Study, Princeton, 1953.

[Ma] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Mc] D. McKinnon, *A conjecture on rational approximations to rational points*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), 253–303.

[MR] D. McKinnon and M. Roth, *Seshadri constants, diophantine approximation and Roth's theorem for arbitrary varieties*, Invent. Math. **200** (2015), n° 2, 513–583.

[No1] D. G. Northcott, *An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 502–509.

[No2] ———, *Further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 510–518.

[Ono1] T. Ono, *On some arithmetic properties of linear algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), n° 2, 266–290.

[Ono2] ———, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), n° 1, 101–139.

[Ono3] ———, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n° 1, 47–73.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[Pe3] ———, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Séminaire Bourbaki 56-ème année, 2003/04, n° 931.

[Pe4] ———, *Liberté et accumulation*, Documenta Math. **22** (2017), 1615–1659.

[Ro] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20, corrigendum ibid. 2, 168 (1955).

[Ru] C. Le Rudulier, *Points algébriques de hauteur bornée*, Ph.D. thesis, Université de Rennes 1, 2014.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sa] W. Sawin, *Freeness alone is insufficient for Manin-Peyre*, `http://arxiv.org/abs/2001.06078` (2020).

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Se3] ———, *Topics in Galois theory*, 2nd ed. ed., Research Notes in Math., vol. 1, Wellesley MA: A K Peters, 2007.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

February 15, 2024

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes et CNRS, CS 40700, 38058 Grenoble CEDEX 09, France
E-mail : Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr

PARTIE B

COHOMOLOGIE GALOISIENNE ET MOTIVIQUE

UNRAMIFIED COHOMOLOGY AND RATIONALITY PROBLEMS*

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — The aim of this paper is to construct unirational function fields K over an algebraically closed field of characteristic 0 such that the unramified cohomology group $H^i_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes i})$ is not trivial for $i = 2$, 3 or 4 and p a prime number. This implies that the field K is not stably rational. For this purpose, we give a sufficient condition for an element to be unramified in $H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$. This condition relies on computations in the exterior algebra of a vector space of finite dimension over the finite field $\mathbf{F}_p$.

Résumé. — L'objectif de ce texte est de construire des corps de fonctions unirationels K sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 dont la cohomologie non ramifiée $H^i_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes i})$ est non nulle pour $i = 2$, 3 ou 4 et p un nombre premier. Cela implique que le corps K n'est pas stablement rationnel. Dans ce but, nous donnons une condition suffisante pour qu'un élément de $H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$ ne soit pas ramifié. Cette condition repose sur un critère utilisant l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{F}_p$

Among the first examples of smooth projective varieties X over $\mathbf{C}$ which are unirational but not rational was the example constructed by Artin and Mumford using the torsion part of $H^3(X, \mathbf{Z})$. When X is unirational, this group may also be described as the unramified Brauer group of the function field of X. From this point of view, Saltman [**Sa**] and Bogomolov [**Bo**] gave examples related to Noether's problem. Colliot-Thélène and Ojanguren [**CTO**] were the first to use the unramified cohomology groups in degree 3 to prove the non-rationality of a unirational field.

*Math. Ann **296** (1993), 247–268

The plan of this paper is the following: first we recall some basic facts about unramified cohomology. In the second section, we state the main result, Theorem 2, which enables one to characterize unramified elements by calculations in the exterior algebra. This generalizes some of the methods used in [**Sa**] and [**Bo**]. In the next section, we prove Theorem 2. In this proof, we show how one can lift the residue map in the exterior algebra of a subgroup of $H^1(K, \mu_p)$ of finite dimension. The fourth section applies the main result to the construction of several unirational non-rational fields. In this part, to prove the non-triviality of elements in $H^3_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes 3})$, we use a recent result by Suslin [**Su**] and to have a similar result for $H^4_{\mathrm{nr}}(K, \mu_2^{\otimes 4})$, we apply a theorem of Jacob and Rost [**JR**]. For the examples with non-trivial $H^3_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes 3})$, we prove also that the unramified Brauer group is trivial.

1. Unramified cohomology: definition and basic properties

Let us first give a few definitions about fields. These definitions are used throughout this paper.

***Definition* . —** (i) A field L is a *function field* over a field K if it is generated by a finite number of elements as a field over K.

(ii) A function field L over K is *rational* over K if there exist indeterminates $T_1, \dots, T_m$ and an isomorphism $L \xrightarrow{\sim} K(T_1, \dots, T_m)$ over K.

(iii) Two function fields L and M over K are *stably isomorphic* if there exist indeterminates $U_1, \dots, U_l$, $T_1, \dots, T_m$ and an isomorphism $L(U_1, \dots, U_l) \xrightarrow{\sim} M(T_1, \dots, T_m)$ over K. A function field L is *stably rational* over K if L is stably isomorphic to K.

(iv) A function field L over K is *unirational* over K if there exist indeterminates $T_1, \dots, T_m$ and an injection $L \to K(T_1, \dots, T_n)$ over K.

We have the following relations between the various kind of rationalities: L rational over K implies L stably rational over K and L stably rational over K implies L unirational over K.

From now on we shall omit "over K" when K is clear from the context.

***Notation* . —** Let k be an algebraically closed field of characteristic 0. If L is a field, let us denote by L^s a separable closure of L, and for any $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module M, $H^i(L, M) = H^i(\mathrm{Gal}(L^s/L), M)$. In particular, the Brauer group is defined by $\mathrm{Br}(L) = H^2(L, L^{s*})$. If L is of characteristic prime to n, we use μ_n to denote the group of n-th roots of unity in L^s and, when the characteristic of L is 0, μ_∞

to denote the union of the groups μ_n. In this case $\mathrm{Br}(L)$ is a torsion group and the n-torsion part of the Brauer group is isomorphic to $H^2(L, \mu_n)$ Let K be a function field over k. We denote by $\mathscr{P}(K)$ the set of discrete valuation rings A of rank one such that $k \subset A \subset K$ and the fraction field $\mathrm{Fr}(A)$ of A is K. If $A \in \mathscr{P}(K)$ then κ_A denotes the residue field. For any $i \in \mathbf{N} - \{0\}$ and $j \in \mathbf{Z}$

$$\partial_A : H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

denotes the residue map. We also denote by ∂_A the residue map

$$\partial_A : \mathrm{Br}(K) \to H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

We recall that the residue maps may be defined as follows: let $\hat{K}$ be the completion of K for A, $\hat{K}_{alg}$ an algebraic closure of $\hat{K}$ and $\hat{K}_{nr}$ the maximal unramified extension of $\hat{K}$ in $\hat{K}_{alg}$. Since there exists an isomorphism $\hat{K} \xrightarrow{\sim} \kappa_A((T))$, we have an isomorphism from $\hat{K}_{nr}$ to the algebraic closure $\kappa_A^s((T))_{alg}$ of $\kappa_A((T))$ in $\kappa_A^s((T))$ and

$$\hat{K}_{alg} \xrightarrow{\sim} \varinjlim \kappa_A^s((T^{1/n}))_{alg}.$$

Therefore we get an isomorphism

$$\mathrm{Gal}(\hat{K}_{alg}/\hat{K}_{nr}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mu_n.$$

But the cohomological dimension of $\hat{\mathbf{Z}}$ is one (see [**Se**], example 1 on page I-19). Therefore $H^q(\hat{K}_{nr}, \mu_n^{\otimes j}) = 0$ if $q \geqslant 2$ and the Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^p(\mathrm{Gal}(\hat{K}_{nr}/\hat{K}), H^q(\hat{K}_{nr}, \mu_n^{\otimes j})) \Rightarrow H^{p+q}(\hat{K}, \mu_n^{\otimes j})$$

gives rise to morphisms

$$H^i(\hat{K}, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\mathrm{Gal}(\hat{K}_{nr}/\hat{K}), H^1(\hat{K}_{nr}, \mu_n^{\otimes j})).$$

But

$$H^{i-1}(\mathrm{Gal}(\hat{K}_{nr}/\hat{K}), H^1(\hat{K}_{nr}, \mu_n^{\otimes j})) \xrightarrow{\sim} H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

and ∂_A is the composed map

$$H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i(\hat{K}, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1}).$$

The maps ∂_A on $H^2(K, \nu n1)$ induce then the residue map

$$\mathrm{Br}(K) \to H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

***Definition* .** — The *unramified cohomology groups* are the groups

$$H^i_{\mathrm{nr}}(K,\mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A\in\mathscr{P}(K)} \mathrm{Ker}(H^i(K,\mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(\kappa_A,\mu_n^{\otimes j-1})).$$

Similarly the *unramified Brauer group* is

$$\mathrm{Br}_{nr}(K) = \bigcap_{A\in\mathscr{P}(K)} \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\partial_A} H^1(\kappa_A,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

The unramified cohomology groups were denoted by $F_n^{i,j}(K/k)$ in [**CTO**], but, here, the ground field k is fixed. Therefore we do not include it in the notation.

***Proposition 1* (Colliot-Thélène and Ojanguren [CTO])**
If the function fields K and L are stably isomorphic over k then

$$H^i_{nr}(K,\mu_n^{\otimes j}) \tilde{\to} H^i_{nr}(L,\mu_n^{\otimes j}).$$

In particular, if K is stably rational then $H^i_{nr}(K,\mu_n^{\otimes j}) = \{0\}$.

Remark 1. — One can also show that the unramified Brauer group depends only on the stable rationality class of the field. This is the invariant which was used by Artin and Mumford in [**?**]. The unramified cohomology groups may be considered as generalizations of the unramified Brauer group. Indeed, if $i = 2$, the unramified cohomology groups are isomorphic to the n-torsion part of the unramified Brauer group:

$$\mathrm{Br}_{nr}(K)_{(n)} \tilde{\to} H^2_{\mathrm{nr}}(K,\mu_n).$$

2. Characterization of unramified elements using the exterior algebra

Let p be a prime number and k an algebraically closed field of characteristic 0. Throughout this paper, we shall start from data of the following type: a function field K, an $\mathbf{F}_p$ vector space U of finite dimension, whose dual is denoted by $U^\vee$ and a morphism $\phi^1 : U^\vee \to H^1(K,\mu_p)$.

Since $\mu_p \subset k$, we can choose a primitive p-th root of unity. Thus, if ϕ^1 is an injection, the group U may also be considered as a quotient of the absolute Galois group of K. In the examples we have in mind, the field K will be of the form L^U, where L is a rational extension of k endowed with an action of U.

Then we take n to be a strictly positive integer. For an integral ring B whose characteristic does not divide n, we denote by $H^i_{ét}(B,\mu_n^{\otimes i})$ the

group $H^i_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(B), \mu_n^{\otimes i})$. Kummer theory then yields a canonical morphism $B^* \to H^1_{\acute{e}t}(B, \mu_n)$. The image of $x \in B^*$ under this map will be denoted by (x). We shall consider the group $H(B)_n = \sum_{i \in \mathbf{N}} H^i_{\acute{e}t}(B, \mu_n^{\otimes i})$, (mainly when B is a field or a local ring). Cup-product makes $H(B)_n$ into a ring. We know that this ring is anticommutative [**Mi**, Chapter V, §1] but we shall use the following well-known result:

Lemma 1. — *Let B be an integral ring such that n is invertible in B. Then, for any $x \in B^*$, $(x) \cup (-x) = 0$.*

This lemma implies that, if the characteristic of B does not divide $2n$ and B contains the $2n$-th roots of unity, the subalgebra of $H(B)_n$ generated by the symbols (x) for $x \in B^*$ is strictly anticommutative.

Proof. — Let $B' = B[T]/(T^n - x)$. Since n and x belong to B^*, the map $\pi : \mathrm{Spec} B' \to \mathrm{Spec} B$ is étale. Moreover it is finite and of constant degree n. Therefore, for any sheaf F of n-torsion on $\mathrm{Spec} B$, one can define the transfer map $tr : \pi_* \pi^* F \to F$ [**SGA4**, exposé XVIII, théorème 2.9] which yields morphisms $tr : H^i_{\acute{e}t}(B', \mu_n^{\otimes i}) \to H^i_{\acute{e}t}(B, \mu_n^{\otimes i})$ and we have

$$tr\Big((-T)\Big) = \Big(N_{B'/B}(-T)\Big) = \left(\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & -x \\ -I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\right) = (-x)$$

and we have the formula [**Mi**, Chapter V, §1]

$$\begin{aligned} (x) \cup (-x) &= (x) \cup tr\Big((-T)\Big) \\ &= tr\Big(\pi^*\Big((x)\Big) \cup (-T)\Big) \\ &= tr\Big((x) \cup (-T)\Big) \\ &= tr\Big((T^n) \cup (-T)\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Thanks to this lemma, we get a morphism of graded $\mathbf{F}_p$-algebras $\phi : \Lambda^* U^\vee \to H(K)_p$. Thus for a fixed strictly positive integer i, we have a natural morphism

$$\Lambda^i(U^\vee) \to H^i(K, \mu_p^{\otimes i}).$$

We may identify $\Lambda^i(U^\vee)$ and $(\Lambda^i U)^\vee$ by the map:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^i(U^\vee) & \to & (\Lambda^i U)^\vee \\ f_1\wedge\ldots\wedge f_i & \mapsto & \left(\begin{array}{rcl} \Lambda^i U & \to & \mathbf{F}_p \\ v_1\wedge\ldots\wedge v_i & \mapsto & \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_i}\varepsilon(\sigma)f_1(v_{\sigma(1)})\ldots f_i(v_{\sigma(i)}) \end{array}\right) \end{array}$$

With this identification, for any basis $(u_1,\ldots,u_n)$ of U, the dual basis of $(u_{j_1}\wedge\ldots\wedge u_{j_i})_{j_1<\ldots<j_i}$ is the basis $(u_{j_1}^\vee\wedge\ldots\wedge u_{j_i}^\vee)_{j_1<\ldots<j_i}$, where $(u_1^\vee,\ldots,u_n^\vee)$ denotes the dual basis of $(u_1,\ldots,u_n)$.

Notation . — In this way we get a morphism

$$\phi^i:(\Lambda^i U)^\vee\to H^i(K,\mu_p^{\otimes i}).$$

Let $S^i=(\operatorname{Ker}\phi^i)^\perp\subset\Lambda^i U$. We obtain an injection

$$\hat{\phi}^i:\operatorname{Hom}(S^i,\mathbf{F}_p)\to H^i(K,\mu_p^{\otimes i}).$$

Let $S^i_{dec}\subset S^i$ be the subgroup of S^i generated by the elements of the form $u\wedge v\in S^i$ with $u\in U$ and $v\in\Lambda^{i-1}U$.

I am thankful to Bruno Kahn who pointed out to me that this construction also applies to the case $p=2$.

Theorem 2. — *With notation as above, if f is an element of* $\operatorname{Hom}(S^i,\mathbf{F}_p)$ *such that $f_{|S^i_{dec}}$ is zero, then*

$$\hat{\phi}^i(f)\in H^i_{nr}(K,\mu_p^{\otimes i}).$$

Since $\hat{\phi}^i$ is injective, by proposition 1, this theorem implies the following result:

Corollary 3. — *If $S^i_{dec}\neq S^i$ then $H^i_{nr}(K,\mu_p^{\otimes i})\neq\{0\}$ and K is not stably rational.*

Remark 2. — If the ground field k is not algebraically closed but is of characteristic prime to $2n$ and contains μ_{2n}, it is possible to prove a generalization of this result. Namely, let $S^i=(\Phi^{i-1}(H^i(k,\mu_p^{\otimes i})))^\perp$ and S^i_{dec} be the subgroup of S^i generated by the elements of the form $u\wedge v$ with $u\in U$ and $v\in\Lambda^{i-1}U$. Then we get an injection

$$(S^i/S^i_{dec})^\vee\to\operatorname{coker}(H^i(k,\mu_p^{\otimes i})\to H^i_{nr/k}(K,\mu_p^{\otimes i}))$$

3. Proof of Theorem 2

Let A be an element of $\mathscr{P}(K)$ and ν_A be the corresponding valuation. ν_A defines an element of $(K^*/K^{*p})^\vee \tilde{\to} H^1(K,\mu_p)^\vee$ and therefore an element of $U^{\vee\vee}$. But there is a natural isomorphism $\rho : U \to U^{\vee\vee}$ and we obtain a vector $\tau_A \in U$. In other words, we have a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^1(K,\mu_p) & \tilde{\to} & K^*/K^{*p} \\ \phi^1 \uparrow & & \nu_A \downarrow \\ U^\vee & \xrightarrow{\rho(\tau_A)} & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \end{array}$$

Let us denote by $\bar{\tau_A}$ the transpose of: $\begin{array}{ccc} \Lambda^{i-1} U & \to & \Lambda^i U \\ u & \mapsto & \tau_A \wedge u \end{array}$

Main lemma 2. — *For any* $\lambda \in (\Lambda^i U)^\vee$, *if* $\bar{\tau_A}(\lambda) = 0$ *then*

$$\partial_A(\phi^i(\lambda)) = 0.$$

This lemma implies the theorem:

of Theorem 2. — Let f be an element of $\mathrm{Hom}(S^i, \mathbf{F}_p)$ such that $f_{|S^i_{dec}} = 0$. As $f_{|S^i_{dec}} = 0$, $f_{|(\tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U) \cap S^i} = 0$. Let $T_1 \subset \tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U$ be such that $(\tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U \cap S^i) \oplus T_1 = \tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U$. Let $T_2 \subset \Lambda^i U$ be such that $(S^i + \tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U) \oplus T_2 = \Lambda^i U$ and let $T = T_1 \oplus T_2$. Then we have $S^i \oplus T = \Lambda^i U$. Let $\lambda \in (\Lambda^i U)^\vee$ be defined by $\lambda_{|S^i} = f$ and $\lambda_{|T} = 0$. Then the following relation holds:

$$(\lambda)_{|\tau_A \wedge \Lambda^{i-1} U} = 0.$$

So by the lemma $\partial_A(\phi^i(\lambda)) = 0$. But, by definition of $\hat{\phi}^i$, since $\lambda_{|S_i} = f$, we have $\phi^i(\lambda) = \hat{\phi}^i(f)$. Finally we get $\partial_A(\hat{\phi}^i(f)) = 0$, as wanted. □

The main lemma will be deduced from a series of lemmata. The basic tool is the following lemma of Colliot-Thélène and Ojanguren [**CTO**, proposition 1.3]:

***Lemma 3* (Colliot-Thélène and Ojanguren).** — *Let L be a field over k, $B \in \mathscr{P}(L)$ and ν_B the corresponding valuation. Let $a \in L^*$, $b \in H^{i-1}_{\acute{e}t}(B, \mu_n^{\otimes j})$, a' the image of a in $H^1(L,\mu_n)$, b' the image of b in $H^{i-1}(L,\mu_n^{\otimes j})$ and β the image of b in $H^{i-1}(\kappa_B, \mu_n^{\otimes j})$. Then the image of $a' \cup b' \in H^i(L, \mu_n^{\otimes j+1})$ by ∂_A verifies:*

$$\partial_A(a' \cup b') = \nu_B(a)\beta.$$

Proof. — The proof we give here for self-completeness is similar to the one given by J.-P. Serre in his course at the Collège de France in 1991-92. With a notation similar to the one used in the definition of ∂_A, we consider the spectral sequence described in [**HS**]

$$H^p(\mathrm{Gal}(\hat{L}_{nr}/\hat{L}), H^q(\hat{L}_{nr}, \mu_n^{\otimes j})) \Rightarrow H^{p+q}(\hat{L}, \mu_n^{\otimes j}).$$

Let $G = \mathrm{Gal}(\hat{L}_{alg}/\hat{L})$, $N = \mathrm{Gal}(\hat{L}_{alg}/\hat{L}_{nr})$. The spectral sequence may be defined in the following way. Let $A^m(j)$, also denoted by $C^m(G, \mu_n^{\otimes j})$, be the group of normalized m-cochains for G with coefficients in $\mu_n^{\otimes j}$. Let $A(j) = \sum_{m \in \mathbf{N}} A^m(j)$. We now define the filtration on $A(j)$. Let $A_k^m(j)$ be the subgroup of $A^m(j)$ of the cochains $\gamma : G^m \to \mu_n^{\otimes j}$ such that $\gamma(g_1, \ldots, g_m)$ depends only on $g_1, \ldots, g_{m-k}$ and $g_{m-k+1}N, \ldots, g_m N$ if $k \leqslant m$ and put $A_k^m(j) = 0$ if $k > m$. We then define $A_k(j)$ as $\sum_{m \in \mathbf{N}} A_k^m(j)$ if $k \geqslant 0$ and as $A(j)$ otherwise . We denote by $E_r^{p,q}(j)$ the groups of the spectral sequence corresponding to $A(j)$ with the graduation $A^m(j)$ and the filtration $A_k(j)$. By theorem 2 of [**HS**] the natural map

$$A^{m+k}(j) \bigcap A_k(j) \to C^k(G/N, C^m(N, \mu_n^{\otimes j}))$$

induces an isomorphism

$$E_2^{p,q}(j) \tilde{\to} H^p(\mathrm{Gal}(\hat{L}_{nr}/\hat{L}), H^q(\hat{L}_{nr}, \mu_n^{\otimes j})).$$

Let $\bar{\alpha}' \in A^1(1)$ be defined by

$$\forall g \in G, \quad \bar{\alpha}'(g) = \frac{g(a^{1/n})}{a^{1/n}} \in \mu_n$$

for any n-th root $a^{1/n}$ of a. The cocycle $\bar{\alpha}'$ represents the image α' of a in $H^1(G, \mu_n)$. Let β' be the image of b in $H^{i-1}(G, \mu_n^{\otimes j})$. We have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
H_{\acute{e}t}^{i-1}(B, \mu_n^{\otimes j}) & & \longrightarrow & & H^{i-1}(L, \mu_n^{\otimes j}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
H^{i-1}(\kappa_B, \mu_n^{\otimes j}) & \tilde{\to} & H^{i-1}(\mathrm{Gal}(\hat{L}_{nr}/\hat{L}), \mu_n^{\otimes j}) & \to & H^{i-1}(\hat{L}, \mu_n^{\otimes j})
\end{array}$$

therefore β' may be represented by a cocycle

$$\bar{\beta}' \in A^{i-1}(j) \bigcap A_{i-1}(j).$$

By definition of the cup-product, the cocycle $\bar{\alpha}' \cup \bar{\beta}'$ represents $\alpha' \cup \beta'$, the image of $a' \cup b'$ in $H^i(G, \mu_n^{\otimes j+1})$. However

$$(\bar{\alpha}' \cup \bar{\beta}')(g_1, g_2, \dots, g_i) = \bar{\alpha}'(g_1) \otimes \bar{\beta}'(g_2, \dots, g_i).$$

Thus $\bar{\alpha}' \cup \bar{\beta}'$ belongs in fact to the intersection $A^i(j+1) \bigcap A_{i-1}(j+1)$ and its image in $C^{i-1}(G/N, C^1(N, \mu_n^{\otimes j+1}))$ is the cocycle

$$\bar{\gamma} : \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{i-1} \mapsto (m \mapsto \bar{\alpha}'(m) \otimes \bar{\beta}'(g_1, \dots, g_{i-1})).$$

And, through the maps $C^1(N, \mu_n^{\otimes j+1}) \to H^1(N, \mu_n^{\otimes j+1}) \to \mu_n^{\otimes j}$, the image of $m \mapsto \bar{\alpha}'(m) \otimes \bar{\beta}'(g_1, \dots, g_{i-1})$ is $\nu_A(a)\bar{\beta}'(g_1, \dots, g_{i-1})$. Therefore the image of $\bar{\alpha}' \cup \bar{\beta}'$ in $H^{i-1}(\kappa_B, \mu_n^{\otimes j}) \tilde{\to} E_2^{i-1,1}(j+1)$, which is, by definition, $\partial_A(a' \cup b')$, is the product of $\nu_A(a)$ by β. $\square$

Lemma 4. — *With notation as above, there exists a morphism ϕ_A^1 which fits into the commutative diagram:*

$$\begin{array}{ccccc} \tau_A^{\perp} & \to & U^{\vee} & \xrightarrow{\phi^1} & H^1(K, \mu_p) \\ & \searrow \phi_A^1 & & \nearrow & \\ & & H^1_{\acute{e}t}(A, \mu_p) & & \end{array}$$

Proof. — Let $x \in \tau_A^{\perp}$. Then $\phi^1(x) \in H^1(K, \mu_p) \tilde{\to} K^*/K^{*p}$. Let y be an element of K^* which represents $\phi^1(x)$. By the very definition of τ_A, we have $\nu_A(y) \equiv 0(p)$. Let π_A be a uniformizing element of K for ν_A. We may write y in the form $y = \pi_A^{kp} z$ for a $k \in \mathbf{Z}$ and a $z \in A^*$.Thus $\phi^1(x)$ is the image of $\bar{z} \in A^*/A^{*p}$ by

$$A^*/A^{*p} \to K^*/K^{*p}$$

which is an embedding. We define $\phi_A^1(x)$ as the image of $\bar{z}$ in $H^1_{\acute{e}t}(A, \mu_p)$. Then the commutativity of the diagram

$$\begin{array}{ccc} A^*/A^{*p} & \to & K^*/K^{*p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\acute{e}t}(A, \mu_p) & \to & H^1(K, \mu_p) \end{array}$$

yields the lemma. $\square$

If $\tau_A = 0$, the main lemma follows from lemma 1 and lemma 4, since ∂_A is zero on the image of $H^i_{\acute{e}t}(A, \mu_p^{\otimes i})$. Let us assume that $\tau_A \neq 0$.

Lemma 5. — *With notation as above, there is a map $\hat{\tau_A}$ making the following diagram commutative,*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda^i U)^\vee \arrow[r, "\tilde{\tau_A}"] \arrow[d, "\hat{\tau}_A"] & (\Lambda^{i-1} U)^\vee \\
\Lambda^{i-1}(\tau_A^\perp) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Here the map $\Lambda^{i-1}(\tau_A^\perp) \to (\Lambda^{i-1} U)^\vee$ is the natural injection.

Proof. — Let us choose a basis $v_1, \dots, v_n$ of U with $v_1 = \tau_A$. Then $\tilde{\tau_A}$ is given by the formula: if $j_1 < \dots < j_i$ then

$$\tilde{\tau_A}(v_{j_1}^\vee \wedge \dots \wedge v_{j_i}^\vee) = 0 \text{ if } j_1 \neq 1$$

$$\tilde{\tau_A}(v_{j_1}^\vee \wedge \dots \wedge v_{j_i}^\vee) = v_{j_2}^\vee \wedge \dots \wedge v_{j_i}^\vee \text{ if } j_1 = 1$$

□

Thanks to lemma 1 and lemma 4 we get a morphism of graded $\mathbf{F}_p$-algebras

$$\Lambda^*(\tau_A^\perp) \to H(A)_p$$

and in particular a morphism $\Lambda^{i-1}(\tau_A^\perp) \xrightarrow{\phi_A^{i-1}} H_{ét}^{i-1}(A, \mu_p^{\otimes i-1})$

Lemma 6. — *With notation as above, the diagram*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda^i U)^\vee \arrow[rr, "\hat{\tau_A}"] \arrow[d, "\phi^i"] & & \Lambda^{i-1}(\tau_A^\perp) \arrow[d] \\
H^i(K, \mu_p^{\otimes i}) \arrow[dr, "\partial_A"] & & H_{ét}^{i-1}(A, \mu_p^{\otimes i-1}) \arrow[dl] \\
& H^{i-1}(\kappa_A, \mu_p^{\otimes i-1}) &
\end{tikzcd}$$

is commutative.

Proof. — The computation of the preceding proof implies that for any $\lambda \in (\Lambda^i U)^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(U^\vee)$

$$\lambda - v_1^\vee \wedge \tilde{\tau_A}(\lambda) \in \Lambda^i(\tau_A^\perp).$$

Thus $\phi^i(\lambda - v_1^\vee \wedge \check{\tau_A}(\lambda))$ comes from $H^i_{ét}(A, \mu_p^{\otimes i})$ and its image by ∂_A is 0. Therefore, using lemma 3 with $a' = \phi^1(v_1^\vee)$ and $b = \phi_A^{i-1}(\hat{\tau_A}(\lambda))$,

$$\begin{array}{rcl} \partial_A \phi^i(\lambda) & = & \partial_A(\phi^1(v_1^\vee) \cup \phi^{i-1}(\check{\tau_A}(\lambda))) \\ & = & v_A(\phi^1(v_1^\vee))\phi_{\kappa_A}^{i-1}(\hat{\tau_A}(\lambda)) \\ & = & \phi_{\kappa_A}^{i-1}\hat{\tau_A}(\lambda) \end{array}$$

where $\phi_{\kappa_A}^{i-1}$ is the composite map

$$\Lambda^{i-1}\tau_A^\perp \xrightarrow{\phi_A^{i-1}} H^{i-1}_{ét}(A, \mu_p^{\otimes i-1}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_p^{\otimes i-1}).$$

□

of the main lemma. — The case $\tau_A = 0$ has already been settled. If $\tau_A \neq 0$ and $\lambda \in (\Lambda^i U)^\vee$ verifies $\check{\tau_A}(\lambda) = 0$ then by lemma 5 $\hat{\tau_A}(\lambda) = 0$. Lemma 6 then implies that $\partial_A(\phi^i(\lambda)) = 0$. □

Remark 3. — In fact, the lemmata of this section also apply to any field over k and any discrete valuation ring $A \subset K$ such that $\mathrm{Fr}(A) = K$.

4. Construction of non-rational fields

Notation . — Let k be an algebraically closed field of characteristic 0, p a prime number, i a strictly positive integer, n an integer. Let us fix a primitive p-th root of unity ξ, and let $F' = k(T_1, \ldots, T_n)$, $X_j = T_j^p$ for $j = 1, \ldots, n$ and $F = k(X_1, \ldots, X_n) \subset F'$. Let U denote an $\mathbf{F}_p$-vector space of dimension n with a chosen basis $(u_1, \ldots, u_n)$. This yields an isomorphism $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(F'/F)$ and an injection $U^\vee \xrightarrow{\phi_F^1} H^1(F, \mu_p)$ (which sends $u_j^\vee$ to the class of X_j).

This notation will be used throughout section 4.

Lemma 7. — *The morphism $\Lambda^i(U^\vee) \to H^i(F, \mu_p^{\otimes i})$ is an injection.*

Proof. — Let $\hat{F}_m$ be the field $k((X_1))\ldots((X_m))$ for $m \leqslant n$. Let us prove by induction on m that

$$\Lambda^j(U_m^\vee) \xrightarrow{\sim} H^j(\hat{F}_m, \mu_p^{\otimes j})$$

where U_m is the subgroup of U generated by $u_1 \ldots u_m$. The result is true for $m = 0$. We assume that this is true for $m-1$. Let us consider the valuation associated

to (X_m). The residue field is isomorphic to $\hat{F}_{m-1}$. Since $\hat{F}_m$ is complete, the inertia group is isomorphic to $\varprojlim \mu_n$. We get an exact sequence

$$0 \to \varprojlim \mu_n \to \mathrm{Gal}(\hat{F}_m) \to \mathrm{Gal}(\hat{F}_{m-1}) \to 0$$

which is split. The Hochschild-Serre spectral sequence yields short exact sequences

$$0 \to H^j(\hat{F}_{m-1}, \mu_p^{\otimes j}) \to H^j(\hat{F}_m, \mu_p^{\otimes j}) \to H^{j-1}(\hat{F}_{m-1}, \mu_p^{\otimes j-1}) \to 0.$$

Let $A = \hat{F}_{m-1}[[X_m]]$ be the valuation ring corresponding to (X_m). Using the notation of section 3, we have that $\tau_A = u_m$. Therefore lemma 6 implies the commutativity of the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^j(\hat{F}_{m-1}, \mu_p^{\otimes j}) & \to & H^j(\hat{F}_m, \mu_p^{\otimes j}) & \to & H^{j-1}(\hat{F}_{m-1}, \mu_p^{\otimes j-1}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Lambda^j(U_{m-1}^{\vee}) & \to & \Lambda^j(U_m^{\vee}) & \xrightarrow{\hat{u}_m} & \Lambda^{j-1}(U_{m-1}^{\vee}) & \to & 0
\end{array}$$

where the lines are exact and, by induction hypothesis, the left and right vertical maps are isomorphisms, the morphism $\hat{u}_m$ being defined in the same way as $\hat{\tau}_A$. The exactness of the bottom line comes from the decomposition $U_m = U_{m-1} \oplus \mathbf{F}_p u_m$. Thus the central vertical map is also an isomorphism and the result for m is proved. □

If K is a function field over k which contains F, we define ϕ_K^1 as the composed map

$$U^{\vee} \to H^1(F, \mu_p) \to H^1(K, \mu_p)$$

and by lemma 1 we get a morphism $\phi_K^i : (\Lambda^i U)^{\vee} \to H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$

Now the problem of finding a unirational field which is not rational reduces to producing a subspace $S \subset \Lambda^i U$ and an extension K/F of function fields satisfying the following three conditions:

(i) K is unirational over k

(ii) the kernel of the map $\phi_K^i : (\Lambda^i U)^{\vee} \to H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$ is $S^{\perp}$.

(iii) $S \neq S_{dec}$

We can then apply Corollary 3 to the map

$$\phi_K^1 : U^{\vee} \to H^1(K, \mu_p)$$

Indeed the orthogonal in $\Lambda^i U$ of the kernel of the induced map $(\Lambda^i U)^\vee \to H^i(K, \mu_p^{\otimes i})$ is S by (ii). Therefore using corollary 3, we see that assumption (iii) implies that K is not stably rational.

For each of the following examples, the road map is as follows. First we give conditions on a subspace V of $(\Lambda^i U)^\vee$ which imply the following two properties: there exists an extension K/F such that K is unirational and $\mathrm{Ker}(H^i(F, \mu_p^{\otimes i}) \to H^i(K, \mu_p^{\otimes i}))$ is exactly the image of V by the injection ϕ_F^i. Then we produce $S \subset \Lambda^i U$ such that $S^\perp \subset \Lambda^i U^\vee$ verifies these conditions and such that $S \neq S_{dec}$.

4.1. Examples with non-trivial $H^2_{\mathbf{nr}}(K, \mu_p^{\otimes 2})$. —

Notation **.** — If A is a central simple algebra over an arbitrary field L, we shall denote by $[A]$ its class in the Brauer group $\mathrm{Br}(L)$ and Y_A the corresponding Severi-Brauer variety.

Theorem 4 **(Amitsur [Am]).** — *The kernel of the morphism*

$$\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(L(Y_A))$$

is the finite subgroup of $\mathrm{Br}(L)$ *generated by* $[A]$.

Let us now consider a field L of characteristic prime to p and $[A_1], \ldots, [A_m]$ in $(\mathrm{Br} L)_{(p)} \tilde{\to} H^2(L, \mu_p)$, then we deduce from the theorem the following lemma:

Lemma 8. —

$$\mathrm{Ker}(H^2(L, \mu_p) \to H^2(L(Y_{A_1} \times \cdots \times Y_{A_m}), \mu_p)) = < [A_1], \ldots, [A_m] > .$$

Proof. — We shall prove the lemma by induction on m. When $m = 0$ the lemma is trivial. Assume that the result is true for $m - 1$. Let us denote by L_m the field $L(Y_{A_1} \times \cdots \times Y_{A_m})$ and by L_{m-1} the field $L(Y_{A_1} \times \cdots \times Y_{A_{m-1}})$. Let $\rho_j : H^2(L, \mu_p) \to H^2(L_j, \mu_p)$ for $j = m, m-1$ and $\rho : H^2(L_{m-1}, \mu_p) \to H^2(L_m, \mu_p)$ be the canonical maps. Let λ be an element of $H^2(L, \mu_p)$ such that $\rho_m(\lambda) = 0$. Then $\rho(\rho_{m-1}(\lambda)) = 0$ and by theorem 4, $\rho_{m-1}(\lambda) = k[A_m]$ for some $k \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. therefore $\rho_{m-1}(\lambda - k[A_m]) = 0$ and by the induction hypothesis

$$\lambda - k[A_m] \in < [A_1], \ldots, [A_{m-1}] > .$$

Thus $\lambda \in < [A_1], \ldots, [A_m] >$. □

We shall now apply this lemma to the construction described at the beginning of section 4.

Let S be a subspace of $\Lambda^2 U$. Let $s_1, \dots, s_m$ be a family generating $S^\perp \subset \Lambda^2 U^\vee$, and $S_1, \dots, S_m$ be central simple algebras representing the images of $s_1, \dots, s_m$ in $H^2(F, \mu_p)$ which our choice of $\xi \in \mu_p$ enables us to identify with $H^2(F, \mu_p^{\otimes 2})$. Let K be the function field $F(Y_{S_1} \times \cdots \times Y_{S_m})$.

Proposition 5. — *With notation as above, the function field K is unirational. However if $S \neq S_{dec}$ then*

$$H^2_{nr}(K, \mu_p^{\otimes 2}) \neq \{0\}$$

and K is not stably rational.

Proof. — By their very definition, the images of $s_1, \dots, s_m$ in the group $H^2(F, \mu_p^{\otimes 2})$ come from $H^2(\mathrm{Gal}(F'/F), \mu_p^{\otimes 2})$. Therefore they become zero when lifted to F'. So the Severi-Brauer varieties corresponding to the S_j are split by F' and the composite $F'K$ is rational over F' and thus over k. So K is unirational. We deduce from lemma 8 that the extension K/F satisfies condition (ii) above and by the principle above, $S \neq S_{dec}$ implies $H^2_{\mathrm{nr}}(K, \mu_p^{\otimes 2}) \neq \{0\}$. □

Example 1. — For $n \leqslant 3$ any element of $\Lambda^2 U$ may be written as $u \wedge v$ with u and v in U. We shall therefore consider the case $n = 4$. The subspaces S of $\Lambda^2 U$ such that $S_{dec} \neq S$ are described by Bogomolov in [**Bo**] when $p \neq 2$. This description is the following: the elements of the form $u \wedge v$ with $u, v \in U$ are, in this case, the isotropic vectors for the quadratic form

$$\begin{array}{rccc} q: & \Lambda^2 U & \to & \Lambda^4 U \\ & u & \mapsto & u \wedge u \end{array}$$

and $S \neq S_{dec}$ if and only if $S = \mathrm{Ker}(q_{|S}) \oplus T$ where $T \neq \{0\}$ and $q_{|T}$ is anisotropic. The following cases are possible:

case	$\dim S$	$\dim S_{dec}$
(a)	1	0
(b)	2	0
(c)	2	1
(d)	3	1
(e)	3	2

Case (a) was studied by Saltman in [**Sa**]. For an example of (e) we may choose

$$S = < u_1 \wedge u_2, u_1 \wedge u_4, u_1 \wedge u_3 + u_2 \wedge u_4 > .$$

Indeed $q_{|S}$ is represented by the matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Then

$$S^{\perp} = < u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee}, u_2^{\vee} \wedge u_3^{\vee}, u_1^{\vee} \wedge u_3^{\vee} - u_2^{\vee} \wedge u_4^{\vee} >,$$

and

$$K = F(Y_{A_{\xi}(X_3, X_4)} \times Y_{A_{\xi}(X_2, X_3)} \times Y_{A_{\xi}(X_1, X_3) \otimes A_{\xi}(X_4, X_2)}),$$

where $A_{\xi}(a, b)$ is the algebra over F generated by two elements I and J with the relations

$$I^p = a, J^p = b, IJ = \xi JI.$$

4.2. Examples with non-trivial $H^3_{\mathbf{nr}}(K, \mu_p^{\otimes 3})$. —

Notation . — If L is a field of characteristic prime to p which contains the p-th roots of unity, ξ a primitive p-th root of unity and A a cyclic central simple algebra of the form $A_{\xi}(a, b)$ for $a, b \in L^*$ then, for any $c \in L^*$, We denote by $Z_{A,c}$ the *norm variety* defined by $\mathrm{Nrd}(x) = c$.

For such a variety Suslin has proved the following result (See [**Su**] theorem 7.7):

Theorem 6 **(Suslin).** — *With this notation, the kernel of the map*

$$H^3(L, \mu_p^{\otimes 2}) \to H^3(L(Z_{A,c}), \mu_p^{\otimes 2})$$

is the subgroup generated by $[A] \cup c$.

The case $p = 2$ is due to Arason [**Ar**].

Let us apply this theorem to our problem.

Let S be a subspace of $\Lambda^3 U$. We make the following hypotheses:

(H1) we can choose a basis $(s_1, \dots, s_m)$ of $S^{\perp}$ such that each s_j is of the form $v_j \wedge w_j \wedge y_j$ for $v_j, w_j, y_j \in U^{\vee}$.

(H2) For each $k \in \{1, \dots, m\}$ and each $j \in \{1, \dots, n\}$, at most one of the elements v_k, w_k, y_k has a non zero value on u_j.

Notation . — Let $Z_j = Z_{A_{\xi}(V_j, W_j), Y_j}$ where V_j, W_j, Y_j are the images of v_j, w_j, y_j in $H^1(F, \mu_p)$. Let $K = F(Z_1 \times \cdots \times Z_m)$.

(H1) enables us to apply theorem 6 whereas **(H2)** is used to prove that $\mathrm{Br}_{nr}(K)$ is trivial.

Proposition 7. — *With notation as above, the function field K is unirational and the group* $\mathrm{Br}_{nr}(K)$ *is trivial. However, if $S \neq S_{dec}$, then*

$$H^3_{nr}(K, \mu_p^{\otimes 3}) \neq \{0\}$$

and K is not stably rational.

Proof. — • Let us first prove the last claim: Using theorem 6, since K is the function field $F(Z_1)\dots(Z_m)$, we may prove as in section 4.1, Lemma 8 that

$$\mathrm{Ker}(H^3(F, \mu_p^{\otimes 3}) \to H^3(K, \mu_p^{\otimes 3})) = < (V_j, W_j, Y_j), 1 \leqslant j \leqslant m >$$

and therefore

$$\mathrm{Ker}((\Lambda^3 U)^\vee \to H^3(K, \mu_p^{\otimes 3})) = S^\perp.$$

As above, if $S \neq S_{dec}$ then K is not stably rational.

• The images of v_j, w_j, y_j in $H^1(F, \mu_p)$ come from the group $H^1(\mathrm{Gal}(F'/F), \mu_p)$ and have therefore trivial images in $H^1(F', \mu_p)$. Thus

$$A_\xi(V_j, W_j) \otimes F' \xrightarrow{\sim} M_p(F')$$

and $Z_{A_\xi(V_j, W_j), Y_j} \xrightarrow{\sim} SL_{p,F'}$. This shows that the composite field KF' is rational over F' hence also over k. So K is unirational over k.

• We shall now prove that $\mathrm{Br}_{nr}(K) = \{0\}$. For this purpose, we shall use the following lemmata:

Lemma 9. — *Let X be a non-singular geometrically integral variety over a field M of characteristic* 0*. Let $\overline{M}$ be an algebraic closure of M. Let $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{M}/M)$ and $\overline{X} = X \times_M \overline{M}$. Let $\overline{M}[X]$ be the ring $\Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$ and $\overline{M}(X)$ the function field of $\overline{X}$.*

If $\overline{M}[X]^* = \overline{M}^*$, then there is an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathscr{G}} \to \mathrm{Br}(M) \to \\ \to \mathrm{Ker}\left(H^2(\mathscr{G}, \overline{M}(X)^*) \to H^2(\mathscr{G}, \mathrm{Div}(\overline{X}))\right) \to H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}(\overline{X})). \end{aligned}$$

Proof. — We have the following exact sequence:

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\mathscr{G}, \overline{M}[X]^*) \to \mathrm{Pic}(X) \to (\mathrm{Pic}\overline{X})^{\mathscr{G}} \to H^2(\mathscr{G}, \overline{M}[X]^*) \to \\ \to \mathrm{Ker}\left(H^2(\mathscr{G}, \overline{M}(X)^*) \to H^2(\mathscr{G}, \mathrm{Div}(\overline{X}))\right) \to H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}\overline{X}). \end{aligned}$$

This is the exact sequence (1.5.0) in [**CTS**]. We then use the fact that $\overline{M}[X]^* = \overline{M}^*$ and Hilbert's theorem 90 to get the lemma. $\square$

The exact sequence of the lemma can also be obtained using the following exact sequence of $\mathcal{G}$-modules

$$1 \to \overline{M}^* \to \overline{M}(X)^* \to \mathrm{Div}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to 0$$

and the similar one for X.

Lemma 10. — *Let L be as in theorem 6, let A_j for $j = 1, \dots, m$ be central simple algebras over L and let c_j belong to L^* for $j = 1, \dots, m$, we denote by Z_{A_j,c_j} the norm variety for A_j and c_j and $Z = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} Z_{A_j,c_j}$. If $\lambda \in \mathrm{Br}_{nr}(L(Z))$ then*

$$\lambda \in \mathrm{Im}\Big(\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(L(Z))\Big).$$

Proof. — We denote by $\overline{L}$ the algebraic closure of L, $\overline{Z} = Z \times_L \overline{L}$ and $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Let $\lambda \in \mathrm{Br}_{nr}(L(Z))$. By Hilbert's theorem 90 we have an exact sequence:

$$0 \to H^2(\mathcal{G}, \overline{L}(Z)^*) \to \mathrm{Br}(L(Z)) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Br}(\overline{L}(Z)).$$

But $\overline{Z} \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^{m} SL_{p,\overline{L}}$ is $\overline{L}$-rational and therefore $\mathrm{Br}_{nr}(\overline{L}(Z)) = \{0\}$. As

$$\rho\Big(\mathrm{Br}_{nr}(L(Z))\Big) \subset \mathrm{Br}_{nr}(\overline{L}(Z))$$

$\rho(\lambda) = 0$ and λ comes from $\lambda' \in H^2(\mathcal{G}, \overline{L}(Z)^*)$.

Let us prove that $\lambda' \in \mathrm{Ker}\Big(H^2(\mathcal{G}, \overline{L}(Z)^*) \to H^2(\mathcal{G}, \mathrm{Div}(\overline{Z}))\Big)$ For any $x \in Z^{(1)}$, the set of points of codimension 1 in Z, let us choose $x' \in \overline{Z}^{(1)}$ above x. Then x' defines $B \in \mathcal{P}(\overline{L}(Z))$ whereas x corresponds to $A = L(Z) \cap B$. Let $\mathcal{H}_x$ be the stabilizer of B. Let $\widehat{L(Z)}$ (respectively $\widehat{\overline{L}(Z)}$) be the completion of $L(Z)$ (respectively $\overline{L}(Z)$) for A (respectively B), $\widehat{L(Z)}_{nr}$ (respectively $\widehat{\overline{L}(Z)}_{nr}$) the corresponding maximal unramified extensions. Let $\widetilde{\overline{L}(Z)}$ (respectively $\widetilde{\overline{L}(Z)}_{nr}$) be the algebraic closure of $\widehat{L(Z)}$ (respectively $\widehat{L(Z)}_{nr}$) in $\widehat{\overline{L}(Z)}$ (respectively $\widehat{\overline{L}(Z)}_{nr}$). Since the ramification index is one, the fields $\widetilde{\overline{L}(Z)}_{nr}$ and $\widehat{L(Z)}_{nr}$ are actually

equal. Therefore we have the following diagram of fields:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& & \widetilde{\overline{L}(Z)}_{nr} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, equal] & \\
& \widetilde{\overline{L}(Z)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[rr, phantom, "\mathcal{H}_x"] & & \widehat{L(Z)}_{nr} \arrow[dl, dash] \\
\overline{L}(Z) \arrow[dr, dash] \arrow[rr, phantom, "\mathcal{G}"] & & \widehat{L(Z)} \arrow[dl, dash] & \\
& L(Z) & &
\end{tikzcd}$$

Let us define ν_x as the valuation associated to B and i_x as the injection $\mathcal{H}_x \to \mathcal{G}$. The definition of ∂_A for the Brauer group and the diagram of fields yields the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^2(\mathcal{G}, \overline{L}(Z)^*) \arrow[r] \arrow[d, "(i_x, \nu_x)^*"] & \mathrm{Br}(L(Z)) \arrow[d, "\partial_A"] \\
H^2(\mathcal{H}_x, \mathbf{Z}) \arrow[d] & H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa_A}/\kappa_A), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \arrow[d] \\
H^1(\mathcal{H}_x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \arrow[dr] & H^1(\mathrm{Gal}(\widehat{L(Z)}_{nr}/\widehat{L(Z)}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \arrow[d] \\
& H^1(\mathrm{Gal}(\widetilde{\overline{L}(Z)}_{nr}/\widehat{L(Z)}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).
\end{tikzcd}$$

Here the isomorphisms

$$H^2(\mathcal{H}_x, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{H}_x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

and

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa_A}/\kappa_A), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathrm{Gal}(\widehat{L(Z)}_{nr}/\widehat{L(Z)}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

are the inverses of the natural maps. Besides the map

$$H^2(\mathcal{H}_x, \mathbf{Z}) \to H^1(\mathrm{Gal}(\widetilde{\overline{L}(Z)}_{nr}/\widehat{L(Z)}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is injective. But $\mathrm{Div}(\overline{Z}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in Z^{(1)}} \mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_x]$ as a $\mathcal{G}$-module and by Shapiro's lemma

$$H^2(\mathcal{G}, \mathrm{Div}(\overline{Z})) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in Z^{(1)}} H^2(\mathcal{H}_x, \mathbf{Z}).$$

By the diagram, for any $x \in Z^{(1)}$ we have $(i_x, \nu_x)^*(\lambda') = 0$ and

$$\lambda' \in \mathrm{Ker}\left(H^2(\mathcal{G}, \overline{L}(Z)^*) \to H^2(\mathcal{G}, \mathrm{Div}(\overline{Z}))\right).$$

Let us show that $\overline{L}[Z]^* = \overline{L}^*$ and that $\mathrm{Pic}(\overline{Z}) = 0$. These facts may be proved in the following elementary way: let $U = \mathbf{A}^1_{\overline{L}} - \{0\}$ and $P = \overline{Z} \times U^m$ Then $P \xrightarrow{\sim} (GL_{p,\overline{L}})^m$ Let $\pi : P \to \overline{Z}$ be the natural projection and $j : \overline{Z} \to P$ the immersion corresponding to $(1, \ldots, 1)$. If $f \in \overline{L}[Z]^*$ then $\pi^*(f)$ is an inversible element in the ring of function of $(GL_{p,\bar{L}})^m$ which has the following form:

$$\overline{L}[X_{i,j,k}, 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant i,j \leqslant p]\left[\frac{1}{\mathrm{Det}\left(X_{i,j,k}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}, 1 \leqslant k \leqslant m\right].$$

Therefore $\pi^*(f)$ can be written in the form $c\prod_{k=1}^m (\mathrm{Det}_k)^{n_k}$ where $c \in \overline{L}^*$, $n_k \in \mathbf{Z}$ and $\mathrm{Det}_k = \mathrm{Det}\left(X_{i,j,k}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ for $1 \leqslant k \leqslant m$. But, by definition of j, we have the relation $j^*(\mathrm{Det}_q) = 1$. Therefore

$$f = j^*(\pi^*(f)) \in \overline{L}^*.$$

Moreover we have an injection $\mathrm{Pic}(\overline{Z}) \to \mathrm{Pic}(P)$. And P is an open set in $(M_{n,\overline{L}})^m$. We hence have a surjection $\mathrm{Pic}((M_{n,\overline{L}})^m) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}(P)$. But the Picard group of $(M_{n,\overline{L}})^m$ is trivial. Therefore $\mathrm{Pic}(\overline{Z}) = \{0\}$. Since $\overline{L}[X]^* = \overline{L}^*$, by lemma 9, we have an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Pic}(Z) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z})^{\mathscr{G}} \to \mathrm{Br}(L) \to \\ \to \mathrm{Ker}\left(H^2(\mathscr{G}, \overline{L}(Z)^*) \to H^2(\mathscr{G}, \mathrm{Div}(\overline{Z}))\right) \to H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}(\overline{Z})). \end{aligned}$$

We get an isomorphism

$$\mathrm{Br}(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^2(\mathscr{G}, \overline{L}(Z)^*) \to H^2(\mathscr{G}, \mathrm{Div}(\overline{Z}))\right).$$

Therefore λ comes from $\mathrm{Br}(L)$. □

Lemma 11. — *With notation as in proposition 7, if A is an element of $\mathscr{P}(F)$ corresponding to a point of codimension one of $\mathbf{A}^n_k$ then there exists $B \in \mathscr{P}(K)$ such that we have $B \bigcap F = A$, the map*

$$H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is injective and the ramification index $e_{B/A} = v_B(\pi_A) = 1$ (for v_B the valuation corresponding to B, and π_A an uniformizing element of A).

The proof of lemma 11, which uses **(H2)** is based on the following lemma

Lemma 12. — *Let L be a field over k, we denote by ξ a primitive p-th root of unity. Let $V, W, X \in L^*$, $A = A_\xi(V, W)$ and $Z = Z_{A,X}$. Let $B \in \mathscr{P}(L)$ such that V, W, X belong to B and at most one of the V, W, X belongs to $\mathscr{M}_B$, the maximal ideal of B. Then there exists $B' \in \mathscr{P}(L(Z))$ above B such that the morphism $H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_{B'}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ is injective and such that the ramification index of B' over B is* 1.

Proof. — The algebra A is generated by two generators I and J with the relations $I^p = V, J^p = W$ and $IJ = \xi JI$ and has therefore the basis $(I^k J^k)_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}}$. If $V \notin (L^*)^p$, let $L' = L[T]/(T^p - V)$, otherwise let $L' = L$ and T be a p-th root of V. The field L' is a splitting field for A. We define an isomorphism $A \otimes L' \xrightarrow{\sim} M_p(L')$ by sending I to the diagonal matrix $D(T, \xi T, \dots, \xi^{p-1} T)$ and J to

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots\dots & & 0 & W \\ 1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Therefore, if $y \in A \otimes L(y_{j,k})_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}}$ is given by $y = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}} y_{j,k} I^j J^k$, the image of y in the ring $M_p(L'(y_{j,k})_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}})$ is $M_y = (m_{j,k})_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}}$ where

$$\begin{array}{rcll} m_{j,k} & = & y_{0,j-k} + y_{1,j-k} \xi^j T + \dots + y_{p-1,j-k} \xi^{j(p-1)} T^{p-1} & \text{if } j \geqslant k \\ m_{j,k} & = & W(y_{0,p+j-k} + \dots + y_{p-1,p+j-k} \xi^{j(p-1)} T^{p-1}) & \text{otherwise} \end{array}$$

$\mathrm{Det}(M_y)$ is then a polynomial defined over L, which, by definition, gives the reduced norm on A. Therefore the equation of Z is given by $\mathrm{Det}(M_y) - X = 0$ and

$$L(Y) = \mathrm{Fr}\left(L[y_{j,k}]_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}} / (\mathrm{Det}(M_y) - X) \right).$$

Let

$$B'_0 = B[y_{j,k}]_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}} / (\mathrm{Det}(M_y) - X).$$

This is well defined: the coefficients of the polynomial $\mathrm{Det}(M_y)-X$ are in B, since $V, W, X \in B$. Let π_B be a uniformizing element for B. We have

$$B'_0/(\pi_B) = \kappa_B[y_{j,k}]_{\substack{0\leqslant j\leqslant p-1\\ 0\leqslant k\leqslant p-1}} / (\overline{\mathrm{Det}(M_y)-X}).$$

The polynomial $\overline{\mathrm{Det}(M_y)}$ is given by the same computation over the residue field κ_B. And by hypothesis the only possible cases are the following ones:

(a) None of V, W, X is in $\mathscr{M}_B$, then $(\overline{\mathrm{Det}(M_y)-X})$ is the equation of the norm variety corresponding to the central simple algebra $A_\xi(\bar{V}, \bar{W})$ and to $\bar{X}$ where $\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}$ are the images of V, W, X in κ_B

(b) If $W \in \mathscr{M}_B$ but neither of V, X is in $\mathscr{M}_B$ then $\overline{\mathrm{Det}(M_y)}$ becomes equal to the determinant of a lower triangular matrix over an extension of κ_B which splits the polynomial $T^p - \overline{V}$ and we get the following equality in $\kappa_B[y_{j,k}]$

$$\overline{\mathrm{Det}(M_y)-X} = \prod_{j=0}^{p-1} (y_{0,0} + y_{1,0}\xi^j T + \cdots + y_{p-1,0}\xi^{j(p-1)} T^{p-1}) - \bar{X}.$$

We obtain the equation of $Y \times \mathbf{A}^{p(p-1)}_{\kappa_B}$ where Y is geometrically integral. Y is, in fact, birationally isomorphic to the Severi-Brauer variety corresponding to $A_\xi(\overline{V}, \overline{X})$

(c) We assume that $V \in \mathscr{M}_B$ but neither of W, X is in $\mathscr{M}_B$. We may exchange V and W in the definition of Z and this case reduces to the preceding one.

(d) If $X \in \mathscr{M}_B$ but neither of V, W is in $\mathscr{M}_B$, we have

$$\overline{\mathrm{Det}(M_y)-X} = \overline{\mathrm{Det}(M_y)}.$$

We get a variety which becomes isomorphic over $\overline{\kappa_B}$, an algebraic closure of κ_B, to the subvariety of $M_p(\overline{\kappa_B})$ defined by $\mathrm{Det}(M) = 0$. This subvariety is integral.

Therefore in each case $B'_0/(\pi_B)$ is the ring of functions of a geometrically integral variety over κ_B. Thus $B'_0/(\pi_B)$ is integral and (π_B) is a prime ideal of B'_0. Let $B' = B'_{0(\pi_B)}$. B' is a local ring and, since $\mathscr{M}_{B'} = (\pi_B)$, B' is a discrete valuation ring of rank one. Moreover $B' \bigcap L = B$, $\mathrm{Fr}(B') = L(Z)$, $e_{B'/B} = 1$ and κ_B is algebraically closed in $\kappa_{B'}$, the residue field of B' therefore

$$H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_{B'}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

□

of lemma 11. — Since A corresponds to a point of codimension 1 of $\mathbf{A}^n_k$, at most one of $X_1,\ldots,X_n$ is in $\mathscr{M}_A$. Since **(H2)** is satisfied, we see that, by removing if necessary terms of the form π^{kp}, we can reduce to the case where, for each j, at most one of the V_j, W_j, Y_j is in $\mathscr{M}_A$. We shall prove by induction on $k \leqslant m$ that there exists $B_k \in \mathscr{P}(F(Z_1)\ldots(Z_k))$ such that $B_k \bigcap F = A$, $e_{B_k/A} = 1$ and the map

$$H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_{B_k}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is an injection. For $k = 0$, A verifies the conditions. If it is true for $k < m$, we may use the construction of the preceding lemma to obtain B_{k+1}, because $V_{k+1}, W_{k+1}, Y_{k+1} \in A = B_k \bigcap F$ and at most one of them belong to $\mathscr{M}_{B_k}$.

The ring $B = B_m$ satisfies the conditions we wanted. □

Completion of the proof of proposition 7. — Let $\lambda \in \mathrm{Br}_{nr}(K)$. By lemma 10, we know that $\lambda \in \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(K))$. Let λ' be an element of $\mathrm{Br}(F)$ whose image is λ. Let $A \in \mathscr{P}(F)$ corresponding to an irreducible divisor of $\mathbf{A}^n_k$. By lemma 11, there exists $B \in \mathscr{P}_K$ above A such that $e_{B/A} = 1$ and

$$H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is injective. Therefore we have a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(F) & \to & \mathrm{Br}(K) \\ \downarrow \partial_A & & \downarrow \partial_B \\ H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & H^1(\kappa_B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \end{array}$$

where the bottom line is injective. Since $\partial_B(\lambda) = 0$, we get that $\partial_A(\lambda') = 0$. Thus

$$\lambda' \in \bigcap_{A \in (\mathbf{A}^n_k)^{(1)}} \mathrm{Ker}\,\partial_A.$$

But, as in [**CT**], using an induction on n one can check that, since k is algebraically closed of characteristic 0,

$$\bigcap_{A \in (\mathbf{A}^n_k)^{(1)}} \mathrm{Ker}\,\partial_A = \{0\}.$$

Therefore $\mathrm{Br}_{nr}(K) = \{0\}$. □

Example 2. — To get an example with $S \neq S_{dec}$, we need to take $n \geqslant 6$. If $n = 6$, $S = < u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 >$ verifies $S \neq S_{dec}$ and we have

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \begin{cases} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{(1,2,3),(4,5,6)\}, \end{cases} \\ &\quad u_1^{\vee} \wedge u_2^{\vee} \wedge u_3^{\vee} - u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee} \wedge u_6^{\vee} > \\ &= < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \begin{cases} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{(1,2,3),(4,5,6)\}, \end{cases} \\ &\quad (u_1^{\vee} - u_4^{\vee}) \wedge (u_2^{\vee} + u_5^{\vee}) \wedge (u_3^{\vee} + u_6^{\vee}) > . \end{aligned}$$

Therefore **(H1)** and **(H2)** are satisfied.

Example 3. — We shall now give other examples with $n = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Let } \; & g_1 = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_1 \\ & g_2 = u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_6 \wedge u_1 \wedge u_2 \\ & h_1 = u_1 \wedge u_3 \wedge u_5 \\ & h_2 = u_2 \wedge u_4 \wedge u_6. \end{aligned}$$

Let us prove that, if $s = \{g_1\}$, $\{g_1, g_2\}$, $\{g_1, h_1\}$ or $\{g_1, h_1, h_2\}$, the subspace S generated by s verifies **(H1)**, **(H2)** and $S \neq S_{dec}$

• We first prove that S verifies **(H1)** and **(H2)**. If $s_0 = \{g_1, h_1, h_2\}$ and S_0 is the subspace generated by s_0 then

$$\begin{aligned} S_0^{\perp} &= < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \begin{cases} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{ \; (1,2,3),(3,4,5),(1,5,6), \\ \qquad\qquad\quad (1,3,5),(2,4,6)\}, \end{cases} \\ &\quad u_1^{\vee} \wedge u_2^{\vee} \wedge u_3^{\vee} - u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee}, \\ &\quad u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee} - u_5^{\vee} \wedge u_6^{\vee} \wedge u_1^{\vee} > \\ &= < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \begin{cases} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{ \; (1,2,3),(3,4,5),(1,5,6), \\ \qquad\qquad\quad (1,3,5),(2,4,6)\}, \end{cases} \\ &\quad u_3^{\vee} \wedge (u_1^{\vee} + u_5^{\vee}) \wedge (u_2^{\vee} + u_4^{\vee}), \\ &\quad u_5^{\vee} \wedge (u_1^{\vee} + u_3^{\vee}) \wedge (u_4^{\vee} + u_6^{\vee}) > . \end{aligned}$$

Therefore S_0 verifies **(H1)** and **(H2)**. This implies **(H1)** and **(H2)** in the cases $s = \{g_1\}$ and $s = \{g_1, h_1\}$. Indeed, for $s = \{g_1\}$, we have

$$S^{\perp} = < S_0^{\perp}, u_1^{\vee} \wedge u_3^{\vee} \wedge u_5^{\vee}, u_2^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_6^{\vee} >$$

and for $s = \{g_1, h_1\}$, we get

$$S^{\perp} = < S_0^{\perp}, u_2^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_6^{\vee} > .$$

For $s = \{g_1, g_2\}$, we have:

$$\begin{array}{rcl} S^{\perp} & = & < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{ \quad (1,2,3),(3,4,5),(1,5,6), \\ \qquad\qquad\qquad (2,3,4),(4,5,6),(1,2,6)\}, \end{array} \right. \\ & & u_1^{\vee} \wedge u_2^{\vee} \wedge u_3^{\vee} - u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee}, \\ & & u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee} - u_5^{\vee} \wedge u_6^{\vee} \wedge u_1^{\vee}, \\ & & u_2^{\vee} \wedge u_3^{\vee} \wedge u_4^{\vee} - u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee} \wedge u_6^{\vee}, \\ & & u_4^{\vee} \wedge u_5^{\vee} \wedge u_6^{\vee} - u_6^{\vee} \wedge u_1^{\vee} \wedge u_2^{\vee} > \\ & = & < u_j^{\vee} \wedge u_l^{\vee} \wedge u_m^{\vee} \text{ for } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant j < l < m \leqslant 6 \\ (j,l,m) \notin \{ \quad (1,2,3),(3,4,5),(1,5,6), \\ \qquad\qquad\qquad (2,3,4),(4,5,6),(1,2,6)\}, \end{array} \right. \\ & & u_3^{\vee} \wedge (u_1^{\vee} + u_5^{\vee}) \wedge (u_2^{\vee} + u_4^{\vee}), \\ & & u_5^{\vee} \wedge (u_1^{\vee} + u_3^{\vee}) \wedge (u_4^{\vee} + u_6^{\vee}), \\ & & u_4^{\vee} \wedge (u_2^{\vee} + u_6^{\vee}) \wedge (u_3^{\vee} + u_5^{\vee}), \\ & & u_6^{\vee} \wedge (u_2^{\vee} + u_4^{\vee}) \wedge (u_1^{\vee} + u_5^{\vee}) > . \end{array}$$

• We shall now prove that $S \neq S_{dec}$. First we remark that an element $g \in \Lambda^k U$ may be written in the form $g = u \wedge v$ with $u \in U$ and $v \in \Lambda^{k-1} U$ if and only if there exists $u \in U - \{0\}$ such that $g \wedge u = 0$. Let $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{F}_p$, $g = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma h_1 + \delta h_2$, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{F}_p$ and $u = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 6} a_i u_i$ We are interested in the equation:

$$() \qquad u \wedge g = 0.$$

Let us compute $u_k \wedge g$ for $1 \leqslant k \leqslant 6$

$$\begin{array}{rcl} u_1 \wedge g & = & \alpha u_1 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 + \beta u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \\ & & + \beta u_1 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 + \delta u_1 \wedge u_2 \wedge u_4 \wedge u_6 \\ u_2 \wedge g & = & \alpha u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 - \alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_5 \wedge u_6 \\ & & + \beta u_2 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 - \gamma u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_5 \\ u_3 \wedge g & = & -\alpha u_1 \wedge u_3 \wedge u_5 \wedge u_6 + \beta u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 \\ & & + \beta u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_6 - \delta u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_6 \\ u_4 \wedge g & = & -\alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 - \alpha u_1 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 \\ & & + \beta u_1 \wedge u_2 \wedge u_4 \wedge u_6 + \gamma u_1 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 \\ u_5 \wedge g & = & -\alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_5 - \beta u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 \\ & & + \beta u_1 \wedge u_2 \wedge u_5 \wedge u_6 + \delta u_2 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 \\ u_6 \wedge g & = & -\alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_6 - \alpha u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 \\ & & - \beta u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \wedge u_6 - \gamma u_1 \wedge u_3 \wedge u_5 \wedge u_6. \end{array}$$

Therefore () is equivalent to the following system of equations:

$$\begin{array}{rclcrcl} a_1\beta - a_4\alpha &=& 0 & \quad & a_1\alpha + a_4\gamma &=& 0 \\ -a_2\gamma - a_5\alpha &=& 0 & & -a_3\alpha - a_6\gamma &=& 0 \\ a_3\beta - a_6\alpha &=& 0 & & -a_3\delta - a_6\beta &=& 0 \\ a_1\delta + a_4\beta &=& 0 & & a_2\beta + a_5\delta &=& 0 \\ -a_2\alpha + a_5\beta &=& 0. & & & & \end{array}$$

Let us first consider the case $s = \{g_1, h_1, h_2\}$ and $S =< s >$. If $S = S_{dec}$ then there exist $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbf{F}_p$ with $\alpha \neq 0$ and $u \in U - \{0\}$ such that

$$(\alpha g_1 + \gamma h_1 + \delta h_2) \wedge u = 0$$

We may assume $\alpha = 1$. Then, solving the system of equations with $\beta = 0$ and $\alpha = 1$, we find $u = 0$ and get a contradiction. Thus $S \neq S_{dec}$. From this we also deduce that $\dim(S/S_{dec}) = 1$ if $s = \{g_1, h_1\}$ or $s = \{g_1\}$. For the case $s = \{g_1, g_2\}$, we resolve the system with $\gamma = \delta = 0$ and find that $(\alpha g_1 + \beta g_2) \wedge u = 0$ implies $\alpha g_1 + \beta g_2 = 0$ or $u = 0$. Therefore $S_{dec} = \{0\}$. To sum up, we have found the following examples:

s	$\dim S$	$\dim S_{dec}$
g_1	1	0
g_1, h_1	2	1
g_1, h_1, h_2	3	2
g_1, g_2	2	0

Moreover one can show that

$$S =< u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_1 >$$

is not in the same orbit under the action of $GL_6(\mathbf{F}_p)$ as the subgroup used in example 1. See [**Re**] for details.

4.3. Examples with non-trivial $H^4_{\mathbf{nr}}(K, \mu_2^{\otimes 4})$. — In this case we assume $p = 2$ and use the following result of Jacob and Rost on the quadratic forms [**JR**, page 555]. We recall that the n-fold Pfister form $<< a_1, \ldots, a_n >>$ is the quadratic form

$$< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n > .$$

***Theorem 8* (Jacob and Rost). —** *Let L be a field of characteristic prime to 2, let Φ be a 4-fold Pfister form $<< a_1, a_2, a_3, a_4 >>$ and let $L(\Phi)$ be the function field of the quadric associated to Φ. Then we have*

$$\mathrm{Ker}(H^4(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^4(L(\Phi), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \{0, (a_1) \cup (a_2) \cup (a_3) \cup (a_4)\}.$$

As in section 4.2 we assume the following:

(H1) We may choose a basis $s_1, \ldots, s_m$ of $S^{\perp}$ such that each s_j may be written as $u_{1,j} \wedge u_{2,j} \wedge u_{3,j} \wedge u_{4,j}$ with $u_{k,j} \in U^{\vee}$ for $1 \leqslant k \leqslant 4$ and $1 \leqslant j \leqslant m$.

We then let $U_{k,j}$ represent the image of $u_{k,j}$ in F^*/F^{*2}. Set

$$\Phi_j = << U_{1,j}, U_{2,j}, U_{3,j}, U_{4,j} >>$$

and let $K = F(\Phi_1)(\Phi_2)\ldots(\Phi_m)$, the function field of a product of quadrics.

Proposition 9. — *K is unirational over k, but if $S \neq S_{dec}$ then $H^4_{nr}(K, \mu_2^{\otimes 4}) \neq \{0\}$ and K is not stably rational.*

The proof is similar to those of the other cases. Under an hypothesis similar to **(H2)**, it is possible to prove that in this case $\mathrm{Br}_{nr}(K) = \{0\}$. However we have not been able to prove that the field K verifies $H^3_{\mathrm{nr}}(K, \mu_n^{\otimes 3}) = \{0\}$.

Example 4. — We may take $n = 8$ and

$$S = < u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_7 \wedge u_8 > .$$

I would like to thank Colliot-Thélène who supervised this work. I seize also the opportunity to thank the Ecole Normale Supérieure and Harvard University for their support during the elaboration of this paper.

References

[Am] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[Ar] J. K. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (1963-64)*, Lectures Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1973.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques : deux compléments*, Bull. Soc. Math. Fr. **108** (1980), 213–227.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[HS] G. Hochschild and J.-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[JR] B. Jacob and M. Rost, *Degree four cohomological invariants for quadratic forms*, Invent. Math. **96** (1989), 551–570.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Re] P. Revoy, *Trivecteurs de rang 6*, Bull. Soc. Math. Fr. **59** (1979), 141–155.

[Sa] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Se] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture notes in Math., vol. 5, 1973.

[Su] A. A. Suslin, *K-theory and $\mathcal{K}$-cohomology of certain group varieties*, Algebraic K-theory, Adv. in Soviet Math., vol. 4, AMS, Providence, 1991, pp. 53–74.

1993

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

PRODUCTS OF SEVERI-BRAUER VARIETIES AND GALOIS COHOMOLOGY*

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — Let $Y_1, \dots, Y_n$ be n Severi-Brauer varieties over a field k. Let $k(Y_1 \times \dots \times Y_n)$ be the function field of their product. Using a recent result of Kahn we show that the quotient of the kernel of the restriction map

$$H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y_1 \times \dots \times Y_n), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

by the subgroup generated by the cup-products with the classes of $Y_1, \dots, Y_n$ in $\mathrm{Br}\, k$ is isomorphic to $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \dots \times Y_n)_{\mathrm{tors}}$. We first apply this result to the product of two conics, using the fact that in this case $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times Y_2)_{\mathrm{tors}}$ is trivial. Then we construct examples with three conics where this quotient is not trivial. We also show how, in the case of one conic, the restriction map fits into a longer exact sequence.

Résumé. — Soient $Y_1, \dots, Y_n$ n variétés de Severi-Brauer sur un corps k, Soit $k(Y_1 \times \dots \times Y_n)$ le corps de fonctions de leur produit. En utilisant un résultat récent de Bruno Kahn, nous montrons que le quotient du noyau de l'application de restriction

$$H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y_1 \times \dots \times Y_n), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

par le sous-groupe engendré par les cup-produits des classes de $Y_1, \dots, Y_n$ dans $\mathrm{Br}\, k$ est isomorphe à $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \dots \times Y_n)_{\mathrm{tors}}$. Nous appliquons ce résultat au produit de deux coniques en utilisant le fait que dans ce cas $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times Y_2)_{\mathrm{tors}}$ est trivial. Nous construisons ensuite des exemples de produits de trois coniques pour lequel ce quotient n'est pas trivial.

* K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 58.2, AMS, Providence, 1995, pp. 369–401

Contents

1. Introduction

Let k be a field of characteristic different from 2 and M be a multiquadratic extension of k. Then the restriction and corestriction maps for the Galois cohomology of these fields were studied by Kahn, Merkur′ev, Shapiro, Tignol and Wadsworth ([**Kah1**], [**STW**], [**Ti**], [**MT**]) using various complexes which generalize the canonical long exact sequence associated to a quadratic extension. In particular in cohomological degree two one has the complex

$$\bigoplus_{u\in U} k(\sqrt{u})^* \xrightarrow{N} H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\otimes U \xrightarrow{\cup} H^2(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Res}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(M,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Cores}} \bigoplus_{g\in \mathrm{Gal}(M/k)-\{0\}} H^2(M^g,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

where U is the kernel of the restriction map

$$H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^1(M,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

and N is the sum of the maps

$$\begin{array}{rcl} k(\sqrt{u})^* & \to & H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\otimes U \\ a & \mapsto & N_{k(\sqrt{u})/k}(a)\otimes u. \end{array}$$

Tignol proved that this complex is exact when the degree of the extension is four but is not exact in general when it is greater than eight. The starting point of this problem is that M may be seen as the canonical splitting field for $U \subset H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Thanks to Amitsur's theorem (see [**Am**]), one gets that the function field of a product of Severi-Brauer varieties plays the same rôle for a finitely generated subgroup of the Brauer group of k. Indeed for any field

k, any elements $[Y_1],\ldots,[Y_m]$ in $\mathrm{Br}\,k$ corresponding to Severi-Brauer varieties $Y_1,\ldots,Y_m$ the function field $M = k(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$ of $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ verifies

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \to H^2(M,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\right) = < [Y_i], 1 \leqslant i \leqslant m >$$

and if k'/k is a field extension such that

$$< [Y_i], 1 \leqslant i \leqslant n > \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\,k \to \mathrm{Br}\,k').$$

then there is a closed point P of $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ and an embedding

$$k(P) \to k'$$

over k. By analogy with the case of multiquadratic extensions, we introduce the following complex:

$$(\mathscr{C}_\infty) \qquad \bigoplus_{u\in U}\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \left(A_u^{\otimes i}\right)^* \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} k^* \otimes U \to H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

where U is the subgroup of $\mathrm{Br}\,k$ generated by the $[Y_i]$ for $1 \leqslant i \leqslant m$, for any $u \in U$, A_u is a central simple algebra representing $u \in \mathrm{Br}\,k$ and Nrd denotes the sum of the morphisms

$$\begin{array}{ccc} \left(A_u^{\otimes i}\right)^* & \to & k^* \otimes U \\ a & \mapsto & \mathrm{Nrd}(a)^i \otimes u. \end{array}$$

If $U \subset \mathrm{Br}\,k_{(n)}$ and n is prime to the exponent characteristic of k, one may also consider the complex

$$(\mathscr{C}_n) \qquad \bigoplus_{u\in U}\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \left(A_u^{\otimes i}\right)^* \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} H^1(k,\mu_n) \otimes U \xrightarrow{\cup} H^3(k,\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(M,\mu_n^{\otimes 2})$$

The exactness of this complex at the third term would mean that the kernel of the restriction map in degree three is simply given by sums of the form $\sum_{i=1}^m (a_i) \cup [Y_i]$. If $n = 2$ and U is generated by the class of a quaternion algebra $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ then Arason [**Ar**] proved the exactness of $\mathscr{C}_2$ at the third term. Using a result of Merkur′ev and Suslin, Colliot-Thélène (1988, unpublished) proved the exactness of $\mathscr{C}_p$ at the third term when U is generated by the class of a cyclic central simple algebra of prime index. By Merkur′ev and Suslin [**MS1**, corollary 12.1], $\mathscr{C}_p$ is exact at the second term in this case. Therefore $\mathscr{C}_p$ is exact when U is generated by the class of a cyclic central simple algebra of prime index. Knus, Lam, Shapiro and Tignol proved in [**KLST**] that $\mathscr{C}_2$ is exact at the second term if U is generated by the tensor product of two quaternion algebras.

In section 2, we consider the case of one conic Y and, using computations of Suslin [**Su1**], construct morphisms

$$N : H^n_{\mathrm{nr}/k}(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^n(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

where $H^n_{\mathrm{nr}/k}(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ denotes the unramified cohomology groups of M over k. This enables us to fit $\mathscr{C}_2$ in a longer exact sequence of the form

$$A^* \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} H^1(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup\alpha} H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^3_{\mathrm{nr}/k}(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{N}$$
$$\xrightarrow{N} \mathrm{Im}(H^1(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup\alpha} H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) \xrightarrow{\cup(-1)} H^4(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

where A is the quaternion algebra corresponding to Y and α its class in $\mathrm{Br}\, k$.

In section 3, we compute in the general case the K-theory groups of $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ and gather some information on the topological filtration of $K_0(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$. These computations play a fundamental rôle in the following sections.

In section 4.1 we apply a theorem of Kahn to prove the main tool of this paper, namely the existence of a canonical isomorphism between the torsion part of $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$ and the homology group of $\mathscr{C}_\infty$ at the third term.

In section 4.2 we use this theorem and results of Karpenko to show that if A is a central simple algebra over k such that the quotient of the index of A by its exponent is squarefree and if for any p dividing this quotient the p-primary component of the corresponding division algebra is decomposable then

$$\mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) = [A] \cup H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$$

where Y is the corresponding Severi-Brauer variety.

In part 5 we consider the case of two conics and, using the theorem of Knus, Lam, Shapiro and Tignol, prove the exactness of $\mathscr{C}_2$ in this case.

In section 6 we construct an example with three conics where $\mathscr{C}_\infty$ is not exact at the third term.

I would like to thank Colliot-Thélène and Kahn for several fruitful discussions.

1.1. Notations. — For any field L, we denote by L^s a separable closure of L and for any discrete $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module M,

$$H^i(L, M) = H^i(\mathrm{Gal}(L^s/L), M).$$

In particular the Brauer group of L is given by $\mathrm{Br}\, L = H^2(L, L^{s*})$. If the characteristic of L does not divide n then μ_n denotes the group of n-th roots of unity in L^s. If $j < 0$, we put $\mu_n^{\otimes j} = \mathrm{Hom}(\mu_n^{\otimes -j}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. If L' is a finite field extension

of L and $\phi : \operatorname{Spec} L' \to \operatorname{Spec} L$ the corresponding map, then the trace map (see [**SGA4**, exposé XVII, théorème 6.2.3])

$$\mathrm{Tr} : \phi_* \phi^* \mu_n^{\otimes j} \to \mu_n^{\otimes j}$$

induces a canonical map

$$\mathrm{Cores}_L^{L'} : H^i(L', \mu_n^{\otimes j}) \to H^i(L, \mu_n^{\otimes j})$$

which coincides with the usual corestriction map when the extension is separable. If L is a field of exponent characteristic p one defines (see [**Kah2**])

$$\begin{aligned}
H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) &= \varinjlim_{(p,n)=1} H^i(L, \mu_n^{\otimes j}), \\
H^i(L, (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(0)) &= \varinjlim_r H^i(L, \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}), \\
H^i(L, (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(1)) &= \varinjlim_r H^{i-1}(L, K_1(L^s)/p^r), \\
H^i(L, (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(2)) &= \varinjlim_r H^{i-2}(L, K_2(L^s)/p^r)
\end{aligned}$$

and, if $j = 0$, 1 or 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L, (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(j)).$$

In particular there is a canonical isomorphism

$$H^2(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Br} L.$$

These definitions coincide with the usual ones if $p = 1$. We also define

$$\begin{aligned}
H^i(L, \hat{\mathbf{Z}}'(j)) &= \varprojlim_{(n,p)=1} H^i(L, \mu_n^{\otimes j}), \\
H^i(L, \mathbf{Z}_p(1)) &= \varprojlim_r H^{i-1}(L, K_1(k^s)/p^r)
\end{aligned}$$

and

$$H^i(L, \hat{\mathbf{Z}}(1)) = H^i(L, \hat{\mathbf{Z}}'(1)) \oplus H^i(L, \mathbf{Z}_p(1)).$$

There is a canonical morphism from L^* to $H^1(L,\hat{\mathbf{Z}}(1))$. Let $d,n,m\in\mathbf{N}$ be such that p is prime to nm and $d|n$ then one has a commutive diagram

$$\begin{tikzcd}
\mu_{nm}^{\otimes i}\otimes\mu_d^{\otimes j} \arrow[r] \arrow[d] & \mu_d^{\otimes i+j} \arrow[d] \\
\mu_n^{\otimes i}\otimes\mu_d^{\otimes j} \arrow[r] & \mu_d^{\otimes i+j}.
\end{tikzcd}$$

Hence we get a morphism

$$H^q(L,\hat{\mathbf{Z}}'(i))\otimes H^r(L,\mu_d^{\otimes j})\to H^{q+r}(L,\mu_d^{\otimes i+j}).$$

Moreover for any N such that $nm|N$ and N is prime to p one has a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mu_N^{\otimes i}\otimes\mu_n^{\otimes j} \arrow[r] \arrow[d] & \mu_n^{\otimes i+j} \arrow[d] \\
\mu_N^{\otimes i}\otimes\mu_{nm}^{\otimes j} \arrow[r] & \mu_{nm}^{\otimes i+j}.
\end{tikzcd}$$

Therefore we get a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
H^q(L,\hat{\mathbf{Z}}'(i))\otimes H^r(L,\mu_n^{\otimes j}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q+r}(L,\mu_n^{\otimes i+j}) \arrow[d] \\
H^q(L,\hat{\mathbf{Z}}'(i))\otimes H^r(L,\mu_{nm}^{\otimes j}) \arrow[r] & H^{q+r}(L,\mu_{nm}^{\otimes i+j}).
\end{tikzcd}$$

and a morphism

$$H^q(L,\hat{\mathbf{Z}}'(i))\otimes H^r(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}'(j))\to H^{q+r}(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}'(i+j)).$$

If $j=0$ or 1 similar diagrams for the product

$$K_1(L^s)/p^s\otimes K_j(L^s)/p^s\to K_{j+1}(L^s)/p^s$$

induces

$$H^r(L,\mathbf{Z}_p(1))\otimes H^q(L,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j))\to H^{q+r}(L,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j+1))$$

and we get a canonical product

$$H^r(L,\hat{\mathbf{Z}}(1))\otimes H^q(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j))\to H^{q+r}(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j+1)).$$

In particular this induces a product

$$L^*\otimes\operatorname{Br}L\to H^3(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

The field L is a function field over K if and only if it is generated by a finite number of elements as a field over K. Let L be a function field over K. We denote by $\mathscr{P}(L/k)$ the set of discrete valuation rings A of rank one such that $K \subset A \subset L$ and the fraction field $\mathrm{Fr}(A)$ of A is L. If $A \in \mathscr{P}(L/K)$ then κ_A denotes the residue field. For any $i \in \mathbf{N} - 0$, $j \in \mathbf{Z}$ and any $n \in \mathbf{N}$ not divisible by the characteristic of L,

$$\partial_A : H^i(L, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

denotes the residue map as defined in [**CTO**]. For any smooth variety X over a field k and any integer p one denotes by $X^{(p)}$ the set of points of codimension p in X. For any $i \in \mathbf{N}$, any integer n not divisible by the characteristic of k and any $j \in \mathbf{Z}$, the sheaf $\mathscr{H}^i(\mu_n^{\otimes j})$ is defined as the sheaf over X_{Zar} corresponding to the presheaf

$$U \mapsto H^i(U_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes j}).$$

For any i, j, n as above and any $l \in \mathbf{N}$, we put

$$H^l(X, \mathscr{H}^i(\mu_n^{\otimes j})) = H^l(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^i(\mu_n^{\otimes j})).$$

Similarly, $\mathscr{K}_j$ denotes the Zariski sheaf on X associated to the presheaf

$$U \mapsto K_j(H^0(U, \mathscr{O}_X))$$

and

$$H^l(X, \mathscr{K}_i) = H^l(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{K}_i).$$

1.2. Basic facts on unramified cohomology

Definition 1.1. — If L is a function field over K, and n a positive integer prime to the exponent characteristic of K, the unramified cohomology groups are the groups

$$H^i_{\mathrm{nr}/K}(L, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A \in \mathscr{P}(L/K)} \mathrm{Ker}(H^i(L, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1}))$$

One defines similarly the unramified Brauer group.

We recall that two function fields L and M over K are stably isomorphic over K if and only if there exist indeterminates $U_1, \ldots, U_l$ and $T_1, \ldots, T_m$ and an isomorphism

$$L(U_1 \ldots, U_l) \xrightarrow{\sim} M(T_1, \ldots, T_m)$$

over K. A function field L over K is stably rational over K if it is stably isomorphic to K.

As was pointed out by Gabber, [**BO**] implies the following proposition:

***Proposition 1.1* (Bloch,Ogus). —** *If X is a smooth projective model of L over K then*
$$H^0(X, \mathscr{H}^i(\mu_n^{\otimes j})) \tilde{\to} H^i_{\mathrm{nr}/K}(L, \mu_n^{\otimes j}).$$

***Proposition 1.2* (Colliot-Thélène, Ojanguren [CTO])**

Let L and M be two function fields over K. If L and M are stably isomorphic over K then there exists an isomorphism
$$H^i_{\mathrm{nr}/K}(L, \mu_n^{\otimes j}) \tilde{\to} H^i_{\mathrm{nr}/K}(M, \mu_n^{\otimes j}).$$

2. The case of one conic

Let us fix a field k of characteristic different from 2. In this section the coefficients of the cohomology groups are equal to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. We shall omit them in the notation. The letter X denotes a conic over the field k given by the homogeneous equation
$$X_1^2 - aX_2^2 - bX_3^2 = 0.$$
We denote by (a, b) the corresponding symbol in $H^2(k)$ and by M the function field of X. We shall use results of Suslin [**Su1**] to fit the restriction maps
$$H^i(k) \to H^i(M)$$
into an infinite complex. Let $\overline{k}$ be an algebraic closure of k and $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Since
$$H^q(\overline{X}_{\text{ét}}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } q = 0 \text{ or } 2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$
the Hochschild-Serre spectral sequence
$$H^p(k, H^q(\overline{X}_{\text{ét}})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\text{ét}})$$
gives a long exact sequence
$$\cdots \to H^n(k) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^{n-2}(k) \xrightarrow{d_3} H^{n+1}(k) \to \cdots$$
and d_3 coincides with the cup-product $\cup(a, b, -1)$ (See [**Su1**, lemma 1]). Denote the generic point by $\eta : \operatorname{Spec} k(X) \to X$. By [**Su1**] the Leray spectral sequence
$$H^p(X, R^q\eta_*\mu_2) \Rightarrow H^{p+q}(k(X), \mu_2)$$

gives a long exact sequence

$$\cdots \to \bigoplus_{P\in X^{(1)}} H^{n-2}(k(P)) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^n(k(X)) \xrightarrow{\oplus\partial_P} \bigoplus_{P\in X^{(1)}} H^{n-1}(k(P)) \to \cdots$$

Since the E_2 term of the Bloch-Ogus spectral sequence (see [**BO**, corollary 6.3])

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} H^{q-p}(k(x)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\text{ét}})$$

is given by

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{H}^q)$$

one gets short exact sequences

$$0 \to H^1(X, \mathscr{H}^{n-1}) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^0(X, \mathscr{H}^n) \to 0.$$

Lemma 2.1. — *The composite map*

$$H^1(X, \mathscr{H}^{n-1}) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^{n-2}(k)$$

coincides with the map induced by

$$\bigoplus_{P\in X^{(1)}} H^{n-2}(k(P)) \xrightarrow{\oplus\,\mathrm{Cores}} H^{n-2}(k).$$

In the case $n = 3$ this is lemma 2 of [**Su1**].

Proof. — It is sufficient to show that for any $P \in X^{(1)}$ the composite map

$$H^{n-2}(k(P)) \to H^1(X, \mathscr{H}^{n-1}) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^{n-2}(k)$$

coincides with the corestriction map. Let $k' = k(P)$, $X' = X \times_k k'$ and $\phi : X' \to X$ the canonical map. For any sheaf of 2-torsion on X the trace map

$$\mathrm{Tr} : \phi_*\phi^*F \to F$$

[**SGA4**, exposé XVII, théorème 6.2.3] yields a morphism

$$\mathrm{Tr} : H^n(X'_{\text{ét}}, \phi^*(F)) \to H^n(X_{\text{ét}}, F)$$

which is defined as the composite map

$$H^n(X'_{\text{ét}}, \phi^*(F)) \xrightarrow{\text{can}} H^n(X_{\text{ét}}, \phi_*\phi^*(F)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}^*} H^n(X_{\text{ét}}, F)$$

Using the construction of the above spectral sequences (See [**HS**, chapter 8]) and the fact that ϕ_* preserves injectives and is exact since ϕ is finite, it is straightforward to show that the maps can and the corresponding morphisms for $\operatorname{Spec} k(P)$ and $\operatorname{Spec} k(X)$ are induced by morphisms of spectral sequences. Moreover the

Leray and Hochschild-Serre spectral sequences are functorial. Thus the morphisms induced by $\mathrm{Tr} : \phi_*\phi^* F \to F$ are also compatible with the spectral sequences. Therefore we get the commutative diagrams

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{\phi(P')=P} H^{n-2}(k'(P')) & \longrightarrow & H^n(X'_{\text{ét}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Sigma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} \\
H^{n-2}(k(P)) & \longrightarrow & H^n(X_{\text{ét}})
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
H^n(X'_{\text{ét}}) & \longrightarrow & H^{n-2}(k(P)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cores}} \\
H^n(X_{\text{ét}}) & \longrightarrow & H^{n-2}(k).
\end{array}$$

It is thus enough to prove the result for $k = k(P)$. For $n = 2$, one has

$$H^1(X, \mathscr{H}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X/2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

and the Bloch-Ogus spectral sequence gives an injection

$$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to H^2(X_{\text{ét}}).$$

Let ξ_X be the non-zero element in its image. In this case, X is isomorphic to $\mathbf{P}^1$ and by proposition 1.2

$$H^n(k) \to H^0(X, \mathscr{H}^n)$$

is an isomorphism. Moreover the Hochschild-Serre spectral sequence gives a short exact sequence

$$0 \to H^n(k) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^{n-2}(k) \to 0$$

and the composite map

$$H^n(k) \to H^n(X_{\text{ét}}) \to H^0(X, \mathscr{H}^n) \xrightarrow{\sim} H^n(k)$$

is, by definition, the identity. Therefore the image of ξ_X by the map

$$H^2(X_{\text{ét}}) \to H^0(k) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

is non trivial and the result is proved for $n = 2$. Since both spectral sequences are compatible with cup-products, the map $H^{n-2}(k) \to H^n(X_{\text{ét}})$ coincides with $\cup \xi_X$ and the map $H^n(X_{\text{ét}}) \to H^{n-2}(k)$ sends $\alpha \cup \xi_X$ on α for any $\alpha \in H^{n-2}(k)$. $\square$

Definition 2.1. — We define the morphism N as the morphism from $H^0(X,\mathcal{H}^n)$ to $H^n(k)$ which fits into the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^1(X,\mathcal{H}^{n-1}) & \to & H^n(X_{\text{ét}}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^n) & \to & 0 \\ & & & \searrow & \downarrow & & \downarrow N & & \\ & & & & H^{n-2}(k) & \xrightarrow{\cup(a,b)} & H^n(k) & & \end{array}$$

Indeed by lemma 2.1 the composite map $H^1(X,\mathcal{H}^{n-1}) \to H^n(k)$ is zero and N is well defined.

Definition 2.2. — We denote by

$$\tau : \mathrm{Ker}(H^n(k) \to H^n(M)) \to H^1(X,\mathcal{H}^{n-1})$$

the unique map fitting into the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ker}(H^n(k) \to H^n(M)) & \to & H^n(k) & & & & \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow & \searrow^{\mathrm{Res}} & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{H}^{n-1}) & \longrightarrow & H^n(X_{\text{ét}}) & \to & H^0(X,\mathcal{H}^n) & \to & 0. \end{array}$$

Notation . — We consider the complex $\overline{\mathscr{C}_2}$:

$$\cdots \to H^{n-2}(k) \xrightarrow{\cup(a,b)} H^n(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^n_{\mathrm{nr}/k}(M) \xrightarrow{N} \mathrm{Im}(H^{n-2}(k) \xrightarrow{\cup(a,b)} H^n(k)) \to$$
$$\xrightarrow{\cup(-1)} \mathrm{Ker}(H^{n+1}(k) \to H^{n+1}(M)) \xrightarrow{\tau} H^1(X,\mathcal{H}^n) \xrightarrow{\oplus \mathrm{Cores}_k^{k(P)}} H^{n-1}(k) \to \cdots$$

and denotes by $\mathcal{H}_n(i)$ for $1 \leqslant i \leqslant 6$ and $n \in \mathbf{N}$ the homology group of this complex at the $6n+i$-th term, with the convention that $H^l(k) = \{0\}$ if $l < 0$ (for example $\mathcal{H}_n(1) = \mathrm{Ker}(\cup(a,b))/\mathrm{Im}(\oplus \mathrm{Cores}_k^{k(P)})$).

Proposition 2.2. — *These homology groups verify the following properties*
(1) $\mathcal{H}_n(i) = \{0\}$ *if* $n \leqslant 3$
(2) $\mathcal{H}_n(i) = \{0\}$ *if* $i = 4, 5$ *or* 6
(3) $\mathcal{H}_n(1) \tilde{\to} \mathcal{H}_n(3)$.

Remark 2.1. — The fact that $\mathcal{H}_2(2) = \{0\}$ is a particular case of Amitsur's theorem, $\mathcal{H}_3(2) = \{0\}$ is due to Arason (See [**Ar**, Satz 5.4]) and $\mathcal{H}_3(1) = \{0\}$ is due to Merkur′ev and Suslin (See [**MS1**, theorem 12.1]). The definition immediately implies the triviality of $\mathcal{H}_0(1)$, $\mathcal{H}_0(2)$, $\mathcal{H}_1(1)$, $\mathcal{H}_1(2)$ and $\mathcal{H}_2(1)$. Therefore it is sufficient to prove assertions 2 and 3 of the proposition.

Proof. — Let us first prove that $\mathscr{H}_n(4) = \{0\}$. This is a direct consequence of the commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd}
H^n(X_{\text{ét}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-2}(k) \arrow[r, "\cup(a,b,-1)"] \arrow[d] & H^{n+1}(k) \\
H^0(X, \mathscr{H}^n) \arrow[r, "N"] & H^n(k) \arrow[ur, "\cup(-1)"'] &
\end{tikzcd}$$

and of the exactness of its line.

Let $\alpha \in \operatorname{Ker} \tau$. Since the diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}(H^{n+1}(k) \to H^{n+1}(M)) \arrow[dl, "\tau"] \arrow[d] \\
H^1(X, \mathscr{H}^n) \arrow[r] & H^{n+1}(X_{\text{ét}})
\end{tikzcd}$$

commutes, $\alpha \in \operatorname{Ker}(H^{n+1}(k) \to H^{n+1}(X_{\text{ét}}))$ and we get

$$\alpha \in \operatorname{Im}(H^{n-2}(k) \xrightarrow{(a,b,-1)} H^{n+1}(k)).$$

Thus $\mathscr{H}_n(5) = \{0\}$.

The triviality of $\mathscr{H}_n(6)$ follows from a diagram chase in the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(H^{n+1}(k) \to H^{n+1}(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & H^{n+1}(k) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d] & H^{n+1}(M) & \\
0 \arrow[r] & H^1(X, \mathscr{H}^n) \arrow[r] \arrow[dr, "\oplus\,\mathrm{Cores}"] & H^{n+1}(X_{\text{ét}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, \mathscr{H}^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & H^{n-1}(k) & &
\end{tikzcd}$$

which has exact lines and column.

We now prove (3). The commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
H^n(k) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Res}"] & H^n(X_{\text{ét}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-2}(k) \arrow[r] \arrow[d, "\cup(a,b)"] & H^{n+1}(k) \\
 & H^0(X, \mathscr{H}^n) \arrow[r, "N"] & H^n(k) \arrow[ur, "\cup(-1)"'] &
\end{tikzcd}$$

yields a surjective morphism

$$\psi : \operatorname{Ker}(.\cup(a,b)) \to \mathscr{H}_n(3).$$

Let $\alpha \in \operatorname{Ker}\psi$. Let $\beta \in H^n(X_{\text{ét}})$ represent α. Then the image of β in $H^n(M)$ is equal to the restriction of $\tilde{\beta} \in H^n(k)$. Thus we can assume that

$$\beta \in \operatorname{Ker}(H^n(X_{\text{ét}}) \to H^n(M)).$$

But in this case

$$\beta \in \operatorname{Im}(H^1(X, \mathscr{H}^{n-1}) \to H^n(X_{\text{ét}}))$$

and $\alpha \in \operatorname{Im}\left(\bigoplus_{P\in X^{(1)}} \operatorname{Cores}_k^{k(P)}\right)$. Thus

$$\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\left(\bigoplus_{P\in X^{(1)}} \operatorname{Cores}_k^{k(P)}\right).$$

The other inclusion is straightforward. Therefore ψ induces an isomorphism

$$\mathscr{H}_n(1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_n(3). \quad \square$$

Remark 2.2. — Let us assume that $(a, b, -1) = 0$. In this case, by [**Su1**], Lemma 4 $(a, b) \in 2\operatorname{Br} k$. For example, if -1 is a square, $-1 = i^2$ then

$$(a, b) = 2[A_i(a, b)]$$

where $A_i(a, b)$ is the cyclic central algebra generated by two elements I and J with the relations

$$I^4 = -1, J^4 = -1 \text{ and } IJ = iJI.$$

Let $D \in \operatorname{Br}(k)$ be such that $2D = (a, b)$ then the image D_M of D in $\operatorname{Br} M$ belongs to $\operatorname{Br}(M)_{(2)} = H^2(M)$ and is unramified over k. We then get a surjection

$$H^{n-2}(k) \xrightarrow{.\cup D_M \circ \operatorname{Res}} H^n_{\mathrm{nr}/k}(M)/\operatorname{Ker} N.$$

We shall give in remark 6.3 an other description of the morphism N in degree 2 or 3 when -1 is a square.

3. K-theory of a product of Severi-Brauer varieties

3.1. K-theory groups. — We now go back to the case of m Severi-Brauer varieties $Y_1, \ldots, Y_m$ corresponding to elements $[Y_1], \ldots, [Y_m]$ in $\operatorname{Br} k$. As above, we denote by U the subgroup of $\operatorname{Br} k$ generated by $[Y_1], \ldots, [Y_m]$ and by M the function field of the product of $Y = Y_1 \times_k \cdots \times_k Y_m$. The purpose of this section is to describe the K-theory groups of Y and gather some information on their topological filtration. The K-theory of Y seems to be among the folklore and can be seen as a particular case of a much more general result of Panin [**Pa**].

The proof we give here for self-completeness follows the proof of Quillen (See [**Q**, §8.4]) step by step.

Let S be a scheme and $X \xrightarrow{\pi} S$ be a Severi-Brauer scheme over S of relative dimension $d-1$. Let $\mathscr{A}$ be the corresponding Azumaya algebra (See [**Gr**]) and $\mathscr{J}$ be the canonical vector bundle on X (see [**Q**, §8.4]). If $g : S' \to S$ is a faithfully flat map such that the product $X' = X \times_S S'$ is a projective bundle $\mathbf{P}(E)$ over S' then the inverse image of $\mathscr{J}$ is equal to $\mathscr{O}_{X'}(-1) \otimes_{S'} E$. Let $\mathscr{D}$ be an $\mathscr{O}_S$ algebra. We denote by $\mathscr{P}(S, \mathscr{D})$ the category of vector bundles over X which are left modules for $\mathscr{D}$.

Proposition 3.1. — *If S is quasi-compact then there is a canonical isomorphism*

$$\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d-1} K_*(\mathscr{P}(S, \mathscr{A}^{\otimes i} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{D})) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathscr{P}(X, \mathscr{D})).$$

This isomorphism is given by

$$(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant d-1} \mapsto \sum_{i=0}^{d-1} (\mathscr{J}^{\otimes i} \otimes_{\pi^*(\mathscr{A}^{\otimes i})} \pi^*(.))_*(x_i).$$

Corollary 3.2. — *If $Y_1, \dots, Y_m$ are Brauer-Severi schemes over a quasi-compact scheme S of relative dimension $d_1-1, \dots, d_m-1$, if $\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_m$ are the corresponding Azumaya algebras and $\mathscr{J}_i$ the inverse image of the canonical vector bundle on Y_i by the projection $\pi_i : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to Y_i$ then*

$$\bigoplus_{\substack{(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \\ 0 \leqslant k_i \leqslant d_i-1}} K_*(\mathscr{A}_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_m^{\otimes k_m}) \xrightarrow{\sim} K_*(Y_1 \times_S \cdots \times_S Y_m)$$

where the isomorphism is given by

$$(x_{(k_i)})_{0 \leqslant k_i \leqslant d_i-1} \mapsto \sum_{k_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{k_m=0}^{d_m-1} \left(\bigotimes_{i=1}^{m} \mathscr{J}_i^{\otimes k_i} \otimes_{\pi^*(\mathscr{A}_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_m^{\otimes k_m})} \pi^*(.) \right) (x_{(k_i)}).$$

Proof of Proposition 3.1. — One has only to check that the constructions in [**Q**] are compatible with the structure of left $\mathscr{D}$-modules.

First the category $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ is a full subcategory of the abelian category of left $\mathscr{D}$-modules and is closed by extensions. Moreover the forgetful functor $\mathbf{f}$ from $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ to $\mathscr{P}(X)$ is an exact functor.

Let $S' \to S$ be a surjective étale morphism which splits X, $X' = X \times_S S'$ and $\tilde{g}$ be the induced morphism $X' \to X$. As in [**Q**] we define $\mathscr{R}_n(X, \mathscr{D})$ as the

full subcategory of $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ whose objects are the vector bundles $\mathscr{F}$ such that $\tilde{g}^*(\mathbf{f}(\mathscr{F}))(n)$ is regular and $\mathscr{P}_n(X, \mathscr{D})$ as the full subcategory of $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ whose objects are the $\mathscr{F}$ such that, for any $q > 0$ and any $l \geqslant n$

$$R^q \pi'_* \left(\tilde{g}^*(\mathbf{f}(\mathscr{F}))(l)\right) = 0$$

where $\pi' : X' \to S'$ is the canonical morphism. By lemma 8.1.3 of [**Q**], one has

$$\mathscr{R}_n(X, \mathscr{D}) \subset \mathscr{P}_n(X, \mathscr{D}) \subset \mathscr{P}(X, \mathscr{D}).$$

As in [**Q**, §8.2] one gets

Lemma 3.3. — *For all n the canonical maps*

$$K_q(\mathscr{R}_n(X, \mathscr{D})) \to K_q(\mathscr{P}_n(X, \mathscr{D})) \to K_q(\mathscr{P}(X, \mathscr{D}))$$

are isomorphisms.

Proof. — For any object $\mathscr{F}$ of $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ the sequence

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{J}^\vee \to \cdots \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Lambda^r \mathscr{J}^\vee \to 0$$

is an exact sequence in $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ where $\mathscr{J}^\vee$ denotes the dual bundle of $\mathscr{J}$. But the functor

$$u_p : \mathscr{P}_n(X, \mathscr{D}) \to \mathscr{P}_{n-1}(X, \mathscr{D})$$

which sends $\mathscr{F}$ on $\mathscr{F} \otimes \Lambda^p \mathscr{J}^\vee$ is exact and as in [**Q**, 8.2.2] we get a morphism

$$\sum_{p>0} (-1)^{p-1} u_p : K_q(\mathscr{P}_n(X, \mathscr{D})) \to K_q(\mathscr{P}_{n-1}(X, \mathscr{D}))$$

and the canonical morphism

$$K_q(\mathscr{P}_{n-1}(X, \mathscr{D})) \to K_q(\mathscr{P}_n(X, \mathscr{D}))$$

is an isomorphism. By [**Q**, 8.1.12.a], $\mathscr{P}(X, \mathscr{D})$ is the union of the $\mathscr{P}_n(X, \mathscr{D})$ and we get the second isomorphism. The proof of the isomorphisms for $\mathscr{R}_n(X, \mathscr{D})$ is similar. □

Lemma 3.4. — *There exits a sequence of functors*

$$T_i : \mathscr{R}_0(X, \mathscr{D}) \to \mathscr{P}(S, \mathscr{A}^{\otimes i} \otimes \mathscr{D}) \textit{ for } 0 \leqslant i \leqslant d-1$$

such that for any object $\mathscr{F}$ of $\mathscr{R}_0(X, \mathscr{D})$, one has a canonical exact sequence

$$0 \to \mathscr{J}^{\otimes d-1} \otimes_{\mathscr{A}^{\otimes d-1}} T_{d-1}(\mathscr{F}) \to \cdots \to \mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} T_0(\mathscr{F}) \to \mathscr{F} \to 0$$

in $\mathscr{R}_0(X, \mathscr{D})$.

Proof. — As in [**Q**, 8.4.2] we define by induction

$$\begin{cases} T_i(\mathscr{F}) & = & f_*\left(\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathscr{J}^{\otimes i}, \mathscr{Z}_{i-1}(\mathscr{F}))\right) \\ \mathscr{Z}_i(\mathscr{F}) & = & \mathrm{Ker}(\mathscr{J}^{\otimes i} \otimes_{\mathscr{A}^{\otimes i}} T_i(\mathscr{F}) \to \mathscr{Z}_{i-1}(\mathscr{F})) \end{cases}$$

with $\mathscr{Z}_{-1}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. These S-modules $T_i(\mathscr{F})$ have natural left $\mathscr{A}^{\otimes i}$-module and left $\mathscr{D}$-module structures and they are compatible. The end of the proof is then the same as in [**Q**, 8.4.2]. □

End of the proof of proposition 3.1. — As in [**Q**], one can show that these functors T_i yield the inverse morphism for the canonical map

$$\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d-1} K_*(\mathscr{P}(S, \mathscr{A}^{\otimes i} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{D})) \to K_*(\mathscr{P}(X, \mathscr{D})). \quad \square$$

Notation . — From now on we take $S = \mathrm{Spec}\, k$ for a field k. The Azumaya algebras will be denoted by $A_1, \ldots, A_m$. We put $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ and denote by $g_{k_1,\ldots,k_m}$ the image in $K_0(Y)$ of the canonical generator of $K_0(A_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{\otimes k_m})$. In other words, if the tensor product $A_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{\otimes k_m}$ is isomorphic to $M_l(D)$ for a skew-field D, then

$$g_{k_1,\ldots,k_m} = \left[D^l \otimes_{A_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{\otimes k_m}} \mathscr{J}_1^{\otimes k_1} \otimes_Y \cdots \otimes_Y \mathscr{J}_m^{\otimes k_m} \right].$$

We get

Corollary 3.5. — *With notation as above,*

$$K_0(Y) = \bigoplus_{\substack{(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \\ 0 \leqslant k_i \leqslant d_i - 1}} \mathbf{Z} g_{k_1,\ldots,k_m}$$

and the canonical map

$$K_0(Y) \to K_0(Y \times_k \overline{k})$$

is injective and sends $g_{k_1,\ldots,k_m}$ *to*

$$\mathrm{ind}(A_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{\otimes k_m}) \bigotimes_{i=1}^{m} \pi_i^*(\mathscr{O}_{\overline{Y}_i}(-1)^{\otimes k_i})$$

where $\pi_i : \overline{Y}_1 \times_{\overline{k}} \cdots \times_{\overline{k}} \overline{Y}_n \to \overline{Y}_i$ *is the canonical projection.*

Proof. — It remains to show the last assertion. Let $A = A_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{\otimes k_m}$, D the corresponding skew-field and $\mathscr{J} = \mathscr{J}_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{J}_m^{\otimes k_m}$. We put $r = \operatorname{ind} A = \sqrt{\dim D}$ and $l = \prod_{i=1}^m d_i^{k_i}/r$. The pull-back of $\mathscr{J}$ over $\overline{Y} = Y \times_k \bar{k}$ is

$$\bigotimes_{i=1}^m \pi_i^*(\mathscr{O}_{\overline{Y}_i}(-1)^{\otimes k_i})^{d_i^{k_i}} = \mathscr{O}_{\overline{Y}}^{\prod_{i=1}^m d_i^{k_i}} \otimes \bigotimes_{i=1}^m \pi_i^*(\mathscr{O}_{Y_i}(-k_i)).$$

Thus the image of $g_{k_1,\dots,k_m}$ in $K_0(\overline{Y})$ is the class of

$$\pi^*\left(M_r\left(\bar{k}\right)^l \otimes_{M_{lr}(\bar{k})} \bar{k}^{lr}\right) \otimes \bigotimes_{i=1}^m \pi_i^*(\mathscr{O}_{Y_i}(-k_i))$$

where $\pi : \overline{Y} \to \bar{k}$ is the canonical morphism. But there are isomorphisms

$$\begin{aligned} M_r\left(\bar{k}\right)^l \otimes_{M_{lr}(\bar{k})} \bar{k}^{lr} &\xrightarrow{\sim} \left(M_r\left(\bar{k}\right) \otimes_{\bar{k}} \bar{k}^l\right) \otimes_{M_r(\bar{k}) \otimes_{\bar{k}} M_l(\bar{k})} \left(\bar{k}^r \otimes_{\bar{k}} \bar{k}^l\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \left(M_r\left(\bar{k}\right) \otimes_{M_r(\bar{k})} \bar{k}^r\right) \otimes_{\bar{k}} \left(\bar{k}^l \otimes_{M_l(\bar{k})} \bar{k}^l\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \bar{k}^r. \quad \square \end{aligned}$$

3.2. The topological filtration on K_0. — Let us first give a complete description of the filtration by codimension of support in the split case. Let

$$Y = \mathbf{P}_k^{d_1-1} \times \cdots \times \mathbf{P}_k^{d_m-1}.$$

Let $\pi_i : Y \to \mathbf{P}_k^{d_i-1}$ be the canonical projection and $\mathscr{L}_i = \pi_i^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_k^{d_i-1}}(-1))$. We denote by ξ_i the first Chern class of $\mathscr{L}_i$ in $H^1(Y, \mathscr{K}_1)$ and $z_i = [\mathscr{L}_i] \in K_0(Y)$.

Proposition 3.6. — *In the split case one has that*

(1) the $\mathscr{K}$-cohomology groups are given by

$$H^i(Y, \mathscr{K}_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } i > j \text{ or } i \geqslant \sum_{l=1}^m d_l - m + 1 \\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{\sum_{l=1}^m k_l = i \\ 0 \leqslant k_l \leqslant d_l - 1}} \left(\prod_{i=1}^m \xi_i^{k_i}\right) K_{j-i}(F) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) the i-th filtration group for the filtration by codimension of support is the ideal

$$K_*(Y)^i = (1 - z_1, \dots, 1 - z_n)^i K_*(Y).$$

The first statement is a direct consequence of the following lemma.

Lemma 3.7. — *Let S be a scheme, $E_1, \dots, E_m$ be m vector bundles over S of relative dimension $d_1, \dots, d_m$. Let $Y_i = \mathbf{P}(E_i)$ and $Y = Y_1 \times_S \cdots \times_S Y_m$. Let $\pi_i : Y \to Y_i$ be the canonical projection, L_i be the line bundle $\pi_i^*(\mathscr{O}_{Y_i}(-1))$ and ξ_i be the Chern class $c_1(L_i) \in H^1(Y, \mathscr{K}_1)$. Then the bigraded ring $H^*(Y, \mathscr{K}_*)$ is a free $H^*(S, \mathscr{K}_*)$-module with a basis given by*

$$\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i^{k_i}\right)_{\substack{(k_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ 1\leqslant k_i\leqslant d_i-1}}$$

Proof. — This lemma is given by a straightforward induction from theorem 8.2 in [**Su2**] or theorem 3.1 in [**Sh**]. □

Proof of the second assertion of proposition 3.6. — As in [**Su2**, proposition 9.1], one can show that all differentials d_r in the Brown-Gersten-Quillen spectral sequence

$$H^p(Y, \mathscr{K}_{-q}) \Rightarrow K_{p+q}(Y)$$

are zero if $r \geqslant 2$. Indeed, for any $(k_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, with $1 \leqslant k_i \leqslant d_i - 1$ for $1 \leqslant i \leqslant m$ and $\sum_{i=1}^m k_i = p$,

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant m} \xi_i^{k_i} \in H^p(Y, \mathscr{K}_p)$$

is in the kernel of d_r. Since d_r is $K_*(F)$-linear, $d_r = 0$. On the other hand,

$$\prod_{i=1}^m (1-z_i)^{k_i} = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^m k_i} \left[\bigotimes_{i=1}^m \pi_i^* \mathscr{O}_{Z_i}(-k_i)\right]$$

where Z_i is a linear subspace of codimension k_i in $\mathbf{P}_k^{d_i-1}$. Thus

$$\prod_{i=1}^m (1-z_i)^{k_i} \in K_0(Y)^p$$

where $p = \sum_{i=1}^m k_i$. Moreover its class in $K_0(Y)^{(p/p+1)} = K_0(Y)^p/K_0(Y)^{p+1}$ is the image of

$$\prod_{i=1}^m \xi_i^{k_i} \in H^p(Y, \mathscr{K}_p) \tilde{\to} K_0(Y)^{(p/p+1)}.$$

Therefore an induction on i shows that

$$K_*(Y)^i \subset (1-z_1, \dots, 1-z_m)^i K_*(Y). \quad \square$$

In the non-split case, we have the following partial results:

Proposition 3.8. — *Let $Y_1, \dots, Y_m$ be m Severi-Brauer varieties corresponding to Azumaya algebras $A_1, \dots, A_m$ over k. Let $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$, $d_i = \dim Y_i$ and k' be a finite field extension of k which splits $Y_1, \dots, Y_m$. As in section 3.1, $g_{k_1,\dots,k_m}$ denote the canonical generators of $K_0(Y)$. Then*

(1) If we identify $K_0(Y)$ with its image in $K_0(Y_{k'})$ we get

$$[k':k]K_0(Y_{k'})^i \bigcap K_0(Y) \subset K_0(Y)^i \subset K_0(Y_{k'})^i \bigcap K_0(Y).$$

(2) The kernel of the canonical surjection $\mathrm{CH}^i(Y) \to K_0(Y)^{(i/i+1)}$ is killed by $[k':k]$ and $(i-1)!$.

(3) The first step of the filtration is given by

$$\begin{aligned} K_0(Y)^1 &= K_0(\overline{Y})^1 \cap K_0(Y) \\ &= \bigoplus_{\substack{(k_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \\ 0\leqslant k_i\leqslant d_i-1}} \left(g_{k_1,\dots,k_m} - \mathrm{ind}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} A_j^{\otimes k_j}\right)\right)\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

(4) $K_0(Y)^2 = K_0(\overline{Y})^2 \cap K_0(Y)$.

(5) One has

$$CH^2(Y)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Ker}(CH^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(Y_{k^s}))$$

and it is a finite group.

Proof. — (1). Since the morphism $\pi : Y_{k'} \to Y$ is flat, π^* preserves the topological filtration. Thus $K_0(Y)^i \subset K_0(Y_{k'})^i$. This morphism is also finite and hence π_* preserves the topological filtration. The map $\pi_* \circ \pi^*$ coincides with the multiplication by $[k':k]$. Thus the composite map

$$K_0(Y_{k'}) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Y) \xrightarrow{\pi^*} K_0(Y_{k'})$$

coincides with the multiplication by $[k':k]$ on the image of $K_0(Y)$. But $K_0(Y_{k'})$ is a free $\mathbf{Z}$-module in which $\pi^*(K_0(Y))$ has finite index. Thus $\pi^* \circ \pi_*$ is also the multiplication by $[k':k]$. Therefore

$$[k':k]K_0(Y_{k'})^i = \pi^*\pi_*(K_0(Y_{k'})^i) \subset K_0(Y)^i.$$

(2). The first assertion of (2) is a consequence of the proof of proposition 3.6 (2). Indeed $\mathrm{CH}^i(Y)$ verifies

$$\mathrm{CH}^i(Y) \xrightarrow{\sim} H^i(Y, \mathcal{K}_i) \twoheadrightarrow K_0(Y)^{(i/i+1)}$$

and the morphisms d_r are killed by $[k' : k]$. The second one is a consequence of [**Su2**, proposition 9.3], which asserts that the composite map

$$CH^i(X) \to K_0(X)^{(i/i+1)} \xrightarrow{c_i} CH^i(Y)$$

coincides with the multiplication by $(-1)^i(i-1)!$.

(3). We have

$$\begin{aligned} K_0(Y)^1 &= \mathrm{Ker}(K_0(Y) \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z}) \\ &= K_0(Y) \bigcap \mathrm{Ker}(K_0(\overline{Y}) \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z}) \\ &= K_0(Y) \bigcap K_0(\overline{Y})^1. \end{aligned}$$

The second equality only uses the fact that, by corollary 3.5

$$\pi^* g_{k_1,\dots,k_m} = \mathrm{ind}\left(\bigotimes_{i=1}^{m} A_i^{\otimes k_i}\right) \prod_{i=1}^{m} z_i^{k_i}.$$

(4). Since Y is smooth and proper and $\overline{Y}$ is integral, one has an injection

$$\mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, \overline{Y}.$$

Hence the map $K_0(Y)^{(1/2)} \to K_0(\overline{Y})^{(1/2)}$ is an injection and

$$K_0(Y)^2 = K_0(Y) \bigcap K_0(\overline{Y})^2.$$

(5). If k'' is a finite field extension of k then

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(Y_{k'}))$$

is killed by $[k'' : k]$. Thus

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(Y_{k^s})) \subset \mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}.$$

The other inclusion follows from proposition 3.6 which implies that $\mathrm{CH}^2(Y_{k'})_{\mathrm{tors}}$ is trivial. Since $K_0(Y)^2$ is finitely generated,

$$\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} K_0(Y)^{(2/3)}_{\mathrm{tors}}$$

is finite. □

As a corollary we give a result proved by Gabber in a letter to Colliot-Thélène using a slightly different method. Here $A_0(Y)$ denotes the kernel of the degree map $\mathrm{CH}_0(Y) \to \mathbf{Z}$.

Corollary 3.9. — *Let Y_1 and Y_2 be two conics. Then*

$$A_0(Y_1 \times Y_2) = \mathrm{CH}^2(Y_1 \times Y_2)_{\mathrm{tors}} = \{0\}.$$

Proof. — Here $\dim(Y) = 2$ and $\mathrm{CH}_0(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^2(Y)$. By proposition 3.6, the group $\mathrm{CH}^2(\overline{Y}) = \mathbf{Z}$. Hence

$$A_0(Y) = \mathrm{CH}_0(Y)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}.$$

But in this case $K_0(\overline{Y})^3 = \{0\}$. Thus

$$K_0(Y)^3 = K_0(Y) \bigcap K_0(\overline{Y})^3 = \{0\}$$

and $\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(\overline{Y})) = \{0\}$ which yields the second equality. □

4. The complex $\mathscr{C}_\infty$ and the second Chow group

4.1. The main tool. — We shall now prove the following theorem which is the main tool in the rest of this text.

Theorem 4.1. — *Let $Y_1, \ldots, Y_m$ be m-Severi-Brauer varieties. Let $[Y_1], \ldots, [Y_m]$ be their classes in* $\mathrm{Br}\,k$ *and $U \subset \mathrm{Br}\,k$ the subgroup generated by these classes. Let $Y = Y_1 \times_k \cdots \times_k Y_m$ and M be its function field. Then $\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}$ is canonically isomorphic to the homology group of the complex*

$$k^* \otimes U \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

In particular this homology is finite.

Remark 4.1. — If $U \subset \mathrm{Br}(k)_{(n)}$ and the characteristic of k does not divide n then there is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
k^* \otimes U \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \arrow[r] & H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\
H^1(k, \mu_n) \otimes U \arrow[r] & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[u] & H^3(M, \mu_n^{\otimes 2}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

By the main theorem of Merkur′ev and Suslin [**MS1**], if m and n are prime to the exponent characteristic of k, the map $H^2(k, \mu_{nm}^{\otimes 2}) \to H^2(k, \mu_m^{\otimes 2})$ is surjective and hence $H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ is injective. A diagram chase which uses this injectivity and the surjectivity $k^* \otimes U \to H^1(k, \mu_n) \otimes U$ gives a canonical injection from the homology of the second line to that of the first. We shall give in section 6.2 an example where this injection is not surjective.

Theorem 4.1 is a consequence of the following theorem

Theorem 4.2 **(Kahn,** [**Kah2**, corollaire 3.2]**). —** *Let X be a geometrically integral variety over a field E. We denote by $\mathcal{G}$ the absolute Galois group of E. Then there is a canonical isomorphism*

$$H^1\left(\mathcal{G}, K_2(E^s(X))/K_2(E^s)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

Proof of theorem 4.1. — Let $\mathcal{G}$ be the absolute Galois group of k. According to [**CTR**, proposition 3.6], one has an exact sequence

$$\begin{aligned} H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} &\to H^1\left(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)\right) \to \\ &\to \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(Y_{k^s})) \to H^1(\mathcal{G}, H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

By proposition 3.6, $H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} K_2(k^s)$ and $H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} k^{s*m}$. Therefore $H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} k^{*m}$ and by Hilbert's theorem 90 $H^1(\mathcal{G}, H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)) = 0$. By proposition 3.8 (5),

$$\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(Y_{k_s}))$$

Thus we get an exact sequence

$$k^{*m} \to H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/K_2k^s) \to \mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

It remains to prove the following lemma

Lemma 4.3. **—** *The composite map*

$$k^{*m} \to H^1\,(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/K_2k^s) \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

fits into a diagram of the form

$$\begin{tikzcd} k^{*m} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ k^* \otimes U \arrow[r, "\cup"'] & H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \end{tikzcd}$$

where the map $k^{*m} \to k^* \otimes U$ is surjective.

Proof. — Let us first recall the construction of the composite map

$$k^{*m} \xrightarrow{f} H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{g} H^1\,(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/K_2(k^s)) \xrightarrow{h} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

The map f is induced by the composite map

$$k^{*m} \to k^{s*m} \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{Z}\right) \otimes K_1(k^s) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1) \otimes H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2).$$

The map g is the coboundary map for the short exact sequence of $\mathcal{G}$-modules

$$0 \to K_2 k^s(Y)/H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2) \to \mathcal{Z} \to H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2) \to 0$$

where $\mathcal{Z}$ is the kernel of the canonical map

$$\bigoplus_{x \in Y_{k^s}^{(1)}} k(x)^* \to \bigoplus_{x \in Y_{k^s}^{(2)}} \mathbf{Z}.$$

Similarly there is a canonical map $\sigma : \mathbf{Z}^m \to H^1(\mathcal{G}, K_1(k^s(Y))/K_1 k^s)$ defined as the composite map

$$\mathbf{Z}^m \tilde{\to} H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1)^{\mathcal{G}} \to H^1(\mathcal{G}, K_1(k^s(Y))/K_1 k^s)$$

where the second map is the coboundary map for the short exact sequence of $\mathcal{G}$-modules

$$0 \to k^s(Y)^*/k^{s*} \to \operatorname{Div} Y_{k^s} \to \operatorname{Pic} Y_{k^s} \to 0.$$

Since $H^1(\mathcal{G}, \operatorname{Div} Y_{k^s}) = \{0\}$ the map σ is surjective.

For the map h we need to recall some facts about Lichtenbaum complexes $\Gamma(i) = \Gamma(i, L^s)$ for $i \leqslant 2$ and a fixed field L (See [**Li1**], [**Li2**], [**Li3**] and [**Kah2**]). The complex $\Gamma(0)$ is $\mathbf{Z}$ in degree 0 and $\Gamma(1)$ is L^{s*} in degree 1. The complex $\Gamma(2)$ is acyclic outside $[1, 2]$. As in [**Kah2**, §3], if $i \leqslant 2$, we consider $C^\bullet(L, \Gamma(i))$ the total complex for the bicomplex

$$\bigoplus_{j,l \in \mathbf{N}} C^j(\operatorname{Gal}(L^s/L), \Gamma(i, L^s)^l).$$

and for any extension of fields F/E such that E is algebraically closed in F, the cokernel $C(F/E, \Gamma(i))$ of the morphism

$$C(E, \Gamma(i))[1] \to C(F, \Gamma(i))[1].$$

The homology of this complex is denoted by $\mathbf{H}^j(F/E, \Gamma(i))$ and is called the relative hypercohomology of F/E with value in $\Gamma(i)$. One has a canonical long exact sequence

$$\cdots \to \mathbf{H}^j(E, \Gamma(i)) \to \mathbf{H}^j(F, \Gamma(i)) \to \mathbf{H}^{j+1}(F/E, \Gamma(i)) \to \mathbf{H}^{j+1}(E, \Gamma(i)) \cdots$$

which yields isomorphisms

(4.1) $\mathbf{H}^j(F/E, \Gamma(i)) = 0$ if $j \leqslant 1$ and $i = 1$ or 2,

(4.2) $\mathbf{H}^2(F/E, \Gamma(1)) \xrightarrow{\sim} F^*/E^*$,

(4.3) $\mathbf{H}^3(F/E, \Gamma(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(F))$,

(4.4) $\mathbf{H}^2(F/E, \Gamma(2)) \xrightarrow{\sim} K_3(F)_{\mathrm{ind}}/K_3(E)_{\mathrm{ind}}$,

(4.5) $\mathbf{H}^3(F/E, \Gamma(2)) \xrightarrow{\sim} K_2(F)/K_2(E)$

and

(4.6) $\mathbf{H}^4(F/E, \Gamma(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$

If E' is a Galois extension of E and $F' = E'F$ then there is a Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^p\left(G, \mathbf{H}^q(F'/E', \Gamma(i))\right) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(F/E, \Gamma(i))$$

where $G = \mathrm{Gal}(E'/E)$. By (4.1) this spectral sequence for $i = 1$ yields a morphism

$$H^1\left(\mathcal{G}, \mathbf{H}^2(k^s(Y)/k^s, \Gamma(1))\right) \to \mathbf{H}^3(k(Y)/k, \Gamma(1))$$

which is an isomorphism, as $\mathrm{Br}(k^s) = 0$. By (4.4), since $K_3(k^s(Y))_{\mathrm{ind}}/K_3(k^s)_{\mathrm{ind}}$ is uniquely divisible (See [**MS2**]), this spectral sequence also yields a morphism

$$H^1\left(\mathcal{G}, \mathbf{H}^3(k^s(Y)/k^s, \Gamma(2))\right) \to \mathbf{H}^4(k(Y)/k, \Gamma(2))$$

which by (4.5) and (4.6) gives the map

$$H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/K_2(k^s)) \to \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

For any $a \in k^*$, we have a commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, "a^{\cdot}"] \arrow[d, "\xi_i"] & k^* \arrow[d] \\
H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1)^{\mathcal{G}} \arrow[r, "\cup a"] \arrow[d, two heads] & H^1(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \arrow[d] \\
H^1(\mathcal{G}, K_1(k^s(Y))/H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1)) \arrow[r, "\cup a"] \arrow[d, "\wr"] & H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(Y))/H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_2)) \arrow[d, "\wr"] \\
H^1\left(\mathcal{G}, \mathbf{H}^2(k^s(Y)/k^s, \Gamma(1))\right) \arrow[r, "\cup a"] \arrow[d, "\wr"] & H^1\left(\mathcal{G}, \mathbf{H}^3(k^s(Y)/k^s, \Gamma(2))\right) \arrow[d] \\
\mathbf{H}^3(k(Y)/k, \Gamma(1)) \arrow[r, "\cup a"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{H}^4(k(Y)/k, \Gamma(2)) \arrow[d, "\wr"] \\
\operatorname{Ker}\left(H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \to H^2(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\right) \arrow[r, "\cup a"] & \operatorname{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right)
\end{tikzcd}
$$

where a is respectively seen as an element of k^*, $H^0(Y_{k^s}, \mathcal{K}_1)^{\mathcal{G}}$, $H^0(\mathcal{G}, \mathbf{H}^1(k^s, \Gamma(1)))$, $\mathbf{H}^1(k, \Gamma(1))$ and $H^1(k, \hat{\mathbf{Z}}(1))$. But the column on the right side yields a surjective morphism

$$\mathbf{Z}^m \to \operatorname{Ker}\left(H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \to H^2(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\right) = U. \quad \square$$

4.2. First applications. — The following result was proved by Arason for a quaternion algebra and by Colliot-Thélène using a result of Merkur′ev and Suslin for a cyclic central simple algebra of prime index.

Proposition 4.4. — *Let A be a central simple algebra over k such that the quotient of the index of A by its exponent is squarefree and for any prime p dividing this quotient the p-primary component of the corresponding division algebra is decomposable. Denote by $[A]$ its class in* $\operatorname{Br} k$ *and by Y the corresponding Severi-Brauer variety then*

$$\operatorname{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) = [A] \cup H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)).$$

Proof. — According to [**Kar**], $K_0(Y)^{(2/3)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ and therefore $\mathrm{CH}^2(Y)$ has no torsion. This result is then a direct consequence of theorem 4.1. $\square$

Corollary 4.5. — *If A is the product of two quaternion algebras over a field of characteristic different from two, then the complex*

$$(\mathscr{C}_2) \qquad \bigoplus_{u\in U} A_u^* \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} H^1(k)\otimes U \xrightarrow{\cup} H^3(k) \to H^3(M)$$

is exact.

Proof. — In this case, $\mathrm{ind}(A)/\exp(A) \leqslant 2$ and A is decomposable. Therefore proposition 4.4 gives the exactness at the second term of the complex. The exactness at the first is due to Knus, Lam, Shapiro and Tignol [**KLST**]. □

5. The case of two conics

5.1. The result. — From now on k is a field of characteristic different from 2. As before, we shall omit the coefficients in the cohomology groups when they are equal to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. The purpose of this section is to show the following result

Theorem 5.1. — *Let k be a field of characteristic different from 2 and a_1, b_1, a_2, b_2 belong to k^*. We denote by Y_i the conic defined by the homogeneous equations*

$$X_1^2 - a_i X_2^2 - b_i X_3^2 = 0$$

for $i = 1$ or 2, $Y = Y_1 \times Y_2$, M the function field of Y and U the subgroup of $H^2(k)$ generated by (a_1, b_1) and (a_2, b_2). For any $u \in U$, let A_u be a simple central algebra which represents u. Then the complex

$$(\mathscr{C}_2) \qquad \bigoplus_{u\in U} A_u^* \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} H^1(k)\otimes U \xrightarrow{\cup} H^3(k) \to H^3(M)$$

is exact.

5.2. Exactness of the first part of the complex. — If $a_1, \dots, a_n$ belong to k then the corresponding Pfister form is defined by

$$\langle\!\langle a_1, \dots, a_n \rangle\!\rangle = <1, -a_1> \otimes \cdots \otimes <1, -a_n>.$$

Lemma 5.2. — *Let k be a field of characteristic different from 2 and let $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ belong to k^*. Assume that for any $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ in k^* the equality*

$$(c_1, \dots, c_n) = (d_1, \dots, d_n)$$

in $H^n(k)$ implies that the Pfister forms $\langle\!\langle c_1, \dots, c_n \rangle\!\rangle$ and $\langle\!\langle d_1, \dots, d_n \rangle\!\rangle$ are isomorphic. Then for any $x, y \in k^*$ such that

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = (b_1, \dots, b_{n-1}, y)$$

in $H^n(k)$ there exists $u \in k^*$ such that

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, u) = (b_1, \ldots, b_{n-1}, u) = (b_1, \ldots, b_{n-1}, y).$$

Remark 5.1. — By [**AEJ**, theorem 1] or [**JR**, page 554], the assumption is verified for any field if $n \leqslant 4$. This was proved by Merkur′ev for $n = 3$ and by Arason, Elman and Jacob for $n = 4$.

Proof. — By assumption we have that

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, x\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}, y\rangle\rangle$$

as quadratic forms. Let q_1 be the pure subform of $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$. It is characterized by the isomorphism

$$< 1 > \oplus q_1 \cong \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle.$$

Let q_2 be the pure subform of the Pfister form $\langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle$ and q the pure subform of the form $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, x\rangle\rangle$. Then one has the isomorphisms

$$\begin{aligned} -q &\cong -q_1 \oplus x\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle \\ &\cong -q_2 \oplus y\langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Let X_i be coordinates corresponding to the first decomposition and Y_i coordinates corresponding to the second one. Let V be the subspace given by the equations

$$X_1 = \cdots = X_{2^{n-1}-1} = Y_1 = \cdots = Y_{2^{n-1}-1} = 0$$

then $\dim V \geqslant 2^n - 1 - 2(2^{n-1} - 1) = 1$. If $q_{|V}$ is isotropic then $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$ is isotropic and $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle = 0$ in $W(k)$. By [**Ar**, Satz 1.6], $(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ and $u = y$ verifies the conclusion of the lemma. Otherwise let $v \in V - \{0\}$ and $u = -q(v)$. Then $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$ represents ux^{-1} and $\langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle$ represents uy^{-1}. By [**Lam**, chapter 10, corollary 1.6], we get that

$$\begin{aligned} \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, ux^{-1}\rangle\rangle &\cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}, uy^{-1}\rangle\rangle \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

in $W(k)$ and therefore

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, u) = (b_1, \ldots, b_{n-1}, u) = (b_1, \ldots, b_{n-1}, y). \quad \square$$

Proof of the exactness of the first part of the complex. — Let

$$\alpha \in \operatorname{Ker}\left(H^1(k) \otimes U \xrightarrow{\cup} H^3(k)\right).$$

Then α may be written as

$$\alpha = x \otimes (a_1, b_1) + y \otimes (a_2, b_2)$$

with $x, y \in H^1(k)$ such that

$$(x, a_1, b_1) = (y, a_2, b_2).$$

By lemma 5.2, there exists $u \in k^*$ such that

$$(x, a_1, b_1) = (u, a_1, b_1) = (u, a_2, b_2) = (y, a_2, b_2).$$

By the theorem of Knus, Lam, Shapiro and Tignol [**KLST**], one has an exact sequence

$$\left(\left(\frac{a_1, b_1}{k}\right) \otimes \left(\frac{a_2, b_2}{k}\right)\right)^* \xrightarrow{\text{Nrd}} H^1(k) \xrightarrow{\cup((a_1,b_1)+(a_2,b_2))} H^3(k).$$

Therefore

$$u \in \text{Nrd}\left(\left(\left(\frac{a_1, b_1}{k}\right) \otimes \left(\frac{a_2, b_2}{k}\right)\right)^*\right).$$

By Merkur′ev and Suslin's result [**MS1**, corollary 12.1]

$$x/u \in \text{Nrd}\left(\frac{a_1, b_1}{k}\right)^* \text{ and } y/u \in \text{Nrd}\left(\frac{a_2, b_2}{k}\right)^*$$

and we get

$$\alpha \in \text{Im}\left(\bigoplus_{u \in U} A_u^* \xrightarrow{\text{Nrd}} H^1(k) \otimes U\right)$$

as wanted. □

5.3. Exactness of the second part of the complex. — This is a direct corollary of corollary 3.9 and theorem 4.1. However using the Lichtenbaum complex in this case is like shooting sparrows with cannons. Therefore we shall now give a direct proof of 4.1 in this particular case.

Lemma 5.3. — *With the notation of theorem 5.1 the sequence*

$$H^1(k) \otimes U \to H^3(k) \to H^3(M)$$

is exact.

Proof. — We denote by M_1 the field $k(Y_1)$. Let $\alpha \in \operatorname{Ker}(H^3(k) \to H^3(M))$. By Arason's theorem [**Ar**, Satz 5.4], the image α_{M_1} of α may be written as $\alpha = (a_2, b_2, y)$ with $y \in M_1^*$. But $\alpha_{M_1} \in H^3_{\mathrm{nr}/k}(M_1)$. And by [**CTO**, proposition 13], for any $P \in Y_1^{(1)}$,

$$\partial_P(\alpha) = \nu_P(y)(a_2, b_2)_{k(P)}.$$

Therefore $\nu_P(y)$ is even for all $P \in Y_1^{(1)}$ such that $(a_2, b_2)_{k(P)} \neq 0$. We have

$$\mathrm{CH}_0(Y_1) = \operatorname{Pic}(Y_1) = \mathbf{Z}$$

thus $\operatorname{Ker}(\pi_{1*} : \mathrm{CH}_0(Y_1 \times Y_2) \to \mathrm{CH}_0(Y_1))$ coincides with $A_0(Y_1 \times Y_2)$ and by corollary 3.9 is trivial. We may then apply propositions 2.1 and 4.2 of [**CTS**] and we get that

$$y \in k^* \operatorname{Nrd}\left(\frac{a_2, b_2}{M_1}\right)^*.$$

Thus there exists $z \in k^*$ such that $\alpha_{M_1} = (a_2, b_2, z)_{M_1}$. Therefore

$$\alpha - (a_2, b_2, z) \in \operatorname{Ker}(H^3(k) \to H^3(M_1))$$

and applying Arason's theorem once more, we get the result. □

6. The case of three conics

6.1. Generalities

Proposition 6.1. — *Let k be a field of characteristic different from 2 and let a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 and b_3 belong to k^*. As above Y_i denotes the conic defined by the form $< 1, -a_i, -b_i >$, $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3$, M the function field of Y and U the subgroup of $H^2(k)$ generated by the symbols (a_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$. Let $D_i = \left(\frac{a_i, b_i}{k}\right)$ be the corresponding algebra for $1 \leqslant i \leqslant 3$. Then the homology of the complex*

$$k^* \otimes U \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

has order 1 or 2. It is equal to $\{0\}$ if and only if the three algebras $\left(\frac{a_i, b_i}{k}\right)$ for $1 \leqslant i \leqslant 3$ are split by a field extension of degree $d_0 m$ where

$$d_0 = \operatorname*{lcm}_{i \in \{0,1\}^3} \left(\operatorname{ind}\left(\bigotimes_{j=1}^{3} D_j^{\otimes i_j}\right)\right)$$

and m is an odd number.

Proof. — By theorem 4.1, the homology of the complex is isomorphic to the group $\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}$, which by proposition 3.8 (5) is equal to $\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(Y) \to \mathrm{CH}^2(\overline{Y}))$ and hence by proposition 3.8 (2) and (4) to

$$\mathrm{Ker}(K_0(Y)^{(2/3)} \to K_0(\overline{Y})^{(2/3)}) \xrightarrow{\sim} K_0(\overline{Y})^3 \bigcap K_0(Y)/K_0(Y)^3.$$

But here, with the notation of section 3.2, $K_0(\overline{Y})^3$ is generated by

$$(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)$$

and by corollary 3.5 the image of g_{i_1,i_2,i_3} in $K_0(\overline{Y})$ is $\mathrm{ind}(\bigotimes_{j=1}^3 D_j^{\otimes i_j})\prod_{j=1}^3 z_j^{i_j}$. Therefore, d_0 being defined by the formula of the proposition, one has

$$\begin{aligned} K_0(Y)\bigcap K_0(\overline{Y})^3 &= d_0(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)\mathbf{Z} \\ &= \sum_{i\in\{0,1\}^3} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^3 i_j} d_0}{\mathrm{ind}\left(\bigotimes_{j=1}^3 D_j^{\otimes i_j}\right)} g_i\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Let $D = D_1 \otimes D_2 \otimes D_3$. Let $d = \mathrm{ind}(D)$ and k' be an extension of k of degree d which splits D. Then over k' we have

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_3, b_3).$$

By [**Lam**, chapter 11, lemma 4.11], there exist $t, x, y \in k'^*$ such that $(a_1, b_1) = (t, x)$ and $(a_2, b_2) = (t, y)$. Then $k'(\sqrt{t})$ splits D_1, D_2 and D_3. By proposition 3.8 (1),

$$2d(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3) \in K_0(Y)^3$$

thus the order of the homology group divides $2d/d_0 \leqslant 2$.

It remains to show that the last assertion of the proposition is equivalent to

$$(*) \qquad \sum_{i\in\{0,1\}^3} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^3 i_j} d_0}{\mathrm{ind}\left(\bigotimes_{j=1}^3 D_j^{\otimes i_j}\right)} g_i \in K_0(Y)^3.$$

Let us first show that the last assertion of the proposition implies $(*)$. Let k' be a finite field extension which splits D_1, D_2 and D_3. Then by proposition 3.8 (1)

$$[k' : k](1-z_1)(1-z_2)(1-z_3) \in K_0(Y)^3.$$

Since $k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ splits D_1, D_2 and D_3, we have

$$8(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3) \in K_0(Y)^3.$$

and the last assertion of the proposition implies

$$d_0 m(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3) \in K_0(Y)^3$$

Since m is odd, this implies $(*)$.

We now show the converse. Assume that $(*)$ is true. Since the composite map

$$\mathrm{CH}^3(Y) \twoheadrightarrow K_0(Y)^{(3/4)} \xrightarrow{\sim} K_0(Y)^3$$

is surjective, we may take α in the inverse image of $\{d_0(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)\}$. The degree of α is then d_0. Thus there exists a closed point P in Y such that $[k(P):k] = d_0 m$ for an odd number m. Let P_i be the projection of P on Y_i for $i = 1, 2$ or 3. The field $k(P_i)$ is a subfield of $k(P)$ and splits D_i. Thus $k(P)$ splits the algebras D_1, D_2 and D_3. □

Corollary 6.2. — *If* $\mathrm{ind}(D_1 \otimes D_2 \otimes D_3) = 8$ *or if* $a_1 = a_2 = a_3$ *then the complex*

$$k^* \otimes U \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

is exact.

The cases $\mathrm{ind}(D_1 \otimes D_2 \otimes D_3) = 8$ and $a_1 = a_2 = a_3$ may be seen as the extremal ones.

Proof. — In the first case $d_0 = 8$ and $k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ splits D_1, D_2 and D_3. In the second case, namely $a_1 = a_2 = a_3$, either the three conics are split and the result is trivial or $d_0 = 2$ and $k(\sqrt{a_1})$ splits D_1, D_2 and D_3. □

6.2. A counterexample for $\mathscr{C}_\infty$. —

Proposition 6.3. — *Let k be a field of characteristic different from* 2 *and containing a fourth root of the unity. Let a, b, c belong to k^* and assume that the symbol (a, b, c) in $H^3(k)$ is not trivial. We use the notation of section 6.1 with*

$$a_1 = b_3 = a,\ a_2 = b_1 = b \text{ and } a_3 = b_2 = c.$$

then the homology group of the complex

$$k^* \otimes U \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

is isomorphic to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *and generated by the class of an element of order 4 in* $H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$.

Remark 6.1. — This also gives an example where $\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}} \neq \{0\}$.

Proof. — Let $M_1 = k(Y_1)$. The conic Y_1 is defined by the homogeneous equation

$$X_1^2 - aX_2^2 - bX_3^2 = 0.$$

Let $X = \frac{X_2}{X_1}$, $Y = \frac{X_3}{X_1}$ and $\alpha = (a, Y) + (b, X)$. The only points where α may have non trivial residues are

$$P_1 : X_1 = 0,\ P_2 : X_2 = 0 \text{ and } P_3 : X_3 = 0.$$

But

$$\partial_{P_1}(\alpha) = \nu_{P_1}(Y)(a) + \nu_{P_1}(X)(b) = (ab)$$

and $k(P_1) = k\left(\sqrt{-\frac{a}{b}}\right) = k(\sqrt{ab})$ since there is a fourth root of unity i in k.

$$\partial_{P_2}(\alpha) = \nu_{P_2}(X)(b) = (b)$$

and $k(P_2) = k(\sqrt{b})$. Similarly $\partial_{P_3}(\alpha) = (a) = 0$. Therefore $\alpha \in H^2_{\mathrm{nr}/k}(k(Y_1))$. Let $K = k\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$ then

$$\begin{aligned} M &= K\left(\sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2}\right) \\ &= K\left(\frac{X_3}{X_1}\right). \end{aligned}$$

We have the following formula

$$\begin{aligned} \mathrm{Cores}_K^M(\alpha) &= \mathrm{Cores}_K^M((a, Y)) \\ &= (a, -Y^2) \\ &= \left(a, -\frac{1}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Since $i \in k$, we get

$$\mathrm{Cores}_K^M(\alpha) = \left(-\frac{1}{b}\frac{a}{b}, -\frac{1}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2\right).$$

By [**Lam**, chapter 10, proposition 1.3]

$$\mathrm{Cores}_K^M(\alpha) = \left(-\frac{1}{b}, \frac{a}{b}\right) = (a, b) \neq 0.$$

Thus α does not belong to the image of $H^2(k)$. By remark 2.2, if we denote by $(a)_4$ the image of a in $H^1(k, \mu_4)$ and by $(a,b)_4$ the cup-product $(a)_4 \cup (b)_4$ in $H^2(k, \mu_4^{\otimes 2})$, which is isomorphic to $H^2(k, \mu_4)$ by the choice of i, we get that

$$\alpha - \mathrm{Res}((a,b)_4) \in \mathrm{Im}(H^2(k) \to H^2(M_1))$$

Therefore α is the image of an element $\tilde{\alpha}$ of order four in $H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$ and such that $\tilde{\alpha} - (a,b)_4$ belongs to $H^2(k)$. Let $\beta = \tilde{\alpha} \cup (c)_4$ in $H^3(k, \mu_4^{\otimes 2})$.

$$\beta_{M_1} = \alpha \cup (c)_2 = (a, Y, c) + (b, X, c).$$

Therefore $\beta_{M_1} \in \mathrm{Ker}(H^3(M_1) \to H^3(M))$ and

$$\beta \in \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

However $\beta - (a,b,c)_4$ is of order at most two. Since $(a) \cup (b) \cup (c)$ is not trivial, β is of order four and does not belong to

$$\mathrm{Im}\left(U \otimes k^* \xrightarrow{\cup} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

Hence the order of the homology group is bigger than two and by corollary 6.1 is equal to two. $\square$

Remark 6.2. — This proof gives also that the homology is generated by an element α in $H^3(k, \mu_4^{\otimes 2})$ such that

$$\alpha - (a,b,c)_4 \in H^3(k).$$

Remark 6.3. — The image by the corestriction map of an element in $H^n_{\mathrm{nr}/k}(M_1)$ is in $H^n_{\mathrm{nr}/k}(K)$ and by proposition 1.2 comes from a unique element in $H^n(k)$. Let N' be the induced morphism from $H^n_{\mathrm{nr}/k}(M_1)$ to $H^n(k)$. We put $\gamma = \mathrm{Res}(a,b)_4$. By the preceding proof we see that $N'(\gamma) = (a,b)$ and N' is trivial on the image of $H^2(k)$. therefore N' coincides with N in degree two if -1 is a square. In degree 3, N' is trivial on $\mathrm{Im}\,\mathrm{Res} = \mathrm{Ker}\,N$ and coincides with N on $\gamma \cup \mathrm{Res}\,H^1(k)$ since both maps are compatible with cup-products by elements of $H^1(k)$. By remark 2.2

$$\gamma \cup \mathrm{Res}\,H^1(k) \to H^3_{\mathrm{nr}/k}(M_1)/\,\mathrm{Ker}\,N$$

is surjective. Hence these maps coincide also in degree three if k contains a fourth root of unity.

References

[Am] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[Ar] J. K. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.

[AEJ] J. K. Arason, R. Elman, and B. Jacob, *Fields of cohomological 2-dimension three*, Math. Ann. **274** (1986), 649–657.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (1963-64)*, Lectures Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1973.

[BO] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–202.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathscr{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques*, Prépublication 93-05, Université de Paris-Sud, 1993.

[Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I: algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. in Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam and Masson, Paris, 1968, pp. 46–66.

[HS] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Math., vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1970.

[JR] B. Jacob and M. Rost, *Degree four cohomological invariants for quadratic forms*, Invent. Math. **96** (1989), 551–570.

[Kah1] B. Kahn, *On the cohomology of biquadratic extensions*, to appear in Comment. Math. Helv. (1993).

[Kah2] ———, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kar] N. A. Karpenko, *On topological filtration for Severi-Brauer varieties II*, Preprint, 1993.

[KLST] M. Knus, T. Y. Lam, D. B. Shapiro, and J.-P. Tignol, *Discriminants of involutions on biquaternion algebras*, in this volume (1992).

[Lam] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, 1973.

[Li1] S. Lichtenbaum, *Values of zeta-functions at nonnegative integers*, Number theory (Noordwijkerhout, 1983) (H. Jager, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1984, pp. 127–138.

[Li2] ______, *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. math. **88** (1987), 183–215.

[Li3] ______, *New results on weight-two motivic cohomology*, The Grothendieck Festschrift III (P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin, and K. A. Ribet, eds.), Progress in Math., vol. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 35–55.

[MS1] A. S. Merkur′ev and A. A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), n° 5, 1011–1046; English transl. in Math. USSR-Izv. **21** (1983), n° 2, 307–340.

[MS2] ______, *The group K_3 for a field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), n° 3, 522–545; English transl. in Math USSR-Izv. **36** (1991), n° 3, 541–565.

[MT] A. S. Merkur′ev and J.-P. Tignol, *Galois cohomology of biquadratic extensions*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), 138–169.

[Pa] I. A. Panin, *A splitting principle and the algebraic K-theory of some homogeneous varieties*, Preprint, 1991.

[Q] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Higher K-theories (Seattle, 1972) (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 85–147.

[STW] D. B. Shapiro, J.-P. Tignol, and A. R. Wadsworth, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions. II*, J. Algebra **78** (1982), 58–90.

[Sh] C. C. Sherman, *$\mathcal{K}$-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), n° 10, 999–1027.

[Su1] A. A. Suslin, *The quaternion homorphism for the function field on a conic*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), n° 2, 292–296; English transl. in Soviet Math. Dokl. **26** (1982), n° 1, 72–77.

[Su2] ______, *Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism*, Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dost. **25** (1984), 115–208; English transl. in J. Soviet Math. **30** (1985), 2556–2611.

[Ti] J.-P. Tignol, *Corps à involution neutralisés par une extension abélienne élémentaire*, Groupe de Brauer (Les Plans-sur-Bex) (M. Kervaire et M. Ojanguren, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 844, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1981, pp. 1–34.

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

CORPS DE FONCTIONS DE VARIÉTÉS HOMOGÈNES ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soit V une variété de drapeaux généralisée sur un corps k. Il existe alors des extensions finies k_i de k pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments α_i du groupe de Brauer de k_i et une suite exacte naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \operatorname{Ker}\Big(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

où $H^i(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne à valeur dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tordu deux fois et $\mathrm{CH}^2(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension deux modulo l'équivalence rationnelle.

Abstract. — Let V be a generalized flag variety over a field k. Then there exist finite field extensions k_i of k for $1 \leqslant i \leqslant m$, elements α_i of the Brauer group of k_i and a natural exact sequence

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \operatorname{Ker}\Big(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0$$

where the groups $H^j(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ are the Galois cohomology groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ twisted twice and $\mathrm{CH}^2(V)$ the Chow group of cycles of codimension two modulo rational equivalence.

Abridged English Version – For any field L we denote by L^s a separable closure of L. For any discrete $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module M, $H^i(L,M)$ is the Galois cohomology group of degree i with coefficients in M. If L' is a finite extension of L, we denote by $N_{L'/L}$ the corestriction map from $H^i(L',M)$ to $H^i(L,M)$. If a_i belongs to k^* for $1 \leqslant i \leqslant n$ then (a_i) denote their images in $H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ and

*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896

$(a_1, \dots, a_n)$ the cup-product $(a_1)\cup\cdots\cup(a_n)$. The Galois cohomology groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ twisted twice are denoted by $H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ and the Brauer group of L by $\operatorname{Br} L$.

Let V be an integral smooth variety over a field L. Then V^s denotes the product $V \times_{\operatorname{Spec} L} \operatorname{Spec} L^s$. The function field of V is denoted by $L(V)$. The group $\mathrm{CH}^i(V)$ is the Chow group of cycles of codimension i modulo rational equivalence. For any $i \geqslant 0$, the sheaf $\mathscr{K}_i$ is the sheaf for Zariski topology corresponding to the presheaf which maps an open set U to $K_i(U)$, the i-th group of Quillen's K-theory. A generalized flag variety over L is a projective variety over L which is homogeneous under the action of a connected linear algebraic group.

Theorem 1. — *Let V be a generalized flag variety over a field k. Let $\mathscr{G}$ be the Galois group of k^s over k. Then the Picard group of V^s is a permutation module. Thus it may be written as $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]$ where the groups $\mathscr{H}_i$ are open subgroups of $\mathscr{G}$. Let k_i be the corresponding fields. There exist elements α_i of $\operatorname{Br} k_i$ and a natural complex*

$$\bigoplus_{i=1}^m k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

the homology of which is isomorphic to the torsion subgroup of $\mathrm{CH}^2(V)$. In particular, this homology is finite.

The proof, which is a generalization of the proof of the main result in [**Pe2**], is based upon a result of Bruno Kahn [**Kah**, corollaire 3.2] giving an isomorphism

$$\operatorname{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathscr{G}, K_2k^s(V)/K_2k^s),$$

proposition 3.6 of [**CTR**], which yields an exact sequence

$$\begin{aligned} H^1(V^s, \mathscr{K}_2)^{\mathscr{G}} &\to H^1(\mathscr{G}, K_2(k^s(V))/H^0(V^s, \mathscr{K}_2)) \to \\ &\to \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s)) \to H^1(\mathscr{G}, H^1(V^s, \mathscr{K}_2)) \end{aligned}$$

and the following proposition :

Proposition 1. — *The group $\bigoplus_{i,j\in\mathbf{N}} H^j(V^s, \mathscr{K}_{i+j})$ is a free $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} K_i k^s$-module with a canonical basis which is invariant under the action of $\operatorname{Gal}(k^s/k)$. In particular if $i \geqslant 0$,*

$$H^1(\operatorname{Gal}(k^s/k), H^i(V^s, \mathscr{K}_{i+1})) = 0.$$

We then apply theorem 1 to get the following proposition :

***Proposition 2.* — *Let k be a field of characteristic different from 2 and containing a fourth root of unity. Let a_i be elements of k^* for $1 \leqslant i \leqslant 6$. Let V be the product of the four conics corresponding to the symbols (a_2, a_5), (a_4, a_1), (a_6, a_3) and $(a_2a_4a_6, a_1a_3a_5)$. Then $(a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6) \in H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ maps to 0 in $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. In general, this defines a nontrivial element in $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$.*

1. Notations et énoncé du résultat.

Pour tout corps L, on note L^s une clôture séparable de L. Pour tout $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module discret M, les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\mathrm{Gal}(L^s/L), M)$ sont désignés par $H^i(L, M)$. Si L' est une extension finie de L, on note $N_{L'/L}$ l'application de corestriction de $H^i(L', M)$ à $H^i(L, M)$. Si la caractéristique de L ne divise pas n alors μ_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans L^s. Si L est un corps de caractéristique exponentielle p, i un entier positif et j un entier, on pose (cf. [**Kah**])

$$H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{(p,n)=1} H^i(L, \mu_n^{\otimes j})$$

et, si $j = 0$, 1 ou 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = \varinjlim_r H^{i-j}(L, K_j(L^s)/p^r).$$

Si $j = 0$, 1 ou 2, on pose alors

$$H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)).$$

Si V est une variété sur L et L' une extension de L, $V_{L'}$ désigne $V \times_{\mathrm{Spec}\, L} \mathrm{Spec}\, L'$ et V^s la variété V_{L^s}. Si V est intègre, $k(V)$ désigne son corps de fonctions. Le faisceau $\mathcal{K}_i$ est le faisceau pour la topologie de Zariski sur V associé au préfaiseau $U \mapsto K_i(U)$ où $K_i(U)$ désigne le i-ème groupe de K-théorie de Quillen. Si G est un groupe algébrique linéaire semi-simple, une variété de drapeaux généralisée sous G est une variété projective qui est homogène sous G.

Le but de cette Note est de montrer le théorème suivant

***Théorème 1.* — *Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur un corps k de groupe de Galois absolu $\mathcal{G}$. Soit V une variété de drapeaux généralisée sous G. Alors le groupe de Picard de V^s est un module de permutation et se met donc sous la forme $\bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]$ où les $\mathcal{H}_i$ sont des sous-groupes ouverts de $\mathcal{G}$. Soient k_i les*

corps correspondants. Il existe des classes α_i *de* $\mathrm{Br}\,k_i$ *et un complexe naturel*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

dont l'homologie est canoniquement isomorphe au sous-groupe de torsion de $\mathrm{CH}^2(V)$. *En particulier, cette homologie est finie.*

2. $\mathscr{K}$-cohomologie d'une variété de drapeaux généralisée.

Soient k un corps de clôture séparable k^s et $\mathscr{G}$ le groupe de Galois de k^s sur k. Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur k et V une variété de drapeaux généralisée sous G. On fixe un sous-groupe parabolique P de G^s tel que V^s soit isomorphe à $P\backslash G^s$ et un sous-groupe de Borel B de P. Soit T un tore maximal de B, Φ l'ensemble des racines de T dans G^s et W le groupe de Weyl correspondant. La lettre Δ désigne la base de Φ correspondant à B. Pour tout $J \subset \Delta$, P_J désigne le sous-groupe parabolique correspondant, W_J le sous-groupe de W engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$ et W^J l'ensemble des uniques éléments de longueur minimale dans les classes $W_J w$ lorsque w décrit W. On note W_i^J le sous-ensemble de W^J des éléments de longueur i et V_J la variété $P_J\backslash G^s$. Pour tout $w \in W$, $X_{w,J}$ désigne l'adhérence de l'image dans V_J de la double classe BwB. L'élément le plus long dans W_J est noté w_J.

Proposition 1. — *Avec les notations qui précèdent, le groupe* $\bigoplus_{i,j\in\mathbf{N}} H^j(V_J, \mathscr{K}_{i+j})$ *est un* $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} K_i k^s$*-module libre muni d'une base canonique donnée par les classes* $[X_{J,w}]$ *dans* $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ *pour* w *appartenant à* $W^J_{\dim V_J - i}$. *En outre l'application* $w \mapsto w_J w w_\Delta$ *induit une bijection de* W_i^J *dans* $W^J_{\dim V_J - i}$ *et, en posant* $\bar{w} = w_J w w_\Delta$, *on obtient dans l'anneau de Chow* $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$, *la relation*

$$\forall (w, w') \in W_i^J \times W^J_{\dim V_J - i},\ [X_{J,w}].[X_{J,w'}] = \delta_{\bar{w},w'}[X_{J,e}]$$

où $[X_{J,e}]$ *est la classe d'un point.*

Démonstration. — Soit $\pi_J : G \to V_J$ la projection canonique. Par [**Bo**, theorem 21.29], les sous-variétés $\pi_J(BwB)$ pour $w \in W^J$ forment une décomposition cellulaire de V_J et pour tout w de W^J la dimension de $\pi_J(BwB)$ est égale à $l(w)$. Or les groupes $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ coïncident avec $\mathrm{CH}^i(V_J)$. Donc par [**Fu**,

example 1.9.1], les classes $[X_{J,w}]$ pour w appartenant à $W^J_{\dim V_J - i}$ engendrent $H^i(V_J, \mathcal{K}_i)$. D'après [**Dem**, corollaire page 69], il s'agit d'une base lorsque $J = \varnothing$.

Un calcul élémentaire sur les longueurs montre que, si $w \in W^J_i$, alors $w_J w w_\Delta$ appartient à $W^J_{\dim V_J - i}$. On note $\pi_{\varnothing,J} : V_\varnothing \to V_J$ la projection canonique. Soit w un élément de W^J_i et w' un élément de $W^J_{\dim V_J - i}$. Par [**Bo**, 21.29], $\pi_{\varnothing,J}(\pi_\varnothing(Bw_JwB))$ coïncide avec $\pi_J(BwB)$. Comme $l(w_Jw) = \dim(V_\varnothing) - \dim(V_J) + l(w)$, on obtient que $\pi^{-1}_{\varnothing,J}(X_{J,w}) = X_{\varnothing,w_Jw}$. En appliquant [**Dem**, proposition 3.1] et [**Fu**, proposition 8.3], on obtient

$$\begin{aligned}
[X_{J,w}].[X_{J,w'}] &= [X_{J,w}].\pi_{\varnothing,J_*}([X_{\varnothing,w'}]) &&= \pi_{\varnothing,J_*}(\pi^*_{\varnothing,J}([X_{J,w}]).[X_{\varnothing,w'}]) \\
&= \pi_{\varnothing,J_*}([X_{\varnothing,w_Jw}].[X_{\varnothing,w'}]) &&= \pi_{\varnothing,J_*}(\delta_{w_Jw,w'w_\Delta}[X_{\varnothing,e}]) \\
&= \delta_{\bar{w},w'}[X_{J,e}].
\end{aligned}$$

Les éléments $[X_{J,w}]$ pour $w \in W_J$ forment donc une base de l'anneau de Chow et la formule d'intersection est démontrée.

Choisissons maintenant une bijection de $\{1, \dots, N\}$ dans W^J telle que, si $i \leqslant i'$, alors $l(w_i) \geqslant l(w_{i'})$. Pour tout i compris entre 0 et N on note O_i l'ouvert $\bigcup_{j \leqslant i} \pi_J(Bw_jB)$. Nous allons démontrer par récurrence sur i que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, le $\bigoplus_{j \in \mathbf{N}} K_j k^s$-module $\bigoplus_{j,l \in \mathbf{N}} H^l(O_i, \mathcal{K}_{j+l})$ est libre avec une base donnée par les classes

$$\left[\overline{\pi_J(Bw_jB)}\right] \in H^{\dim V_J - l(w_j)}(V_J, \mathcal{K}_{\dim V_J - l(w_j)})$$

où j décrit $\{1, \dots, i\}$. Pour $i = 1$ on a que l'ouvert O_1 est isomorphe à l'espace affine de dimension $\dim V_J$ et le résultat est une conséquence du théorème d'homotopie pour la $\mathcal{K}$-cohomologie (cf. [**Sh**, theorem 2.4]). Supposons le résultat connu pour $i - 1$. Alors $U_i = O_i - O_{i-1} = \pi_J(Bw_iB)$ est isomorphe à l'espace affine de dimension $l(w_i)$. Par le théorème d'homotopie, on obtient que $H^p(U_i, \mathcal{K}_q)$ est isomorphe à $K_q k^s$ si p est nul et est trivial sinon. Or on a des suites exactes longues

$$\begin{aligned}
\cdots \to H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{q-d}) &\to H^p(O_i, \mathcal{K}_q) \\
&\to H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_q) \xrightarrow{\partial^{p,q}_i} H^{p+1-d}(U_i, \mathcal{K}_{q-d}) \to \cdots
\end{aligned}$$

où $d = \dim V_J - l(w_i)$. Mais si $p > d$, alors le groupe $H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{p-d})$ est trivial et $\partial_i^{p-1,p} = 0$. Si, par contre, $p = d$, alors sachant que

$$\operatorname{rk}(H^p(V_J, \mathcal{K}_p)) = \# W^J_{\dim V_J - p} = \sum_{\{i \mid l(w_i) = \dim V_J - p\}} \operatorname{rk}(\operatorname{Coker} \partial_i^{p-1,p}),$$

on obtient que les applications $\partial_i^{p,p-1}$ sont triviales. Mais les morphismes ∂_i sont $K_* k^s$-linéaires et par hypothèse de récurrence $\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_{p+i})$ est un $\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} K_i k^s$-module libre. Donc toutes les applications $\partial_i^{p,q}$ sont nulles. En d'autres termes on a obtenu un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{p-d}(U_i, K_{q-d}) \arrow[r] & H^p(O_i, \mathcal{K}_q) \arrow[r] & H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_q) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{q-p}k^s \otimes H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{p-d}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & K_{q-p}k^s \otimes H^p(O_i, \mathcal{K}_p) \arrow[r] \arrow[u] & K_{q-p}k^s \otimes H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par conséquent la flèche verticale du centre est également un isomorphisme. □

Corollaire 1. — *Les $\mathcal{G}$-réseaux $H^i(V^s, \mathcal{K}_i)$ sont des modules de permutation.*

Démonstration. — On note I la partie de Δ correspondant à P. Soit $C^i_{\mathrm{eff}} \subset H^i(V^s, \mathcal{K}_i)$ le cône des classes de diviseurs effectifs. Alors $[X_{I,w}]$ appartient à ce cône. Réciproquement, soit $\alpha = \sum_{w \in W^J_i} n_w [X_I, w]$ un élément de $C^{\dim V - i}_{\mathrm{eff}}$. Alors, d'après [**Fu**, page 441] pour tout w appartenant à $W^I_{\dim V - i}$ on a $[X_{I,w}].\alpha \geqslant 0$. Mais pour tout élément $w \in W^I_i$, $n_w = [X_{I,\bar{w}}].\alpha$. Donc on obtient que $C^{\dim V - i}_{\mathrm{eff}}$ est le monoïde engendré par les $[X_{I,w}]$ où w décrit W^J_i. L'action de $\mathcal{G}$ sur $H^i(V^s, \mathcal{K}_i)$ laisse C^i_{eff} globalement invariant. Ses faces de dimension un sont également invariantes et la base définie par $[X_{I,w}]$ est globalement invariante. □

Corollaire 2. — *Pour tout entier positif i, on a $H^1(\mathcal{G}, H^i(V^s, \mathcal{K}_{i+1})) = 0$.*

Démonstration. — Par la proposition 1, on a des isomorphismes

$$H^i(V^s, \mathcal{K}_{i+1}) \xrightarrow{\sim} k^{s*} \otimes_{\mathbf{Z}} H^i(V^s, \mathcal{K}_i).$$

Le corollaire résulte alors du corollaire 1 et du théorème 90 d'Hilbert. □

3. Démonstration du théorème 1

Par [**CTR**, proposition 3.6], on a une suite exacte

$$H^1(V^s,\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \to H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(V))/H^0(V^s,\mathcal{K}_2)) \to$$
$$\to \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V)\to \mathrm{CH}^2(V^s)) \to H^1(\mathcal{G}, H^1(V^s,\mathcal{K}_2)).$$

D'après le corollaire 2, $H^1(\mathcal{G}, H^1(V^s,\mathcal{K}_2))$ est trivial et par la proposition 1 on a des isomorphismes $K_2k^s \xrightarrow{\sim} H^0(V^s,\mathcal{K}_2)$ et $\mathrm{Pic}\, V^s\otimes k^{s*} \xrightarrow{\sim} H^1(V^s,\mathcal{K}_2)$. Mais d'après [**Kah**, corollaire 3.2] qui est un des éléments-clefs de cette démonstration,

$$H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(V))/K_2k^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

En outre, comme $\mathrm{CH}^2(V^s)$ est sans torsion, on a

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V)\to \mathrm{CH}^2(V^s)) = \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$$

ce qui donne la suite exacte

$$(\mathrm{Pic}\, V^s\otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Ker}\left(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Comme $(\mathrm{Pic}\, V^s\otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^m k_i^*$ il reste à montrer que le morphisme de k_i^* dans $H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ a bien la forme désirée. Mais on vérifie que les morphismes considérés sont compatibles avec la corestriction. Il suffit donc de considérer le cas où $k_i = k$. Soit α_i l'image du générateur naturel de $\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]^{\mathcal{G}} \subset \mathrm{Pic}\, V^{s\mathcal{G}}$ dans $\mathrm{Br}\, k$ par l'application composée

$$\mathrm{Pic}\, V^{s\mathcal{G}} \to H^1(\mathcal{G}, k^s(V)^*/k^{s*}) \to \mathrm{Br}(k).$$

On vérifie alors comme dans [**Pe2**, lemma 4.3] la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} k^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ & k^*\otimes \alpha\mathbf{Z}. \arrow[ur, "\cup"'] & \end{tikzcd}$$

4. Application.

Proposition 2. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et contenant des racines quatrièmes de l'unité. Soit $a_i\in k^*$ pour $1\leqslant i\leqslant 6$. On pose*

$$\begin{array}{llll} A_1 = a_2, & A_2 = a_4, & A_3 = a_6, & A_4 = a_2a_4a_6 \\ B_1 = a_5, & B_2 = a_1, & B_3 = a_3, & B_4 = a_1a_3a_5. \end{array}$$

On note V le produit des quatre coniques C_i d'équations homogènes

$$T_{i,1}^2 - A_i T_{i,2}^2 - B_i T_{i,3}^2 = 0.$$

Alors l'élément $(a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6)$ *de* $H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ *s'annule dans* $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ *et définit en général un élément non nul de* $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$.

Démonstration. — Un calcul explicite à partir du théorème 1 amène à considérer la fonction

$$f = \left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 a_1 - \left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2 a_5 = \left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 a_2 - \left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2 a_4 \in k(C_1 \times C_2 \times C_3).$$

D'après [**Lam**, chapter 10, proposition 1.3], dans $H^3(k(C_1 \times C_2 \times C_3), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ on a les relations

$$\begin{aligned}
(f, a_1a_3a_5, a_2a_4a_6) &= \left(a_2\left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 - a_4\left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2, a_2a_4, a_1a_3a_5\right)\\
&\quad + \left(a_1\left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 - a_5\left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2, a_1a_5, a_6\right)\\
&= (a_2, a_4, a_1a_3a_5) + (a_1, a_5, a_6)\\
&= (a_2, a_3, a_4) + (a_1, a_5, a_6).
\end{aligned}$$

Ce dernier élément s'annule donc dans $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Mais $(a_1, a_2, a_3) + (a_1, a_5, a_6) + (a_2, a_3, a_4) + (a_4, a_5, a_6)$ appartient au groupe

$$< (a_i), 1 \leqslant i \leqslant 6 > \cup < (a_2, a_5), (a_4, a_1), (a_6, a_3), (a_1a_3a_5, a_2a_4a_6) >$$

qui est contenu dans le noyau de l'application de restriction de k à $k(V)$.

Pour la seconde assertion, constatons d'abord que le complexe du théorème 1 s'écrit

$$S \otimes k^* \xrightarrow{\cup} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

où S est le sous-groupe de $\mathrm{Br}\,k$ engendré par les (A_i, B_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 4$. D'après [**Pe2**, remark 4.1] qui utilise le théorème principal de Merkur'ev et Suslin [**MS**], si ce complexe est exact il en est a fortiori de même du complexe obtenu en remplaçant $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On se place alors dans le cas où k est de la forme $k_0((a_1))\dots((a_6))$ pour des indéterminées a_i et un corps algébriquement clos k_0. Par [**Pe1**, page 255], $H^*(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est alors isomorphe à $\Lambda^* U$ où U est le sous-groupe de $k^*/(k^*)^2$ engendré par les (a_i). Un calcul élémentaire donne alors que

$$(a_1) \wedge (a_2) \wedge (a_3) + (a_4) \wedge (a_5) \wedge (a_6) \notin S \wedge U. \quad \square$$

Je remercie Markus Rost pour les discussions qui m'ont amené à étendre le résultat principal de [**Pe2**] aux variétés de drapeaux généralisées.

Références

[Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[Dem] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Kah] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Lam] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, 1973.

[MS] A. S. Merkur′ev and A. A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), n° 5, 1011–1046; English transl. in Math. USSR-Izv. **21** (1983), n° 2, 307–340.

[Pe1] E. Peyre, *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.

[Pe2] ———, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence, 1995, pp. 369–401.

[Sh] C. C. Sherman, *$\mathcal{K}$-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), n° 10, 999–1027.

1995

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

GALOIS COHOMOLOGY IN DEGREE THREE AND HOMOGENEOUS VARIETIES*

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — The central result of this paper is the following generalization of a result of the author on products of Severi-Brauer varieties. Let G be a semi-simple linear algebraic group over a field k. Let V be a generalized flag variety under G. Then there exist finite extensions k_i of k for $1 \leqslant i \leqslant m$, elements α_i in $\mathrm{Br}\, k_i$ and a natural exact sequence

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

After giving a more explicit expression of the second morphism in a particular case, we apply this result to get classes in $H^3(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, which are k-negligible for any field k of characteristic different from 2 which contains a fourth root of unity, for a group Q which is a central extension of an $\mathbf{F}_2$ vector space by another.

Résumé. — Le résultat central de ce texte est la généralisation suivante d'un résultat de l'auteur sur les produits de variétés de Severi-Brauer. Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur un corps k. Soit V une variété de drapeaux généralisée sous G. Alors il existe des extensions finies k_i de k pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments α_i de $\mathrm{Br}\, k_i$ et une suite exacte naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Après avoir donné une description plus explicite du deuxième morphisme dans une cas particulier, nous utilisons ce résultat pour construire des classes dans $H^3(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ qui sont k-négligeables pour tout corps k de caractéristique différente de 2 et contenant une racine quatrième de l'unité, pour un groupe Q qui est extension centrale d'un $\mathbf{F}_2$ espace vectoriel par un autre.

*K-theory **15** (1998), 99–145

Contents

1. Introduction

The central result of this paper is a generalization of a previous result of the author about products of Severi-Brauer varieties [**Pe2**, theorem 4.1]. Let V be a generalized flag variety for a linear algebraic group G over a field k. Then the Picard group of V over a separable closure of k has a canonical basis B which is globally invariant under the action of the Galois group. Let E be the étale algebra corresponding to the Galois set B. There exists a class α in the Brauer group of E and an exact sequence

$$E^* \xrightarrow{N_{E/k}(.\cup\alpha)} \operatorname{Ker}(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

In fact the part of the kernel given by the image of E^* comes from the kernel for Brauer groups in the following sense: this image is the union, for k' describing the separable finite extensions of k of the corestriction of the group $k'^* \cup \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k' \to \operatorname{Br} k'(V))$. This kernel has been studied independently by Merkur$'$ev in [**Me**].

After giving a few applications of this result and describing an explicit construction of the second map in a particular case, we turn to the second topic of this paper, the problem of totally k-negligible classes in the third cohomology group of some meta-abelian groups G, that is classes which vanish when lifted to the Galois cohomology of any extension of k. This notion of negligibility is weaker than the one introduced by Serre in [**Se**, §7]. In this article, the idea is to replace the field of invariants $k(W)^G$, on which the negligibility may be

tested, by a function field $K(V)$ where K is purely transcendental over k and V a generalized flag variety over K for which we may apply the previous results of the paper. We then use this machinery to get a class in $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ which is k-negligible for any field k of characteristic different from 2 and containing the fourth roots of one, where the group G is a central extension of an $\mathbf{F}_2$ vector space by another.

It is interesting to note that the first examples of geometrically negligible classes in the group $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ were constructed by Saltman (see [**Sa2**, theorem 4.14]) for a 2-group G with a cyclic subgroup of index 2 using a kind of equivariant Chow group. Although the techniques used here are different from those of Saltman, the group $CH^2(V)$ which appears may also be interpreted as an equivariant Chow group; this seems to indicate the existence of a more general underlying structure.

Some of the results of this article have been stated with shortened proofs in [**Pe3**].

2. Notation and statement of the main result

Notation . — For any field L, $\overline{L}$ denotes an algebraic closure of L and L^s the separable closure of L in $\overline{L}$. For any discrete $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module M, set

$$H^i(L, M) = H^i(\mathrm{Gal}(L^s/L), M).$$

If the characteristic of L does not divide n, μ_n denotes the group of n-th roots of unity in L^s. If p is the exponential characteristic of L, which coincides with the usual one if it is different from 0 and is 1 otherwise, i a positive integer and j an integer, we put (see [**Kah**])

$$H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{(p,n)=1} H^i(L, \mu_n^{\otimes j})$$

and, if $j = 0$, 1 or 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = \varinjlim_{r} H^{i-j}(L, K_j(L^s)/p^r).$$

Then if $j = 0$, 1 or 2 we put

$$H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)).$$

If L' is a finite separable field extension of L then $N_{L'/L}$ denote the corestriction morphism from the Galois cohomology of L' to that of L.

If V is a variety over L then $L(V)$ is the function field of V. If moreover L' is a field extension of L then $V_{L'}$ denotes the product $V \times_{\operatorname{Spec} L} \operatorname{Spec} L'$ and V^s the variety V_{L^s}. For any nonnegative integer i, $V^{(i)}$ denotes the set of points of codimension i in V. The sheaf $\mathcal{K}_i$ is the sheaf on V for Zariski topology corresponding to the presheaf mapping U to $K_i(U)$, the i-th group of Quillen K-theory. If V is smooth, the codimension of support defines a decreasing filtration on $K^i(V)$ which is denoted by $K^i(V)^j$ (see [**Q**, §7.5]). The quotient $K^i(V)^j/K^i(V)^{j+1}$ is denoted by $K^i(V)^{(j/j+1)}$.

A generalized flag variety is a projective variety which is homogeneous under the action of a connected linear algebraic group G and such that V^s is isomorphic to the quotient of G^s by a standard parabolic subgroup. Without loss of generality, we may assume that the group G is semi-simple and simply connected.

From now on, G will denote a semi-simple simply connected linear algebraic group over a field k and V a generalized flag variety under G. We denote by $\mathcal{G}$ the Galois group of k^s over k.

The key result of this paper is the following theorem, the proof of which is given in section 5.

Theorem 2.1. — *With notation as above, the Picard group of V^s is a $\mathcal{G}$ permutation module. This means that there exist subgroups $\mathcal{H}_i$ of $\mathcal{G}$ of finite index such that* $\operatorname{Pic} V^s$ *is isomorphic to* $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]$. *Let k_i be the corresponding fields. Then for any i there is a class α_i of* $\operatorname{Br} k_i$ *such that:*

(i) In the natural exact sequence

$$\operatorname{Pic} V \to \operatorname{Pic}(V^s)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\rho} \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(V)$$

the natural generator of $\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]^{\mathcal{G}}$ *is sent to* $N_{k_i/k}(\alpha_i)$ *by* ρ.

(ii) The homology of the complex

$$(\mathscr{C}) \qquad \bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

is canonically isomorphic to the torsion subgroup of $\mathrm{CH}^2(V)$. *In particular this homology is finite.*

Remark 2.2. — Merkur′ev has proved in [**Me**] that the kernel of the first map in $(\mathscr{C})$ coincides with $H^1(V, \mathcal{K}_2)$.

3. $\mathscr{K}$-cohomology

We shall now consider the $\mathscr{G}$-module structure of the $\mathscr{K}$-cohomology groups of V^s.

We fix a parabolic subgroup P of G^s such that V^s is isomorphic to $P\backslash G^s$. Let B be a Borel subgroup of G^s contained in P, T be a maximal torus in B, Φ be the root system of T in G^s, and W be the corresponding Weyl group. The letter Δ denotes the basis of Φ corresponding to B. For any α in Δ, s_α denotes the corresponding generator of W and ϖ_α the corresponding fundamental weight. Let I be the subset of Δ corresponding to P (see [**Bor**, page 234]). For any subset J of Δ, the corresponding parabolic subgroup is denoted by P_J. Let V_J be the homogeneous variety $P_J\backslash G^s$ and π_J be the canonical projection $G^s \to V_J$. The subgroup generated by the s_α for $\alpha \in J$ is denoted by W_J and the set of the unique elements of minimal length in the classes $W_J w$ for w in W by W^J. Let w_J be the longest element in W_J.

Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G^s and for any $\alpha \in \Phi$ let

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T(k^s),\ \mathrm{Ad}(t)(X) = \alpha(t)X \,\}.$$

The unique subgroup of G^s normalized by T and having $\mathfrak{g}_\alpha$ as Lie algebra is denoted by U_α. If w belongs to W, then U'_w is the subgroup of G^s generated by the U_γ where γ varies over

$$\{\, \delta \in \Phi \mid \delta > 0 \text{ and } w\delta < 0 \,\}.$$

By Bruhat's decomposition, G^s is the disjoint union of the double classes $C(w) = BwB$ for $w \in W$. Moreover by [**Bor**, theorem 14.12] there are isomorphisms

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} B \times U'_w & \xrightarrow{\sim} & BwB \\ (b,u) & \mapsto & bwu \end{array}$$

and by [**Bor**, theorem 21.29], the sets $\pi_J(C(w))$ give a cellular decomposition of V_J as w varies over W^J. Moreover the isomorphism (1) yields an isomorphism from U'_w to $\pi_J(C(w))$. In particular by [**Bki**, chapitre VI, n° 1.6, page 158, corollaire 2],

$$\dim(\pi_J(C(w))) = \#\{\, \gamma \in \Phi \mid \gamma > 0 \text{ and } w\gamma < 0 \,\} = l(w).$$

Let $X_{J,w} = \overline{\pi_J(C(w))}$. By [**Fu**, example 1.9.1], the Chow group $\mathrm{CH}_i(V_J)$, which by [**Q**, theorem 7.5.19] is isomorphic to $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$, is generated by the classes $[X_{J,w}]$ for

$$w \in W_i^J = \{\, w \in W^J \mid l(w) = i \,\}$$

and by [**Dem**, corollaire page 69] these classes form a basis when $J = \varnothing$. We shall now generalize this result.

Proposition 3.1. — *With notation as above, $\bigoplus_{i,j\geqslant 0} H^i(V_J, \mathscr{K}_{i+j})$ is a free $\bigoplus_{j\geqslant 0} K_j k^s$-module with a canonical basis given by the classes $[X_{J,w}]$ in $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ for w in $W^J_{\dim V_J - i}$ where i varies over $\{0, \dots, \dim V_J\}$. Moreover the map $w \mapsto w_J w w_\Delta$ induces a bijection $w \mapsto \bar{w}$ from W^J_i to $W^J_{\dim V_J - i}$ and in the Chow ring $\bigoplus_{i\geqslant 0} H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ one has for any $w \in W^J_i$ and any $w' \in W^J_{\dim V_J - i}$*

$$[X_{J,w}].[X_{J,w'}] = \delta_{\bar{w},w'}[X_{J,e}]$$

where $[X_{J,e}]$ is the class of a point.

We first state two corollaries of this proposition.

Corollary 3.2. — *The $\mathscr{G}$-lattices $H^i(V^s, \mathscr{K}_i)$ are permutation modules.*

Proof. — Let $C^i_{\text{eff}} \subset H^i(V^s, \mathscr{K}_i) \otimes \mathbf{Q}$ be the cone of classes of effective divisors. Then $[X_{I,w}]$ belongs to this cone. On the other hand, let

$$\alpha = \sum_{w \in W^I_i} n_w [X_{I,w}]$$

be an element of $C^{\dim V - i}_{\text{eff}}$. Then, let E be an effective divisor representing a multiple of α. By [**Fu**, page 441] for any w belonging to $W^I_{\dim V - i}$, there exists g in $G(k^s)$ such that the intersection of $X_{I,w}.g$ with E is a union of points. Thus one has $[X_{I,w}].[E] \geqslant 0$ and hence $[X_{I,w}].\alpha \geqslant 0$. But, by the proposition, for any $w \in W^I_i$, $n_w = [X_{I,\bar{w}}].\alpha$. Therefore, we get

$$C^{\dim V - i}_{\text{eff}} = \sum_{w \in W^I_i} \mathbf{Q}_{\geqslant 0}[X_{I,w}].$$

The action of $\mathscr{G}$ on $H^i(V^s, \mathscr{K}_i) \otimes \mathbf{Q}$ leaves C^i_{eff} globally invariant. Its faces of dimension one remain also invariant and thus the basis $([X_{I,w}])_{w \in W^I_{\dim V - i}}$ is also globally invariant. □

Corollary 3.3. — *For any positive integer i, one has*

$$H^1(\mathscr{G}, H^i(V^s, \mathscr{K}_{i+1})) = 0.$$

Proof. — By proposition 3.1, there are isomorphisms

$$H^i(V^s, \mathscr{K}_{i+1}) \xrightarrow{\sim} k^{s*} \otimes_{\mathbf{Z}} H^i(V^s, \mathscr{K}_i),$$

but the right term is a permutation module by corollary 3.2. Let $\mathscr{G}_j$ be the subgroups of $\mathscr{G}$ such that $H^i(V^s, \mathscr{K}_i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{G}_j]$. Then by Shapiro's lemma

$$H^i(V^s, \mathscr{K}_{i+1}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=1}^m H^1(\mathscr{G}_j, k^{s*}).$$

But by Hilbert's theorem 90, the groups $H^1(\mathscr{G}_j, k^{s*})$ are trivial. □

Proof of proposition 3.1. — Let us first prove the assertions concerning the Chow ring. By [**Fu**, example 1.9.1], the classes $[X_{J,w}]$ generate the $\mathbf{Z}$-module $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$. Let w belong to W_i^J and let us show that $w' = w_J w w_\Delta$ belongs to $W^J_{\dim V_J - i}$. By [**Bki**, chapitre IV, §1, exercice 3],

$$l(w_J w) = l(w_J) + l(w) = \dim V_\varnothing - \dim V_J + l(w)$$

and by [**Bki**, chapitre VI, n° 1.6, page 158, corollaire 3],

$$l(w_J w w_\Delta) = l(w_\Delta) - l(w_J w) = \dim V_J - l(w).$$

Let us write w' in the form $w_1 w_2$ with $w_1 \in W_J$ and $w_2 \in W^J$. Then

$$l(w_J w') = l(w_J w_1 w_2) = l(w_J) - l(w_1) + l(w_2).$$

Thus we have

$$l(w) = l(w_J w' w_\Delta) = l(w_\Delta) - l(w_J) + l(w_1) - l(w_2) = \dim V_J + l(w_1) - l(w_2)$$

but $l(w') = l(w_1) + l(w_2) = \dim V_J - l(w)$ and we get $2l(w_1) = 0$, which yields that w_1 is trivial.

Let us now consider elements w of W_i^J and w' of $W^J_{\dim V_J - i}$. We denote by $\pi_{\varnothing,J}$ the canonical projection from $V_\varnothing$ to V_J. By [**Bor**, proposition 21.29], one has the equality

$$\pi_{\varnothing,J}(\pi_\varnothing(C(w_J w))) = \pi_J(C(w))$$

since $l(w_J w) = l(w_J) + l(w) = \dim(V_\varnothing) - \dim(V_J) + l(w)$, we get that $\pi_{\varnothing,J}^{-1}(X_{J,w})$ is equal to $X_{\varnothing, w_J w}$. Then, using [**Dem**, §3.3, proposition 1] and [**Fu**, proposition

8.3], we obtain the following equalities

$$\begin{aligned}[X_{J,w}][X_{J,w'}] &= [X_{J,w}].\pi_{\varnothing,J\,*}([X_{\varnothing,w'}])\\ &= \pi_{\varnothing,J\,*}(\pi^{*}_{\varnothing,J}([X_{J,w}]).[X_{\varnothing,w'}])\\ &= \pi_{\varnothing,J\,*}([X_{\varnothing,w_Jw}].[X_{\varnothing,w'}])\\ &= \pi_{\varnothing,J\,*}(\delta_{w_Jw,w'w_\Delta}[X_{\varnothing,e}])\\ &= \delta_{\tilde{w},w'}[X_{J,e}].\end{aligned}$$

Thus the classes $[X_{J,w}]$ for $w \in W^J$ give a basis of the Chow ring and the intersection formula is proved.

Let N be the cardinal of W^J. Let us now choose a bijection from $\{1,\dots,N\}$ to W^J such that $i \leqslant i'$ implies $l(w_i) \geqslant l(w_{i'})$, where w_i denotes the image of i. Then for any i between 1 and N we denote by O_i the open set $\bigcup_{j\leqslant i}\pi_J(C(w_j))$. We shall prove by induction on i that for any i such that $1 \leqslant i \leqslant N$ the $\bigoplus_{j\geqslant 0} K_jk^s$-module $\bigoplus_{j,l\geqslant 0} H^l(O_i,\mathcal{K}_{l+j})$ is free with a basis given by the classes

$$\left[\overline{\pi_J(C(w_j))}\right] \in H^{\dim V_J - l(w_j)}(O_i,\mathcal{K}_{\dim V_J - l(w_j)})$$

for j in $\{1,\dots,i\}$. For $i=1$, the open set O_1 is isomorphic to an affine space and the assertion is a consequence of the homotopy theorem for $\mathcal{K}$-cohomology (see [**Sh**, theorem 2.4]). Let us assume the result for $i-1$. Then $U_i = O_i - O_{i-1} = \pi_J(C(w_i))$ is isomorphic to an affine space of dimension $l(w_i)$. By the homotopy theorem one has

$$H^p(U_i,\mathcal{K}_q) = \begin{cases} K_qk^s & \text{if } p=0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Since the varieties U_i and O_i are smooth, there are long exact sequences

$$\cdots \to H^{p-d}(U_i,\mathcal{K}_{q-d}) \to H^p(O_i,\mathcal{K}_q) \to H^p(O_{i-1},\mathcal{K}_q) \xrightarrow{\partial_i^{p,q}} H^{p+1-d}(U_i,\mathcal{K}_{q-d}) \to \cdots$$

where $d = \dim V_J - l(w_i)$ which are induced by the short exact sequences

$$0 \to \bigoplus_{x\in U_i^{(r-d)}} K_jk(x) \to \bigoplus_{x\in O_i^{(r)}} K_jk(x) \to \bigoplus_{x\in O_{i-1}^{(r)}} K_jk(x) \to 0.$$

For $q=p$ one has in particular

$$\dots \xrightarrow{\partial_i^{p-1,p}} H^{p-d}(U_i,\mathcal{K}_{p-d}) \to H^p(O_i,\mathcal{K}_p) \to H^p(O_{i-1},\mathcal{K}_p) \to 0.$$

But, if $p > d$ the group $H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{p-d})$ is trivial and $\partial_i^{p-1,p} = 0$. On the other hand, if $p = d$ then

$$\mathrm{rk}(H^p(V_J, \mathcal{K}_p)) = \# W_p^J = \sum_{\{i \mid l(w_i) = \dim V_J - p\}} \mathrm{rk}(\mathrm{Coker}\, \partial_i^{p-1,p}),$$

and the maps $\partial_i^{p-1,p}$ are trivial. But the morphisms ∂_i are $K_* k^s$ linear and by induction hypothesis $H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_{p+*})$ is a free $K_* k^s$-module. Therefore all maps $\partial_i^{p,q}$ are trivial. Hence we obtain the following commutative diagram the horizontal lines of which are exact:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{q-d}) & \longrightarrow & H^p(O_i, \mathcal{K}_q) & \longrightarrow & H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \wr & & \uparrow & & \uparrow \wr & & \\
0 & \longrightarrow & K_{q-p} k^s \otimes H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{p-d}) & \longrightarrow & K_{q-p} k^s \otimes H^p(O_i, \mathcal{K}_p) & \longrightarrow & K_{q-p} k^s \otimes H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_p) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Therefore the vertical line in the middle is also an isomorphism. □

Concerning the Chow groups of V we simply note the following facts:

Proposition 3.4. — *Let k' be a separable finite extension of k which splits G.*

(i) The group $K_0(V)$ is without torsion. We may identify it with its image in $K_0(V_{k'})$.

(ii) One has the inclusions

$$[k' : k] K_0(V_{k'})^i \cap K_0(V) \subset K_0(V)^i \subset K_0(V_{k'})^i \cap K_0(V).$$

(iii) The kernel of the surjective map

$$\mathrm{CH}^i(V) \to K_0(V)^{(i/i+1)}$$

is killed by $(i-1)!$ and $[k' : k]$.

(iv) $K_0(V)^i = K_0(V_{k'})^i \cap K_0(V)$ if $i = 1$ or 2.

(v) $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} (K_0(V_{k'})^3 \cap K_0(V))/K_0(V)^3$.

Proof. — The assertion (i) is a consequence of Panin's result [**Pa**, theorem 4.2]. The assertions (ii), (iii) and (iv) are proved as the similar assertions of [**Pe2**, proposition 3.8]. For the last assertion, since $\mathrm{CH}^2(V_{k'})$ is without torsion and

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V_{k'}))$$

is killed by $[k' : k]$, one has

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} &= \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V_{k'}))\\ &= \mathrm{Ker}\left(K_0(V)^2/K_0(V)^3 \to K_0(V_{k'})^2/K_0(V_{k'})^3\right)\\ &= (K_0(V)^2 \cap K_0(V_{k'})^3)/K_0(V)^3\\ &= (K_0(V) \cap K_0(V_{k'})^3)/K_0(V)^3. \quad \square\end{aligned}$$

4. Explicit description of the Hochschild-Serre spectral sequence for hypercohomology

The construction of the morphism from the homology of the complex $(\mathscr{C})$ to the group $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$ involves the Hochschild-Serre spectral sequence for relative hypercohomology groups of $k^s(V)/k^s$ with coefficients in the Lichtenbaum complex $\Gamma(2)$ (see [**Kah**, page 68]). Therefore we shall now give an explicit construction of this spectral sequence and then check that it is compatible with corestriction and cup-products. In fact, this construction is a simple generalization of the one of Hochschild and Serre and the proof of the compatibilities are quite straightforward but we include them for self-completeness.

For any group G and any G-module M, $C^i(G,M)$ denotes the group of normalized n-cochains; this means the group of functions $f : G^n \to M$ such that $f(g_1,\dots,g_n)$ is trivial whenever one of the g_i is e. Let G be a group and K be a normal subgroup of G. In the following a bounded complex of G-modules is a family $(M^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ of G-modules, which are trivial except for a finite number of integers, equipped with a differential δ going from M^i to M^{i+1}. Let $(M^\bullet,\delta)$ be a bounded complex of G-modules. We consider the group

$$A(G) = \bigoplus_{\substack{i\geqslant 0\\ j\in\mathbf{Z}}} C^i(G,M^j)$$

which is a bicomplex for the differentials d' and d'' where

$$d' : C^i(G,M^j) \to C^{i+1}(G,M^j)$$

is the standard non homogeneous coboundary operator and

$$d'' : C^i(G,M^j) \to C^i(G,M^{j+1})$$

is $(-1)^i\delta_*$. We put $A^{(i,j)}(G) = C^i(G,M^j)$ if $i \geqslant 0$ and $j \in \mathbf{Z}$ and $A^{(i,j)}(G) = 0$ otherwise. As in [**HS**, page 119] one defines a decreasing filtration on A as

follows: $A_l^{(i,j)}(G)$ is $A^{(i,j)}(G)$ if $l \leqslant 0$, $A_l^{(i,j)}(G)$ is the set of i-cochains $\gamma : G^i \to M^j$ such that $\gamma(g_1, \dots, g_i)$ depends only on $g_1, \dots, g_{i-l}, g_{i-l+1}K, \dots, g_iK$ if $0 \leqslant l \leqslant i$ and is 0 otherwise. Then we put

$$A^n(G) = \bigoplus_{i+j=n} A^{(i,j)}(G),\ A_l^n(G) = \bigoplus_{i+j=n} A_l^{(i,j)}(G) \text{ and } A_l(G) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} A_l^n(G).$$

By [**HS**, page 119] this filtration is compatible with d'. The compatibility with d'' is clear. Therefore it is compatible with the total complex

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} A^n(G), d = d' + d''\right).$$

Moreover there is a natural morphism

$$\phi_l : A_l^{(i,j)}(G) \to C^l(G/K, C^{i-l}(K, M^j))$$

obtained by restricting the first $i-l$ coordinates of an element of $A_l^{(i,j)}(G)$ to K.

We recall that the corresponding spectral sequence is then defined by

$$Z_r^{p,q}(G) = \left\{ a \in A_p^{p+q}(G) \mid da \in A_{p+r}^{p+q+1}(G) \right\}$$

and

$$E_r^{p,q}(G/K) = Z_r^{p,q}(G)/(Z_{r-1}^{p+1,q-1}(G) + d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}(G))).$$

The group G acts on the modules M^i and by conjugation on K. This yields an action of G on $C^i(K, M^j)$ compatible with the differentials and induces an action on the hypercohomology groups $\mathbf{H}^q(K, M^\bullet)$.

Lemma 4.1. — *The group K acts trivially on* $\mathbf{H}^q(K, M^\bullet)$.

Proof. — Consider the abelian category $\mathscr{C}_{\geqslant 0}$ of bounded complexes of G-modules $(N^\bullet, \delta)$ such that N^i is trivial if $n < 0$. Without loss of generality, we may assume that $M^\bullet$ is an object of this category. The hypercohomology functors $\mathbf{H}^i(K, -)$ when restricted to $\mathscr{C}_{\geqslant 0}$ are the right derived functors of the functor sending $(N^\bullet, \delta)$ on the group $\mathrm{Ker}(N^0 \to N^1)^K$ (see [**Mi**, appendix C]) and for any object $N^\bullet$ of $\mathscr{C}_{\geqslant 0}$, the group K acts trivially on the cohomology group $\mathbf{H}^0(K, N^\bullet)$. Thus, for any k in K, the induced automorphism of the cohomological functor $\mathbf{H}^*(K, -)$ is trivial in degree 0 and therefore in any degree [**CE**, Chapter III, proposition 5.2]. □

We get an action of G/K on $\mathbf{H}^q(K, M^\bullet)$ for any q in $\mathbf{Z}$.

Lemma 4.2. — *With notation as above, the map ϕ_p induces an isomorphism*

$$E_1^{p,q}(G/K) \xrightarrow{\sim} C^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet))$$

and

$$E_2^{p,q}(G/K) \xrightarrow{\sim} H^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)).$$

Proof. — By construction, if we denote also by d' the map on $C^p(G/K, C^q(K, M^j))$ induced by the standard coboundary operator for K, then ϕ_p commutes with d'. Let d'' be defined as $(-1)^{p+q}\delta_*$ on $C^p(G/K, C^q(K, M^j))$. Then ϕ_p and d'' commute. Thus ϕ_p induces a canonical map

$$E_1^{p,q}(G/K) \to C^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)).$$

Let us check that it is an injection. Let us consider pairs $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})$ with

$$\boldsymbol{f} = (f_i)_{i\geqslant 0} \in \bigoplus_{i\geqslant 0} A_p^{(i,p+q-i)}(G) \text{ and } \boldsymbol{u} = (u_i)_{i\geqslant p} \in \bigoplus_{i\geqslant p} C^p(G/K, C^{i-p}(K, M^{p+q-1-i}))$$

such that $d\boldsymbol{f}$ belongs to $A_{p+1}^{p+q+1}(G)$ and $\phi_p(\boldsymbol{f}) = d(\boldsymbol{u})$ where d denotes the sum $d' + d''$. We put $u_i = 0$ if $i < p$. Since $M^\bullet$ is bounded, it is enough to prove by an increasing induction on m that for any such pair which verifies

$$\forall i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},\ i \geqslant m \Rightarrow u_{i-1} = 0 \text{ and } f_i \in A_{p+1}^{(i,p+q-i)}(G),$$

there exists $\boldsymbol{h} \in A_p^{p+q-1}(G)$ such that

$$\boldsymbol{f} - d\boldsymbol{h} \in A_{p+1}^{p+q}(G).$$

It is true if m is zero. Let us assume it is true for m. Let $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})$ be a pair which verifies the condition for $m+1$. By definition of d one has that

$$d'(f_m) \in A_{p+1}^{(m+1,p+q-m)}(G) \text{ and } \phi_p(f_m) = d'(u_{m-1}).$$

By [**HS**, pages 121 and 122], there exists a cochain h_{m-1} in $A_p^{(m-1,p+q-m)}(G)$ such that

$$\phi_p(h_{m-1}) = u_{m-1} \text{ and } f_m - d'(h_{m-1}) \in A_{p+1}^{(m,p+q-m)}(G).$$

let $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f} - d(h_{m-1})$. Then $\boldsymbol{f}' \in Z_1^{p,q}(G)$ and

$$\phi_p(\boldsymbol{f}') = \phi_p(\boldsymbol{f}) - \phi_p \circ d(h_{m-1}) = d(\boldsymbol{u}) - d \circ \phi_p(h_{m-1}).$$

It is enough to check the result for $\boldsymbol{f}'$. But

$$f'_m = f_m - d'(h_{m-1}) \in A^{(m,p+q-m)}_{(p+1)}(G)$$

and $\phi_p(\boldsymbol{f}') = d(\boldsymbol{u}')$ where

$$u'_i = \begin{cases} u_i & \text{if } i \leqslant m-2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thus we may apply the induction hypothesis.

Let us now prove the surjectivity. Let

$$(\boldsymbol{u}) = (u_i)_{i\geqslant 0} \in \bigoplus_{i\geqslant 0} C^p(G/K, C^{i-p}(K, M^{p+q-i}))$$

be such that $d(\boldsymbol{u}) = 0$. We shall prove by a decreasing induction on i the existence of

$$(f_j)_{j\geqslant i} \in \bigoplus_{j\geqslant i} C^j(G, M^{p+q-j})$$

such that if $j > i$

$$d''(f_j) + d'(f_{j-1}) \in A^{(j,p+q-j+1)}_{p+1}(G)$$

and, if $j \geqslant i$, we have $\phi_p(f_j) = u_j$. It is true for i big enough since $M^\bullet$ is bounded. Let us assume it is true for $i+1$. Then we have $\phi_p(f_{i+1}) = u_{i+1}$. But $d''(u_{i+1}) + d'(u_i) = 0$. Thus

$$\phi_p(d''(f_{i+1})) = d''(\phi_p(f_{i+1})) = d'(-u_i).$$

Moreover one has

$$d'(d''(f_{i+1})) = d''(-d''(f_{i+2}) - d'(f_{i+1})) \in A^{(i+2,p+q-i)}_{p+1}(G).$$

Therefore, by [**HS**, pages 121 and 122], there exists $f_i \in A^{(i,p+q-i)}_p(G)$ such that

$$\phi_p(f_i) = u_i \text{ and } d'(f_i) + d''(f_{i+1}) \in A^{(i+1,p+q-i)}_{p+1}(G)$$

and the result is proved for i. Thus we get an element

$$\boldsymbol{f} = (f_i)_{i\geqslant 0} \in \bigoplus_{i\geqslant 0} A^{(i,p+q-i)}_p(G)$$

such that

$$\phi_p(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{u} \text{ and } d(\boldsymbol{f}) \in A^{p+q}_{p+1}(G).$$

This proves the first assertion of the lemma.

It remains to show that we have a commutative diagram:

$$
\begin{array}{ccc}
C^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) & \xrightarrow{(-1)^q d} & C^{p+1}(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
E_1^{p,q}(G/K) & \xrightarrow{d} & E_1^{p+1,q}(G/K).
\end{array}
\tag{2}
$$

As in [**HS**, page 123] we consider the partial coboundary operators defined, for any f in $C^{p+q-1}(G, M^n)$ by

$$
\begin{aligned}
\delta'_{p-1} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p) = {} & \alpha_1 . f(\alpha_2, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p) \\
& + \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p) \\
& + (-1)^q f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \ldots, \beta_p)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\partial_{p-1} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p) = {} & \beta_1 f(\beta_1^{-1} \alpha_1 \beta_1, \ldots, \beta_1^{-1} \alpha_q \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \\
& + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_k \beta_{k+1}, \ldots, \beta_p) \\
& + (-1)^p f(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}).
\end{aligned}
$$

For any subset $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$ of $\{1, \ldots, p+q\}$ with $s_1 < \cdots < s_p$, let $S^* = \{s_1^*, \ldots, s_q^*\}$ be its complement with $s_1^* < \cdots < s_q^*$. Write $i^* = s_i^* - i$ and $\nu(S) = \sum_{i=1}^q i^*$ and set $b_0 = 1$ and $b_k = \beta_1 \ldots \beta_k$ for $1 \leqslant k \leqslant p$. As in [**HS**, page 123] one defines for any $g \in C^{p+q}(G, M^n)$

$$
g_S(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q) = g(\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+q})
$$

where $\gamma_{s_i} = \beta_i$ for $1 \leqslant i \leqslant p$ and $\gamma_{s_i^*} = b_{i^*}^{-1} \alpha_i b_{i^*}$ for $1 \leqslant i \leqslant q$ and $g_{(p)} = \sum_S (-1)^{\nu(S)} g_S$ where S ranges over all the subsets of p elements from $(1, \ldots, p+q)$. By [**HS**, page 123, proposition 2], for any f in $C^{p+q-1}(G, M^n)$ one has

$$
(d' f)_{(p)} = \delta'_{p-1}(f_{(p)}) + (-1)^q \partial_{p-1}(f_{(p-1)}).
$$

Let δ''_{p-1} be defined by

$$
(\delta''_{p-1} f)(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p) = (-1)^{p+q} \delta(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p))
$$

and $\delta_p : A^{p+q}(G) \to A^{p+q+1}(G)$ by $\delta_p = \delta'_p + \delta''_p$. Then

$$\forall f \in A^{(p+i,q-i)}(G),\ (df)_{(p+1)} = \delta_p(f_{(p+1)}) + (-1)^i \partial_p(f_{(p)}). \tag{3}$$

Let $D_p : A(G) \to A(G)$ be defined as $(-1)^i \partial_p$ on $A^{(p+i,q-i)}(G)$. Then D_p induces on $C^p(G/K, C^i(K, M^{q-i}))$ a map D_p which commutes with the maps d' and d'' defined at the beginning of the proof. This is obvious for d'' and follows from straightforward computations for d'. The map D_p induces $(-1)^q d$ on $C^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet))$. On the other hand, for any g belonging to $A_p^{(p+i,q-i)}(G)$, the natural image of $\phi_p(g)$ in $C^p(G, C^i(K, M^{q-i}))$ coincides with the restriction of $g_{(p)}$ to $K^i \times G^p$. Thus by (3) the map induced by $d = d' + d''$ on

$$\operatorname{Im}(C^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) \to C^p(G, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)))$$

coincides with the one defined by D_p and this implies the commutativity of the diagram (2). □

Remark 4.3. — From this description of the spectral sequence it follows immediately that if H is a subgroup of G containing K then the spectral sequence is compatible with the restriction map from G to H and that it is functorial for maps of bounded complexes. Let us now state more precisely and prove the corresponding result for the corestriction.

Lemma 4.4. — *Let $K \subset H \subset G$ be three groups such that K is normal in G and H is of finite index in G and let $M^\bullet$ be a bounded complex of G-modules. Then the Hochschild-Serre spectral sequences*

$$E_2^{p,q}(H/K) = H^p(H/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(H, M^\bullet)$$

and

$$E_2^{p,q}(G/K) = H^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(G, M^\bullet)$$

are compatible with the corestriction map. More precisely, if $i \geqslant 2$, there are natural maps

$$\mathrm{Cores}_i : E_i^{p,q}(H/K) \to E_i^{p,q}(G/K)$$

such that one has commutative diagrams

$$\begin{array}{ccc}
E_i^{p,q}(H/K) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_i} & E_i^{p,q}(G/K) \\
{\scriptstyle d_i^{p,q}}\big\downarrow & & {\scriptstyle d_i^{p,q}}\big\downarrow \\
E_i^{p+i,q-i+1}(H/K) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_i} & E^{p+i,q-i+1}(G/K)
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
E_2^{p,q}(H/K) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_2} & E_2^{p,q}(G/K) \\
\big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr \\
H^p(H/K,\mathbf{H}^q(K,M^\bullet)) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}} & H^p(G/K,\mathbf{H}^q(K,M^\bullet))
\end{array}$$

and such that Cores_{i+1} *coincides with the map induced by* Cores_i. *This yields maps*

$$\mathrm{Cores} : E_\infty^{p,q}(H/K) \to E_\infty^{p,q}(G/K).$$

Moreover the corestriction maps are compatible with the filtrations on $\mathbf{H}^p(H,M^\bullet)$ *and* $\mathbf{H}^p(G,M^\bullet)$ *and the diagram*

$$\begin{array}{ccc}
E_\infty^{p,q}(H/K) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}} & E_\infty^{p,q}(G/K) \\
\big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr \\
\mathbf{H}^{p+q}(H,M^\bullet)^{(p/p+1)} & \xrightarrow{\mathrm{Cores}} & \mathbf{H}^{p+q}(G,M^\bullet)^{(p/p+1)}.
\end{array}$$

commutes.

Proof. — Let $\mathrm{Ind}_H^G(M^\bullet)$ be the induced complex given by

$$\mathrm{Ind}_H^G(M)^i = \mathrm{Ind}_H^G(M^i)$$

where the induced module $\mathrm{Ind}_H^G(M^i)$ is defined as the set of maps from G to M^i invariant under the $*$-action of H defined by the formula

$$\forall f \in \mathrm{Map}(G,M^i),\ \forall h \in H,\ \forall g \in G,\ (h*f)(g) = h.(f(h^{-1}g))$$

equipped with the action of G defined by

$$\forall g \in G,\ \forall f \in \mathrm{Ind}_H^G(M^i),\ \forall g' \in G,\ (g.f)(g') = f(g'g).$$

Then there are projections of H-modules

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G(M^i) &\to M^i\\ f &\mapsto f(e)\end{aligned}$$

which gives an epimorphism of complexes $\mathrm{pr} : \mathrm{Ind}_H^G(M^\bullet) \to M^\bullet$. Composing it with the restriction map from G to H we get using remark 4.3 that the spectral sequences

$$H^p(H/K, \mathbf{H}^q(K, M^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(H, M^\bullet)$$

and

$$H^p(G/K, \mathbf{H}^q(K, \mathrm{Ind}_H^G M^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(G, \mathrm{Ind}_H^G M^\bullet)$$

are compatible with the isomorphisms of Shapiro's lemma.

But, since the M^i are G-modules the action $*$ extends to G and the group of invariants for this extended action is in bijection with M^i. This yields a map of G-modules $\mathrm{Tr} : \mathrm{Ind}_H^G(M^i) \to M^i$. But using the same argument as in the proof of lemma 4.1 we get that the corestriction from H to G is obtained as the composite of the map induced by Tr and the inverse of Shapiro's isomorphism. This completes the proof of the lemma. □

Remark 4.5. — Using an explicit description of the corestriction at the level of cocycles it is possible to show that the condition $i \geqslant 2$ is unnecessary.

It remains to prove the compatibility with cup-products. To this intent, we now give another filtration on the group $A(G)$ which produces the same spectral sequence and is compatible with cup-products (see [**HS**, page 118]). The group $B_l^{(i,j)}(G, M^\bullet)$ is $A^{(i,j)}(G)$ if $l \leqslant 0$, it is the set of all i-cochains $\gamma : G^i \to M^j$ such that $\gamma(g_1, \ldots, g_i) = 0$ whenever $i - l + 1$ of the $g_1, \ldots, g_i$ belongs to K if $0 \leqslant l \leqslant i$ and is 0 otherwise. Then

$$B_l^n(G, M^\bullet) = \bigoplus_{i+j=n} B_l^{(i,j)}(G, M^\bullet) \text{ and } B_l(G, M^\bullet) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} B_l^n(G, M^\bullet).$$

This filtration is compatible with d' and d'' and therefore with the total complex.

Let $M^\bullet$, $N^\bullet$, and $P^\bullet$ be three bounded complexes of G-modules. Then the tensor product $M^\bullet \otimes N^\bullet$ is given by

$$M^\bullet \otimes N^{\bullet n} = \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes N^j$$

equipped with the differential given by $\delta_M \otimes 1 + (-1)^i \otimes \delta_N$ on $M^i \otimes N^j$. Let ϕ be a morphism of G-complexes from $M^\bullet \otimes N^\bullet$ to $P^\bullet$. Then it induces a pairing

$$\cup_\phi : C^p(G, M^i) \times C^q(G, N^j) \to C^{p+q}(G, P^{i+j})$$

given by

$$f \cup_\phi g(\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+q}) = \phi(f(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_p . g(\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_{p+q})).$$

One has the inclusion $B_l(G,M^\bullet)\cup_\phi B_s(G,N^\bullet)\subset B_{l+s}(G,P^\bullet)$ and this induces products for the corresponding spectral sequences

$$E_r^{i,j}(B_\bullet(G,M^\bullet))\otimes E_r^{k,l}(B_\bullet(G,N^\bullet))\to E_r^{i+k,j+l}(B_\bullet(G,P^\bullet)).$$

Lemma 4.6. — *The inclusion $A_l(G)\subset B_l(G,M^\bullet)$ gives a map of spectral sequences such that the induced morphisms*

$$E_r^{i,j}(G/K)\to E_r^{i,j}(B_\bullet(G,M^\bullet))$$

are isomorphisms for $r\geqslant 1$ and i,j in $\mathbf{Z}$.

Proof. — As in [**HS**, page 119], it is sufficient to prove that, for any l in $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, the cohomology of the complex $(B_l(G,M^\bullet)/A_l(G),d)$ is trivial. Therefore, if $\boldsymbol{f}$ in $B_l^n(G,M^\bullet)$ is such that $d\boldsymbol{f}$ belongs to $A_l^{n+1}(G)$, we want to prove the existence of $\boldsymbol{g}$ in $B_l^{n-1}(G,M^\bullet)$ such that $\boldsymbol{f}-d\boldsymbol{g}$ belongs to $A_l^n(G)$. We shall prove by an increasing induction on m that for any such element

$$\boldsymbol{f}=(f_i)_{i\geqslant 0}\in\bigoplus_{i\geqslant 0}B_l^{(i,n-i)}(G,M^\bullet)$$

such that moreover

$$\forall i\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0},\, i\geqslant m\Rightarrow f_i\in A_l^{(i,n-i)}(G)$$

there exists $\boldsymbol{g}$ in $B_l^{n-1}(G,M^\bullet)$ such that $\boldsymbol{f}-d\boldsymbol{g}$ belongs to $A_l^n(G)$. It is verified for $m=0$. Let us assume it is true for m and let $\boldsymbol{f}$ verify the condition for $m+1$. Then

$$d'(f_m)+d''(f_{m+1})\in A_l^{(m+1,n-m)}(G).$$

Thus $d'(f_m)$ belongs to $A_l^{(m+1,n-m)}(G)$. By [**HS**, pages 119-120], there is g_{m-1} in the group $B_l^{(m-1,n-m)}(G,M^\bullet)$ such that $f_m-d'(g_{m-1})$ belongs to $A_l^{(m,n-m)}(G)$. Let $\boldsymbol{f}'$ be $\boldsymbol{f}-d(g_{m-1})$. Then one may apply the induction hypothesis to $\boldsymbol{f}'$. We get an element $\boldsymbol{g}'$ in $B_l^{n-1}(G,M^\bullet)$ such that $\boldsymbol{f}'-d(\boldsymbol{g}')$ belongs to $A_l^n(G)$. Then $\boldsymbol{f}-d(\boldsymbol{g}'+g_{m-1})$ belongs to $A_l^n(G)$. □

The next proposition follows directly from [**HS**, page 126].

Proposition 4.7. — *Let ρ be the induced isomorphisms from the group $E_1^{p,q}(B_\bullet(G,M^\bullet))$ (respectively $E_1^{p,q}(B_\bullet(G,N^\bullet))$, $E_1^{p,q}(B_\bullet(G,P^\bullet))$) to the group $C^p(G/K,\mathbf{H}^q(K,M^\bullet))$ (respectively $C^p(G/K,\mathbf{H}^q(K,N^\bullet))$, $C^p(G/K,\mathbf{H}^q(K,P^\bullet))$). Then*

$$\forall u\in E_1^{p,q}(B_\bullet(G,M^\bullet)),\ \forall v\in E_1^{r,s}(B_\bullet(G,N^\bullet)),\ \rho(u\cup_\phi v)=(-1)^{sp}\rho(u)\cup_\phi\rho(v).$$

5. Proof of the main statement

We shall decompose the proof of theorem 2.1 in a chain of lemmata. We first recall the following well known result:

Lemma 5.1. — *Let V be a nonsingular, proper and geometrically integral variety over k. Let $\mathscr{G}$ be the absolute Galois group of k. Then there exist a canonical exact sequence*

$$0 \to \operatorname{Pic} V \to \operatorname{Pic}(V_{k^s})^{\mathscr{G}} \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(V).$$

Proof. — Since V is nonsingular, proper and geometrically integral, we have an exact sequence

$$0 \to k^* \to k(V)^* \to \bigoplus_{P \in V^{(1)}} \mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} V \to 0$$

as well as the corresponding one over k^s. Hilbert's theorem 90 then gives that

$$(k^s(V)^*/k^{s*})^{\mathscr{G}} = k(V)^*/k^*.$$

Therefore we get an exact sequence

$$0 \to k(V)^*/k^* \to \bigoplus_{P \in V^{s(1)}} \mathbf{Z} \to (\operatorname{Pic} V^s)^{\mathscr{G}} \to H^1(\mathscr{G}, k^s(V)^*/k^{s*}) \to 0$$

and thus

$$0 \to \operatorname{Pic} V \to (\operatorname{Pic} V^s)^{\mathscr{G}} \to H^1(\mathscr{G}, k^s(V)^*/k^{s*}) \to 0$$

is exact. But we have also an exact sequence

$$0 \to H^1(\mathscr{G}, k^s(V)^*/k^{s*}) \to H^2(\mathscr{G}, k^{s*}) \to H^2(\mathscr{G}, k^s(V)^*).$$

And Hilbert's theorem 90 implies that the map from $H^2(\mathscr{G}, k^s(V)^*)$ to $\operatorname{Br}(k(V))$ is injective. □

Lemma 5.2. — *If V is a generalized flag variety under a semi-simple linear algebraic group G, there exists a natural exact sequence*

$$(\operatorname{Pic} V^s \otimes k^{s*})^{\mathscr{G}} \to \operatorname{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Proof. — By [**CTR**, proposition 3.6], one has an exact sequence

$$H^1(V^s, \mathscr{K}_2)^{\mathscr{G}} \to H^1\left(\mathscr{G}, K_2(k^s(V))/H^0(V^s, \mathscr{K}_2)\right) \to$$
$$\to \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s)) \to H^1(\mathscr{G}, H^1(V^s, \mathscr{K}_2)).$$

By corollary 3.3, $H^1(\mathscr{G}, H^1(V^s, \mathscr{K}_2))$ is trivial and proposition 3.1 gives isomorphisms

$$H^0(V^s, \mathscr{K}_2) \xrightarrow{\sim} K_2 k^s \text{ and } H^1(V^s, \mathscr{K}_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} V^s \otimes k^{s*}.$$

Moreover, since $\mathrm{CH}^2(V^s)$ is torsion-free, one has

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s)) = \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}.$$

But by [**Kah**, corollaire 3.2] which is one of the key ingredient of the proof

$$H^1(\mathscr{G}, K_2(k^s(V))/K_2 k^s) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right)$$

which implies the exact sequence of the lemma. □

It remains to prove that the morphism from k_i^* to $H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ is indeed the composition of a cup-product by the corestriction map. Let us first consider the case when $k_i = k$.

Lemma 5.3. — *Assume that $\mathscr{H}_i$ is equal to $\mathscr{G}$. Let α be the image of the natural generator of $\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i] \subset (\operatorname{Pic} V^s)^{\mathscr{G}}$ in the Brauer group of k. Then there is a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} k^* \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ k^* \otimes \alpha\mathbf{Z} \arrow[ur, "\cup"'] & \end{tikzcd}$$

where the morphism at the top is the one defined in previous lemma.

Proof. — The proof of this lemma is exactly the same as in [**Pe2**, lemma 4.3] and uses compatibility with cup-products to get for any a in k^* a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Z} & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(V^s)^{\mathscr{G}} & \longrightarrow & H^1(\mathscr{G}, K_1(k^s(V))/H^0(V^s, \mathscr{K}_1)) & \to & H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \\
\downarrow \cup a & & \downarrow \cup a & & \downarrow \cup a & & \downarrow \cup a \\
k^* & \to & (\operatorname{Pic} V^s \otimes k^{s*})^{\mathscr{G}} & \to & H^1(\mathscr{G}, K_2(k^s(V))/H^0(V^s, \mathscr{K}_2)) & \to & H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).
\end{array}$$

But the morphism $\mathbf{Z} \to \operatorname{Br} k$ of lemma 5.1 coincides with the composition of the morphisms of the top row. □

It remains to prove the following lemma.

Lemma 5.4. — *For all i between 1 and m, one has a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]\otimes k^{s*})^{\mathcal{H}_i} & \to & H^3(k_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ {\scriptstyle N_{k_i/k}}\downarrow & & {\scriptstyle N_{k_i/k}}\downarrow \\ (\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]\otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} & \to & H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)). \end{array}$$

Proof. — First let us recall a more precise description of the map

$$f : (\mathrm{Pic}(V^s)\otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

We consider the Lichtenbaum complex $\Gamma(2, k^s)^i$ for k^s and the one for $k(V)^s$ (see [**Li1**], [**Li2**] and [**Li3**]). There is a canonical morphism

$$\Gamma(2, k^s)^i \to \Gamma(2, k(V)^s)^i$$

the cokernel of which will be denoted by $\Gamma(2, k(V)^s/k^s)^{i+1}$. Let $\mathbf{H}^i(k^s(V)/k^s, \Gamma(2))$ (respectively $\mathbf{H}^i(k(V)/k, \Gamma(2))$) be the hypercohomology groups corresponding to this complex of $\mathrm{Gal}(k(V)^s/k^s(V))$-modules (respectively $\mathrm{Gal}(k(V)^s/k(V))$-modules).

Then f is defined as the composition of natural morphisms

$$(\mathrm{Pic}(V^s)\otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \xrightarrow{f_1} H^1(V^s, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{f_2} H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(V))/K_2(k^s)) \xrightarrow{f_3}$$

$$\xrightarrow{f_3} H^1(\mathcal{G}, \mathbf{H}^3(k^s(V)/k^s, \Gamma(2))) \xrightarrow{f_4} \mathbf{H}^4(k(V)/k, \Gamma(2)) \xrightarrow{f_5} \mathbf{H}^4(k, \Gamma(2)) \xrightarrow{f_6} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

The map f_2 is induced by the short exact sequence

$$0 \to K_2 k^s(V)/K_2 k^s \to \mathcal{Z} \to H^1(V^s, \mathcal{K}_2) \to 0$$

where $\mathcal{Z}$ is the kernel of the map

$$\bigoplus_{x\in V^{s(1)}} k^s(x)^* \to \bigoplus_{x\in V^{s(2)}} \mathbf{Z}.$$

The morphism f_3 is induced by the natural morphism

$$\mathbf{H}^2(k^s(V), \Gamma(2)) \to \mathbf{H}^3(k^s(V)/k^s, \Gamma(2))$$

and the isomorphism from $\mathbf{H}^2(k^s(V), \Gamma(2))$ to $K_2 k^s(V)$, f_4 by the spectral sequence

$$H^p(\mathcal{G}, \mathbf{H}^q(k^s(V)/k^s, \Gamma(2))) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(k(V)/k, \Gamma(2))$$

and f_6 by the canonical isomorphism

$$f_7 : H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^4(k, \Gamma(2)).$$

The maps f_1, f_2 and f_3 are clearly compatible with the corestriction map. The map f_7 is induced by a morphism of complexes of Galois modules whereas the map f_5 is a cobordism for a short sequence of complexes. Therefore the maps f_5 and f_6 are compatible with the corestriction. Finally the compatibility of f_4 with the corestriction is a consequence of lemma 4.4. □

6. Connection with Panin's result

Let us first recall this result which yields the K-theory groups of the variety V.

Theorem 6.1 **(Panin, [Pa]).** — *If V is a generalized flag variety over a field k then there exists a natural separable algebra A over k and an isomorphism*

$$K_*V \xrightarrow{\sim} K_*A.$$

Proposition 6.2. — *Assume that the field k is perfect or that the center of G is a reduced k-group. With notation as in the preceding theorem and theorem 2.1, there exists a natural decomposition of A into the product of two separable algebras C and D such that one has $C \xrightarrow{\sim} \times_{i=1}^{m} C_i$ where C_i is a simple central algebra of centre k_i, the class of which is equal to α_i in $\mathrm{Br}\, k_i$.*

Remark 6.3. — The decomposition is given explicitly in the proof.

Proof. — We use the notation of section 3. We shall first recall Panin's construction of the algebra A. There exists a simply connected quasi-split k-form $\tilde{G}^q$ of G, a parabolic subgroup $\tilde{P}^q$ of $\tilde{G}^q$ and an element γ of $H^1(k, G^q)$ where $G^q = \tilde{G}^q/Z(\tilde{G}^q)$ such that V is the twisted k-form of $\tilde{P}^q\backslash\tilde{G}^q$ defined by γ and G the corresponding k-form of $\tilde{G}^q$. Let $\tilde{B}^q$ be a Borel subgroup of $\tilde{G}^q$ defined over k and contained in $\tilde{P}^q$ and $\tilde{T}^q$ be a maximal torus of $\tilde{B}^q$. We may assume that the isomorphism $G^s \xrightarrow{\sim} (\tilde{G}^q)^s$ sends $(\tilde{P}^q)^s$ (resp. $(\tilde{B}^q)^s$, $(\tilde{T}^q)^s$) on P (resp. B, T). We denote by $U_w^{\prime\, q}$ the images of U'_w in $(\tilde{G}^q)^s$. Let B^q be the image of $\tilde{B}^q$ in G^q and for any J in Δ, let P_J^q be the parabolic subgroup of G^q corresponding to J.

By [**St**, theorem 1.3], the ring of representations $R(P)$ of P over $\bar{k}$ has a canonical basis as a module over $R(G_{\bar{k}})$ which is defined as follows: let $W^{I'}$ be the set

$$\{\, w \in W \mid \forall \alpha \in I,\ w\alpha \in \Phi^+ \,\}$$

then the basis $(e'_w)_{w\in W^{I'}}$ is given by:

$$e'_w = \sum_{\lambda\in W_I.\lambda_w} \lambda \in \mathbf{Z}[X^*(T)]^{W_I} \xleftarrow{\sim} R(P)$$

where

$$\lambda_w = \sum_{\{\alpha\in\Delta|w^{-1}\alpha<0\}} w^{-1}\varpi_\alpha \in X^*(T).$$

The set $W^{I'}$ is globally invariant under the natural action of $\mathcal{G}$ on W. Let E be the commutative separable algebra corresponding to the $\mathcal{G}$-set $W^{I'}$. A representation of $\tilde{P}^q$ on E, when lifted to k^s, gives a family of representations indexed by $W^{I'}$. Thus it is characterized by a $\mathcal{G}$-invariant family of weights indexed by this set. The basis $(e'_w)_{w\in W^{I'}}$ defines a representation of $\tilde{P}^q$ over E. Let V be the induced representation from $\tilde{P}^q$ to $\tilde{G}^q$, A^q the ring $\mathrm{End}_E(V)$ and A^q_γ the twisted form of A^q by γ. The algebra $A = A^q_\gamma$ is the algebra constructed by Panin in [**Pa**, §12].

Lemma 6.4. — *The set $W^{I'}$ coincides with $(W^I)^{-1}$.*

Proof. — Let w belong to W^I. Assume that w^{-1} does not belong to $W^{I'}$. Let $\alpha\in I$ be such that $w^{-1}\alpha<0$. Then by [**Bki**, chapitre VI, n° 1.6, pages 157–158, corollaires 1 et 2]

$$l(w^{-1}s_\alpha) = \#\{\beta\in\Phi^+ \mid w^{-1}s_\alpha\beta<0\} = l(w^{-1})-1.$$

Then w is not of minimal length in its class $\bar{w}\in W_I\backslash W$ which is in contradiction with the hypothesis. thus $(W^I)^{-1}$ is a subset of $W^{I'}$. But $W^{I'}$ is a set of representing elements for W/W^I (see [**St**, lemma 2.5(a)]) and both sets have the same cardinal. □

In the sequel we put $e_w = e'_{w^{-1}}$ for all w in W^I.

Lemma 6.5. — *For any α in $\Delta - I$ one has that $w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta$ belongs to W^I and*

$$e_{w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta} = -\varpi_\alpha.$$

Proof. — By proposition 3.1, $w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta$ is of minimal length in its class modulo $W_{\Delta-\{\alpha\}}$, it is a fortiori of minimal length modulo W_I. Moreover

$$\{\beta\in\Delta \mid w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta\beta<0\} = \{\beta\in\Delta \mid w_{\Delta-\{\alpha\}}{}^{\varepsilon}\beta>0\} = \{{}^{\varepsilon}\alpha\}$$

where $\varepsilon:\Delta\to\Delta$ is the involutive bijection such that $w_\Delta.\alpha = -{}^{\varepsilon}\alpha$. Thus we get

$$\lambda_{w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta} = w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta\varpi_{{}^{\varepsilon}\alpha} = w_{\Delta-\{\alpha\}}.(-\varpi_\alpha) = -\varpi_\alpha.$$

But $-\varpi_\alpha$ is invariant under W_I and the lemma is proved. □

End of the proof of proposition 6.2. — Let C be the étale algebra constructed from the $\mathscr{G}$-set $(e_w)_{w\in\{w_{\Delta-\{\alpha\}}w_\Delta,\alpha\in\Delta-I\}}$. Then one may write A as $C\times D$ where D corresponds to the complementary set. The above $\mathscr{G}$-set is canonically isomorphic to the $\mathscr{G}$-set $(-\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Delta-I}$. Thus we get a canonical isomorphism of étale algebras

$$Z(C)\tilde{\to}(\operatorname{Pic}V^s\otimes k^s)^{\mathscr{G}}.$$

Let F be this algebra. Let χ be the natural character $Z(\tilde{G}^q)\to\mathbf{G}_{mF}$ defined by the family $(-\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Delta-I}$. Let η_1 be the image of γ by the composite map

$$H^1(k,G^q)\to H^1(F,G^q)\xrightarrow{\partial}H^2(F,Z(\tilde{G}^q))\xrightarrow{\chi^*}H^2(F,\mathbf{G}_m). \tag{4}$$

Then, thanks to the hypothesis on k, the components of η_1 in the decomposition

$$H^2(F,\mathbf{G}_m)\tilde{\to}\prod_{i=1}^m\operatorname{Br}k_i$$

are the classes of the algebras C_i (see [**Pa**, lemma 3.3] and [**Tit**, 4.2]). For any $\mathscr{G}$-module M, $\tilde{M}$ denotes the corresponding étale sheaf on $\operatorname{Spec}k$. By definition of the fields k_i there is an isomorphism from $H^0(F,\widetilde{\operatorname{Pic}V^s})$ onto $\bigoplus_{1\leqslant i,j\leqslant m}H^0(k_i,\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_j])$. Let η_2 be the image of the sum of the elements $\mathscr{H}_i$ of $\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]^{\mathscr{H}_i}$ by the composite morphism

$$\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m}H^0(k_i,\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i])\to H^0(F,\widetilde{\operatorname{Pic}V^s})\xrightarrow{\partial_1}H^1(F,\widetilde{k^s(V)^*/k^{s*}})\xrightarrow{\partial_2}H^2(F,\mathbf{G}_m)$$

where ∂_1 is the coboundary homomorphism for the short exact sequence

$$0\to k^s(V)^*/k^{s*}\to\operatorname{Div}V^s\to\operatorname{Pic}V^s\to 0$$

and ∂_2 the coboundary homomorphism for the short exact sequence

$$0\to k^{s*}\to k^s(V)^*\to k^s(V)^*/k^{s*}\to 0.$$

Then, by definition, the α_i are the components of η_2. Thus it remains to prove the following lemma:

Lemma 6.6. — *With notation as above, the classes η_1 and η_2 coincide.*

Proof. — Let us fix i in $\{1,\dots,m\}$. It is enough to prove that the image ξ_2 of the generator of $\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]^{\mathscr{H}_i}$ by the composite map

$$\mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]^{\mathscr{H}_i}\to H^0(k_i,\operatorname{Pic}V^s)\to H^1(k_i,k^s(V)^*/k^{s*})\to H^2(k_i,k^{s*})$$

coincides with the component of η_1 in $\operatorname{Br} k_i$ which we denote by ξ_1. Let $\mathscr{C}$ be the orbit of $\mathscr{G}$ in $\Delta - I$ corresponding to k_i and $\chi_i : Z(\tilde{G}^q) \to \mathbf{G}_{mk_i}$ be the corresponding character. We denote also by

$$\gamma : \mathscr{G} \to G^q(k^s)$$

a cocycle which represents γ so that for any σ in $\mathscr{G}$ the composite map

$$\tilde{G}^q \times k^s \xrightarrow{\operatorname{Id} \times \sigma^{-1}} \tilde{G}^q \times k^s \tilde{\to} G \times k^s \xrightarrow{\operatorname{Id} \times \sigma} G \times k^s \tilde{\to} \tilde{G}^q \times k^s$$

coincides with the interior automorphism $\operatorname{Int}_{\gamma(\sigma)}$. Let $x \mapsto \tilde{x}$ be a set-theoritic section of the canonical map

$$\tilde{G}^q(k^s) \to G^q(k^s)$$

which is surjective, by the hypothesis on k. Then ξ_1 is the image by χ of the cocycle

$$(5) \qquad \begin{array}{rcl} \tilde{\xi}_1 : \mathscr{G}^2 & \to & Z\left(\tilde{G}^q\right)(k^s) \\ (\sigma_1, \sigma_2) & \mapsto & {}^{\sigma_1}\left(\widetilde{\gamma(\sigma_2)}\right)\widetilde{\gamma(\sigma_1\sigma_2)}^{-1}\widetilde{\gamma(\sigma_1)}. \end{array}$$

Let w'_Δ be a lifting of w_Δ in $\mathscr{N}_{\tilde{G}^q}(\tilde{T}^q)$. Let $s_1 : \operatorname{Pic} V^s \to \operatorname{Div} V^s$ be the section which sends the class of $\overline{\pi(BwB)}$ to $\overline{\pi(BwB)}$ for $w \in W^I_{\dim V - 1}$. For all $\alpha \in \mathscr{C}$ let f_α be the function on $\tilde{G}^q$ defined by

$$\forall b \in \tilde{B}^q(k^s),\ \forall u \in U'^q_{w'_\Delta}(k^s), f_\alpha(bw'_\Delta u) = \varpi_\alpha(b)^{-1},$$

where ϖ_α is the extension to $\tilde{B}^q$ of the corresponding character on $\tilde{T}^q$. By [**Pe4**, page 164] this function induces the section of the sheaf defined by ϖ_α which corresponds to the divisor $\overline{\pi(B^q \bar{s}_\alpha B^q)}$. The stabilizer of $\overline{\pi(B^q \bar{s}_\alpha B^q)} \subset \tilde{P}^q \backslash \tilde{G}^q$ contains B^q. It is thus a standard parabolic subgroup of G^q. But for any $\beta \in \Delta$ one has:

$$\begin{aligned} &\overline{\pi(B^q \bar{s}_\alpha B^q)} s_\beta \subset \overline{\pi(B^q \bar{s}_\alpha B^q)} \\ \Leftrightarrow\ & B^q s_\alpha w_\Delta B^q s_\beta \subset \overline{B^q s_\alpha w_\Delta B^q} \\ \Leftrightarrow\ & B^q w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha} B^q s_\beta \subset \overline{B^q w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha} B^q} \\ \Leftrightarrow\ & l(w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha} s_\beta) = l(w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha}) - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \beta \in \Delta - {}^\varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

where the third equivalence follows from the fact that, by [**Bki**, chapitre IV, §2, (3′) et théorème 2],

$$\dim(B^q w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha} B^q s_\beta B^q) = \dim B^q + \sup(l(w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha} s_\beta), l(w_\Delta s_{{}^\varepsilon\alpha})).$$

We then choose a section

$$s : P^q_{\Delta-{}^{\varepsilon}\alpha}\backslash G^q(k^s) \to G^q(k^s).$$

Then we may choose a section s_2

$$s_2 : k^s(V)^*/k^{s*} \to k^s(V)^*$$

such that, identifying $k^s(V)^*/k^{s*}$ with its image in $\operatorname{Div} V^s$, one has for any $g \in \tilde{G}^q(k^s)$

$$s_2(-\overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)} + \overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)}.g^{-1})(h) = f_\alpha(h)^{-1} f_\alpha\left(h\widetilde{s(\hat{g})}\right)$$

where $\hat{g}$ is the class of g in $P^q_{\Delta-{}^{\varepsilon}\alpha}\backslash G^q(k^s)$. We are now able to compute

$$\xi_2 = \partial_2 \circ \partial_1\left(\left[\overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)}\right]\right).$$

First, using s_1, the class $\partial_1\left(\left[\overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)}\right]\right)$ is represented by the cocycle

$$\sigma \mapsto -\overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)} + \overline{\pi(B^q\bar{s}_\alpha B^q)}.\gamma(\sigma)^{-1} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Div}(V^s) \to \operatorname{Pic}(V^s)).$$

Let $\tilde{\gamma}$ (resp. $\tilde{s}$) be the composite of γ (resp. s) with the section $x \mapsto \tilde{x}$. Then ξ_2 is represented by the cocycle

$$\begin{aligned}(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \Big[g \mapsto & f_\alpha(g\tilde{\gamma}(\sigma_1))^{-1} f_\alpha\left(g\tilde{\gamma}(\sigma_1)\,{}^{\sigma_1}\tilde{s}\left(\widehat{\gamma(\sigma_2)}\right)\right)\\ & .f_\alpha(g) f_\alpha\left(g\tilde{s}\left(\widehat{\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\right)\right)^{-1}\\ & .f_\alpha(g)^{-1} f_\alpha\left(g\tilde{s}\left(\widehat{\gamma(\sigma_1)}\right)\right)\Big].\end{aligned}$$

But for any g in $\tilde{G}^q(k^s)$, $g^{-1}\tilde{s}(\hat{g})$ belongs to $\tilde{P}^q_{\Delta-{}^{\varepsilon}\alpha}(k^s)$ and for any $p \in \tilde{P}^q_{\Delta-{}^{\varepsilon}\alpha}(k^s)$, the expression $\varpi_\alpha(w'_\Delta p w'_\Delta)$ is well defined and

$$\forall g \in \tilde{G}^q(k^s), f_\alpha(gp) = \varpi_\alpha(w'_\Delta p w'_\Delta)^{-1} f_\alpha(g).$$

We get that ξ_2 is represented by the cocycle

$$\begin{aligned}(\sigma_1,\sigma_2)\mapsto [g\mapsto & f_\alpha(g\tilde\gamma(\sigma_1))^{-1}f_\alpha(g\tilde\gamma(\sigma_1)^{\sigma_1}\tilde\gamma(\sigma_2))\\ & .f_\alpha(g\tilde\gamma(\sigma_1\sigma_2))^{-1}f_\alpha(g\tilde\gamma(\sigma_1))\\ & .\left({}^{\sigma_1}\varpi_\alpha\left(w'_\Delta\tilde\gamma(\sigma_2)^{-1}\tilde s\left(\widehat{\gamma(\sigma_2)}\right)w'_\Delta\right)^{-1}\right.\\ & .\varpi_\alpha\left(w'_\Delta\tilde\gamma(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\tilde s\left(\widehat{\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\right)w'_\Delta\right)\\ & \left.\varpi_\alpha\left(w'_\Delta\tilde\gamma(\sigma_1)^{-1}\tilde s\left(\widehat{\gamma(\sigma_1)}\right)w'_\Delta\right)^{-1}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Then removing a coboundary and using (5) one gets that ξ_2 is represented by

$$(\sigma_1,\sigma_2)\mapsto -\varpi_\alpha(\tilde\xi_1(\sigma_1,\sigma_2)).\quad\square$$

7. A few examples

7.1. The low-dimensional cases

Corollary 7.1. — *With the notation of theorem 2.1, the complex $\mathscr{C}$ is exact if the dimension of V is* 1 *or* 2.

Proof. — In this case $K_0(V^s)^3=\{0\}$. Thus, by proposition 3.4 (v), $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$ is trivial. The corollary is then a direct consequence of theorem 2.1. □

Corollary 7.2. — *If* $\dim V=3$ *then the homology of the complex $\mathscr{C}$ is either cyclic or trivial.*

Proof. — In this case $K_0(V^s)^3=\mathbf{Z}$. Thus proposition 3.4 (v) and theorem 2.1 imply the result. □

Remark 7.3. — The paragraph 6.2 of [**Pe2**] gives an example for which $\dim V=3$ and $(\mathscr{C})$ is not exact.

7.2. The case of orthogonal groups. — We shall first give an explicit description of the complex $(\mathscr{C})$ in the case of a flag variety under an orthogonal group.

Let k be a field of characteristic different from 2. Let q be a nondegenerate quadratic form of dimension n over k. We assume that n is strictly bigger than 2. Let G be the group $\mathrm{PSO}(q)$ and V be a flag variety under G. We denote by $C_0(q)$ the even Clifford algebra of q.

By [**MPW**, proposition 1.3], these varieties are characterized by the form q and their type over k^s. We recall their description (see [**MPW**, §5]). If n is odd, $n = 2m+1$ then G is of type B_m. The root system is given in $\mathbf{R}^m$ by the basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ if $1 \leqslant i \leqslant m-1$ and $\alpha_m = \varepsilon_m$ where $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ is the standard basis of $\mathbf{R}^m$. The flag variety $X(q, n_1, \dots, n_l)$ corresponding to $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_l}\}$ with $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_l \leqslant m$ is such that

$$X(q, n_1, \dots, n_l)(k^s) = \{(W_1, \dots, W_l) \mid W_1 \subset \cdots \subset W_l \subset V \otimes k^s, \\ W_l \text{ is totally isotropic and } \dim_{k^s} W_i = n_i\}$$

as a set with Galois action.

If n is even, $n = 2m$, then G is of type D_m, the root system is given in $\mathbf{R}^m$ by the basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ if $1 \leqslant i \leqslant m-1$ and $\alpha_m = \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m$.

If the signed discriminant of q, $d_\pm q$, is a square then we are in the inner case. The algebra $C_0(q)$ may be written as $C_+(q)^2$. The variety of maximal totally isotropic spaces has two components. Over k^s, the form q may be written as $\sum_{i=1}^m x_i x_{2m-i}$ over a basis $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m}$. We choose the maximal torus to be the diagonal matrices $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_m^{-1}, \dots, \alpha_1^{-1})$ and ε_i sends this diagonal element on α_i. Let us denote by $\mathscr{M}^+$ the component containing $< e_1, \dots, e_m >$ and by $\mathscr{M}^-$ the other one. If $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_l \leqslant m-1$ then $X(q, n_1, \dots, n_l)$ is the flag variety such that

$$X(q, n_1, \dots, n_l)(k^s) = \{(W_1, \dots, W_l) \mid W_1 \subset \cdots \subset W_l \subset V \otimes k^s, \\ W_l \text{ is totally isotropic and } \dim_{k^s} W_i = n_i\}.$$

If $n_l \leqslant m-2$ then the corresponding set of roots is $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_l}\}$; if $n_l = m-1$ then the corresponding set is $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_{l-1}}, \alpha_{m-1}, \alpha_m\}$ If $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_{l-1} \leqslant m-2$ and $n_l = m$, then

$$X^+(q, n_1, \dots, n_l)(k^s) = \{(W_1, \dots, W_l) \mid W_1 \subset \cdots \subset W_l \subset V \otimes k^s, \\ W_l \text{ is totally isotropic, } \dim_{k^s} W_i = n_i \text{ and } W_l \in \mathscr{M}^+(k^s)\}.$$

Similarly, one defines $X^-(q, n_1, \dots, n_l)$. The first variety corresponds to the set of roots $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_{l-1}}, \alpha_m\}$ and the second one to $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_{l-1}}, \alpha_{m-1}\}$.

If $d_\pm q$ is not a square we are in the outer case. Let L be the field $k(\sqrt{d_\pm q})$. The absolute Galois group of k acts through $\mathrm{Gal}(L/k)$ on the system of roots. If $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_l \leqslant m-1$ the variety $X(q, n_1, \dots, n_l)$ is defined as in the previous case. The set of roots is $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_l}\}$ if $n_l \neq m-1$ and $\Delta - \{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_{l-1}}, \alpha_{m-1}, \alpha_m\}$ otherwise.

Lemma 7.4. — *Let V be one of the flag varieties described above. Let I be the corresponding set of roots. The non-trivial component of the algebra C given by the proposition 6.2 is similar to*

(i) $C_0(q)$ if $n = 2m+1$ and $\alpha_m \in \Delta - I$,

(ii) $C_0(q)$ if $n = 2m$ and $\{\alpha_m, \alpha_{m-1}\} \subset \Delta - I$,

(iii) $C_+(q)$ if $n = 2m$, $d_\pm q \in k^{*2}$ and either α_m or α_{m-1} does not belong to I.

In all other cases C is a product of trivial algebras.

Remark 7.5. — This result generalizes easily to the case of a central simple algebra of even degree with an involution of the first kind and of orthogonal type.

Proof. — The center of the algebra C is the étale algebra corresponding to the Galois set $\{\varpi_\alpha\}$ for $\alpha \in \Delta - I$. It is non-trivial only when $n = 2m$, $d_\pm q \notin k^{*2}$ and $\{\alpha_m, \alpha_{m-1}\} \subset \Delta - I$ in which case its non trivial component is $k(\sqrt{d_\pm q})$. By construction, (see (4)) the classes of the components of C depend only on the restriction of the characters ϖ_α to the center $\mathscr{Z}$ of $\mathrm{Spin}(q)$ for $\alpha \in \Delta - I$. By [**Bki**, planches II et IV], these restrictions are as follows:

— If $n = 2m+1$, then $\mathscr{Z} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ and $\varpi_{i|\mathscr{Z}}$ generates $\mathrm{Hom}(\mathscr{Z}, \mathbf{G}_m)$ if and only if $i = m$.

— If $n = 2m$ with m even and $d_\pm q \in k^{*2}$ then $\mathrm{Hom}(\mathscr{Z}, \mathbf{G}_m) \tilde{\to} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ so that the restriction of ϖ_i with $i < l-1$ is trivial if i is even and $(1,1)$ if i is odd, the restriction of ϖ_{l-1} corresponds to $(1,0)$ and the one of ϖ_l to $(0,1)$.

— if $n = 2m$ with m odd and $d_\pm q \in k^{*2}$ then $\mathrm{Hom}(\mathscr{Z}, \mathbf{G}_m) \tilde{\to} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ so that the restriction of ϖ_i with $i < l-1$ is trivial if i is even and equal to 2 if i is odd, the restriction of ϖ_{l-1} is 1 and the one of ϖ_l 3.

— If $n = 2m$ and $d_\pm q \notin k^{*2}$, then the above description is valid over $L = k(\sqrt{d_\pm q})$ and is compatible with the action of $\mathrm{Gal}(L/k)$ over $\Delta - I$ and $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

But, by [**MPW**, Proposition 2.2], the class of a component corresponding to a morphism ϕ from $\mathscr{Z}$ to $\mathbf{G}_{m,E}$ is given by the class of any central algebra A over E such that there exists a representation from $\mathrm{Spin}(q)_E$ to $\mathrm{GL}_1(A)$ which extends ϕ.

If n is odd the natural injection $\mathrm{Spin}(q) \to \mathrm{GL}_1(C_0(q))$ restricts itself to the generator of $\mathrm{Hom}(\mathscr{Z}, \mathbf{G}_m)$ and we get (i).

If n is even, $n = 2m$, and $d_{\pm}q \in k^{*2}$ then the injection

$$\mathrm{Spin}(q) \to C_0(q) \xrightarrow{\sim} C_+(q) \times C_+(q)$$

gives, by projection, the generators of $\mathrm{Hom}(\mathscr{Z}, \mathbf{G}_m)$. This implies (ii) and (iii). □

In the case of quadrics, the results of Karpenko on the torsion subgroup in the second Chow group enables us to give a slight refinement of Arason's results. This refinement seems to be known but we give it as an illustration of our results.

For any $(a_1, \dots, a_n)$ in k^{*n} the n-Pfister form $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ is the form

$$< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n > .$$

A quadratic form q of dimension n is said to be a neighbour of a r-Pfister form q' if and only if $n > 2^{r-1}$ and q is similar to a subform of q'.

Proposition 7.6. — *Let q be an anisotropic quadratic form of dimension strictly bigger than two and let Q be the corresponding projective quadric then the following cases are possible:*

(i) **(Arason** [**Ar**, Satz 5.4]**)** *If q is a neighbour of a 2-Pfister form $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ then the sequence*

$$H^1(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup(a,b)} H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(k(Q), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

is exact.

(ii) If the dimension of q is four and q is not similar to a 2-Pfister form, let d be its discriminant and $c(q)$ its Witt invariant. Then the sequence

$$H^1(k(\sqrt{d}), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{N(.)\cup c(q)} H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(k(Q), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

is exact.

(iii) **(Arason** [**Ar**, Satz 5.6]**)** *If the form is a neighbour of 3-pfister form $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ then $\mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(k(Q), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$ is the subgroup generated by the symbol (a, b, c).*

(iv) **(Arason** [**Ar**, Satz 5.6]**)** *In all other cases this kernel is trivial.*

Remark 7.7. — For assertion (iii), theorem 2.1 and the result of Karpenko implies only that the kernel is isomorphic to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Using the bijectivity of Arason invariant proved independantly by Rost and by Merkur′ev and Suslin [**MS2**], the assertion (ii) implies a result of Fitzgerald on 3-fold Pfister forms [**Fi**, example, page 94].

Proof. — We only prove assertions (i), (ii) and (iv). By [**Kar**, theorem 6.1] the torsion subgroup of $\mathrm{CH}^2(Q)$ is trivial except when q is anisotropic and the neighbour of a 3-fold Pfister form in which case this group is isomorphic to $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Here we have

$$\Delta - I = \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2\} & \text{if } n = 4, \\ \{\alpha_1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thus, by lemma 7.4, the algebra C is nontrivial only if $\dim q = 3$ or 4 in which case the non trivial components are similar to

— $\left(\frac{a\,b}{k}\right)$ if q is a neighbour of $\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle$.

— $\left(\frac{a\,b}{k(\sqrt{d})}\right)$ if $\dim q = 4$ and $d = d_\pm q \notin k^{*2}$, where a, b are elements of k^* such that $(a,b) = c(q)_{k(\sqrt{d})}$.

We then apply theorem 2.1 to get (i), (ii), and (iv). □

We recall that q is an Albert form if the dimension of q is 6 and $d_\pm q \in k^{*2}$. In [**Lag**, Corollaire 6], Laghribi shows that if q is an Albert form and if L is the universal splitting field of q over k then one has an exact sequence

$$k^* \xrightarrow{.\cup c(q)} H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

where $c(q)$ is the clifford invariant of q. By [**KR**] the field L coincides with the function field of the variety of Borel subgroups of $SO(q)$. We get the following result:

Proposition 7.8. — *Let q be an Albert form, let V be the variety of Borel subgroups in $SO(q)$ then*

$$\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} = \{0\}.$$

8. An explicit expression in a particular case

Definitions 8.1. — For any field K a field extension L is a function field over K if and only if it is generated by a finite number of elements as a field over K. If L is a function field over K, then we denote by $\mathscr{P}(L/K)$ the set of discrete valuation rings of rank 1 such that

$$K \subset A \subset L \text{ and } \mathrm{Fr}(A) = L.$$

If A belongs to $\mathscr{P}(L/K)$ then κ_A denotes the residue field of A and if the characteristic of K does not divide n

$$\partial_A : H^i(L, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

the residue map (see [**CTO**, §1]). The unramified cohomology groups of L over K are then defined by

$$H^i_{\mathrm{nr}/K}(L, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A \in \mathscr{P}(L/K)} \mathrm{Ker}(\partial_A).$$

In the rest of this paragraph we assume that the field k is of characteristic different from 2, that the group G is of the form $\mathrm{SL}_1(A) \times G'$ where A is a quaternion algebra $\left(\frac{a\,b}{k}\right)$ and G' a semi-simple simply connected linear algebraic group and that V may be split into the product of a conic C by a homogeneous variety V' so that the action of G is the product of an action of $\mathrm{SL}_1(A)$ on C and an action of G' on V'. In this setting we shall now give a more explicit expression of the morphism from the homology of $(\mathscr{C})$ to $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$.

By [**Ar**, Satz 5.4] and Merkur'ev and Suslin [**MS**, theorem 12.1], one has an exact sequence

(6)

$$\bigoplus_{P \in C^{(1)}_{k(V')}} k(V')(P)^* \xrightarrow{N_{k(V')(P)/k(V')}} k(V')^* \xrightarrow{\cup(a,b)} H^3(k(V'), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Let α be in the kernel of the canonical map from $H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ to $H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Then $\alpha_{k(V')}$ may be written as (a, b, f) for some f in $k(V')$. Let D be the divisor of f on V'. Since α comes from $H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, for any point P of codimension 1 in V one has

$$\partial_P(a, b, f) = 0.$$

By [**CTO**, proposition 1.3], one gets that

$$\forall P \in V'^{(1)},\ (a, b)_{k(P)} \neq 0 \Rightarrow v_P(f) \text{ is even.}$$

Let $p_1 : V \to C$ and $p_2 : V \to V'$ be the natural projections. For any P in $V'^{(1)}$, the conic $C_{k(P)}$ has a rational point if and only if $(a, b)_{k(P)} = 0$. Thus we get that

$$D \in \mathrm{Im}(p_{2*} : \bigoplus_{P \in V^{(2)}} \mathbf{Z} \to \bigoplus_{P \in V'^{(1)}} \mathbf{Z}).$$

Let E belong to the inverse image of D and $[E]$ be its class in $\mathrm{CH}^2(V)/p_2^*(\mathrm{CH}^2(V'))$.

Lemma 8.1. — *With the above notations, $[E]$ depends only on α.*

Proof. — Let us first prove that for a fixed f the class $[E]$ is independant of the choice of E. Let E' in $\bigoplus_{P\in V^{(2)}}\mathbf{Z}$ be such that $p_{2*}(E') = p_{2*}(E)$. We may then write

$$E - E' = \left(\sum_{P\in V'^{(1)}}\ \sum_{\{Q\in V^{(2)} | p_{2*}(Q)\in\mathbf{Z}P\}} n_Q^P Q\right) + \sum_{P\in V'^{(2)}} n_P p_2^*(P)$$

where for any P in $V'^{(1)}$, $\sum_{\{Q\in V^{(2)} | p_{2*}(Q)\in\mathbf{Z}P\}} n_Q^P[k(Q):k(P)] = 0$. But for any $P\in V'^{(1)}$, the Picard group of $C_{k(P)}$ is isomorphic to $\mathbf{Z}$ and thus there exists a function f_p on V_P such that

$$\mathrm{Div}(f_P) = \sum_{\{Q\in V^{(2)} | p_{2*}(Q)\in\mathbf{Z}P\}} n_Q^P Q.$$

Therefore the class of $E - E'$ in $\mathrm{CH}^2(V)/p_2^*(\mathrm{CH}^2(V'))$ is trivial.

Let us now prove that $[E]$ is independant of the choice of f. Let f' be an element of $k(V')$ such that

$$\alpha_{k(V')} = (a, b, f').$$

By the exact sequence (6), there exists a family $(f_P)_{P\in C^{(1)}_{k(V')}}$ in $\bigoplus_{P\in C^{(1)}_{k(V')}} k(V')(P)^*$ such that

$$f/f' = \prod_{P\in C^{(1)}_{k(V')}} N_{k(V')(P)/k(V')}(f_P).$$

Then $E' = E - \sum_{P\in C^{(1)}_{k(V')}} \mathrm{Div}(f_P)$ verifies $p_{2*}(E') = \mathrm{Div}(f')$, but its class in $\mathrm{CH}^2(V)$ is the same as the class of E. □

We denote by

$$\Phi : \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)/\,\mathrm{CH}^2(V')$$

the induced map sending α on $[E]$.

Theorem 8.2. — *With notation as above, the natural morphism from the homology of the complex $(\mathscr{C})$ to $\mathrm{CH}^2(V)/\,\mathrm{CH}^2(V')$ defined by theorem 2.1 coincides with the map induced by Φ.*

Proof. — By [**Kah**, corollaire 3.2], there exists a canonical isomorphism

$$H^1(\mathscr{G}, K_2k^s(V)/K_2k^s(V')) \tilde{\to} \operatorname{Ker}(H^3(k(V'), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))).$$

Moreover as in [**Pe2**, page 391] for any g in $k^s(V')$ there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathscr{G}, K_1k^s(V)/K_1k^s(V')) & \tilde{\to} & \operatorname{Ker}(\operatorname{Br}(k(V')) \to \operatorname{Br}(k(V))) \\ \downarrow \cup g & & \downarrow \cup g \\ H^1(\mathscr{G}, K_2k^s(V)/K_2k^s(V')) & \tilde{\to} & \operatorname{Ker}(H^3(k(V'), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))). \end{array}$$

But there is a surjection

$$(\operatorname{Pic} C^s)^{\mathscr{G}} \twoheadrightarrow H^1(\mathscr{G}, K_1k^s(V)/K_1k^s(V')).$$

Moreover $\operatorname{Pic} C^s$ is a free $\mathbf{Z}$-module of rank 1 with a trivial $\mathscr{G}$ action and the image of one of its generator in $\operatorname{Br}(k(V'))$ is (a, b).

We use again the symbols α, f and E introduced before lemma 8.1. Let β be the image of one generator of $\operatorname{Pic} C^s$ in $H^1(\mathscr{G}, K_1k^s(V)/K_1k^s(V'))$. Let γ be the image of α in $H^1(\mathscr{G}, K_2k^s(V)/K_2k^s)$. Then the image of γ in $H^1(\mathscr{G}, K_2k^s(V)/K_2k^s(V'))$ is $\beta \cup f$.

The conic C may be defined by the homogeneous equation

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0.$$

Let $\sqrt{a}$ be a square root of a in k^s. Then the cocycle

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\beta} : \mathscr{G} & \to & k^s(V)^*/k^s(V')^* \\ \sigma & \mapsto & \begin{cases} [1] & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a}, \\ \left[\frac{X - \sqrt{a}Y}{Z}\right] & \text{otherwise.} \end{cases} \end{array}$$

represents β. The element $\beta \cup f$ is thus given by the cocycle

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\beta \cup f} : \mathscr{G} & \to & K_2k^s(V)/K_2k^s(V') \\ \sigma & \mapsto & \begin{cases} [0] & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a}, \\ \left[\left\{\frac{X - \sqrt{a}Y}{Z}, f\right\}\right] & \text{otherwise.} \end{cases} \end{array}$$

But the map

$$\Psi : H^1(\mathscr{G}, K_2(k^s(V))/K_2k^s) \to \mathrm{CH}^2(V)$$

is defined as follows (see [**CTR**, page 188]). One considers the kernel $\mathscr{Z}$ and the image $\mathscr{I}$ of the morphism

$$\bigoplus_{x\in V^{(1)}} k(x)^* \to \bigoplus_{x\in V^{(2)}} \mathbf{Z}$$

which appears in Gersten-Quillen spectral sequence, as well as the corresponding groups $\mathscr{Z}_{k^s}$ and $\mathscr{I}_{k^s}$ over k^s. We have a short exact sequence

$$0 \to K_2k^s(V)/K_2k^s \to \mathscr{Z}_{k^s} \to H^1(V^s, \mathscr{K}_2) \to 0.$$

Then the isomorphism

$$\Psi : H^1(\mathscr{G}, \mathscr{Z}_{k^s}) \tilde{\to} \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s))$$

is yielded by diagram chases in the following two commutative diagrams which have exact rows

(7)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathscr{Z}_{k^s}^{\mathscr{G}} & \to & \left(\bigoplus_{x\in V_{k^s}^{(1)}} k^s(x)^*\right)^{\mathscr{G}} & \to & \mathscr{I}_{k^s}^{\mathscr{G}} & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathscr{G}, \mathscr{Z}_{k^s}) & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow\wr & & \uparrow & & & \\ 0 \to & \mathscr{Z} & \to & \bigoplus_{x\in V^{(1)}} k(x)^* & \to & \mathscr{I} & \to & 0 & \end{array}$$

and

$$(8)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathscr{I}_{k^s}^{\mathscr{G}} & \to & \left(\bigoplus_{x\in V_{k^s}^{(2)}} \mathbf{Z}\right)^{\mathscr{G}} & \to & \mathrm{CH}^2(V_{k^s}) & \\ & \uparrow & & \uparrow\wr & & \uparrow & \\ 0 \to & \mathscr{I} & \to & \bigoplus_{x\in V^{(2)}} \mathbf{Z} & \to & \mathrm{CH}^2(V) & \to 0. \end{array}$$

We put $\mathscr{C}(1) = \bigoplus_{x\in V^{(1)}} k(x)^*$ and $\mathscr{C}(2) = \bigoplus_{x\in V^{(2)}} \mathbf{Z}$ and take a similar notation for the corresponding groups over k^s. Let $\mathscr{C}'(1)$, $\mathscr{C}'_{k^s}(1)$, $\mathscr{C}'(2)$, $\mathscr{C}'_{k^s}(2)$, $\mathscr{Z}'$, $\mathscr{Z}'_{k^s}$, $\mathscr{I}'$ and $\mathscr{I}'_{k^s}$ be the corresponding objects for V'. Since the map from $\mathscr{I}'$ to $\mathscr{I}$ is injective, we have exact sequences

$$0 \to \mathscr{Z}/\mathscr{Z}' \to \mathscr{C}(1)/\mathscr{C}'(1) \to \mathscr{I}/\mathscr{I}' \to 0$$

and

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}' \to \mathscr{C}(2)/\mathscr{C}'(2) \to \mathrm{CH}^2(V)/\mathrm{CH}^2(V') \to 0$$

as well as the corresponding ones over k^s. Moreover Hilbert's theorem 90 implies that

$$\left(\mathscr{C}_{k^s}(1)/\mathscr{C}'_{k^s}(1)\right)^{\mathscr{G}} = \left(\bigoplus_{P\in V^{(1)}_{k^s}} k^s(P)^* / \bigoplus_{P\in V'^{(1)}_{k^s}} k^s(P)^*\right)^{\mathscr{G}}$$
$$= \bigoplus_{P\in V^{(1)}} k(P)^* / \bigoplus_{P\in V'^{(1)}} k(P)^* = \mathscr{C}(1)/\mathscr{C}'(1).$$

Thus we get the following two commutative diagrams of complexes the first of which has exact horizontal lines:

$$\text{(9)}\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathscr{Z}_{k^s}/\mathscr{Z}'_{k^s})^{\mathscr{G}} \arrow[r] & (\mathscr{C}_{k^s}(1)/\mathscr{C}'_{k^s}(1))^{\mathscr{G}} \arrow[r] & (\mathscr{I}_{k^s}/\mathscr{I}'_{k^s})^{\mathscr{G}} \arrow[r, "\partial'"] & H^1(\mathscr{G}, \mathscr{Z}_{k^s}/\mathscr{Z}'_{k^s}) \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{Z}/\mathscr{Z}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{C}(1)/\mathscr{C}'(1) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \mathscr{I}/\mathscr{I}' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

and

$$\text{(10)}\quad \begin{tikzcd} (\mathscr{I}_{k^s}/\mathscr{I}'_{k^s})^{\mathscr{G}} \arrow[r] & (\mathscr{C}_{k^s}(2)/\mathscr{C}'_{k^s}(2))^{\mathscr{G}} \arrow[r] & \mathrm{CH}^2(V_{k^s})/\mathrm{CH}^2(V'_{k^s}) \\ \mathscr{I}/\mathscr{I}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{C}(2)/\mathscr{C}'(2) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{CH}^2(V)/\mathrm{CH}^2(V') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

which defines a map from $\operatorname{Im}\partial'$ to $\mathrm{CH}^2(V)/\mathrm{CH}^2(V')$. Moreover there are obvious morphisms of diagrams from (7) to (9) and from (8) to (10). Thus we get a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Im}\partial' \arrow[r] & \mathrm{CH}^2(V)/\mathrm{CH}^2(V') \\ H^1(\mathscr{G}, \mathscr{Z}_{k^s}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{CH}^2(V). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

It remains to show that the image of $\beta\cup f$ in $\mathrm{CH}^2(V)/\mathrm{CH}^2(V')$ is given by the class of E. The image of $\beta\cup f$ in $H^1(\mathscr{G}, \mathscr{Z}_{k^s}/\mathscr{Z}'_{k^s})$ is given by the cocycle

$$\widetilde{\beta\cup f}' : \sigma \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a}, \\ \left[\sum_{P\in V^{(1)}_{k^s}} \lambda_P\right] & \text{otherwise}. \end{cases}$$

where

$$\lambda_P = \begin{cases} \left(\frac{Z}{X-\sqrt{a}Y}\right)^{\nu_Q(f)} \text{ if } P = p_2^{-1}(Q), \\ f \text{ if } P = p_1^{-1}((\sqrt{a}:1:0)), \\ f^{-1} \text{ if } P = p_1^{-1}((\sqrt{a}:-1:0)), \\ 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

We may write E in the form $E_0 + \sum_{Q \in V'^{(1)}} E_Q$ where $p_{2*}(E_0) = 0$ and for any Q in $V'^{(1)}$, the support of E_Q is included in $p_2^{-1}(Q)$ and $p_{2*}(E_Q)$ is equal to $\nu_Q(f)Q$. Thus for any Q in $V'^{(1)}$ there exists a function g_Q in $k^s(Q)(C)$ such the divisor of g_Q over $k^s(Q)$ is

$$-\nu_Q(f)(\sqrt{a}:-1:0) + E_Q$$

and they may be choosen to be trivial except for a finite number. Then one considers the element γ of $\mathscr{C}_{k^s}(1)/\mathscr{C}'_{k^s}(1)$ defined by $\gamma = [\sum_{P \in V^{(1)}} \gamma_P]$ where

$$\gamma_P = \begin{cases} f \text{ if } P = p_1^{-1}((\sqrt{a}:-1:0)), \\ g_Q \text{ if } P = p_2^{-1}(Q), \\ 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Then for any σ in $\mathscr{G}$ such that $\sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ and any Q in $V'^{(1)}$ the divisor of ${}^{\sigma}g_Q g_Q^{-1}$ over $k^s(Q)$ coincides with the one of $\left(\frac{X-\sqrt{a}Y}{Z}\right)^{-\nu_Q(f)}$. Thus, for any $\sigma \in \mathscr{G}$,

$$\widetilde{\beta \cup f}'(\sigma) = {}^{\sigma}\gamma\gamma^{-1}.$$

Moreover the image of γ in $\mathscr{I}_{k^s}/\mathscr{I}'_{k^s}$ is invariant under $\mathscr{G}$ and its image in $\mathscr{C}_{k^s}(2)/\mathscr{C}'_{k^s}(2)$ comes from E by the natural map

$$\bigoplus_{P \in V^{(2)}} \mathbf{Z} \to (\mathscr{C}_{k^s}(2)/\mathscr{C}'_{k^s}(2))^{\mathscr{G}}$$

which implies the result. □

9. Application to negligible classes

We shall now apply the results of the preceding sections to the study of negligible classes in the cohomology of a central extension of an $\mathbf{F}_p$ vector space by

another. Such groups have been used in [**Sa1**] to construct counter-examples to Noether's problem using classes in the unramified Brauer group. In fact one of the advantage of these extensions from the point of view of Galois cohomology is the fact that the unramified classes coming from the cohomology of the quotient may be characterized with linear algebra (see [**Bo**, lemma 5.1] and proposition 9.4 below).

9.1. Products of generic Severi-Brauer varieties. — Let p be a prime number and k be a field of characteristic different from p. If $p = 2$ we assume that the field contains a primitive fourth root of one and in general that it contains a primitive p-th root of one ξ. Let m be an integer, $X_1, \ldots, X_n$ be indeterminates and K be the field $k(X_1, \ldots, X_n)$. We fix an integer m and monomials A_i, B_i in the X_i for $1 \leqslant i \leqslant m$. We then consider the cyclic simple algebras $D_i = A_\xi(A_i, B_i)$ generated by two elements I and J with the relations

$$I^p = A_i, J^p = B_i \text{ and } IJ = \xi JI,$$

we denote by Y_i the corresponding Severi-Brauer variety and by Y the product of these varieties. Using Amitsur's theorem [**Am**, theorem 9.3] one gets (see [**Pe1**, lemma 8]) that

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}\, K(Y)) = < (A_i, B_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m >$$

and the complex $\mathscr{C}$ may be written as

$$(11) \quad < (A_i, B_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m > \otimes K^* \xrightarrow{\cup} H^3(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(K(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

9.2. Connection with negligible classes. — Let U be an $\mathbf{F}_p$ vector space with a basis $u_1, \ldots, u_n$. Let Φ^1_K be the morphism from the dual $U^\vee$ of U to K^*/K^{*p} which sends $u_i^\vee$ of the dual basis to (X_i). Let

$$\Phi^i_K : (\Lambda^i U)^\vee \to H^i(K, \mu_p)$$

be the induced map (see [**Pe1**, page 250]). This is an injection by [**Pe1**, lemma 7]. Moreover

$$\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(K(Y))\Big) \subset \mathrm{Im}\, \Phi^2_K.$$

Let V be the dual of the inverse image of this kernel by Φ^2_K. We then have an injection

$$V^\vee \to (\Lambda^2 U)^\vee$$

and a surjective map

$$\Lambda^2 U \to V$$

which gives an element γ in $\Lambda^2(U^\vee)\otimes V$.

For any vector space W over $\mathbf{F}_p$ let $AC^*(W)$ be the quotient of the tensor algebra $T^*(W)$ by the ideal generated by $x\otimes y+y\otimes x$ for all x,y in W. Then there is a surjective morphism

$$AC^*(W)\to\Lambda^*(W)$$

which is an isomorphism if p is not 2 and a natural map of algebras

$$AC^*(W^\vee)\to H^*(W,\mathbf{F}_p)$$

which extends the isomorphism $W^\vee\xrightarrow{\sim}H^1(W,\mathbf{F}_p)$.

Let $\tilde\gamma$ be a lift of γ in $AC^*(U^\vee)\otimes V$. We also denote by $\tilde\gamma$ its image in $H^2(U,V)$. There is a natural surjection

$$H^2(U,V)\twoheadrightarrow\Lambda^2(U^\vee)\otimes V$$

(see [**Bro**, exercise IV.3.8]). The image of $\tilde\gamma$ by this map coincides with γ. Let

$$0\to V\xrightarrow{j}G\xrightarrow{\pi}U\to 0$$

be the central extension corresponding to $\tilde\gamma$.

Definition 9.1. — If H is a finite group, M a H-module and E a field, a class λ in $H^i(H,M)$ is said to be *totally E-negligible* if and only if for any extension F of E and any morphism

$$\rho:\mathrm{Gal}(F^s/F)\to H$$

the image of λ by ρ^* is zero in $H^i(F,M)$.

If E is a field over k and $\boldsymbol{a}=(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ a family of inversible elements of E, we denote by

$$\bigoplus_{i\geqslant 0}\Phi^i_{E,\boldsymbol{a}}:\bigoplus_{i\geqslant 0}\Lambda^i U^\vee\to\bigoplus_{i\geqslant 0}H^i(E,\mu_p^{\otimes i})$$

the morphism of graded algebras which sends $u_j^\vee$ onto a_j.

Proposition 9.1. — *Let $\tilde\lambda$ belong to $AC^iU^\vee$ and λ be its image in $\Lambda^iU^\vee$. The following three assertions are equivalent:*

(1) The image of $\tilde\lambda$ under inflation in $H^i(G,\mu_p^{\otimes i})$ is totally k-negligible.

(2) For any field E over k and any family $\boldsymbol{a}=(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ of inversible elements in E such that

$$\Phi^2_{E,\boldsymbol{a}}(V^\vee)=0$$

one has

$$\Phi^i_{E,\boldsymbol{a}}(\lambda) = 0.$$

(3) One has $\Phi^i_{K(Y),\boldsymbol{X}}(\lambda) = 0$.

Proof. — • Let us first prove the equivalence of the first two assertions. Let E be an extension of k. By Kummer theory, there is a natural correspondance between the morphisms ρ_1 from $\mathrm{Gal}(F^s/F)$ to U and the families $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ of elements of E^*/E^{*p}. Let us first prove the following lemma:

Lemma 9.2. — *With the notation as above, the morphism*

$$\rho_1 : \mathrm{Gal}(F^s/F) \to U$$

may be lifted in a morphism

$$\rho : \mathrm{Gal}(F^s/F) \to G$$

if and only if

$$\Phi^2_{E,\boldsymbol{a}}(V^\vee) = 0.$$

Proof. — The morphism ρ_1 may be lifted to G if and only if the image of $\tilde{\gamma}$ in $H^2(F, V)$ is trivial. Let us choose a basis $(v_1, \ldots, v_m)$ of V and let $(v_1^\vee, \ldots, v_m^\vee)$ be the dual basis. The condition is equivalent to the triviality of $v_{i\ *}^\vee(\rho_1^*(\tilde{\gamma}))$ for $1 \leqslant i \leqslant m$ that is the triviality of $\rho_1^*(v_{i\ *}^\vee(\tilde{\gamma}))$ for $1 \leqslant i \leqslant m$ which is equivalent to $\Phi^2_{E,\boldsymbol{a}}(v_i^\vee) = 0$. □

End of the proof of proposition 9.1. — Let us assume that the first assertion is true and let E be a field over k and $\boldsymbol{a}$ a family of inversible elements such that the hypothesis of the second assertion are verified. By the preceding lemma, the morphism $\mathrm{Gal}(E^s/E) \to U$ defined by $\boldsymbol{a}$ may be lifted to G. But by the first assertion the image of $\tilde{\lambda}$ in $H^i(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ is sent to 0 in $H^i(E, \mu_p^{\otimes i})$.

Let us assume that the second assertion is true, let E be a field extension of k and $\rho : \mathrm{Gal}(E^s/E) \to G$ be a morphism. The map ρ induces a morphism

$$\mathrm{Gal}(E^s/E) \to U$$

corresponding to a family $\boldsymbol{a}$. By the lemma $\Phi^2_{E,\boldsymbol{a}}(V^\vee) = 0$. Thus $\Phi^i_{E,\boldsymbol{a}}(\lambda) = 0$ and the image of $\tilde{\lambda}$ in $H^i(E, \mu_p^{\otimes i})$ is trivial.

• It is clear that the second assertion implies the third. Let us prove the opposite implication. First the fact that $\Phi^i_{K(Y),\boldsymbol{X}}(\lambda) = 0$ implies that $\Phi^i_{E\otimes_k K(Y),\boldsymbol{X}}(\lambda) = 0$. Thus we are reduced to the case where $k = E$.

Let $A_1 \in \mathscr{P}(K/k)$ be the discrete valuation ring of rank one defined by the divisor $X_1 = a_1$. Consider the algebras $\mathscr{A}_\xi(A_j, B_j)$ defined over A_1 by the generators I and J and the relations

$$I^p = A_j, J^p = B_j \text{ and } IJ = \xi JI.$$

It defines a Severi-Brauer scheme $\mathscr{Y}_j^1$ over $\operatorname{Spec} A_1$. Let $\mathscr{Y}^1$ be the product of these schemes. Then the special fiber of $\mathscr{Y}^1$ defines a local ring B_1 in $\mathscr{P}(K(Y)/k)$ over A_1 such that B_1 is unramified over A_1 and the residue field κ_{B_1} is the function field over $k(X_2,\ldots,X_n)$ of the product Y^1 of the Severi-Brauer varieties defined by the algebras

$$A_\xi(A_j(a_1,X_2,\ldots,X_n), B_j(a_1,X_2,\ldots,X_n)).$$

In a similar way we construct discrete valuation rings of rank one A_j in $\mathscr{P}(\kappa_{A_{j-1}}/k)$ and $B_j \in \mathscr{P}(\kappa_{B_{j-1}}/k)$ so that $\kappa_{A_j} = k(X_{j+1},\ldots,X_n)$ and $\kappa_{B_j} = \kappa_{A_j}(Y^j)$ where Y^j is defined as Y^1. We put $\kappa_{A_0} = K$ and $\kappa_{B_0} = K(Y)$. Let us assume that

$$\Phi^i_{\kappa_{B_j},(a_1,\ldots,a_j,X_{j+1},\ldots,X_n)}(\lambda) = 0.$$

Then taking the completion of κ_{B_j} for B_{j+1}

$$\Phi^i_{\kappa_{\hat{B}_j},(a_1,\ldots,a_j,X_{j+1},\ldots,X_n)}(\lambda) = 0.$$

But the field $\kappa_{\hat{B}_j}$ is isomorphic to $\kappa_{B_{j+1}}((X_{j+1} - a_{j+1}))$. Thus the natural surjection

$$\operatorname{Gal}(\hat{\kappa}^s_{B_j}/\kappa_{\hat{B}_j}) \to \operatorname{Gal}(\kappa^s_{B_{j+1}}/\kappa_{B_{j+1}})$$

has a section and the map

$$H^i(\kappa_{B_{j+1}}, \mu_p^{\otimes i}) \to H^i(\kappa_{\hat{B}_j}, \mu_p^{\otimes i})$$

is an injection. Thus

$$\Phi^i_{\kappa_{B_{j+1}},(a_1,\ldots,a_j,a_{j+1},X_{j+2},\ldots,X_n)}(\lambda) = 0.$$

Therefore by induction, we get that $\Phi^i_{\kappa_{B_n},\boldsymbol{a}}(\lambda) = 0$. But, since $\Phi^2_{k,\boldsymbol{a}}(V^\vee) = 0$, κ_{B_n} is rational on k and $\Phi^i_{k,\boldsymbol{a}}(\lambda) = 0$. $\square$

Lemma 9.3. — *The images in $\Lambda^3(U^\vee)$ of the kernels of the natural maps*

$$H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

and

$$H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

are equal to $U^\vee \wedge V^\vee$.

Proof. — The element $\tilde{\gamma}$ in $AC^2(U^\vee)\otimes V$ defines a morphism

$$\tilde{\gamma} : V^\vee \to AC^2(U^\vee)$$

which is injective. We then consider the Hochschild-Serre spectral sequences

$$E_2^{p,q}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = H^p(U, H^q(V,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

and

$$E_2^{p,q}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^p(U, H^q(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Moreover the natural map $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ induces a morphism of spectral sequences from the first one to the second one. If $p = 2$ there is a natural isomorphism

$$S^p(U^\vee)\otimes S^q(V^\vee) \xrightarrow{\sim} H^p(U, H^q(V,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$$

(see [**Car1**, théorème 2]) and if $p \neq 2$ isomorphisms

$$U^\vee \oplus \Lambda^2(U^\vee) \xrightarrow{\delta\oplus\cup} H^2(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

where δ is the Bockstein operator and by [**Car2**, théorème 2],

$$U^\vee \otimes U^\vee \oplus \Lambda^3 U^\vee \xrightarrow{\delta.\cup.\oplus.\cup.\cup.} H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

- By [**Bro**, page 60], one has an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(H_{n-1}(U,\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^n(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_n(U,\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$

But $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(H_{n-1}(U,\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ is trivial and by [**Bro**, pages 122 and 123], $\Lambda^i U$ is isomorphic to $H_i(U,\mathbf{Z})$ if $i = 1$ or 2 and $\Lambda^i U \to H_i(U,\mathbf{Z})$ for $i \geqslant 3$. We get isomorphisms

$$H^0(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z},\ H^1(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} U^\vee \text{ and } H^2(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^2 U^\vee$$

as well as surjections

$$H^i(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \twoheadrightarrow \Lambda^i U^\vee.$$

Similarly, one gets

$$H^1(U, H^1(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} U^\vee \otimes V^\vee \text{ and } H^2(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^2 V^\vee. \tag{12}$$

• We shall now prove that the map

$$V^\vee \to AC^2(U^\vee)$$

induced by the first spectral sequence is the one defined by $-\tilde{\gamma}$. We use the same filtration on $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} C^n(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ as in section 4. Let us write $\tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^t f_i.g_i \otimes v_i$ with f_i, g_i in $U^\vee$ and v_i in V. Let $s : U \to G$ be a set-theoritic section of π such that $s(0) = e$ and

$$\forall u, u' \in U,\ s(u)s(u') = j\left(\sum_{i=1}^t f_i(u)g_i(u')v_i\right)s(uu').$$

Let h belong to $V^\vee \xrightarrow{\sim} H^0(U, H^1(V, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} E_2^{0,1}(G/V)$. For any g in G let $\tau(g)$ in V denote $gs(\pi(g))^{-1}$. Then h is represented in $C^1(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ by the cocycle $\tilde{h}$ defined by

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \\ g & \mapsto & h(\tau(g)). \end{array}$$

But $\tau(gg') = \tau(g) + \tau(g') + \sum_{i=1}^t f_i(\pi(g))g_i(\pi(g'))v_i$. Thus

$$\begin{aligned} d\tilde{h}(g,g') &= h(\tau(g')) - h(\tau(gg')) + h(\tau(g)) \\ &= -h\left(\sum_{i=1}^t f_i(\pi(g))g_i(\pi(g'))v_i\right) \end{aligned}$$

which is sent in $H^2(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ on the image of the element of $AC^2(U^\vee)$ given by

$$-\sum_{i=1}^t h(v_i)f_i.g_i.$$

But it is the opposite of the image of h by $\tilde{\gamma}$.

• Since the Hochschild-Serre spectral sequence is compatible with the cup-product, the map

$$H^1(U, H^1(V, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})) \to H^3(U, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

is induced by the map

$$\begin{array}{ccc} U^\vee \otimes V^\vee & \to & AC^3U^\vee \\ u \otimes v & \mapsto & -u.\tilde{\gamma}(v). \end{array} \tag{13}$$

• Also thanks to this compatibility, the composite morphism

$$AC^2(V^\vee) \to H^0(U, H^2(V, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})) \to H^2(U, H^1(V, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$$

is given by the opposite of the map

$$\begin{array}{rcl} AC^2(V^\vee) & \to & AC^2(U^\vee)\otimes V^\vee \\ xy & \mapsto & \tilde\gamma(x)\otimes y-\tilde\gamma(y)\otimes x. \end{array}$$

- By the expression of the map

$$H^1(U,H^1(V,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))\to H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

we get that $U^\vee\wedge V^\vee$ is contained in the image in $\Lambda^3U^\vee$ of the kernel of the inflation map

$$H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\to H^3(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

Thus it suffices to prove that the image in $\Lambda^3U^\vee$ of

$$\operatorname{Ker}(H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\to H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

is contained in $U^\vee\wedge V^\vee$. But, by (12) and (13), we already know that the image of the composite map

$$H^1(U,H^1(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))\to H^3(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to\Lambda^3U^\vee$$

is contained in $U^\vee\wedge V^\vee$. Also the computation of the map

$$AC^2(V^\vee)\to H^2(U,H^1(V,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$$

shows that the map

$$H^2(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\to H^2(U,H^1(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

is induced by the map

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^2V^\vee & \to & AC^2(U^\vee)\otimes V^\vee \\ x\wedge y & \mapsto & \tilde\gamma(y)\otimes x-\tilde\gamma(x)\otimes y \end{array}$$

which is injective, since $\tilde\gamma$ is injective. Therefore $E_3^{0,2}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ is trivial and the result is proved. □

Notation . — Let $(V^\vee\wedge U^\vee)^\perp_{\mathrm{dec}}\subset\Lambda^3U$ be the subgroup of $(V^\vee\wedge U^\vee)^\perp$ generated by the elements of the form $u\wedge v$, for $u\in\Lambda^2U$, $v\in U$. Let $K^3_{\max}$ be its orthogonal in $\Lambda^3U^\vee$.

Proposition 9.4. — *The inverse image in $\Lambda^3U^\vee$ of $H^3_{\mathrm{nr}/k}(K(Y),\mu_p^{\otimes 3})$ is equal to $K^3_{\max}$. In particular one has*

$$V^\vee\wedge U^\vee\subset\operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X}\subset K^3_{\max}.$$

Moreover the quotient $\operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X}/V^\vee \wedge U^\vee$ *is imbedded in* $\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}$.

Proof. — The inclusion $V^\vee \wedge U^\vee \subset \operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X}$ is clear. Therefore

$$(\operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X})^\perp \subset (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp$$

and

$$(\operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X})^\perp_{\mathrm{dec}} \subset (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp_{\mathrm{dec}}.$$

Thus for any f in $K^3_{\max}$, the restriction of f to $(\operatorname{Ker}\Phi^3_{K(Y),X})^\perp_{\mathrm{dec}}$ is trivial and by [**Pe1**, theorem 2 and remark p. 251] the image of f in $H^3(K(Y), \mu_p^{\otimes 3})$ is unramified over k.

Let $\lambda \notin K^3_{\max}$. We want to show that its image is ramified. There exist $p \in \Lambda^2 U$ and $u'_1 \in U$ such that $< \lambda, p \wedge u'_1 > \neq 0$ and $p \wedge u'_1$ belongs to $(V^\vee \wedge U^\vee)^\perp$. We complete (u'_1) in a basis $(u'_1, \dots, u'_n)$ of U. We may choose these elements so that they can be lifted in a basis of $\mathbf{Z}^n$. Let $M_1, \dots, M_n$ be the monomials in $X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}$ given by this basis of $\mathbf{Z}^n$. Then $\Phi^1_K(u_i'^\vee) = (M_i)$ and $k(X_1, \dots, X_n) = k(M_1, \dots, M_n)$. Let A be the discrete valuation ring corresponding to M_1 in $k(M_1, \dots, M_n)$. One may write the symbols (A_i, B_i) as (A'_i, B'_i) where the A'_i are monomials in $M_2, \dots, M_n$ and B'_i monomials in $M_1, \dots, M_n$. Moreover, by taking suitable powers of B'_i and A'_i, we may assume that $v_A(B'_i) \in \{0, 1\}$. Then let I'_i and J'_i be generators of D_i such that

$$I_i'^p = A'_i,\ J_i'^p = B'_i \text{ and } I'_i J'_i = \xi J'_i I'_i \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant m$$

and let $\mathscr{D}_i$ be the order of D_i over A generated by I'_i and J'_i. It is a maximal order of D_i. Indeed, if $v_A(B'_i) = 0$, this follows from the fact that $\mathscr{D}_i/(M_1)$ is a skew field. Otherwise, define a function v on $D_i - \{0\}$ by

$$v\Bigl(\sum_{\substack{0 \leqslant j < p \\ 0 \leqslant l < p}} a_{j,l} I_i^j J_i^l\Bigr) = \inf_{\substack{0 \leqslant j < p \\ 0 \leqslant l < p}} \Bigl(v_A(a_{j,l}) + \frac{l}{p}\Bigr)$$

then v verifies $v(a+b) \geqslant \inf(v(a), v(b))$, and for any a, b in $D_i - \{0\}$, write $a = J_i^r \alpha$ and $b = J_i^s \beta$ with $v(\alpha) = v(\beta) = 0$. Then

$$\alpha = \sum_{\substack{0 \leqslant j < p \\ 0 \leqslant l < p}} \alpha_{j,l} I_i^j J_i^l \text{ and } \beta = \sum_{\substack{0 \leqslant j < p \\ 0 \leqslant l < p}} \beta_{j,l} I_i^j J_i^l$$

with $\inf_{0\leqslant j<p}\nu_A(\alpha_{j,0}) = \inf_{0\leqslant j<p}\nu_A(\beta_{j,0}) = 0$. Since $A[{A'_i}^{1/p}]/(\mathfrak{m}_A)$ is a field, we get that $\nu(\sum_{0\leqslant j,l<p}(\alpha_{j,0}\beta_{l,0})I_i^{j+l}) = 0$ and then that $\nu(ab) = \nu(a)+\nu(b)$. Thus ν is a valuation and $\mathscr{D}_i$ the maximal order of D_i (see [**Re**, §12]). Let $\mathscr{Y}_i$ be the connected component of the corresponding Severi-Brauer scheme on $\operatorname{Spec} A$ which contains the generic fiber (see [**Art**], [**Brz**] and [**Fr**, page 37]). This is Artin's model of Y_i. Let $\mathscr{Y}$ be the products of the $\mathscr{Y}_i$. If M_1 does not divide B'_i then the special fibre $\mathscr{Y}_i^0$ of $\mathscr{Y}_i$ is the Severi-Brauer variety corresponding to the algebra $\mathscr{D}_i\otimes\kappa_A$ and otherwise, by [**Art**, theorem 1.4], $\mathscr{Y}_i^{0^s}$ has p irreducible components birationally equivalent to $\mathbf{P}^{p-1}_{\kappa_A^s}$. They may be described as follows: $\mathscr{D}_i\otimes\kappa_A$ is the algebra generated by I'_i and J'_i with the relations

$$I_i'^p = A'_i,\ J_i'^p = 0 \text{ and } I'_iJ'_i = \xi J'_iI'_i.$$

Let us consider the algebra $\mathscr{D}'_i = \mathscr{D}_i\otimes\kappa_A({A'_i}^{1/p})$. A maximal set of orthogonal idempotents e_j of $\mathscr{D}'_i$ is given by

$$e_j = \prod_{\substack{l\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\\ l\neq j}}\frac{I'_i-\xi^l{A'_i}^{1/p}}{(\xi^j-\xi^l){A'_i}^{1/p}}.$$

This follows from the existence of an isomorphism from $D_i\times K({A'_i}^{1/p})$ to $M_p(K({A'_i}^{1/p}))$ which maps I_i to the diagonal matrix $D({A'_i}^{1/p},\xi{A'_i}^{1/p},\dots,\xi^{p-1}{A'_i}^{1/p})$. Therefore the points of $\mathscr{Y}_i^{0^s}$ which correspond to right ideals L for which $\dim Le_l = 1$ for any l (see [**Art**, lemma 3.3]) are given by $de_j\mathscr{D}'_i$ for $1\leqslant j\leqslant p$ and d in $\mathscr{D}'_i$ such that $de_j\mathscr{D}'_ie_l\neq 0$ for $1\leqslant l\leqslant p$. Therefore the components of $\mathscr{Y}_i^{0^s}$ are permuted cyclically by $\operatorname{Gal}(\kappa_A({A'_i}^{1/p})/\kappa_A)$. Thus the special fiber $\mathscr{Y}^0$ of $\mathscr{Y}$ is integral over κ_A and defines a discrete valuation ring B over A which is unramified over A.

We may reduce to the case where $M_1|B'_i$ if and only if $1\leqslant i\leqslant l$ for some l between 1 and m. Then κ_B is rational over

$$\kappa_A((A'_i)^{1/p}, 1\leqslant i\leqslant l)\Bigl(\prod_{l+1\leqslant i\leqslant m}\mathscr{Y}_i^0\Bigr).$$

By [**Pe1**, lemma 6]

$$\partial_B(\Phi^3_{k(Y),X}(\lambda)) = \Phi^2_{\kappa_B}(\hat{u}'_1(\lambda))$$

where $\Phi^*_{\kappa_B} : \Lambda^* u_1'^{\perp} \to H^*(\kappa_B, \mu_p^{\otimes *})$ is the morphism which sends u_i' over M_i for $2 \leqslant i \leqslant n$ and for any w of $\Lambda^i U^\vee$, $\hat{u}_1'(w)$ is the unique element of $\Lambda^{i-1}(u_1'^{\perp})$ such that

$$w - u_1'^{\vee} \wedge \hat{u}_1'(w) \in \Lambda^i(u_1'^{\perp}).$$

We want to show that the image of λ is ramified at B. Therefore, we shall now describe the kernel of $\Phi^2_{\kappa_B}$.

Lemma 9.5. — *With notation as above,*

$$\mathrm{Ker}(\Phi^2_{\kappa_B}) = \hat{u}_1'(V^\vee) \wedge (u_1'^{\perp}) + V^\vee \cap \Lambda^2(u_1'^{\perp}).$$

Proof. — Let a_i (resp. b_i) be the inverse image of (A_i') (resp. (B_i')) in $U^\vee$. Then the right hand side coincides with

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \wedge (u_1'^{\perp}) + \sum_{i=l+1}^{m} \mathbf{F}_p a_i \wedge b_i$$

which is contained in $\mathrm{Ker}\,\Phi^2_{\kappa_B}$. Moreover Amitsur's theorem implies (see [**Pe1**, lemma 8]) that

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(\kappa_A((A_i')^{1/p}, 1 \leqslant i \leqslant l), \mu_p^{\otimes 2}) \to H^2(\kappa_B, \mu_p^{\otimes 2})\right)$$

is generated by the symbols (A_i', B_i') for $i \geqslant l+1$. Therefore we only have to consider the case $m = l$.

In this case, let $w_1^\vee, \dots w_r^\vee$ be a basis of $\hat{u}_1'(V^\vee)$. We complete it in a basis $(w_i^\vee)_{1 \leqslant i \leqslant m-1}$ of $u_1'^{\perp}$. Let $w_1, \dots, w_{m-1}$ be the dual basis and let η belong to

$$\Lambda^2(u_1'^{\perp}) - \hat{u}_1'(V^\vee) \wedge (u_1'^{\perp}).$$

Then there exist i and j strictly bigger than r such that

$$< \eta | w_i \wedge w_j > \neq 0.$$

We may construct a discrete valuation ring A' (resp. B') in $k(M_2, \dots, M_n)$ (resp. κ_B) such that

$$v_{A'}(\Phi^1_{\kappa_A}(w_k)) = \delta_{i,k} \text{ and } \kappa_{A'} = k(N_1, \dots, \hat{N}_i, \dots, N_{n-1})$$

where $N_1, \dots, N_{n-1}$ are monomials corresponding to $w_1, \dots, w_{n-1}$, such that B' is unramified on A', which is possible since $i > r$ and $\kappa_{B'}$ is rational over

$$k(N_1, \dots, \hat{N}_i, \dots, N_n)(N_1^{1/p}, \dots, N_r^{1/p}).$$

Thus

$$\partial_{B'}(\Phi^2_{\kappa_B}(\eta)) = \Phi^1_{\kappa_{B'}}(\sum_{l\neq i} <\eta|w_i \wedge w_l> w_l) = (\prod_{l\neq i} N_l^{<\eta|w_i\wedge w_l>}) \neq 0$$

and

$$\Phi^2_{\kappa_B}(\eta) \neq 0. \quad \square$$

End of the proof of proposition 9.4. — We want to show that the class $\Phi^2_{\kappa_B}(\hat{u}'_1(\lambda))$ is non zero, which, by lemma 9.5, is equivalent to

$$\hat{u}'_1(\lambda) \notin \hat{u}'_1(V^\vee) \wedge u_1'^{\perp} + V^\vee \cap \Lambda^2(u_1'^{\perp}).$$

Taking the inverse image by $\hat{u}'_1$ is is sufficient to show that

$$\lambda \notin V^\vee \wedge u_1'^{\perp} + V^\vee \wedge u_1'^{\vee} + \Lambda^3(u_1'^{\perp}) = V^\vee \wedge U^\vee + \Lambda^3(u_1'^{\perp}).$$

But, by hypothesis, $p \wedge u'_1$ belongs to $(V^\vee \wedge U^\vee)^\perp$. Thus $p \wedge u'_1$ is zero on

$$V^\vee \wedge U^\vee + \Lambda^3(u_1'^{\perp}).$$

Since $<\lambda, p \wedge u'_1 > \neq 0$, the first assertion is proved. It implies the following inclusions.

It remains to prove the last assertion. The kernel of $\Phi^3_{K(Y),X}$ is the inverse image in $\Lambda^3 U^\vee$ of

$$\mathrm{Ker}(H^3(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(K(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))).$$

Let λ in $\Lambda^3 U^\vee$ be such that

$$\Phi^3_K(\lambda) \in < (A_i, B_i), 1 \leqslant i \leqslant m > \otimes K^*,$$

then we may write

$$\Phi^3_K(\lambda) = \Phi^3_K(w) + \sum_{i=1}^{m} (A_i, B_i, P_i)$$

where w belongs to $V^\vee \wedge U^\vee$ and P_i is a polynomial which is not divisible by any of the X_j. Then taking successive residues at places defined by indeterminates X_i, X_j, and X_l with i, j, and l distincts in $\{1, \ldots, n\}$, we get that

$$(\lambda - w)(u_i \wedge u_j \wedge u_k) = 0$$

and therefore $\lambda = w$. Thus the last assertion follows from theorem 2.1 and (11). $\square$

9.3. An explicit example. — We now assume that U is an $\mathbf{F}_2$ vector space of dimension 6 and V is the dual of the subspace of $\Lambda^2 U$ generated by the elements

$$u_2^\vee \wedge u_5^\vee,\ u_4^\vee \wedge u_1^\vee,\ u_6^\vee \wedge u_3^\vee,\ (u_2^\vee + u_4^\vee + u_6^\vee) \wedge (u_1^\vee + u_3^\vee + u_5^\vee).$$

Lemma 9.6. — *With the notations of section 9.2*

$$K^3_{\max}/V^\vee \wedge U^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Proof. — We have

$$\begin{aligned} V^\vee \wedge U^\vee = <& u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_4^\vee,\ u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_5^\vee,\ u_1^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_4^\vee,\\ & u_1^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_6^\vee,\ u_1^\vee \wedge u_4^\vee \wedge u_5^\vee,\ u_1^\vee \wedge u_4^\vee \wedge u_6^\vee,\\ & u_2^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_5^\vee,\ u_2^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_6^\vee,\ u_2^\vee \wedge u_4^\vee \wedge u_5^\vee,\\ & u_2^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee,\ u_3^\vee \wedge u_4^\vee \wedge u_6^\vee,\ u_3^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee,\\ & u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_3^\vee + u_1^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee,\ u_2^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_4^\vee + u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_6^\vee,\\ & u_3^\vee \wedge u_4^\vee \wedge u_5^\vee + u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_3^\vee,\ u_4^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee + u_2^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_4^\vee > . \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp = <& u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_1,\\ & u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_6 \wedge u_1 \wedge u_2,\\ & u_2 \wedge u_4 \wedge u_6, u_1 \wedge u_3 \wedge u_5 > . \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} g_1 &= u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_5 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_1,\\ g_2 &= u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_6 \wedge u_1 \wedge u_2,\\ h_1 &= u_2 \wedge u_4 \wedge u_6 \end{aligned}$$

and

$$h_2 = u_1 \wedge u_3 \wedge u_5.$$

Since

$$g_1 + g_2 + h_1 + h_2 = (u_1 + u_4) \wedge (u_2 + u_5) \wedge (u_3 + u_6),$$

we get that

$$< h_1, h_2, g_1 + g_2 + h_1 + h_2 > \subset (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp_{\mathrm{dec}}.$$

But by [**Pe1**, pages 265 and 266]

$$\left(\sum_{i=1}^{6} a_i u_i\right) \wedge (\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma h_1 + \delta h_2) = 0$$

is equivalent to

$$\begin{array}{rclrcl} a_1\beta+a_4\alpha &=& 0 & a_1\alpha+a_4\gamma &=& 0\\ a_2\gamma+a_5\alpha &=& 0 & a_3\alpha+a_6\gamma &=& 0\\ a_3\beta+a_6\alpha &=& 0 & a_3\delta+a_6\beta &=& 0\\ a_1\delta+a_4\beta &=& 0 & a_2\beta+a_5\delta &=& 0\\ a_2\alpha+a_5\beta &=& 0. & & & \end{array}$$

Let us assume that $\alpha = 1$ and $\beta = 0$. Then $a_4 = a_2 = a_6 = 0$ and this implies that $a_3 = a_5 = a_1 = 0$. Thus the elements of the form $g_1 + \gamma h_1 + \delta h_2$ are not decomposable. This is also the case for the elements of the form $g_2 + \gamma h_1 + \delta h_2$. Thus

$$[g_1] \in (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp / < h_1, h_2, g_1 + g_2 + h_1 + h_2 >$$

does not lift to a decomposable element. This implies the equality

$$< h_1, h_2, g_1 + g_2 + h_1 + h_2 >= (V^\vee \wedge U^\vee)^\perp_{\mathrm{dec}}. \quad \square$$

Proposition 9.7. — *With notation as above*

$$\mathrm{Ker}(\Phi^3_{k(Y),X}) = K^3_{\max} \neq V^\vee \wedge U^\vee.$$

Proof. — The group $K^3_{\max}$ is the orthogonal of $(V^\vee \wedge U^\vee)^\perp_{\mathrm{dec}}$. Therefore we have

$$K^3_{\max} = V^\vee \wedge U^\vee + < u_2^\vee \wedge u_3^\vee \wedge u_4^\vee + u_5^\vee \wedge u_6^\vee \wedge u_1^\vee > .$$

Thus it is enough to show that

$$(X_2, X_3, X_4) + (X_5, X_6, X_1)$$

is trivial in $H^3(K(Y), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Let Y' be the product of the conics C_1, C_2, C_3 given by the homogeneous equations

$$(C_1): T_{1,1}^2 - X_2 T_{1,2}^2 - X_5 T_{1,3}^2 = 0,$$
$$(C_2): T_{2,1}^2 - X_4 T_{2,2}^2 - X_1 T_{2,3}^2 = 0,$$
$$(C_3): T_{3,1}^2 - X_6 T_{3,2}^2 - X_3 T_{3,3}^2 = 0.$$

Then a direct computation using the assertion (ii) of proposition 3.4 for quadratic extensions yields an explicit element of $\mathrm{CH}^2(Y)$ which is either 0 or the unique nontrivial element of $\mathrm{CH}^2(Y)_{\mathrm{tors}}$. Then the method described in section 8 used backwards yields the function f of $k(Y')$ defined by

$$f = \left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 X_1 - \left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2 X_5 = \left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 X_2 - \left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2 X_4$$

in $k(C_1 \times \cdots \times C_3)$. But by [**Lam**, chapter 10, proposition 1.3],

$$\begin{aligned}(f, X_1X_3X_5, X_2X_4X_6) &= \left(X_2\left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 - X_4\left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2, X_2X_4, X_1X_3X_5\right)\\ &\quad + \left(X_1\left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 - X_5\left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2, X_6, X_1X_5\right)\\ &= (X_2, X_4, X_1X_3X_5) + (X_1, X_5, X_6)\\ &= (X_2, X_3, X_4) + (X_1, X_5, X_6).\end{aligned}$$

This element is therefore trivial in $H^3(k(Y), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. □

Corollary 9.8. — *Consider $U = \bigoplus_{i=1}^6 \mathbf{F}_2 u_i$, $V = \bigoplus_{i=1}^4 \mathbf{F}_2 v_i$ and G the central extension of U by V corresponding to the following element of $H^2(U, V)$:*

$$u_2^\vee \cup u_5^\vee \otimes v_1 + u_4^\vee \cup u_1^\vee \otimes v_2 + u_6^\vee \cup u_3^\vee \otimes v_3 + (u_1^\vee + u_3^\vee + u_5^\vee) \cup (u_2^\vee + u_4^\vee + u_6^\vee) \otimes v_4.$$

Then for any field k of characteristic different from 2 and containing a primitive fourth root of one, $u_1^\vee \cup u_2^\vee \cup u_3^\vee + u_4^\vee \cup u_5^\vee \cup u_6^\vee$ gives a non-trivial totally k-negligible element in $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Remark 9.9. — If we consider the group $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{perm}}$ of permutation negligible classes introduced by Saltman in [**Sa2**] and which corresponds to classes vanishing in the cohomology group $H^3(G, \mathbf{C}(W)^*)$ for any faithful representation W of G over $\mathbf{C}$, then it is possible to show using computations in the cohomology of G that the class obtained is not permutation negligible. The first examples of geometrically negligible elements in degree three which are not permutation negligible are given by Saltman in [**Sa2**, theorem 4.14] for 2-groups having a cyclic subgroup of index 2.

Proof. — The corollary follows from proposition 9.7, lemma 9.3 and proposition 9.1. □

Corollary 9.10. — *For any field k of characteristic different from 2 and containing the fourth roots of one, for any family $(a_1, \ldots, a_6)$ of elements in k^* such that*

$$(a_1, a_4) = (a_2, a_5) = (a_3, a_6) = (a_2a_4a_6, a_1a_3a_5) = 0$$

one has

$$(a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6) = 0.$$

I am very thankful to Markus Rost for several discussions during which I realized that it was possible to generalize the result I had for products of Severi-Brauer varieties to the case of generalized flag varieties and to the referee for the improvements he suggested.

References

[Am] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[Ar] J. K. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.

[Art] M. Artin, *Left ideals in maximal orders*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Antwerp, 1981), Lect. Notes in Math., n° 917, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1982, pp. 182–193.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.

[Bki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.

[Bro] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math., vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Brz] J. Brzezinski, *Brauer-Severi schemes of orders*, Orders and their applications (Oberwolfach, 1984) (I. Reiner and K. W. Roggenkamp, eds.), Lecture notes in math., vol. 1142, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1985, pp. 18–49.

[Car1] H. Cartan, *Détermination des algèbres $H_*(\Pi, n; \mathbf{Z}_2)$ et $H^*(\Pi, n; \mathbf{Z}_2)$; groupes stables modulo p*, Séminaire Henri Cartan 1954/55, n° 10.

[Car2] ———, *Détermination des algèbres $H_*(\Pi, n; \mathbf{Z}_p)$ et $H^*(\Pi, n; \mathbf{Z}_p)$, p premier impair*, Séminaire Henri Cartan 1954/55, n° 9.

[CE] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Math. Series, vol. 19, Princeton University Press, 1956.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[Dem] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[Fi] R. W. Fitzgerald, *Witt kernels of function field extensions*, Pacific J. Math. **109** (1983), n$^{\text{o}}$ 1, 89–106.

[Fr] E. Frossard, *Arithmétique des variétés fibrées en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Thèse 1671, Université de Paris-Sud, 1995.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[HS] G. Hochschild and J.-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[Kah] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kar] N. A. Karpenko, *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*, Algebra i analiz **2** (1990), n$^{\text{o}}$ 1, 141–162; English transl. in Leningrad Math. J. **2** (1991), n$^{\text{o}}$ 1, 119–138.

[KR] I. Kersten and U. Rehmann, *Generic splitting of reductive groups*, Tôhoku Math. J. **46** (1994), 35–70.

[Lag] A. Laghribi, *Isotropie de certaines formes quadratiques de dimensions 7 et 8 sur le corps des fonctions d'une quadrique*, Prépublication, 1995, à paraître au Duke Math. J.

[Lam] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, 1973.

[Li1] S. Lichtenbaum, *Values of zeta-functions at nonnegative integers*, Number theory (Noordwijkerhout, 1983) (H. Jager, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1984, pp. 127–138.

[Li2] ———, *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. math. **88** (1987), 183–215.

[Li3] ———, *New results on weight-two motivic cohomology*, The Grothendieck Festschrift III (P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin, and K. A. Ribet, eds.), Progress in Math., vol. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 35–55.

[Me] A. S. Merkur′ev, *The group $H^1(X, \mathscr{K}_2)$ for projective homogeneous varieties*, Algebra i Analiz **7** (1995), 136–164; English transl. in St Petersburg Math. J. **7** (1996), 421–444.

[MPW] A. S. Merkur′ev, I. A. Panin, and A. R. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties, I*, Preprint, 1995.

[MS] A. S. Merkur′ev and A. A. Suslin, *$\mathscr{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), n$^{\text{o}}$ 5, 1011–1046; English transl. in Math. USSR-Izv. **21** (1983), n$^{\text{o}}$ 2, 307–340.

[MS2] ———, *The norm residue homomorphism of degree three*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), n$^{\text{o}}$ 2, 339–356; English transl. in Math USSR-Izv. **36** (1991), n$^{\text{o}}$ 2, 349–367.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Pa] I. A. Panin, *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties*, K-theory **8** (1994), n° 6, 541–585.

[Pe1] E. Peyre, *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.

[Pe2] ______, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence, 1995, pp. 369–401.

[Pe3] ______, *Corps de fonctions de variétés homogènes et cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896.

[Pe4] ______, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Q] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Higher K-theories (Seattle, 1972) (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 85–147.

[Re] I. Reiner, *Maximal orders*, Academic press, London, 1975.

[Sa1] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Sa2] ______, *Brauer groups of invariant fields, geometrically negligible classes, an equivariant Chow group, and unramified H^3*, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 189–246.

[Se] J.-P. Serre, *Résumé des cours et travaux*, Annuaire du collège de France 1990-91, pp. 111–123.

[Sh] C. C. Sherman, *$\mathcal{K}$-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), n° 10, 999–1027.

[St] R. Steinberg, *On a theorem of Pittie*, Topology **14** (1975), 173–177.

[Tit] J. Tits, *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. reine angew. Math. **247** (1971), 196–220.

1998

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

APPLICATION OF MOTIVIC COMPLEXES TO NEGLIGIBLE CLASSES*

by

Emmanuel Peyre

Abstract. — Lichtenbaum's complex enables one to relate Galois cohomology to $\mathscr{K}$-cohomology groups. In this paper, we consider the first terms of the Hochschild-Serre spectral sequence for the cohomology of these complexes, which was developed by Kahn, in the case of quotients of "big" open sets in cellular varieties. In the particular case of a faithful representation W of a finite group G over an algebraically closed field k, this yields that the group of negligible classes in the cohomology group $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ is canonically isomorphic to the second equivariant Chow group of a point. It also implies that the unramified classes in the cohomology group $H^3(k(W)^G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$ come from the cohomology of G, which had been proved by Saltman when k is the field of complex numbers.

Using the motivic complexes of Voevodsky, we then prove similar results in degrees four and five.

Résumé. — Le complexe de Lichtenbaum fournit un lien entre la cohomologie galoisienne et les groupes de $\mathscr{K}$-cohomologie Dans ce texte nous considérons les premiers termes de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'hypercohomologie de ces complexes, qui a été développée par Bruno Kahn, dans le cas du quotient d'un ouvert d'une variété cellulaire dont le complémentaire est de codimension assez grande. Dans le cas particulier d'une représentation fidèle W d'un groupe G sur un corps algébriquement clos k, cela implique que le groupe des classes négligeables dans le groupe de cohomologie $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est canoniquement isomorphe au second groupe de Chow équivariant du point. Cela implique également que les classes non ramifiées dans le groupe de cohomologie $H^3(k(W)^G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$ proviennent de la cohomologie de G, ce qui avait été démontré par Saltman quand k est le corps des complexes.

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — primary 12G05; secondary 14C25, 19D45, 14E20.

*Algebraic K-theory (Seattle 1998), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, AMS, Providence, 1999, pp. 181–211

Contents

1. Introduction

The unramified cohomology groups were first developed by Colliot-Thélène and Ojanguren as invariants for stable rationality which generalize the unramified Brauer group. It has been used in [**CTO**] and [**Pe1**] to give new examples of unirational varieties which are not stably rational.

Unirational fields of special interest are given by Noether's problem: if G is a finite group and W a faithful representation of G over a field k, then the field of invariant functions $k(W)^G$ does not depend, up to stable equivalence, on W. The problem is to determine for which fields k and groups G the field $k(W)^G$ is stably rational. The first counter-example over $\mathbf{C}$ was constructed by Saltman in [**Sa1**] using the unramified Brauer group. Bogomolov [**Bo**] gave a complete description of the unramified Brauer group of the field $\mathbf{C}(W)^G$ in terms of the cohomology of the group G.

The study of the higher unramified cohomology groups for these fields is made more complicated by the existence of negligible classes in the cohomology of finite groups which vanish when lifted to Galois groups. The first interesting results about the third unramified cohomology group for such fields have been obtained by Saltman in [**Sa2**].

More precisely, he proved that this cohomology group for $k = \mathbf{C}$ is contained in the image of the inflation map

$$H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^3(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

and that, if $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{n}}$ is the kernel of this map and if G is a p-group, then there is a natural isomorphism

$$H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{n}}/H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{p}} + H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{c}} \xrightarrow{\sim} N^3(G)$$

where

$$H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{p}} = \mathrm{Ker}\Big(H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^3(G, \mathbf{C}(W)^*)\Big)$$

which may be computed in terms of the cohomology of G,

$$H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{c}} = \sum_{H\subsetneq G} \mathrm{Cores}_H^G H^3(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{n}},$$

and N^3G is a kind of equivariant Chow group.

The connection between Chow groups of codimension 2 and restriction maps in degree 3 appears also in [**Pe2**], [**Pe3**] and [**Pe4**], where we describe for any generalized flag variety V an exact sequence

$$\begin{aligned} &H^1_{\mathrm{Zar}}(V,\mathscr{K}_2) \xrightarrow{j} (\mathrm{Pic}\, V_{k^s}\otimes k^{s*})^{\mathscr{G}} \\ &\qquad \to \mathrm{Ker}\Big(H^3(\mathscr{G},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0\end{aligned}$$

where k^s is a separable closure of k, $\mathscr{G}=\mathrm{Gal}(k^s/k)$, and $\mathscr{K}_i$ is the sheaf associated to the presheaf of Quillen's K-groups $U\mapsto K_i(U)$. This exact sequence was obtained using the work of Colliot-Thélène and Raskind on the $\mathscr{K}$-cohomology (see [**CTR**]) and a result of Bruno Kahn based on Lichtenbaum's complexes (see [**Li1**], [**Li2**], [**Li3**] and [**Kah1**]). This sequence was also considered by Merkur′ev who proved in [**Me1**] that the map j is injective.

More recently, Kahn gave in [**Kah2**] a direct proof of this exact sequence and a description of the unramified cohomology group of degree three of these twisted generalized flag varieties using the Hochschild-Serre spectral sequence for the hypercohomology of Lichtenbaum's complexes.

One of the purposes of this text is to show that an easy generalization of the results of Kahn enables one to state the results for generalized flag varieties and for finite groups in a uniform way.

In fact we prove that if G is a finite group, W a faithful representation of G over an algebraically closed field k of exponential characteristic p such that the complement of the open set U on which G acts freely in W has a codimension bigger than 4, then there is an exact sequence

$$\begin{aligned} &0\to \mathrm{CH}^2_G(k) \to H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ &\qquad \to H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(U/G,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(W,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))\Big)\end{aligned}$$

where U/G is the quotient of U by G, $\mathrm{CH}^2_G(k)$ is the equivariant Chow group of $\mathrm{Spec}\, k$ and $\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ is the sheaf corresponding to the presheaf

$$V\mapsto H^3_{\text{ét}}(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

The connection with the results of Saltman becomes clear if one takes into account the inclusions

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \subset H^0_{\mathrm{Zar}}(U/G, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \\ \subset H^3(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

The second section of this paper contains a partial description of the $\mathscr{K}$-cohomology groups of big open sets in cellular varieties followed by an easy generalization of the results of Kahn, the third applies the previous computations to the case of finite groups and makes explicit the connection with Saltman's work and the fourth extends the results to higher degrees using the work of Voevodsky.

2. Hochschild-Serre spectral sequence for Lichtenbaum's complex

2.1. Notations. — In the sequel we use the following notations:

Notation 2.1.1. **—** For any field L, let $\overline{L}$ be an algebraic closure of L and L^s be the separable closure of L in $\overline{L}$. For any variety V over L we denote by $L(V)$ the function field of V and for any extension L' of L by $V_{L'}$ the product $V \times_{\operatorname{Spec} L} \operatorname{Spec} L'$. We put $V^s = V_{L^s}$. One denotes by $V^{(i)}$ the set of points of codimension i in V, and, for any $x \in V$, by $\kappa(x)$ its residue field. The Chow groups of cycles of codimension i on V modulo rational equivalence are denoted by $\mathrm{CH}^i(X)$.

If L is a field, let p be the exponential characteristic of L, that is 1 if L is of characteristic 0 and the usual characteristic otherwise. If n is prime to p and V a variety over L, let μ_n be the étale sheaf of n-th roots of unity and for any r and i in $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, let $W_r\Omega^i_{V,\log}$ be the logarithmic part of the corresponding De Rham-Witt sheaf $W_r\Omega^i_V$ (see [**Il**, §I.5.7]). By [**BK**, corollary 2.8], for $V = \operatorname{Spec} L$ one has

$$W_r\Omega^j_{L,\log}(L) \xleftarrow{\sim} K^M_j(L)/p^r K^M_j(L).$$

If $n = n'p^r$ with $(n',p) = 1$, then one puts

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(j) = \mu_n^{\otimes j} \oplus W_r\Omega^j_{V,\log}[-j].$$

One then defines

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j) = \varinjlim_{n} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(j), \quad (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j) = \varinjlim_{(n,p)=1} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(j)$$

and if l is a prime number

$$\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(j) = \varinjlim_r \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z}(j).$$

If F is one of the above complexes of étale sheaves, we put

$$H^i_{\text{ét}}(V,F) = \mathbf{H}^i_{\text{ét}}(V,F)$$

and if L is a field $H^i(L,F) = H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} L, F)$. The Zariski sheaf corresponding to the presheaf $U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U,F)$ is denoted by $\mathscr{H}^i_{\text{ét}}(F)$.

If V is an algebraic variety over L and U a Galois covering of V^s with a finite Galois group G, then there exists a finite Galois extension L' of L and a Galois étale covering U' of $V_{L'}$ with Galois group G such that there exists an isomorphism from U'_s to U over V_s. We shall say that the pair (L', U') represents the étale covering $U \to V^s$. We shall denote by $\operatorname{Gal}(U/V)$ the profinite group

$$\varprojlim_{(L',U')} \operatorname{Gal}(U'/V)$$

where (L', U') is taken over the pairs representing U/V^s and such that U' is Galois over V.

2.2. $\mathscr{K}$-cohomology of big open sets. — The following well known result is a direct consequence of the Brown-Gersten-Quillen spectral sequence.

Proposition 2.2.1. — *If X is a smooth variety over a field k and Y a subvariety of codimension at least c in X then*

$$H^i_{\text{Zar}}(X, \mathscr{K}_j) \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{Zar}}(X - Y, \mathscr{K}_j)$$

if $i \leqslant c - 2$.

Proof. — By Gersten's resolution the groups $H^i_{\text{Zar}}(X, \mathscr{K}_j)$ are isomorphic to the homology groups of the complex

$$\bigoplus_{x \in X^{(i-1)}} K_{j-i+1}\kappa(x) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \bigoplus_{x \in X^{(i)}} K_{j-i}\kappa(x) \xrightarrow{\partial_i} \bigoplus_{x \in X^{(i+1)}} K_{j-i-1}\kappa(x).$$

Since the codimension of Y is at least c, we have for $j \leqslant c - 1$ the equality

$$(X - Y)^{(j)} = X^{(j)}$$

and the residue map ∂_i is the same for X and $X - Y$ if $i \leqslant c - 1$. Therefore the homology groups coincide. □

Let us recall the definition of cellular varieties.

Definition 2.2.1. — A variety X over a field k is called k-cellular if and only if there exists a sequence of closed subsets of X

$$\varnothing = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n = X$$

such that for $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $Z_{i+1} - Z_i$ is isomorphic to an affine space over k.

Corollary 2.2.2. — *If X is a smooth cellular variety over k and Y a subvariety of codimension at least c in X, then, if $i \leqslant c-2$,*

$$H^i_{\mathrm{Zar}}(X - Y, \mathscr{K}_j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^i(X) \otimes K_{j-i}k$$

where $\mathrm{CH}^i(X)$ is a finitely generated free module over $\mathbf{Z}$.

Proof. — By [**Kah3**, lemma 3.3], the group $\mathrm{CH}^*(X)$ is a free $\mathbf{Z}$-module of finite type, Then, using the proof of [**Pe4**, proposition 3.1], we get that the module

$$\bigoplus_{i,j \geqslant 0} H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_{i+j})$$

is a free $\bigoplus_{j \geqslant 0} K_j k$-module with a basis given by any basis of $\bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{CH}^i(X)$ over $\mathbf{Z}$. By the last proposition, if $i \leqslant c-2$, we get

$$H^i_{\mathrm{Zar}}(X - Y, \mathscr{K}_j) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^i(X) \otimes K_{j-i}k. \quad \square$$

2.3. The main result in degree three. — Following the method described by Kahn in [**Kah2**] we shall now use the Hochschild-Serre spectral sequence for Lichtenbaum's complexes to get information about the kernel and cokernel of the map

$$H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

for varieties having an étale covering which is a big open set in a cellular variety.

Theorem 2.3.1. — *Let $U \to V$ be a finite étale Galois covering of smooth geometrically integral varieties over a perfect field k which is of the form*

$$U \to V_{k'} \to V$$

where k' is a finite separable extension of k. Let G be the Galois group of this covering. Assume that there is an embedding of U in a k'-cellular variety X such that

$$\mathrm{codim}_X(X - U) \geqslant 4,$$

and assume moreover that the action of G on U extends to an action of G on X over k. Let $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(U^s/V)$. Then the following assertions hold:

(i) There is an exact sequence

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) &\to H^1_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{K}_2) \to (\mathrm{Pic}\, X \otimes k')^G \\ &\to \mathrm{Ker}\Big(H^3(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k'(X)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \\ &\to H^1(G, \mathrm{Pic}\, X \otimes k'^*) \end{aligned}$$

(ii) There is a canonical morphism η from the group

$$\frac{\mathrm{Ker}\Big(H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X^s, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)))\Big)}{\mathrm{Im}\Big(H^3(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big)}$$

to the group

$$\mathrm{CH}^2(X)^G / \mathrm{CH}^2(V)$$

such that

$$\mathrm{Ker}\,\eta \subset \mathrm{Coker}\Big(\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to H^1(G, \mathrm{Pic}\, X \otimes k'^*)\Big)$$

Remarks 2.3.2. — (i) The group $\mathrm{CH}^2(V)$ may in fact be interpreted as the equivariant Chow group of X. Indeed these two groups coincide when G is finite (see [**EG**, proposition 8]).

(ii) The group $H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(X^s, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))\Big)$ is trivial if X^s is complete (see [**Kah2**, remark, page 397]).

(iii) The assumption that k is perfect is only needed for the p-part of the results.

Before proving this theorem, we give an example.

Example 2.3.1. — Let V be a generalized flag variety, that is a projective variety over k which is homogeneous under the action of a connected linear algebraic group G and such that the stabilizer of a point of $V(k^s)$ is a standard parabolic subgroup of G^s. Then Bruhat's decomposition yields a cellular decomposition of V over any Galois extension k' of k splitting the group G and over which V has a rational point. Moreover it yields a basis of $\mathrm{Pic}\, V^s$ which is globally invariant under the action of the Galois group of k. We get the following exact sequence

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{K}_2) &\to (\mathrm{Pic}\, V^s \otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \\ &\to \mathrm{Ker}\Big(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0 \end{aligned}$$

where $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k^s/k)$. This sequence has been studied with more details in [**Pe4**] where it was obtained using results of Colliot-Thélène and Raskind [**CTR**] and Kahn [**Kah1**].

In section 3 we shall study the applications of theorem 2.3.1 to negligible classes and unramified cohomology. We now turn to its proof.

2.4. Proof of theorem 2.3.1. — The Hochschild-Serre spectral sequence for Lichtenbaum's complexes was described and used by Kahn in [**Kah1**] and [**Kah2**]. We use it in a slightly more general setting.

For any smooth connected variety X over k we consider Lichtenbaum's complex $\Gamma(2) = (\Gamma(2,X)^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ (see [**Li1**], [**Li2**] and [**Li3**]). By [**Kah2**, theorem 1.1] the hypercohomology groups of these complexes are given by

$$\mathbf{H}^i_{\text{ét}}(X,\Gamma(2)) = \begin{cases} 0 & \text{for } i \leqslant 0, \\ K_3(k(X))_{\text{ind}} & \text{if } i = 1, \\ H^0_{\text{Zar}}(X,\mathscr{K}_2) & \text{if } i = 2, \\ H^1_{\text{Zar}}(X,\mathscr{K}_2) & \text{if } i = 3, \\ \operatorname{Coker} \mathrm{cl}^2_X & \text{if } i = 5, \\ H^{i-1}_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \text{if } i \geqslant 6, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

where cl^2_X is the divisible cycle class map

$$\mathrm{CH}^2 X \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

and there is an exact sequence

$$0 \to \mathrm{CH}^2 X \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(X,\Gamma(2)) \to H^0_{\text{Zar}}\Big(X,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to 0.$$

As in [**Mi**, theorem III.2.20] and [**Kah2**] we get a Hochschild-Serre spectral sequence for these hypercohomology groups

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathscr{G},\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U^s,\Gamma(2))) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{\text{ét}}(V,\Gamma(2)).$$

By [**MS2**, §11], the canonical map

$$K_3(k^s)_{\text{ind}} \to K_3(k^s(U))_{\text{ind}}$$

is injective with a uniquely divisible cokernel. And by corollary 2.2.2 we have isomorphisms

$$\begin{aligned} H^0(U^s,\mathscr{K}_2) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^0(X)\otimes K_2k^s \xrightarrow{\sim} K_2k^s, \\ H^1(U^s,\mathscr{K}_2) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X)\otimes k^{s*}. \end{aligned}$$

If n is prime to p there is an exact sequence [**MS1**, theorem 11.5], [**Su2**], [**Le**]

$$0 \to \mu_n^{\otimes 2}(k) \to K_3(k)_{\mathrm{ind}} \xrightarrow{n} K_3(k)_{\mathrm{ind}} \to H^1(k, \mu_n^{\otimes 2}) \\ \to K^2(k) \xrightarrow{n} K^2(k) \to H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to 0.$$

We get that

$$(E_2^{q,1})' \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{G}, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \quad \text{if } q \geqslant 2$$

and

$$(E_2^{q,2})' = 0 \quad \text{if } q \geqslant 1,$$

where the $'$ means that we consider only the prime to p part of the groups. Therefore the spectral sequence yields an exact sequence

$$H^2(\mathcal{G}, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{K}_2)' \to (\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})'^{\mathcal{G}} \to H^3(\mathcal{G}, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \\ \to \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{H}^4_{\text{ét}}(V, \Gamma(2))' \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U^s, \Gamma(2))\Big) \to H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})'.$$

On the other hand, by [**MS2**], the p-part of $K^3(k^s)_{\mathrm{ind}}$ is uniquely divisible and by [**Su2**] and Bloch-Kato's theorem there are exact sequences

$$0 \to K_2(k^s) \xrightarrow{p^r} K_2(k^s) \to W_r\Omega^2_{k^s,\log}(k^s) \to 0.$$

and

$$K_2(k) \xrightarrow{p^r} K_2(k) \to W_r\Omega^2_{k,\log}(k) \to 0$$

This implies that

$$E_2^{q,1} \otimes \mathbf{Z}_{(p)} = 0 \quad \text{if } q \geqslant 1,$$
$$E_2^{q,2} \otimes \mathbf{Z}_{(p)} \xrightarrow{\sim} H^{q+1}(\mathcal{G}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) \quad \text{if } q \geqslant 1.$$

Thus the p-part of the spectral sequence yields a similar exact sequence for the p-parts of the groups. We get an exact sequence

(2.4.2)

$$H^2(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{K}_2) \to (\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \to H^3(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ \to \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{H}^4_{\text{ét}}(V, \Gamma(2)) \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U^s, \Gamma(2))\Big) \to H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*}).$$

Moreover, since k is perfect, by Bloch-Ogus spectral sequence [**BO**] and the corresponding one for $W_r\Omega^j_{X,\log}[-j]$ [**GS**, theorem 1.4] and by the

fact that sheafification commutes with direct limits, we have that the group $H^0_{\mathrm{Zar}}(U^s, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ is isomorphic to $H^0_{\mathrm{Zar}}(X^s, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$. But X^s contains an affine space $\mathbf{A}^N_{k^s}$ and therefore this group is contained in the group $H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathbf{A}^N_{k^s}, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ the prime to p part of which is trivial by homotopy invariance. Therefore we get that there is an exact sequence

$$0 \to \mathrm{CH}^2(X^s) \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U^s, \Gamma(2)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X^s, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))) \to 0. \tag{2.4.3}$$

We also have an exact sequence

$$0 \to \mathrm{CH}^2(V) \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(V, \Gamma(2)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to 0. \tag{2.4.4}$$

We consider the following groups

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{Coker}\Big((\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})^{\mathscr{G}} \to H^3(\mathscr{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big),\\
B &= \mathrm{Ker}\Big(H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X^s, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)))\Big),\\
K &= \mathrm{Ker}(A \to B),\\
C &= \mathrm{Coker}(A \to B),\\
D &= \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)),\\
E &= \mathrm{Coker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)^{\mathscr{G}}),\\
M &= \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^4_{\text{ét}}(V, \Gamma(2)) \to \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U^s, \Gamma(2))).
\end{aligned}$$

Then the sequences (2.4.3) and (2.4.4) and the snake lemma gives an exact sequence

$$0 \to D \to M \to B \to E.$$

But (2.4.2) implies the exactness of the complex

$$0 \to A \to M \to H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*}).$$

Moreover we get a canonical map

$$\psi : D \to H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})$$

and we put $U = \operatorname{Ker}\psi$ and $V = \operatorname{Coker}\psi$. Thus we obtain a commutative diagram with exact lines

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & & & & \\
0 \arrow[dr] & & K \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & & & \\
 & U \arrow[dr] & & A \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[dr] & E & \\
 & & & H^1(\mathcal{G}, \operatorname{Pic}(X^s) \otimes k^{s*}) \arrow[dr] & & C \arrow[u] \arrow[dr] & \\
 & & & & V \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

and a little diagram chase yields an isomorphism from K to U and an injection

$$\operatorname{Ker}(C \to E) \to V.$$

Using the definitions, one gets an exact sequence

$$\begin{aligned}
H^2(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{K}_2) &\to (\operatorname{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \\
&\to \operatorname{Ker}\Big(H^3(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))\Big) \\
&\to \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)^{\mathcal{G}}) \to H^1(\mathcal{G}, \operatorname{Pic}(X^s) \otimes k^{s*})
\end{aligned}$$

and an injection from the homology of the complex

$$\begin{aligned}
H^3(\mathcal{G}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to \operatorname{Ker}\Big(H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X^s, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)))\Big) \\
\to \operatorname{Coker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)^{\mathcal{G}})
\end{aligned}$$

to

$$\operatorname{Coker}\Big(\operatorname{Ker}\big(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)\big) \to H^1(\mathcal{G}, (\operatorname{Pic} X^s \otimes k^s)^*)\Big).$$

But $\mathrm{CH}^2(X^s)$ is a free abelian group, therefore

$$\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(X^s)).$$

A transfer argument implies the inverse inclusion. We also have

$$\mathrm{CH}^2(X^s) = \mathrm{CH}^2(X) \quad \text{and} \quad \mathrm{CH}^2(X^s)^{\mathscr{G}} = \mathrm{CH}^2(X)^G.$$

Similarly $\mathrm{Pic}\, X^s = \mathrm{Pic}\, X$ and therefore

$$(\mathrm{Pic}\, X^s \otimes k^{s*})^{\mathscr{G}} = (\mathrm{Pic}\, X \otimes k')^G$$

and by using the inflation restriction exact sequence and Hilbert's theorem 90

$$H^1(\mathscr{G}, \mathrm{Pic}\, X^s \otimes k^{s*}) \xrightarrow{\sim} H^1(G, \mathrm{Pic}\, X \otimes k'^*).$$

Finally, since k is perfect, the Bloch-Ogus spectral sequence yields an embedding

$$H^0_{\mathrm{Zar}}(V, \mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \subset H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = H^3(k'(X)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)). \quad \square$$

3. Application to the case of finite groups

3.1. Negligible classes. — The notion of negligible classes has been introduced by Serre in his lecture at the Collège de France [**Se**]. We shall use a weaker condition than the one he used.

Definition 3.1.1. **—** Let H be a finite group, M be a H-module and E be a field. Then a class λ in $H^i(H, M)$ is said to be totally E-negligible if and only if for any extension F of E and any morphism

$$\rho : \mathrm{Gal}(F^s/F) \to H$$

the image of λ by ρ^* is trivial in $H^i(F, M)$.

In the following, we restrict ourselves to the case where E is separably closed and $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i)$ for some integer i. The action of G on $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i)$ is in fact trivial, but we keep the twist to get canonical morphisms.

If H is a finite group and W a faithful representation of G over a field E and $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ then for any $g \in G$,

$$(W^n)^g = (W^g)^n,$$

where W^g is the subspace of invariant elements under g, and thus it has a codimension bigger or equal to n. Let U_n be the open set in W^n on which G acts freely. We get that $\mathrm{codim}_{W^n} W^n - U_n \geqslant n$. We recall the definition of equivariant Chow groups (see Edidin and Graham [**EG**, §2.2]).

Definition 3.1.2. — If Y is a smooth geometrically integral variety equipped with a G-action over k then

$$\mathrm{CH}^i_G(Y) = \mathrm{CH}^i((Y \times U_{i+1})/G).$$

We put $\mathrm{CH}^i_G(k) = \mathrm{CH}^i_G(\operatorname{Spec} k)$.

If k is separably closed, there is a natural notion of cycle class map going from $\mathrm{CH}^i_G(k)$ with value in $H^{2i-1}(G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i))$. Its construction is based on the following lemma:

Lemma 3.1.1. — *If k is a separably closed field of exponential characteristic p and n a positive integer with $(n, p) = 1$, then for any $j < i$,*

$$H^j(G, \mu_n^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^j_{\text{ét}}(U_i/G, \mu_n^{\otimes m}).$$

Proof. — By the Bloch-Ogus spectral sequence

$$\bigoplus_{x \in U_i^{(p)}} H^{q-p}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes m-p}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(U_i, \mu_n^{\otimes m})$$

and the similar one for W^i we get that if $j < i$

$$H^j_{\text{ét}}(U_i, \mu_n^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^j_{\text{ét}}(W^i, \mu_n^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^j_{\text{ét}}(k, \mu_n^{\otimes m}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq 0 \\ \mu_n^{\otimes m}(k) & \text{if } j = 0. \end{cases}$$

Using the Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^p(G, H^q_{\text{ét}}(U_i, \mu_n^{\otimes m})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(U_i/G, \mu_n^{\otimes m})$$

we get the isomorphism of the lemma. □

Definition 3.1.3. — Let k be a separably closed field of exponential characteristic p and G be a finite group. For any i in $\mathbf{Z}$ and any j in $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ we put

$$H^j(G, \hat{\mathbf{Z}}'(i)) = \varprojlim_{(n,p)=1} H^j(G, \mu_n^{\otimes i}(k)).$$

If $j > 0$ there is a canonical isomorphism

$$H^j(G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i)) \xrightarrow{\sim} H^{j+1}(G, \hat{\mathbf{Z}}'(i)).$$

The cycle class map

$$\mathrm{cl}_i : \mathrm{CH}^i_G(k) \to H^{2i}(G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i))$$

is defined as the composite map

$$\mathrm{CH}^i_G(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^i(U_{2i+1}/G) \to \varprojlim_{(n,p)=1} \mathrm{CH}^i(U_{2i+1}/G)/n$$

$$\xrightarrow{\mathrm{cl}_i} \varprojlim_{(n,p)=1} H^{2i}_{\text{ét}}(U_{2i+1}/G, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(n,p)=1} H^{2i}(G, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\sim} H^{2i-1}(G, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i)).$$

Remark 3.1.2. — if k is the field of complex numbers $\mathbf{C}$ then, modulo the isomorphism

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1) \\ a & \mapsto & \exp(2i\pi a) \end{array}$$

the cycle class map coincides with the usual one from $\mathrm{CH}^i_G(\mathbf{C})$ to $H^{2i}(G, \mathbf{Z})$, defined using the classifying space (see [**To**]).

Example 3.1.1. — If k is separably closed, we consider the short exact sequence of G-modules

$$0 \to k^* \to k(W^2)^* \to \mathrm{Div}\, W^2 \to 0,$$

we get a long exact sequence

$$0 \to k^* \to k(U_2/G)^* \to \mathrm{Div}(U_2/G) \to H^1(G, k^*) \to H^1(G, k(W^2)^*).$$

But by Hilbert's theorem 90 $H^1(G, k(W^2)^*)$ is trivial and we get an isomorphism

$$\mathrm{cl}_1 : \mathrm{Pic}_G\, k \xrightarrow{\sim} H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)),$$

which extends the cycle class map.

The theorem 2.3.1 has the following corollary.

Corollary 3.1.3. — *If k is an algebraically closed field and G a finite group, then the equivariant Chow group $\mathrm{CH}^2_G(k)$ is canonically isomorphic to the group of totally k-negligible classes in $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$.*

Remarks 3.1.4. — (i) The map

$$\Phi_G : \mathrm{CH}^2_G(k) \to H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

extends the cycle class map cl_2.

(ii) The injectivity of this map follows from [**MS1**, corollary 18.3].

Proof. — First of all, as was pointed out by Serre, the group of totally k-negligible classes in $H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ coincides with the kernel of the map

$$H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

where W is an arbitrary faithful representation of G over k. Indeed one of the inclusion is obvious and if γ belongs to this kernel, if K is an extension of k, and

$$\rho : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to G$$

any map then we may assume, without loss of generality, that ρ is surjective. Let K' correspond to the kernel of ρ. By the no-name lemma $K'(W)^G$ is rational over K. Thus the map

$$H^3(\mathrm{Gal}(K^s/K),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(\mathrm{Gal}(K(W)^s/K'(W)^G),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

is injective and there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & H^3(\mathrm{Gal}(K^s/K),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^3(\mathrm{Gal}(k(W)^s/k(W)^G),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & H^3(\mathrm{Gal}(K(W)^s/K'(W)^G),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)). \end{array}$$

We may apply theorem 2.3.1 to $W' = W^4$ and we get an exact sequence

$$0\to \mathrm{Ker}\Big(H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\to H^3(k(W')^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big)\to CH^2_G(k)_{\mathrm{tors}}\to 0. \quad \square$$

Let us now compare corollary 3.1.3 with the corresponding result of Saltman. We first recall the definition of the groups considered by Saltman.

Definition 3.1.4. — Let l be a prime number, G an l-group, and W a faithful representation of G over $\mathbf{C}$. Then Z_lG is the free $\mathbf{F}_l$-module over the set of irreducible G-invariant subvarieties of codimension 2 in W. For any G-invariant closed irreducible subvariety of codimension 1 in W and any f in $\mathbf{C}(W)$ such that f^n is invariant under G for some $n \geqslant 1$, one defines $\mathrm{Div}(f)$ in $Z_l(G)$ as the class of

$$\sum_Y \nu_Y(f)Y$$

where Y goes over the set defining Z_lG. Let $R_l(G)$ be the subgroup of $Z_l(G)$ generated by these divisors. Then

$$N^3G = Z_lG/R_lG.$$

Let $H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))_{\mathrm{n}}$ denote the set of totally $\mathbf{C}$-negligible classes. It contains two subgroups, namely the group of permutation negligible classes

$$H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))_{\mathrm{p}} = \mathrm{Ker}(H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i)) \to H^3(G,\mathbf{C}(W)^*))$$

and

$$H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))_{\mathrm{c}} = \sum_{H \subsetneq G} \mathrm{Cores}_H^G H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))_{\mathrm{n}}.$$

Then in [**Sa2**, theorem 4.13], Saltman proved that there is a canonical isomorphism

$$H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{n}}/H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{p}} + H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{c}} \xrightarrow{\sim} N^3(G).$$

Proposition 3.1.5. — *If G is an l-group and W a representation of G of the form W'^4 where W' is a faithful representation of G over $\mathbf{C}$, then there is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C}) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_G} & H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ N^3(G) & \xrightarrow{\sim} & H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_n/\Big(H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_p + H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_c\Big). \end{array}$$

In order to prove this proposition, we first need to prove that the canonical morphism Φ_G is compatible with corestriction and cup-product.

Notations 3.1.5. — If H is a subgroup of a finite group G, W a faithful representation of G, and U_i the open set in W^i on which G acts freely, then there is an étale covering

$$U_{i+1}/H \xrightarrow{\pi} U_{i+1}/G.$$

It induces a map

$$\pi_* : \mathrm{CH}^i(U_{i+1}/H) \to \mathrm{CH}^i(U_{i+1}/G)$$

and thus a map

$$\mathrm{CH}^i_H(k) \to \mathrm{CH}^i_G(k)$$

which will be denoted by Cores_H^G.

Lemma 3.1.6. — *If H is a subgroup of a finite group G, then the following diagram commutes:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^2_H(k) \arrow[r, "\Phi_H", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Cores}^G_H"'] & H^3(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_n \arrow[d, "\mathrm{Cores}^G_H"'] \\ \mathrm{CH}^2_G(k) \arrow[r, "\Phi_G", "\sim"'] & H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_n. \end{tikzcd}$$

Proof. — The Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^p(G, \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U_4, F)) \Rightarrow \mathbf{H}^p_{\text{ét}}(U_4/G, F)$$

where F is a complex of étale sheaves on U_4/G is compatible with restriction and morphisms of complexes.

If F is an étale sheaf on U_4/H, then we define $\mathrm{Ind}^G_H F$ as the direct image of F by the canonical projection

$$\pi : U_4/H \to U_4/G.$$

But for any étale map $U \to U_4/H$ there is a canonical map

$$U \to U \times_{U_4/G} U_4/H$$

which induces a map $\pi^*\pi_* F \to F$ and therefore maps

$$H^q_{\text{ét}}(U_4/G, \mathrm{Ind}^G_H F) \to H^q_{\text{ét}}(U_4/H, \pi^* \mathrm{Ind}^G_H F) \to H^q_{\text{ét}}(U_4/H, F).$$

Since π_* is exact in this case, the composite maps are isomorphisms, which is analoguous to Shapiro's lemma. The corresponding isomorphisms for hypercohomology

$$\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U_4/G, \mathrm{Ind}^G_H F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U_4/H, F)$$

are compatible with the Hochschild-Serre spectral sequence. If F is defined over U_4/G, then by [**SGA4**, exposé XVIII, théorème 2.9] there is a transfer map

$$\mathrm{Tr} : \pi_*\pi^* F \to F.$$

The corestriction may be defined as the composite of the map induced by Tr and the inverse of the Shapiro isomorphism. Thus the Hochschild-Serre spectral sequence is compatible with the corestriction. Therefore we get a commutative

diagram for the prime to p part

$$\tag{3.1.1}\begin{array}{ccc}
H^3(H,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & H^3(G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^3\Big(H,\mathbf{H}^1_{\text{ét}}(U_4,\Gamma(2))\Big)' & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & H^3\Big(G,\mathbf{H}^1_{\text{ét}}(U_4,\Gamma(2))\Big)' \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U_4,\Gamma(2))' & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U_4,\Gamma(2))'
\end{array}$$

as well as a similar one for the p-part.

The long exact sequence of hypercohomology with support is also compatible with morphisms of complexes and contravariant for étale coverings. Thus they are compatible with corestrictions. Using [**CTHK**, §I.1], we get that the coniveau spectral sequence

$$E_1^{p,q} = \coprod_{x\in X^{(p)}} \mathbf{H}_x^{p+q}(U_4/G,\Gamma(2)) \Rightarrow \mathbf{H}_{\text{ét}}^{p+q}(U_4/G,\Gamma(2))$$

and the similar one for U_4/H are compatible with corestrictions. A similar statement holds for the isomorphisms (see [**Kah2**, theorem 6.1])

$$H^p(U_4/G,\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\Gamma(2))) \xrightarrow{\sim} E_2^{p,q}.$$

Therefore we get a commutative diagram

$$\tag{3.1.2}\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathrm{CH}^2(U_4/H) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & \mathrm{CH}^2(U_4/G) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U_4/H,\Gamma(2)) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U_4/G,\Gamma(2)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(U_4/H,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) & \xrightarrow{\mathrm{Cores}_H^G} & H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(U_4/G,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

where the vertical lines are exact by [**Kah2**, theorem 1.1].

The lemma follows from the commutativity of the diagrams (3.1.1) et (3.1.2). □

Notations 3.1.6. — The complexes

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Q} \to 0$$

are both quasi-isomorphic to $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}[-1]$. Therefore in the category of bounded complexes of étale sheaves there is a canonical morphism

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}[-1] \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}[-1] \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}[-1].$$

Similarly one may define canonical products

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i)[-1] \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)[-1] \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i+j)[-1].$$

Let $\Gamma(1)$ be the complex $\mathbf{G}_m[-1]$. There is also a product

$$\Gamma(1) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \Gamma(1) \to \Gamma(2)$$

and the natural morphisms

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)[-1] \to \Gamma(1) \quad \text{and} \quad \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)[-1] \to \Gamma(2)$$

may be fitted into a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)[-1] \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)[-1] \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \Gamma(1) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \Gamma(1) & \longrightarrow & \Gamma(2). \end{array}$$

The top horizontal line corresponds to a cup-product

$$\cup : H^p_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \otimes H^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \to H^{p+q+1}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Remark 3.1.7. — The product above may also be described as the composite map

$$\begin{aligned} H^p_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \otimes H^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) &\to H^{p+1}_{\text{ét}}(X, \widehat{\mathbf{Z}}(1)) \otimes H^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \\ &\to H^{p+q+1}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \end{aligned}$$

where

$$H^p_{\text{ét}}(X, \widehat{\mathbf{Z}}(j)) = \varprojlim_n H^p_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(j)).$$

Lemma 3.1.8. — *If G is a finite group and k a separably closed field, one has a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pic}_G k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Pic}_G k & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2_G k \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \otimes H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) & \xrightarrow{\cup} & H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))
\end{array}$$

where the top map is given by the intersection product.

Proof. — Thanks to the compatibility of the coniveau spectral sequence with cup-products one gets for any a in $\mathrm{Pic}_G k$ a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pic}_G k & \xrightarrow{.a} & \mathrm{CH}^2_G k \\
\| & & \| \\
\mathrm{Pic}\, U_4/G & \xrightarrow{.a} & \mathrm{CH}^2\, U_4/G \\
\downarrow \wr & & \downarrow \\
\mathbf{H}^2_{\text{ét}}(U_4/G, \Gamma(1)) & \xrightarrow{\cup a} & \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(U_4/G, \Gamma(2)) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)[-1]) & \xrightarrow{\cup a} & H^4(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)[-1])
\end{array}$$

where a is successively seen as an element of

$$\mathrm{Pic}_G k, \quad \mathrm{Pic}\, U_4/G, \quad \mathbf{H}^2_{\text{ét}}(U_4/G, \Gamma(1)) \quad \text{and} \quad H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)[-1]). \qquad \square$$

Proof of proposition 3.1.5. — The group $\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})$ may be described as a quotient Z/R where Z is the free $\mathbf{Z}$-module over the set of G-orbits in $W^{(2)}$ and R is the subgroup generated by the divisors of functions f in $\mathbf{C}(Y)^{*\mathrm{Stab}_G Y}$ where Y goes over $W^{(1)}$. Then the obvious surjective map

$$Z \to Z_l G$$

sends R into $R_l G$. Indeed, if $Y \in W^{(1)}$ is not G-invariant and $f \in \mathbf{C}(Y)^{*\mathrm{Stab}_G Y}$, then for any C in $W^{(2)}$ invariant under G, $v_C(f)$ belongs to $l\mathbf{Z}$. Thus we get a surjective morphism

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C}) \to N^3 G.$$

We put

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{c}} = \sum_{H \subsetneq G} \mathrm{Cores}^G_H \mathrm{CH}^2_H(\mathbf{C}).$$

By lemma 3.1.6 we have an isomorphism

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{c}} \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{c}}.$$

By [**Sa2**, poposition 4.7], the permutation negligible classes may be described as

$$\mathrm{Ker}\Big(H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(G, Q^*))\Big)$$

where Q^* is a G-module such that

$$\forall H \subset G, \quad H^1(H, Q^*) = 0$$

and there is an exact sequence

$$0 \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \to Q^* \to Q \to 0$$

where Q is a permutation module. It may be constructed as follows: let

$$Q = \bigoplus_{H \subset G} (\mathbf{Z}[G/H])^{H^1(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))}.$$

If H is a subgroup of G, any α in $H^1(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ defines canonically an element

$$\tilde{\alpha} \in \mathrm{Ext}^1_H(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{Z}[G/H], \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

where the isomorphism is given by Shapiro's lemma. We consider

$$\eta = \sum_{H \subset G} \sum_{\alpha \in H^1(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))} \tilde{\alpha} \in \mathrm{Ext}^1_G(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

the class η defines an extension

$$0 \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \to Q^* \to Q \to 0$$

unique up to isomorphism. But this yields

$$\begin{aligned} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{c}} &= \mathrm{Im}(H^2(G, Q) \xrightarrow{\partial} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \\ &= \sum_{\substack{H \subset G \\ \alpha \in H^1(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))}} \mathrm{Im}\Big(H^2(G, \mathbf{Z}[G/H]) \xrightarrow{\partial_\alpha} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \end{aligned}$$

where ∂_α is the map defined by the short exact sequence

$$0 \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \to E_\alpha \to \mathbf{Z}[G/H] \to 0$$

associated to $\tilde{\alpha}$. On the other hand, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^2(G,\mathbf{Z}[G/H]) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \mathrm{Cores}_H^G \\ H^2(H,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial_\alpha} & H^3(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \end{array}$$

which follows from the commutative diagram of G-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)[G/H] & \longrightarrow & E'_\alpha[G/H] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[G/H] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{Tr} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) & \longrightarrow & E_\alpha & \longrightarrow & \mathbf{Z}[G/H] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

where E'_α is the extension of H-modules defined by $\tilde{\alpha}$ and the fact that the corestriction is induced by the trace and the inverse of Shapiro's isomorphism. But for $G = H$ the map ∂_α is compatible with cup-products and therefore coincides with the cup-product by the class of α itself which is the image of 1 by the the map

$$H^0(H,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\partial_\alpha} H^1(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Therefore $H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{p}}$ is given as

$$\sum_{H\subset G} \mathrm{Cores}_H^G \mathrm{Im}\Big(H^1(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \otimes H^2(H,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup} H^3(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big)$$

which is the same as

$$\sum_{H\subset G} \mathrm{Cores}_H^G \mathrm{Im}\Big(H^1(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \otimes H^1(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \xrightarrow{\cup} H^3(H,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big).$$

We put

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{p}} = \sum_{H\subset G} \mathrm{Cores}_H^G \mathrm{Im}(\mathrm{Pic}_H \mathbf{C} \otimes \mathrm{Pic}_H \mathbf{C} \to \mathrm{CH}^2_H \mathbf{C}).$$

By lemma 3.1.8 we get an isomorphism

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{p}} \xrightarrow{\sim} H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{p}}.$$

It remains to prove that

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C}) \to N^3(G)) = \mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{c}} + \mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{p}}. \tag{3.1.3}$$

Since G is a l-group, it has a subgroup of index l and since the composite map

$$\mathrm{Cores}_H^G \circ \mathrm{Res}_H^G$$

coincides with the multiplication by $[G:H]$, we get that $l\,\mathrm{CH}^2_G\,\mathbf{C}$ is contained in both sides of (3.1.3). Also if Y in $W^{(2)}$ is not G-invariant then the class of its orbit is the image of the class of Y in $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{Stab}_G Y}\,\mathbf{C}$ by the corestriction. Therefore the group $\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{c}}$ is generated by $l\,\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})$ and the G-orbits in $W^{(2)}$ which are not reduced to one element. Thus the quotient

$$\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})/\,\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{c}}$$

may be described as the quotient of the $\mathbf{F}_l$-vector space $\tilde{F}_l$ with basis the elements of ${W^{(2)}}^G$ by the subspace $\tilde{R}_l$ generated by divisors of functions in $\mathbf{C}(Y)^G$ where Y goes over ${W^{(1)}}^G$.

The image of $\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{p}}$ in this group coincides with the image of

$$\mathrm{Pic}_G\,\mathbf{C} \otimes \mathrm{Pic}_G\,\mathbf{C}$$

which is generated by the images of products $[y][z]$ with y and z in ${W^{(1)}}^G$. Moreover one has that

$$\mathrm{Pic}_G\,\mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,U_2/G.$$

Therefore one may assume that y is the inverse image of an element y' in ${W'^2}^{(1)}$ by the first projection $W \to W'^2$ whereas z comes from an element z' by the second one. Since the map

$$\mathbf{C}(W'^2)^* \to \mathrm{Div}(W'^2)$$

is surjective, z' is defined by a function f on W'^2 and $y.z$ is given as the divisor of the function $f \circ \mathrm{pr}_2$ restricted to y. Since z is G-invariant, one has

$$\forall g \in G, \quad {}^g f/f \in \mathbf{C}^*$$

and the map

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbf{C}^* \\ g & \mapsto & {}^g f/f \end{array}$$

is a morphism. Therefore $(f \circ \mathrm{pr}_2)^{|G|} \in \mathbf{C}(Y)^G$. We get that the image of the group $\mathrm{CH}^2_G(\mathrm{Spec}\,\mathbf{C})_{\mathrm{p}}$ in $\tilde{F}_l/\tilde{R}_l$ is contained in

$$\mathrm{Ker}(\tilde{F}_l/\tilde{R}_l \to N^3(G)).$$

Conversely, let Y belong to $(W^{(1)})^G$ and f be a function on Y such that

$$\exists n \in \mathbf{Z}_{>0}, \quad f^n \in \mathbf{C}(Y)^G$$

then

$$\forall g \in G, \quad {}^g f/f \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)$$

and it defines an element of $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$. Let Z' in $\mathrm{Div}(W'^2)$ represent the corresponding element of the group $\mathrm{Pic}_G \mathbf{C}$ and h' in $\mathbf{C}(W'^2)^*$ be such that

$$\mathrm{Div}\, h' = Z'.$$

We may choose λ and μ in $\mathbf{C}$ so that the divisor of

$$h = \lambda h' \circ \mathrm{pr}_1 + \mu h' \circ \mathrm{pr}_2$$

intersects properly with Y. By construction we have that

$$\forall g \in G, \quad ({}^g h/h)_{|Y} = {}^g f/f$$

and therefore

$$h_{|Y}/f \in \mathbf{C}(Y)^G.$$

Then the image of $\mathrm{Div} f$ in $\tilde{F}_l/\tilde{R}_l$ coincides with the one of $h_{|Y}$ which is the image of the product $\mathrm{Div}\, h.y$ and we get that

$$\mathrm{Ker}(\tilde{F}_l/\tilde{R}_l \to N^3(G)) = \mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2_G(\mathbf{C})_{\mathrm{p}} \to \tilde{F}_l/\tilde{R}_l)$$

as wanted. □

Example 3.1.2. — If G is an $\mathbf{F}_l$-vector space with $l \neq 2$ by [**Bro**, page 60], one has an isomorphism

$$H^n(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_n(G, \mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

By [**Car**, théorème 1], we get that

$$S^2 G^\vee \oplus \Lambda^3 G^\vee \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

where the isomorphism is given by the map

$$\Lambda^3 G^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^3 H^1(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

and the map

$$S^2 G^\vee \xrightarrow{\sim} S^2 H^2(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup} H^4(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

By [**Pe1**, lemma 7], the map

$$\Lambda^3 G^\vee \to H^3(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is injective. But by lemma 3.1.8, the elements in the image of $S^2G^\vee$ are permutation negligible and we get that

$$S^2G^\vee \xrightarrow{\sim} S^2\operatorname{Pic}_G k \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^2_G k.$$

More generally, Totaro has given a description of the map

$$\mathrm{cl}_i : \mathrm{CH}^i_G(\mathbf{C}) \to H^{2i-1}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))$$

in this case.

Example 3.1.3. — If G has a 2-dimensional representation P then we may assume that there is a surjective map $W \to P$. Its kernel defines an element of $\mathrm{CH}^2_G(k)$. If G is a 2-group having a cyclic subgroup of index 2 this is the example of Saltman [**Sa2**, theorem 4.14] who proved that the element obtained in N^3G is non-trivial.

Finally we want to give another description of the negligible classes when k is algebraically closed of characteristic 0.

Notation 3.1.7. — Let $\mathscr{R}(G)$ be the ring of representations of G over $\mathbf{C}$. The ring $\mathscr{R}(G)$ has a canonical structure of augmented λ-ring (see [**At**, §12]). The first steps of the filtration are obtained as follows:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(G)^0 &= \mathscr{R}(G),\\ \mathscr{R}(G)^1 &= \mathrm{Ker}(\dim),\\ \mathscr{R}(G)^2 &= \mathrm{Ker}(\det).\end{aligned}$$

where $\dim : \mathscr{R}(G) \to \mathbf{Z}$ is the dimension homorphism and

$$\det : \mathscr{R}(G) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$$

is defined by

$$\det R = \Lambda^{\dim R} R$$

for any representation R of G.

Corollary 3.1.9. — *If k is an algebraically closed field of characteristic* 0*, then there is a canonical surjective map*

$$\mathscr{R}(G)^2 \twoheadrightarrow H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_n.$$

Remark 3.1.10. — In fact this map is induced by the second Chern class c_2.

Proof. — By corollary 3.1.3, one has

$$\mathrm{CH}^2_G(k) \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{n}}$$

and, for $i \leqslant 2$, we have

$$\mathrm{CH}^i_G(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^i(U_3/G).$$

For any smooth variety X over a field, let $K_0(X)^i$ be the i-th filtration group for the filtration by codimension of support and denote by $K_0(X)^{(i/i+1)}$ the quotient group $K_0(X)^i/K_0(X)^{i+1}$. Then by [**Su1**, proposition 9.3], the composite map

$$\mathrm{CH}^i(U_3/G) \twoheadrightarrow K_0(U_3/G)^{(i/i+1)} \xrightarrow{c_i} \mathrm{CH}^i(U_3/G)$$

is the multiplication by $(-1)^i(i-1)!$. Therefore the group $K_0(U_3/G)^{(i/i+1)}$ is isomorphic to $\mathrm{CH}^i_G(k)$ if $i \leqslant 2$.

if $\mathscr{X}$ is a scheme equipped with an action of a group scheme $\mathscr{G}$, then Thomason has developed in [**Th**] equivariant K-theory groups $K_i(\mathscr{G}, \mathscr{X})$ and $K'_i(\mathscr{G}, \mathscr{X})$ (see also [**Me2**, §2]). By [**Me2**, corollary 2.12], there is a canonical isomorphism

$$\mathscr{R}(G) \xrightarrow{\sim} K'_O(G, \operatorname{Spec} k),$$

where we identify $\mathscr{R}(G)$ with the ring of G-representations over k. By [**Me2**, corollary 2.8] one has an isomorphism

$$K'_0(G, \operatorname{Spec} k) \xrightarrow{\sim} K'_0(G, W^3),$$

by [**Th**, theorem 2.7] there is a surjection

$$K'_0(G, W^3) \twoheadrightarrow K'_0(G, U^3),$$

and, by [**Me2**, proposition 2.4], isomorphisms

$$K'_0(G, U_3) \xleftarrow{\sim} K'_0(U_3/G) \xleftarrow{\sim} K_0(U_3/G).$$

Therefore we get a surjective map

$$\mathscr{R}(G) \twoheadrightarrow K_0(U_3/G)$$

which sends a G-representation R on the vector bundle

$$(R \times U_3)/G \to U_3/G.$$

But we have

$$\mathscr{R}(G)^{(i/i+1)} \xrightarrow{\sim} K_0(U_3/G)^{(i/i+1)}$$

if $i \leqslant 1$. Indeed this follows from the commutativity of the diagrams

$$\begin{tikzcd} K_0(U_3/G)^{(0/1)} \arrow[r, "\deg", "\sim"'] & \mathbf{Z} \\ \mathscr{R}(G)^{(0/1)} \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\dim", "\sim"'] & \mathbf{Z} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

and

$$\begin{tikzcd} K_0(U_3/G)^{(1/2)} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Pic}_G\, k \\ \mathscr{R}(G)^{(1/2)} \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\det", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Therefore we have a surjective map

$$\mathscr{R}(G)^2 \twoheadrightarrow K_0(U_3/G)^2. \quad \square$$

Example 3.1.4. — By [**At**, page 23 and Appendix], if $H^q(G, \mathbf{Z}) = 0$ for all odd q, the chern map

$$c_2 : \mathscr{R}(G)^2 \to H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is surjective. In this case, one gets

$$H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\mathrm{n}} = H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

This applies in particular to the groups with periodic cohomology, in which case this equality may also be deduced from [**Sa2**, theorem 4.14].

3.2. Unramified cohomology groups. — Let us first recall the definition of higher unramified cohomology groups (see [**CTO**]).

Definition 3.2.1. — If K is a function field over k, that is generated by a finite number of elements as a field over k then one considers the set $\mathscr{P}(K/k)$ of discrete valuation rings A of rank one such that

$$k \subset A \subset K \quad \text{and} \quad \mathrm{Fr}(A) = K.$$

For any A in $\mathscr{P}(K/k)$ and any n prime to the exponential characteristic p of k, one considers the residue map

$$\partial_A : H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

where κ_A denotes the residue field of A. The unramified cohomology groups of K over k are defined as

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K,\mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A\in\mathscr{P}(K/k)} \operatorname{Ker}\partial_A.$$

We shall also consider

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{(n,p)=1} H^i_{\mathrm{nr}/k}(K,\mu_n^{\otimes j}).$$

Remarks 3.2.1. — By [**CTO**], the unramified cohomology groups are invariant for stable rationality. In particular, it follows from the no-name lemma that, for any finite group G the unramified cohomology group

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j))$$

where W is a faithful representation of G over k depends only on k and G.

If $i=2$, Bogomolov [**Bo**, theorem 3.1] proved that

$$H^2_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(\mathbf{C}(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = \operatorname{Ker}\Big(H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \to \prod_{B\in\mathscr{B}} H^2(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\Big)$$

where $\mathscr{B}$ denotes the set of bicyclic groups in G, that is abelian subgroups generated by two elements.

Theorem 2.3.1 implies the following generalization of a result of Saltman:

Corollary 3.2.2. — *(See Saltman* [**Sa2**, theorem 5.3]*) If G a finite group and W a faithful representation of G over a separably closed field k, then*

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \subset \operatorname{Im}(H^3(G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^3(k(W)^G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)).$$

Proof. — Let U be the open set in W on which G acts freely. We may assume that $\operatorname{codim}_W(W-U)\geqslant 4$ and we may apply theorem 2.3.1 to U and get that

$$H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(U/G,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}((\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))\Big)$$

is contained in

$$\operatorname{Im}\Big(H^3(G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^3(k(W)^G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))\Big).$$

But it follows from Bloch-Ogus spectral sequence that

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \subset H^0_{\mathrm{Zar}}\Big(U/G,\mathscr{H}^3_{\text{ét}}((\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))\Big)$$

and this implies the corollary. $\square$

4. Application of Voevodsky's motivic complexes

In this section, we want to generalize the results of the previous sections to the fourth and fifth cohomology groups using the Hochschild-Serre and coniveau spectral sequences for Voevodky's étale complexes $\mathbf{Z}(3)$ and $\mathbf{Z}(4)$ [**Vo3**, §2.1].

Let us first recall a few facts about the coniveau spectral sequence.

4.1. Reminder on the coniveau spectral sequence. —

Notations 4.1.1. — From now on, we assume that the characteristic of k is 0. Let $\mathbf{Z}(n)_{\text{ét}}$ be Voevodsky's étale motivic complex of weight n [**Vo3**, §2.1]. Then for any smooth variety X, one puts

$$\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)) = \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)_{\text{ét}}).$$

Let α be the canonical morphism from the big étale site to the big Zariski one. Then there is a Leray spectral sequence (see [**Mi**, theorem III.1.18])

$$E_2^{p,q}(n) = H^p_{\text{Zar}}(X, \mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n))$$

where $\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))$ is the Zariski sheaf corresponding to the presheaf $\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))$ given by

$$U \mapsto \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n)).$$

Indeed, by [**Mi**, proposition III.1.13], this sheaf coincides with $\mathbf{R}^q\alpha_*\mathbf{Z}(n)_{\text{ét}}$. Using [**Vo2**, §3.3] and the proof of [**Vo1**, theorem 5.3], we get that $\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))$ has a canonical structure of homotopy invariant pretheory and by [**Vo1**, proposition 4.26] this is also the case of $\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))$ (see also [**Vo3**, page 10]). By [**Vo1**, theorem 4.37], there is a Gersten resolution of $\mathscr{H}^p_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))$ and we get a coniveau spectral sequence

$$E_1^{p,q}(n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} (i_x)_*(\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))_{-p}) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n))$$

where for any pretheory F, the pretheory F_{-1} is given by

$$F_{-1}(U) = \operatorname{Coker}\Big(F(U \times \mathbf{A}^1) \xrightarrow{\text{Res}} F(U \times (\mathbf{A}^1 - \{0\}))\Big).$$

Theorem 4.1.1. — *(See Kahn* [**Kah3**]*) With notations as above, if* $n \geqslant 1$*, one has*

(i) the group $E_1^{p,q}(n)$ *is uniquely divisible if* $p > q$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-2$*,*

(ii) the group $E_1^{p,q}(n)$ *is uniquely* 2*-divisible if* $p = q$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-2$*,*

(iii) one has

$$E_1^{p,q}(n) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K^M_{n-p}(\kappa(x)) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

if $q = n$ and $0 \leqslant p \leqslant n-3$,

(iv) there are canonical isomorphisms

$$E_1^{p,q}(n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K^M_{n-p}(\kappa(x))$$

if $q = n$ and $n-2 \leqslant p \leqslant n$,

(v) the group $E_1^{p,q}(n) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ is trivial if $q = n+1$ and $0 \leqslant p \leqslant n-3$,

(vi) one has

$$E_1^{p,q}(n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-1}(\kappa(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))$$

if $0 \leqslant p \leqslant q-1$ and $q > n+1$,

(vii) all other $E_1^{p,q}(n)$ with $q = n+1$ or $p \geqslant q$ are trivial.

Remark 4.1.2. — The Milnor-Bloch-Kato conjecture is used in all the assertions where the prime 2 plays a special rôle. If we assumed that this conjecture held for any prime, we would be able to simplify the assertions accordingly.

Proof. — By [**Vo3**, lemma 2.9] and comparison theorems between Nisnevich and Zariski topology [**Vo1**, theorem 5.7], one has that if $i \leqslant n$,

$$\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n))_{-i} = \mathscr{H}^{q-i}_{\text{ét}}(\mathbf{Z}(n-i)).$$

Therefore, if $p \leqslant n$, one has

$$E_1^{p,q}(n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathbf{H}^{q-p}_{\text{ét}}(\kappa(x), \mathbf{Z}(n-p)).$$

But for any positive m there is a distinguished triangle

$$\mathbf{Z}(n) \xrightarrow{\times m} \mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}(n)[1]$$

yielding for any field K a long exact sequence

$$(4.1.1)\quad \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\times m} \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n)) \to \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(n)) \to \mathbf{H}^{q+1}_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n))$$

and by [**Vo3**, theorem 2.6],

$$(4.1.2)\qquad \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H^q(K, \mu_m^{\otimes n})$$

which is trivial if $q < 0$. This implies assertion (i).

Assertion (ii) is proved in [**Kah4**, theorem 3.1 (a)].

By Beilinson-Lichtenbaum conjecture [**Vo3**, theorem 2.11], if $0 \leqslant q \leqslant n$,

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{Nis}}(K, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

and by [**SV**, proposition 3.2] one has

$$K^M_n(K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^n_{\mathrm{Nis}}(K, \mathbf{Z}(n))$$

this implies (iii). The same argument implies the case $p = n-2$ of (iv).

Assertions (iv) and (vii) for $p = n$ or $n-1$ follow from the isomorphisms

$$\mathbf{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m[-1] \quad \text{and} \quad \mathbf{Z}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}.$$

Assertion (v) follows from Hilbert's theorem 90 [**Vo3**, theorem 4.1] which also implies (vii) for $p \geqslant n-2$ and $q = n+1$.

From the distinguished triangle

$$\mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Q}(n) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}(n)[1]$$

and the comparison theorem for $\mathbf{Q}(n)$ [**Vo3**, theorem 2.5], one gets that the motivic cohomology group $\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n))$ is torsion for $q > n+1$. Then (4.1.1) and (4.1.2) gives an isomorphism

$$\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H^{q-1}_{\text{ét}}(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))$$

if $q \leqslant n$. This yields (vi) for $p \leqslant n$.

The exact sequence

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

implies that

$$\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathscr{H}^{q-1}_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \text{if } q \geqslant 2, \\ \mathbf{Z} & \text{if } q = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

But by [**Vo1**, §3.4], one has

$$\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i))_{-j} = \mathscr{H}^{q-j}_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(i-j))$$

and we get the assertions (vi) and (vii) for $p > n$. $\square$

Notation 4.1.2. — We define $H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}^M_q)$ as the i-th homology group of the complex (see [**Ka**, page 242])

$$0 \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K^M_q \kappa(x) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K^M_{q-1} \kappa(x) \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^{(q)}} \mathbf{Z} \to 0.$$

Corollary 4.1.3. — *One has that*

(i) $E_2^{p,q}(n)$ *is uniquely divisible if* $p > q+1$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-2$.
(ii) $E_2^{p,q}$ *is* 2*-divisible if* $q \leqslant p \leqslant q+1$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-2$.
(iii) $E_2^{p,q}(n) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} = H^p_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_q^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ *if* $q = n$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-2$,
(iv) $E_2^{p,q}(n) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_q)$ *if* $q = n$ *and* $n-1 \leqslant p \leqslant n$,
(v) $E_2^{p,q}(n) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ *is trivial if* $q = n+1$ *and* $0 \leqslant p \leqslant n-3$,
(vi) $E_2^{p,q}(n) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)))$ *if* $0 \leqslant p \leqslant q-1$ *and* $q > n+1$.
(vii) *all other* $E_2^{p,q}(n)$ *with* $q = n+1$ *or* $p \geqslant q$ *are trivial.*

Corollary 4.1.4. — *If X is a smooth variety over a field k of characteristic* 0 *and Y a subvariety of codimension at least c in X, then for any positive integers n and q such that* $c > \sup(n, q)$ *the natural restriction map*

$$\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(X - Y, \mathbf{Z}(n))$$

is an isomorphism.

Proof. — This follows from assertion (vii) of theorem 4.1.1 as in proposition 2.2.1. □

Corollary 4.1.5 **(Kahn,** [**Kah3**, §5, $n=3$]**).** — *With notations as above, there is an exact sequence*

$$\begin{aligned}0 &\to H^2_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_3) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \to \mathbf{H}^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(3)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^4_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)))\\ &\to \mathrm{CH}^3(X) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \to \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{H}^6_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(3)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^5_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)))\Big)\\ &\to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^4_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))) \to 0.\end{aligned}$$

Corollary 4.1.6. — *With notations as above, there is a canonical isomorphism*

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_3^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(3)).$$

Corollary 4.1.7. — *(See Kahn,* [**Kah3**, §5, $n=4$]*) With notation as above, there is a canonical exact sequence*

$$\begin{aligned}0 &\to H^2_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_4^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \to \mathbf{H}^6_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(4)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^5_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4)))\\ &\to H^3_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_4) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \to \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{H}^7_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(4)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^6_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))\Big)\\ &\to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{H}^5_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))) \to \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{CH}^4(X) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \to \mathbf{H}^8_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}(4))\Big).\end{aligned}$$

Remark 4.1.8. — The maps $\mathrm{CH}^i(X) \to \mathbf{H}^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(i))$ which appear in these corollaries may be interpreted as cycle class maps.

4.2. Finite groups and motivic cohomology. — We now want to relate the cohomology of finite groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)$ to integral motivic cohomology.

Proposition 4.2.1. — *If W is a faithful representation of a finite group G over an algebraically closed field k of characteristic* 0*, such that the open set U on which G acts freely verifies* $\operatorname{codim}_W W - U > i$ *and $i > n$ then*

$$H^{i-1}(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i_{\text{ét}}(U/G, \mathbf{Z}_{(2)}(n))$$

Proof. — We consider the Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^p(G, \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n))) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{\text{ét}}(U/G, \mathbf{Z}(n)).$$

By corollary 4.1.4, we have that if $j \leqslant i$

$$\mathbf{H}^j_{\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^j_{\text{ét}}(W, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^j_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}(n))$$

where the second isomorphism is given by homotopy invariance. Using the distinguished triangle

$$\mathbf{Z}(n) \xrightarrow{\times m} \mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}(n)[1]$$

and the isomorphisms

$$H^j_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^j_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(n))$$

we get that the groups $\mathbf{H}^j_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}(n))$ are uniquely divisible for $j \neq 0$ and $j \neq 1$. By [**Kah4**, theorem 3.1 (a)] the group $\mathbf{H}^0_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n))$ is also uniquely divisible. We obtain a short exact sequence

$$0 \to \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)(k) \to \mathbf{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n)) \to \mathbf{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathbf{Q}(n)) \to 0.$$

By [**Vo3**, theorem 2.5], we have

$$\mathbf{H}^i_{\text{Zar}}(k, \mathbf{Q}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i_{\text{ét}}(k, \mathbf{Q}(n))$$

which, by construction, is 0 if $i \geqslant n+1$. Therefore we get that

- $H^p(G, \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n)))$ is uniquely divisible if $p = 0$, $q \leqslant n$, $q \neq 1$,
- $\mathbf{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n))$ is divisible,
- $H^p(G, \mathbf{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n))) = H^p(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n))$ if $p > 0$,
- $H^p(G, \mathbf{H}^q_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n))) = 0$ otherwise.

The spectral sequence yields for $i > n+1$ isomorphisms

$$H^{i-1}(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i_{\text{ét}}(U/G, \mathbf{Z}_{(2)}(n))$$

and an exact sequence

$$\mathbf{H}^n_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(2)}(n)) \xrightarrow{\psi} H^n(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \to \mathbf{H}^{n+1}_{\text{ét}}(U/G, \mathbf{Z}_{(2)}(n)) \to 0.$$

But the first group is divisible and the second killed by $\#G$, therefore ψ is trivial. □

4.3. Equivariant $\mathscr{K}$-cohomology. — The following proposition is classical (see [**To**, §1]).

Proposition 4.3.1. — *Let W and W' be two faithful representations of a finite group G over a field k such that there are open sets U and U' on which G acts freely with*

$$\operatorname{codim}_W W - U \geqslant q+2 \quad \textit{and} \quad \operatorname{codim}_{W'} W' - U' \geqslant q+2,$$

then for any smooth G-variety there is a canonical isomorphism

$$H^q((Y \times U)/G, \mathscr{K}_n^M) \xrightarrow{\sim} H^q((Y \times U')/G, \mathscr{K}_n^M).$$

Before proving this proposition let us recall a result of Rost:

Proposition 4.3.2 **(Rost).** — *If $X \to Y$ is a vector bundle, then for any $q \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, one has*

$$H^p(X, \mathscr{K}_q^M) \xrightarrow{\sim} H^p(Y, \mathscr{K}_q^M).$$

Proof. — This follows from theorem 1.4, remark 2.4, and proposition 8.6 in [**Ro**]. □

Proof of proposition 4.3.1. — As in [**To**, §1] or [**EG**] we use Bogomolov's double fibration argument. By the proof of proposition 2.2.1, if $W = W'$, we have isomorphisms

$$\begin{aligned} H^q((Y \times U)/G, \mathscr{K}_n^M) &\xrightarrow{\sim} H^q((Y \times (U \cap U'))/G, \mathscr{K}_n^M) \\ &\xrightarrow{\sim} H^q((Y \times U')/G, \mathscr{K}_n^M) \end{aligned}$$

thus this group does not depend on the choice of U. But the canonical map

$$(Y \times U \times W')/G \to (Y \times U)/G$$

is a vector bundle. Using proposition 4.3.2, we get isomorphisms

$$\begin{aligned} H^q((Y\times U)/G,\mathscr{K}_n^M) &\xrightarrow{\sim} H^q((Y\times U\times W')/G,\mathscr{K}_n^M)\\ &\xrightarrow{\sim} H^q((Y\times W\times U')/G,\mathscr{K}_n^M)\\ &\xrightarrow{\sim} H^q((Y\times U')/G,\mathscr{K}_n^M). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 4.3.1. — With notation as in the proposition, we define the equivariant Milnor $\mathscr{K}$-cohomology group as

$$H^p_G(Y,\mathscr{K}_q^M) = H^p_{\mathrm{Zar}}((Y\times U)/G,\mathscr{K}_q^M)$$

and put $H^p_G(k,\mathscr{K}_q^M) = H^p_G(\operatorname{Spec} k,\mathscr{K}_q^M)$.

Example 4.3.1. — If $p=q$, we obtain the usual equivariant Chow group.

Example 4.3.2. — If $p=q-1$, then we have

$$H^p_G(Y,\mathscr{K}_{p+1}^M) = H^p(Y\times U/G,\mathscr{K}_{q+1})$$

which coincides with the equivariant higher Chow group $\mathrm{CH}^p_G(Y,1)$ (see [**EG**]).

Proposition 4.3.3. — *For any finite group G and any algebraically closed field k, one has*

$$H^1_G(k,\mathscr{K}_2^M) \xrightarrow{\sim} H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Proof. — We use the Hochscild-Serre spectral sequence

$$H^p(G,\mathbf{H}^q_{\text{ét}}(U,\Gamma(2))) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{\text{ét}}(U/G,\Gamma(2))$$

and the results of Kahn (2.4.1) to get the isomorphism. $\square$

Definition 4.3.2. — Similarly we define the equivariant $\mathscr{H}_{\text{ét}}$-cohomology groups

$$H^p_G(Y,\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))) = H^p_{\mathrm{Zar}}((Y\times U)/G,\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)))$$

and put $H^p_G(k,\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))) = H^p(\operatorname{Spec} k,\mathscr{H}^q_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)))$.

Remark 4.3.4. — One has the inclusions

$$H^p_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \subset H^0_G(k,\mathscr{H}^p_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))) \subset H^p(k(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)).$$

Example 4.3.3. — if $p=2$ we have

$$H^2(k(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))=\mathrm{Br}(k(W)^G)$$

which is in general infinite,

$$H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\xrightarrow{\sim}H^0_G(k,\mathscr{H}^2_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)))$$

and, by Bogomolov's result,

$$H^2_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))=\mathrm{Ker}\Big(H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\to\prod_{B\in\mathscr{B}}H^2(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))\Big)$$

where $\mathscr{B}$ is the set of bicyclic groups in G.

4.4. Application to negligible classes. — In degree 4, we get the following results:

Theorem 4.4.1. — *If G is a finite group and k an algebraically closed field of characteristic 0, then there is a canonical exact sequence*

$$\begin{aligned}0\to H^2_G(k,\mathscr{K}_3)\otimes\mathbf{Z}_{(2)}\to H^4(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))\to H^0_G(k,\mathscr{H}^4_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)))\\ \to\mathrm{CH}^3_G(k)\otimes\mathbf{Z}_{(2)}\to H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))\end{aligned}$$

and a canonical isomorphism

$$H^1_G(k,\mathscr{K}_3^M)\otimes\mathbf{Z}_{(2)}\xrightarrow{\sim}H^3(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)).$$

Proof. — The first assertion follows from proposition 4.2.1 and corollary 4.1.5 and the second from the same proposition and corollary 4.1.6. □

Notations 4.4.1. — Let $H^i(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))_{\mathrm{n}}$ be the kernel of the map

$$H^i(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))\to H^i(k(W)^G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))$$

and $H^i(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))_{\mathrm{c}}$ be

$$\sum_{H\subsetneq G}\mathrm{Cores}^G_H H^i(H,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))_{\mathrm{n}}.$$

We also consider the group

$$\begin{aligned}&H^i(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))_{\mathrm{p}}\\ &\qquad=\sum_{H\subset G}\mathrm{Cores}^G_H(H^1(H,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(1))\cup H^{i-2}(H,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-2)))\end{aligned}$$

where the product is defined as in notations 3.1.6. As in paragraph 3.1 we may define for any subgroup H of G a map

$$\mathrm{Cores}_H^G : H_H^p(k, \mathscr{K}_q^M) \to H_G^p(k, \mathscr{K}_q^M)$$

and there is a natural product (see [**Ro**, remark 2.4 and §14])

$$H_G^i(k, \mathscr{K}_p^M) \otimes H_G^j(k, \mathscr{K}_q^M) \to H_G^{i+j}(k, \mathscr{K}_{p+q}^M).$$

We define

$$H_G^p(k, \mathscr{K}_q)_{\mathrm{c}} = \sum_{H \subsetneq G} \mathrm{Im}\,\mathrm{Cores}_H^G$$

and

$$H_G^2(k, \mathscr{K}_3)_{\mathrm{p}} = \sum_{H \subset G} \mathrm{Cores}_H^G(\mathrm{Pic}_G \operatorname{Spec} k \cup H_G^1(k, \mathscr{K}_2)).$$

Remark 4.4.2. — The group $H^i(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1))_{\mathrm{p}}$ coincides also with the kernel of a map

$$H^i(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i-1)) \to H^i(G, k(W)^*).$$

Proposition 4.4.3. — *With the notations of theorem 4.4.1 the canonical isomorphism*

$$H_G^2(k, \mathscr{K}_3^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} H^4(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))_n$$

induces an isomorphism from

$$H_G^2(k, \mathscr{K}_3^M)/\Big(H_G^2(k, \mathscr{K}_3)_p + H_G^2(k, \mathscr{K}_3)_c\Big) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

to

$$H^4(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))_n/\Big(H^4(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))_p + H^4(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))_c\Big).$$

Proof. — This follows easily from the next two lemmata:

Lemma 4.4.4. — *With notations as above, there is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} H_H^2(k, \mathscr{K}_3^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} & \longrightarrow & H^4(H, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)) \\ \Big\downarrow \mathrm{Cores}_H^G & & \Big\downarrow \mathrm{Cores}_H^G \\ H_G^2(k, \mathscr{K}_3^M) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} & \longrightarrow & H^4(G, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)). \end{array}$$

Proof. — As the proof of lemma 3.1.6 this follows from the compatibility of the spectral sequences with corestriction. $\square$

Lemma 4.4.5. — *With notations as above, there is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} H^1_G(k,\mathscr{K}_2^M)\otimes \mathrm{Pic}_G k\otimes \mathbf{Z}_{(2)} & \longrightarrow & H^2_G(k,\mathscr{K}_3^M)\otimes \mathbf{Z}_{(2)} \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\otimes H^1(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(1)) & \longrightarrow & H^4(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3))_n. \end{array}$$

Proof. — As in the proof of lemma 3.1.8, the compatibility of the coniveau spectral sequence with cup-product (see also [**We**]) yields a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^3(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(2)[-1])\otimes H^2(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(1)[-1]) & \longrightarrow & H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(3)[-1]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^3_{\text{ét}}(U/G,\mathbf{Z}(2))\otimes \mathbf{H}^2_{\text{ét}}(U/G,\mathbf{Z}(1)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^5_{\text{ét}}(U/G,\mathbf{Z}(3)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(U/G,\mathscr{K}_2)\otimes \mathrm{Pic}(U/G) & \longrightarrow & H^2(U/G,\mathscr{K}_3). \end{array}$$ □

In degree 5 we get the following results:

Theorem 4.4.6. — *If G is a finite group and k an algebraically closed field of characteristic* 0, *then there is a canonical exact sequence*

$$0\to H^2_G(k,\mathscr{K}_4^M)\otimes \mathbf{Z}_{(2)}\to H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))\to H^0_G(k,\mathscr{H}^5_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4)))$$
$$\to H^3_G(k,\mathscr{K}_4^M)\otimes \mathbf{Z}_{(2)}\to H^6(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4)).$$

Proof. — This follows from corollary 4.1.7 and proposition 4.2.1. □

Notation 4.4.2. — We put

$$H^2_G(k,\mathscr{K}_4^M)_{\mathrm{p}}=\sum_{H\subset G}\mathrm{Cores}_H^G(\mathrm{Pic}_G k\cup H^1_G(k,\mathscr{K}_3^M)).$$

Proposition 4.4.7. — *The canonical isomorphism*

$$H^2_G(k,\mathscr{K}_4^M)\otimes \mathbf{Z}_{(2)}\xrightarrow{\sim} H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))_n$$

induces an isomorphism from

$$H^2_G(k,\mathscr{K}_4^M)/\Big(H^2_G(k,\mathscr{K}_4)_p+H^2_G(k,\mathscr{K}_4)_c\Big)\otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

to

$$H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))_n/\Big(H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))_p+H^5(G,\mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(4))_c\Big).$$

Proof. — The proof is similar to the one of proposition 4.4.3. □

This text owes much to the work of Bruno Kahn. I would like to thank him and Burt Totaro for several fruitful discussions.

References

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (1963-64)*, Lectures Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1973.

[At] M. F. Atiyah, *Characters and cohomology of finite groups*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **9** (1961), 23–64.

[BK] S. Bloch and K. Kato, *p-adic étale cohomology*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **63** (1986), 107–152.

[BO] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–202.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n$^{\text{o}}$ 3, 485–516; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[Bro] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math., vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Car] H. Cartan, *Détermination des algèbres $H_*(\Pi, n; \mathbf{Z})$*, Séminaire Henri Cartan 1954/55, n$^{\text{o}}$ 11.

[CTHK] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler, and B. Kahn, *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, Fields Institute Comm. **16** (1997), 31–94.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[EG] D. Edidin and W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Invent. Math. **131** (1998), n$^{\text{o}}$ 3, 635–644.

[GS] M. Gros et N. Suwa, *La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques*, Duke Math. J. **57** (1988), n$^{\text{o}}$ 2, 615–628.

[Il] L. Illusie, *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 501–661.

[Kah1] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kah2] ———, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 395–416.

[Kah3] ———, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0218` (1997).

[Kah4] ———, *The Quillen-Lichtenbaum conjecture at the prime* 2, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0208` (1997).

[Ka] K. Kato, *Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory (Boulder, 1983), Contemp. Math., vol. 55, AMS, Providence, 1986, pp. 241–253.

[Le] M. Levine, *The indecomposable K_3 of fields*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **22** (1989), 255–344.

[Li1] S. Lichtenbaum, *Values of zeta-functions at nonnegative integers*, Number theory (Noordwijkerhout, 1983) (H. Jager, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1984, pp. 127–138.

[Li2] ———, *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. math. **88** (1987), 183–215.

[Li3] ———, *New results on weight-two motivic cohomology*, The Grothendieck Festschrift III (P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin, and K. A. Ribet, eds.), Progress in Math., vol. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 35–55.

[Me1] A. S. Merkur′ev, *The group $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ for projective homogeneous varieties*, Algebra i Analiz **7** (1995), 136–164; English transl. in St Petersburg Math. J. **7** (1996), 421–444.

[Me2] ———, *Comparison of equivariant and ordinary K-theory of algebraic varieties*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0133` (1996).

[MS1] A. S. Merkur′ev and A. A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), n° 5, 1011–1046; English transl. in Math. USSR-Izv. **21** (1983), n° 2, 307–340.

[MS2] ———, *The group K_3 for a field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), n° 3, 522–545; English transl. in Math USSR-Izv. **36** (1991), n° 3, 541–565.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Pe1] E. Peyre, *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.

[Pe2] ———, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence, 1995, pp. 369–401.

[Pe3] ———, *Corps de fonctions de variétés homogènes et cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896.

[Pe4] ———, *Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties*, K-theory **15** (1998), 99–145.

[Ro] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 319–393.

[Sa1] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Sa2] ———, *Brauer groups of invariant fields, geometrically negligible classes, an equivariant Chow group, and unramified H^3*, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 189–246.

[Se] J.-P. Serre, *Résumé des cours et travaux*, Annuaire du collège de France 1990-91, pp. 111–123.

[Su1] A. A. Suslin, *Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism*, Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dost. **25** (1984), 115–208; English transl. in J. Soviet Math. **30** (1985), 2556–2611.

[Su2] ———, *Torsion in K_2 of fields*, K-theory **1** (1987), 5–29.

[SV] A. A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0083` (1995).

[Th] R. Thomason, *Algebraic K-theory of group scheme actions*, Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, 1983) (W. Browder, ed.), Ann. of Math. Stud., vol. 113, Princeton University Press, Princeton, 1987, pp. 539–563.

[To] B. Totaro, *The Chow ring of a classifying space*, Algebraic K-theory (Seattle, 1997) (W. Raskind and C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, AMS, Providence, 1999, pp. 249–281.

[Vo1] V. Voevodsky, *Cohomology theory of presheaves with transfers*, available as *Homology of schemes II* `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0034` (1994).

[Vo2] ———, *Triangulated categories of motives over a field*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0074` (1995).

[Vo3] ———, *The Milnor conjecture*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170` (1996).

[We] C. Weibel, *Products in higher Chow groups and motivic cohomology*, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0263` (1998).

February 15, 2024

Emmanuel Peyre, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France
Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~peyre
• *E-mail :* peyre@irma.u-strasbg.fr

PARTIE C

AUTRES PUBLICATIONS

OBSTRUCTIONS AU PRINCIPE DE HASSE ET À L'APPROXIMATION FAIBLE

par

Emmanuel PEYRE

Résumé. — Si un système d'équations polynomiales à coefficients entiers admet une solution dans $\mathbf{Q}^n$, il en admet sur tout complété p-adique ou réel de $\mathbf{Q}$. La réciproque a été démontrée par Hasse pour les quadriques, mais elle est fausse en général. Une grande partie des contre-exemples connus peuvent être expliqués à l'aide de l'obstruction de Brauer-Manin, basée sur la théorie du corps de classe. Il est donc naturel de se demander si, pour certaines classes de variétés, cette obstruction est la seule. Le but de cet exposé est de présenter un survol des techniques développées pour répondre à ce type de questions.

Abstract. — If a system of polynomial equations with integral coefficients has a solution in $\mathbf{Q}^n$, then it has one over any p-adic or real completion of $\mathbf{Q}$. The converse was proven by Hasse for quadrics but does not hold in general. Most counter-examples could be explained using Brauer-Manin obstruction. Thus it is natural to ask whether this obstruction is the only one for various classes of varieties. The aim of this talk is to present a short survey of the methods introduced to explore such questions.

Introduction

Face à un système d'équations polynomiales à coefficients entiers, les questions de l'existence d'une solution à coordonnées entières ou rationnelles sont les premières qui viennent à l'esprit. Bien que les travaux de Davis, Putnam, Robinson, Matijacevič et Čudnovskiĭ (cf. [**Az**] et [**Ma2**]) sur le dixième problème de Hilbert aient montré que l'existence d'une solution entière ne peut être déterminée de façon algorithmique et bien que le problème analogue sur $\mathbf{Q}$ soit toujours ouvert, il est par contre raisonnable de chercher des critères d'existence

de solutions rationnelles pour certaines classes de variétés. Une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une telle solution est l'existence d'une solution sur le corps des réels et sur tout complété p-adique de $\mathbf{Q}$. Hasse fut le premier à étudier de manière systématique la réciproque de cette condition nécessaire. En s'appuyant sur les progrès du corps de classes, il put démontrer cette réciproque pour certaines classes de variétés, dont les quadriques [**Has**], qui avaient été antérieurement étudiées par Legendre et Minkowski [**Mi**]. Mais ce passage du local au global ne s'étend pas à tout système d'équations. Hasse lui-même donna des contre-exemples à cette réciproque [**Hasse**]. Par la suite, ceux-ci se multiplièrent : Reichardt [**Re**] et Lind [**Li**] vers 1940 produisirent de manière indépendante une courbe de genre un, intersection de deux quadriques qui n'admet pas de points sur $\mathbf{Q}$ mais en admet sur tous ses complétés (cet exemple est également décrit dans [**Ca**]). La construction d'autres contre-exemples parmi les variétés géométriquement rationnelles demanda plus de temps, mais Swinnerton-Dyer en exhiba en 1962 au sein des surfaces cubiques non singulières [**SD1**]. En 1970, dans son exposé au congrès international de Nice [**Ma1**], Manin décrivit un critère général basé sur la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes qui permit d'expliquer tous les contre-exemples antérieurs (cf. [**CTKS**]). De manière plus précise, supposons que V soit une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $\mathbf{Q}$ et notons $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ l'espace adélique associé à V, c'est-à-dire l'espace topologique produit $V(\mathbf{R}) \times \prod_p V(\mathbf{Q}_p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Le principe du critère de Manin est de construire une partie $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient l'adhérence de l'ensemble des points rationnels dans l'espace adélique. Si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$ mais que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ est vide, alors V n'admet pas de point rationnel sur $\mathbf{Q}$, alors qu'elle en admet sur tous ses complétés. Cette construction fournit également des contre-exemples à l'approximation faible : si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$, alors les points rationnels de V ne sont pas denses dans l'espace adélique (cf. [**CTS2**]).

Muni de cette construction, on peut alors affiner les questions précédentes de la façon suivante : étant donnée une variété projective, lisse et géométriquement intègre telle que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ soit non vide,

- la variété V admet-elle un point rationnel ?
- L'ensemble de ces points rationnels est-il dense dans $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$?

Ces questions ont été explorées par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer Borovoi, Colliot-Thélène, Harari, Salberger, Sansuc, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer et une réponse positive à la seconde question fut obtenue pour

diverses classes de variétés géométriquement rationnelles. Deux types de méthodes se sont révélées particulièrement efficaces. La première dite de descente consiste à construire des morphismes

$$f_i : W_i \to V$$

de sorte que W_i soit plus simple du point de vue arithmétique et de déduire le résultat pour V des propriétés des W_i. Cette méthode fut systématisée par Colliot-Thélène et Sansuc ([**CTS1**], [**CTS2**], [**CTS3**], [**CTS4**] et [**CTS5**]) à l'aide des torseurs universels. La seconde dite de fibration s'applique dans le cas où l'on dispose d'un morphisme

$$p : V \to B.$$

On cherche alors à déduire le résultat pour V des résultats connus pour les fibres de p.

Tous les experts se doutaient que la non vacuité de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ n'entraîne pas toujours celle de $V(\mathbf{Q})$, mais l'obtention d'un tel contre-exemple se révéla difficile. En 1999, dans [**Sk3**], Skorobogatov fut le premier à exhiber un exemple explicite de variété V vérifiant $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ et ne possédant pas de points rationnels. Ce contre-exemple peut s'expliquer à l'aide d'un analogue non commutatif de l'obstruction de Brauer-Manin dû à Harari et Skorobogatov ([**Ha4**] et [**HS**]). Par ailleurs, Sarnak et Wang en 1995 dans [**SW**], puis Poonen en 2001 dans [**Po**] montrent que des conjectures de Lang impliquent l'existence de variétés sans point rationnel qui échappent au critère de Manin et à ses généralisations non abéliennes.

Dans la première partie de ces notes, nous revenons sur les notions de principe de Hasse et d'approximation faible, la seconde partie est consacrée à la description du critère de Brauer-Manin, la troisième aux méthodes utilisées pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ et la quatrième aux contre-exemples à cette densité. Nous terminons par des extensions de cette démarche à d'autres cadres.

1. Le principe de Hasse et l'approximation faible

1.1. Terminologie. — Fixons quelques notations pour la suite de cet exposé.

Notations 1.1. — Désormais K désigne un corps de nombres, $\mathscr{O}_K$ son anneau des entiers et M_K l'ensemble des places de K. Pour toute place v de K, on note K_v le complété de K pour la topologie définie par v. Si la place v est non archimédienne, on note $\mathscr{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v. Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur

le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$. En particulier, si V est une variété sur un corps F, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans $\overline{F}$, $V(F)$ est l'ensemble des points rationnels de V et $\overline{V}$ (resp. V^s) désigne la variété $V_{\overline{F}}$ (resp. V_{F^s}) sur $\overline{F}$ (resp. F^s).

Nous dirons qu'une variété V sur un corps F est une *bonne variété* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Deux variétés intègres V et W sur F sont
F-birationnellement équivalentes si un ouvert non vide de V est isomorphe à un ouvert de W. Une variété intègre V est dite *F-rationnelle* si elle est F-birationnellement équivalente à un espace projectif. Une variété géométriquement intègre V est dite *géométriquement rationnelle* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnelle.

Une bonne variété V sur un corps F est dite *F-rationnellement connexe* s'il existe une variété M, un ouvert non vide U du produit $\mathbf{P}^1 \times M$ et un morphisme $e : U \to V$ de sorte que l'application induite $U \times_M U \to V \times_F V$ soit dominante. On dit que V est *géométriquement rationnellement connexe* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnellement connexe ; autrement dit, il existe une famille de courbes rationnelles sur $\overline{V}$ de sorte que deux points généraux de $V(\overline{F})$ puissent être reliés par une courbe de cette famille.

Si V est une variété irréductible et $\mathscr{V}$ un modèle de V sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$, c'est-à-dire que $\mathscr{V}_K$ est isomorphe à V, alors pour toute place non archimédienne v de K, on a une application naturelle $j_v : \mathscr{V}(\mathscr{O}_v) \to V(K_v)$. L'espace des adèles associé à V est défini comme l'ensemble des $(x_v)_{v\in M_K}$ du produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$ tels que x_v appartienne à l'image de j_v pour tout v en dehors d'une partie finie de M_K. Cet espace topologique est indépendant du modèle choisi et si V est projective, il coïncide avec le produit.

1.2. Passage du local au global. — Si V est une variété sur le corps de nombres K, on a une implication évidente :

$$V(K) \neq \varnothing \implies \forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing. \tag{1}$$

L'intérêt de ce critère provient du fait qu'il est algorithmiquement possible de déterminer si la condition

$$\forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing$$

est vérifiée ou pas. En effet, si K_v est isomorphe au corps des réels, la vacuité de $V(K_v)$ est une question décidable grâce aux travaux de Tarski et Seidenberg (cf. [**Ta**] et [**Sei**]) ; le lemme de Hensel et ses généralisations montrent que pour toute place non archimédienne v de K correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_K$,

déterminer si $V(K_v)$ est non vide se réduit à étudier des solutions d'équations polynomiales sur $\mathscr{O}_K/\mathfrak{p}^n$ pour un n convenable et, par conséquent, est décidable. Enfin les estimations de Lang-Weil [**LW**] permettent de montrer que si V n'est pas vide, alors $V(K_v) \neq \varnothing$ pour toute place v en dehors d'une partie finie de M_K que l'on peut déterminer explicitement.

Hasse fut le premier à étudier de façon systématique la réciproque de l'implication (1). Il énonça en particulier le résultat suivant :

Théorème 1.2 **(Hasse [Has], Minkowski [Mi]). —** *Une forme quadratique $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ admet un zéro non trivial dans $\mathbf{Q}^n$ si et seulement si elle en a sur tout complété de $\mathbf{Q}$.*

Le cas $n = 2$ est élémentaire, le cas $n = 3$ remonte à Legendre. La difficulté de la démonstration réside dans le passage de trois à quatre variables qui utilise le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet et la formule de réciprocité de Gauss. Nous suggérons à l'auditeur de cet exposé qui n'aurait jamais lu la démonstration de ce théorème de se reporter à l'article de Hasse [**Has**] ou au cours d'arithmétique de Serre [**Se2**]. Ce résultat se généralise à tout corps de nombres.

Une autre famille d'équations considérée par Hasse est celle associée aux normes d'extensions galoisiennes cycliques de corps.

Théorème 1.3 **(Hasse [Hasse]). —** *Soit L/K une extension galoisienne cyclique de corps de nombres. Notons $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ le morphisme de norme. Un élément a de $K^\times$ appartient à son image si et seulement si, pour toute place v de K et toute extension w de v à L, a appartient à l'image de la norme N_{L_w/K_v}.*

Dans ce cas, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base du K-espace vectoriel L, la variété considérée est la variété affine définie par l'équation

$$N_{L/K}\left(\sum_{i=1}^n X_i e_i\right) = a.$$

1.3. Le principe de Hasse et l'approximation faible. — Pour une variété V arbitraire sur un corps de nombres K, il est aisé de donner des contre-exemples à la réciproque de (1). Considérons par exemple le polynôme

$$P(X) = (X^2 - 3)(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Pour tout nombre premier p impair, le groupe $\mathbf{F}_p^\times / \mathbf{F}_p^{\times 2}$ est cyclique d'ordre 2. Par conséquent si $p \geqslant 5$, au moins un des entiers -1, 3 ou -3 est un carré modulo

p et donc dans $\mathbf{Q}_p$. D'autre part -23 est un carré dans $\mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{Q}_3$. Enfin 3 est un carré sur $\mathbf{R}$. Le polynôme P a donc une racine dans chacun des complétés de $\mathbf{Q}$. Toutefois, il n'a pas de racine sur $\mathbf{Q}$.

Plus généralement, si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-variétés d'une variété V sur le corps de nombres K telle que

$$\forall v \in M_K, \quad \exists i \in I, \quad V_i(K_v) \neq \varnothing$$

et

$$\forall i \in I, \quad \exists v \in M_K, \quad V_i(K_v) = \varnothing,$$

alors $\bigcup_{i\in I} V_i$ est un contre-exemple à la réciproque de (1).

D'autre part, si on considère la surface affine S d'équation

$$Y^2 + Z^2 = -(X^2-3)^2(X^2+3)(X^2+1)(X^2+23),$$

cette surface est irréductible, les remarques faites sur les racines de P montrent qu'elle admet un point sur chaque complété de $\mathbf{Q}$, mais ses seuls points réels sont $(\sqrt{3}, 0, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ qui ne sont pas définis sur $\mathbf{Q}$. On obtient à nouveau un contre-exemple à la réciproque de (1). Là encore, cet exemple se généralise aisément en considérant des variétés dont les seuls points sur un des complétés sont des points singuliers.

Par contre, si V est une variété géométriquement irréductible, v une place de K et x_0 un point lisse de $V(K_v)$, le théorème des fonctions implicites [**Bki**, VAR, §1, n°5] assure qu'il existe un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie v-adique sur un ouvert de $K_v^{\dim(V)}$. En particulier, $V(K_v)$ est dense dans V_{K_v} pour la topologie de Zariski. Les arguments qui précèdent ne permettent donc plus de montrer la vacuité de $V(K)$.

Ces considérations amènent aux définitions qui suivent :

Définition 1.4. — On dira par la suite qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie *le principe de Hasse* si et seulement si elle vérifie l'implication suivante

$$(\forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing) \quad \Longrightarrow \quad V(K) \neq \varnothing.$$

On dira qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie *l'approximation faible* si et seulement si l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est dense dans l'espace topologique produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$.

Remarques 1.5. — (i) Si le produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$ n'est pas vide, la variété V vérifie l'approximation faible si et seulement si $V(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} V(K_v)$ pour toute partie finie S de M_K.

(ii) Notons qu'avec ces définitions, toute variété qui vérifie l'approximation faible vérifie également le principe de Hasse.

Ces deux propriétés sont des invariants birationnels des bonnes variétés :

Proposition 1.6. — *Soient V et V' deux bonnes variétés sur le corps de nombres K qui sont K-birationnellement équivalentes. Alors V vérifie le principe de Hasse* (*resp. l'approximation faible*() *si et seulement s'il en est de même pour V'.*

Cette proposition découle du lemme de Nishimura [**Ni**], qui assure que l'existence d'un point rationnel est un invariant birationnel des bonnes variétés, et du théorème des fonctions implicites.

1.4. Classes de variétés vérifiant le principe de Hasse et l'approximation faible. — L'approximation faible et, par conséquent, le principe de Hasse ont été démontrés pour plusieurs familles de variétés. Nous en donnerons ici deux exemples qui nous semblent particulièrement marquants :

Théorème 1.7. — *Si V est une variété de drapeaux généralisée sur K, c'est-à-dire une variété projective homogène sous l'action d'un groupe algébrique linéaire connexe, alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.*

Ce résultat englobe le résultat de Legendre, Hasse et Minkowski sur les quadriques et celui de Châtelet sur les variétés de Severi-Brauer, c'est-à-dire les K-formes des espaces projectifs. Eichler [**Ei**], Landherr [**Lan**], Kneser [**Kn**], Harder [**Harder1**] [**Harder2**], Chernousov [**Che**] ont montré le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Platonov et Rapinchuk ont prouvé l'approximation faible pour ces groupes [**PR**, theorem 7.8]. Les travaux de Harder [**Harder3**, Satz 4.3.3] et Borovoi [**Bo1**] permettent d'en déduire le théorème qui précède.

Le second résultat que je souhaite mentionner est une conséquence de la méthode du cercle et s'applique aux intersections complètes lisses dans l'espace projectif lorsque la dimension est grande relativement aux degrés des équations.

Théorème 1.8 **(Hardy, Littlewood, Davenport, Birch [Bir])**
Si $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ est une intersection complète non singulière définie par des équations $f_1, \ldots, f_m$ de même degré d avec

$$N > 2^{d-1} m(m+1)(d-1),$$

alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.

Pour les cubiques, ce résultat vaut en fait dès que $N \geqslant 8$ (Heath-Brown [**HB**] et Hooley [**Ho1**], [**Ho2**], cf. l'exposé de Deshouillers [**De**]).

La méthode du cercle s'applique aussi à des équations de degrés différents (cf. les travaux de Schmidt [**Sch**]) et fournit également des résultats sur un corps de nombres (Skinner [**Skinner**]).

2. L'obstruction de Brauer-Manin

2.1. Un premier contre-exemple au principe de Hasse. — Hasse lui-même savait que le théorème 1.3 qu'il avait démontré pour les extensions de corps cycliques L/K ne se généralisait pas : il connaissait des exemples d'extension galoisienne L/K de groupe de Galois $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ telle que l'équation

$$N_{L/K}(x) = a$$

avec a un élément de K a une solution sur tous les complétés de K mais n'en possède pas sur K.

Le principe de Hasse n'est donc pas toujours vérifié. Je voudrais en donner maintenant un exemple dû à Iskovskih [**?**] qui fut revisité par Colliot-Thélène, Coray et Sansuc [**CTCS**]. On considère la surface S fibrée en coniques définie sur $\mathbf{Q}$ par l'équation

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2). \tag{2}$$

Rappelons (cf. [**Se2**, chap. III]) que si v est une place de $\mathbf{Q}$ et si a, b sont deux éléments inversibles de $\mathbf{Q}_v$, le symbole de Hilbert $(a,b)_v$ est défini par

$$(a,b)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } Z^2 - aX^2 - bY^2 = 0 \text{ a une solution non nulle dans } \mathbf{Q}_v^3, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que ce symbole est bilinéaire et qu'il vérifie la formule du produit :

$$\forall a, b \in \mathbf{Q}^\times, \qquad \prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (a,b)_v = 1$$

qui découle de la formule de réciprocité quadratique de Gauss. En outre, on dispose des formules explicites suivantes :

- si p est un nombre premier impair et $a \in \mathbf{Q}_p^\times$,

$$(-1, a)_p = (-1)^{v_p(a)\varepsilon(p)}$$

où $\varepsilon(p)$ est la classe de $(p-1)/2$ modulo 2,

- si $a = 2^k u$ avec $u \in \mathbf{Z}_2^\times$, on a

$$(-1, a)_2 = (-1)^{\varepsilon(u)}$$

- et si $a \in \mathbf{R}^\times$,

$$(-1, a) = \frac{a}{|a|}.$$

Si v est une place de $\mathbf{Q}$ et x un élément de $\mathbf{Q}_v$ tel que $(3-x^2)(x^2-2)$ soit inversible, alors la conique définie par $Y^2+Z^2 = (3-x^2)(x^2-2)$ admet un point défini sur $\mathbf{Q}_v$ si et seulement si

$$(3) \qquad (-1, 3-x^2)_v = (-1, x^2-2)_v.$$

Des expressions qui précèdent on déduit que cette condition est vérifiée pour tout x de $\mathbf{Q}_p$ tel que $(3-x^2)(x^2-2)$ soit inversible si $4 \mid p-1$. Si $4 \mid p-3$, cette égalité vaut dès que $v_p(x) < 0$. Pour $p = 2$, elle est vérifiée pour $x = 0$ et sur $\mathbf{R}$ on l'obtient pour $x \in]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$. Il en résulte que la surface définie par (2) admet un point lisse sur tout complété de $\mathbf{Q}$. Supposons que $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$ soit solution de (2). Notons tout d'abord que $(3-x^2)(x^2-2) \neq 0$. D'autre part, les formules qui précèdent donnent que

– si p est un nombre premier tel que $4 \mid p-1$, alors $(-1, 3-x^2) = 1$,
– si p est un nombre premier congru à 3 modulo 4, alors soit $v_p(x) < 0$ auquel cas on obtient $(-1, 3-x^2) = 1$; soit $v_p(x) \geqslant 0$, mais la relation $x^2-2 = 1-(3-x^2)$ fournit $v_p(x^2-2) = 0$ ou $v_p(3-x^2) = 0$ et en utilisant la relation (3), on en déduit que $(-1, 3-x^2) = 1$.
– Pour $p = 2$, si $v_2(x) > 0$, alors $3-x^2 \equiv 3 \mod 4$ et donc $(-1, 3-x^2) = -1$; de même si $v_2(x) < 0$, alors $3/x^2 - 1 \equiv 3 \mod 4$ et donc $(-1, 3-x^2)_2 = -1$. Enfin si $v_2(x) = 0$, alors $x^2 \equiv 1 \mod 8$ d'où $(3-x^2)/2 \equiv 1 \mod 4$ et $x^2-2 \equiv 3 \mod 4$, ce qui contredit la relation (3).
– Pour la place archimédienne, la relation $(-1, 3-x^2)_\infty = (-1, x^2-2)_\infty$ entraîne $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ et donc $(-1, 3-x^2)_\infty = 1$.

En définitive, on a obtenu

$$(-1, 3-x^2)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq 2, \\ -1 & \text{si } v = 2. \end{cases}$$

Mais ceci implique la relation

$$\prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (-1, 3-x^2)_v = -1,$$

ce qui contredit la formule du produit. L'équation (2) n'a donc pas de solution sur $\mathbf{Q}$.

Un modèle projectif et lisse $\widetilde{S}$ de S est obtenu en recollant les deux sous-variétés lisses de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ d'équations respectives

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2)T^2$$

et

$$Y^2 + Z^2 = (3X^2 - 1)(1 - 2X^2)T^2.$$

Cette dernière n'ayant pas de point rationnel pour $X = 0$, on obtient que $\widetilde{S}$ ne vérifie pas le principe de Hasse.

Le critère de Brauer-Manin est une généralisation de cet exemple, la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes prenant le rôle de la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

2.2. Rappels sur le groupe de Brauer cohomologique des variétés. — Avant de passer au critère lui-même, nous rappelons ici quelques propriétés du groupe de Brauer cohomologique qui nous seront utiles par la suite (cf. [**Ma3**, chap. VI]).

Notations 2.1. — Si V est une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps F, on note $\mathrm{Pic}(V)$ le groupe de Picard de V et $\mathrm{Br}(V)$ le groupe de Brauer cohomologique de V, c'est-à-dire le groupe

$$\mathrm{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m),$$

où $\mathbf{G}_m$ désigne le faisceau associé au groupe multiplicatif, qui à une variété U associe $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times$. Si V est le spectre d'un corps F, son groupe de Brauer peut être décrit comme un groupe de cohomologie galoisienne

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(F)) = H^2(\mathrm{Gal}(F^s/F), F^{s\times}),$$

où $\mathrm{Gal}(F^s/F)$ désigne le groupe de Galois de l'extension F^s/F. Dans ce cas, ce groupe coïncide avec le groupe des classes d'équivalence d'algèbres simples centrales sur F pour la relation d'équivalence $\sim$ définie par $A \sim B$ si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs m, n et un isomorphisme d'algèbres $M_m(A) \xrightarrow{\sim} M_n(B)$, la loi de groupe étant induite par le produit tensoriel des algèbres simples centrales sur F (cf. [**Se1**, X, §5]). Si v est une valuation discrète de rang un sur F, de corps résiduel parfait $\kappa(v)$, on dispose d'un morphisme résidu

$$\partial_v : \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\Big(\mathrm{Gal}\big(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)\big), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\Big).$$

Si F est un corps local non archimédien ce morphisme induit un isomorphisme

$$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(cf [**Se1**, XII §3]). D'autre part, le groupe $\mathrm{Br}(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions. Pour toute place v du corps de nombres K, on dispose donc d'un morphisme injectif canonique

$$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

La théorie du corps de classes global (cf. [**NSW**, theorem 8.1.17]) fournit alors une suite exacte naturelle :

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v\in M_K} \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum_{v\in M_K} \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \tag{4}$$

Notons au passage que l'injectivité du morphisme de gauche peut se réinterpréter comme le principe de Hasse pour les variétés de Severi-Brauer ; d'autre part la formule de réciprocité du corps de classes, c'est-à-dire le fait que cette suite forme un complexe, implique la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

Décrivons deux méthodes pour construire des éléments dans le groupe de Brauer d'une variété.

Si V est une variété intègre sur un corps F, de corps de fonctions $F(V)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(F(V)).$$

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0, il découle des théorèmes de pureté de Grothendieck [**Gr**, §6.7] que ce morphisme induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(V)$ sur

$$\bigcap_{v\in\mathscr{P}(F(V)/F)} \ker(\partial_v)$$

où $\mathscr{P}(F(V)/F)$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $F(V)$ dont la restriction à F est triviale. On retrouve en particulier que le groupe de Brauer est un invariant birationnel des bonnes variétés (cf. [**Gr**, corollaire 7.5]).

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbf{G}_m$ donne une suite exacte

$$\begin{aligned}(5)\quad 0 \to \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathscr{G}} \to \mathrm{Br}(F) \to \\ \to \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V})) \to H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \to H^3(F, \mathbf{G}_m),\end{aligned}$$

où $\mathscr{G}$ désigne le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si V est une bonne variété sur le corps de nombres K, alors $H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nul et on en déduit une suite exacte

$$\mathrm{Br}(K) \to \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V})) \to H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \to 0.$$

Notations 2.2. — Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, on note

$$\mathrm{Br}_1(V) = \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V}))$$

et

$$\mathrm{Br}_0(V) = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(V)).$$

Par abus de langage, un élément de $\mathrm{Br}(V) - \mathrm{Br}_1(V)$ est dit transcendant.

Remarque 2.3. — Notons que si V est géométriquement rationnelle, alors $\mathrm{Br}(\overline{V})$ est nul puisque c'est un invariant birationnel et le groupe $\mathrm{Br}(V)$ coïncide avec $\mathrm{Br}_1(V)$. En outre, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est alors un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini (cf. [**CTS5**, corollaire 2.A.2]) et le groupe $H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ est fini. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini dans ce cas.

2.3. Le critère de Brauer-Manin. —

Notations 2.4. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K. Pour toute place v de K et tout point x de $V(K_v)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) & \to & \mathrm{Br}(K_v) \\ A & \mapsto & A(x_v). \end{array}$$

On obtient ainsi un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) \times V(K_v) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, x) & \mapsto & \langle A, x\rangle_v = \mathrm{inv}_v(A(x_v)). \end{array}$$

On peut montrer (cf [**San**, lemme 6.2]) que pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(K_v)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est localement constante. Pour une place réelle, cette application est donc constante sur les composantes connexes. En outre, cette application est triviale pour presque toute place v de K. On obtient donc un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{A}_K} : \mathrm{Br}(V) \times V(\boldsymbol{A}_K) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, (x_v)_{v \in M_K}) & \mapsto & \sum_{v \in M_K} \langle A, x_v\rangle_v \end{array}$$

tel que, pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(\boldsymbol{A}_K)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est localement constante.

L'idée cruciale du critère de Manin est alors la suivante : si x est un point rationnel de V sur K et A un élément de $\mathrm{Br}(V)$, alors

$$\langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = \sum_{v\in M_K} \langle A, x\rangle_v = \sum_{v\in M_K} \mathrm{inv}_v(A(x)) = 0$$

où la dernière égalité résulte du fait que la suite (4) est un complexe. On en déduit donc que, pour tout point x de l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)$ et pour tout élément A de $\mathrm{Br}(V)$, on a

$$\langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0.$$

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

Définition 2.5. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K. Pour tout élément x de $V(\boldsymbol{A}_K)$, le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ A & \mapsto & \langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} \end{array}$$

s'annule sur l'image de $\mathrm{Br}(K)$ et définit par passage au quotient un morphisme ω_x de $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On appellera obstruction de Brauer-Manin en x le morphisme ω_x et espace de Brauer-Manin l'ensemble

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{\, x \in V(\boldsymbol{A}_K) \mid \omega_x = 0 \,\}.$$

Les remarques qui précèdent montre que, pour tout point adélique x, l'obstruction de Brauer-Manin en x est une obstruction à ce que x appartienne à l'adhérence des points rationnels. Autrement dit, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6. — *Avec les notations qui précèdent, l'adhérence $\overline{V(K)}$ des points rationnels dans l'espace adélique est contenue dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.*

Remarque 2.7. — (i) Si A est un élément de $\mathrm{Br}(V)$, l'ensemble

$$\{\, x \in V(\boldsymbol{A}_K) \mid \langle x, A\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0 \,\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans $V(\boldsymbol{A}_K)$. Par conséquent, si $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini, il en est de même de l'ensemble de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$. Par la remarque 2.3, c'est le cas si V est géométriquement rationnelle.

(ii) On ne dispose pas de méthode algorithmique pour décider de la vacuité de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ en général : pour une courbe de genre 1, cela revient en fait à calculer explicitement le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne. Par contre, si V est géométriquement rationnelle (ou plus généralement géométriquement

rationnellement connexe), alors le groupe quotient $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini et des méthodes sont disponibles pour calculer explicitement $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

Exemple 2.8. — Dans l'exemple du paragraphe 2.1, soit $\widetilde{S}$ un modèle projectif et lisse de $\mathbf{Q}(S)$ sur $\mathbf{Q}$, soit A l'algèbre de quaternions $\left(\frac{-1,\,3-x^2}{\mathbf{Q}(S)}\right)$ qui est l'algèbre associative unifère engendrée par deux éléments I et J avec les relations $I^2 = -1$, $J^2 = 3-x^2$ et $IJ = -JI$. La classe de cette algèbre provient de $\mathrm{Br}(\widetilde{S})$ et le raisonnement fait montre que

$$\{\,x \in \widetilde{S}(\boldsymbol{A}_K) \mid \langle [A], x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0\,\}$$

est vide. Donc $\widetilde{S}(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$ et $\widetilde{S}(K) = \varnothing$.

Remarque 2.9. — La plupart des contre-exemples au principe de Hasse utilisent le quotient $\mathrm{Br}_1(V)/\mathrm{Br}_0(V)$. Toutefois quelques auteurs ont également fourni des exemples provenant de la partie transcendante du groupe de Brauer (Harari [**Ha2**] et Wittenberg [**Wi**]).

Abus de langage 2.10. — Suivant la terminologie couramment utilisée, nous dirons par abus de langage que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour une bonne variété V si on a l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing.$$

On dit également que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour V si et seulement si les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

Enfin si $\mathscr{C}$ est une classe de bonnes variétés, on dit que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour $\mathscr{C}$ si et seulement si c'est la seule pour toute variété V de $\mathscr{C}$.

Remarque 2.11. — La validité de l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$$

ou la densité de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est un invariant birationnel des bonnes variétés. On peut donc étendre la terminologie précédente aux variétés géométriquement irréductibles sur le corps de nombres K en disant que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une variété géométriquement irréductible X si et seulement si c'est la seule pour un modèle projectif et lisse de $K(X)$.

3. L'obstruction de Brauer-Manin est la seule

Dans ce paragraphe, nous souhaitons décrire deux méthodes particulièrement efficaces pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace de Brauer-Manin. Nous terminerons par une liste de cas pour lesquels cette densité a été démontrée.

3.1. Techniques de descente. — Inspirée du travail de Châtelet [**Ch**] et de la méthode de descente classique pour les courbes de genre 1, la méthode de descente a été développée par Colliot-Thélène et Sansuc avec l'introduction de la notion de torseur universel d'une variété géométriquement rationnelle.

Si F est un corps algébriquement clos et V une bonne variété sur F dont le groupe de Picard est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini, alors un torseur universel sur V peut être construit de la façon suivante : soient $L_1, \dots, L_t$ des fibrés en droites sur V dont les classes forment une base du groupe de Picard de V. Pour $i \in \{1, \dots, t\}$, notons $L_i^\times$ le complémentaire de la section nulle dans L_i et posons

$$\mathscr{T} = L_1^\times \times_V \cdots \times_V L_t^\times.$$

Le groupe algébrique $\mathbf{G}_m^t$ agit sur $\mathscr{T}$ et l'application naturelle $\pi : \mathscr{T} \to V$ fait de V un quotient de $\mathscr{T}$ sous l'action de ce groupe. En outre, à isomorphisme près, les structures obtenues ne dépendent pas des choix effectués.

Dans le cas général, nous allons définir les torseurs universels comme solution à un problème universel.

***Définitions 3.1.* —** On dit qu'un groupe algébrique G sur un corps F est *de type multiplicatif* si et seulement s'il existe un entier n tel que $\overline{G}$ soit isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}^n_{m,\overline{F}}$. Notons $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(F^s/F)$ le groupe de Galois absolu de F. On a une équivalence de catégorie contravariante entre la catégorie des groupes de type multiplicatif et la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules de type fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$, c'est-à-dire se factorisant via un quotient fini de $\mathscr{G}$. Cette équivalence associe à un groupe G le groupe des caractères de G

$$X^*(G) = \mathrm{Hom}_{F^s}(G^s, \mathbf{G}_{m,F^s}).$$

Si G est un groupe algébrique sur un corps F et X une variété sur F, on appelle *torseur sur X sous G* ou *espace principal homogène sur X sous G* la donnée d'une variété $\mathscr{T}$ sur F munie d'un morphisme $\pi : \mathscr{T} \to X$ fidèlement plat et d'une action de G au-dessus de X de sorte que, localement pour la topologie plate, $\mathscr{T}$ soit isomorphe au produit $G \times X$. Autrement dit, si $m : G \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ définit

l'action de G, on a l'égalité $\pi\circ m=\pi\circ \mathrm{pr}_2$ et l'application

$$\rho : G\times_F \mathscr{T} \to \mathscr{T}\times_X \mathscr{T}$$

définie comme la composée des applications

$$G\times_F \mathscr{T} \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\delta} G\times_F \mathscr{T}\times_X \mathscr{T} \xrightarrow{m\times\mathrm{Id}} \mathscr{T}\times_X \mathscr{T}$$

où δ désigne la diagonale, est un isomorphisme.

Si X est une variété lisse et géométriquement intègre sur F telle que $\Gamma(\overline{X},\mathscr{O}_{\overline{X}})^\times=\overline{F}^\times$ et si x est un point rationnel de X, *un torseur universel* au-dessus de (X,x) est une paire $(\mathscr{T},t)$ où $\mathscr{T}$ est un torseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T et t un point rationnel de $\mathscr{T}$ au-dessus de x vérifiant en outre la propriété universelle suivante : pour toute paire $(\mathscr{T}',t')$ où $\mathscr{T}'$ est un torseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T' et t' un point rationnel de $\mathscr{T}'$ au-dessus de x, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : T\to T'$ et un unique morphisme $\psi : \mathscr{T}\to\mathscr{T}'$ au-dessus de X, compatible avec l'action de T sur $\mathscr{T}$ et de T' sur $\mathscr{T}'$ et tel que $\psi(t)=t'$.

Exemple 3.2. — Si G est un groupe semi-simple, et $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G, alors $(\widetilde{G},e)$ est un torseur universel au-dessus de (G,e) (cf [**Sk4**, §3.2]).

Expliquons maintenant comment obtenir de tels torseurs. Supposons que X soit une bonne variété sur F ; alors, pour tout groupe de type multiplicatif T de groupe de caractères $X^*(T)$, les classes d'isomorphismes de torseurs sur X sous T sont en bijection avec $H^1_{\mathrm{pl}}(X,T)$. Colliot-Thélène et Sansuc construisent alors une suite exacte canonique [**CTS5**, (2.0.2)]

$$0\to H^1(F,T)\to H^1_{\mathrm{pl}}(X,T)\xrightarrow{\rho}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(X^*(T),\mathrm{Pic}(\overline{X}))\xrightarrow{\delta}H^2(F,T).$$

Définitions 3.3. — Soit X une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0. Si le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ de X est un $\mathbf{Z}$-module de type fini, alors on note T_{NS} le groupe de type multiplicatif qui lui est associé par l'équivalence de catégorie ci-dessus. Un *torseur versel* est un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous T_{NS} dont la classe $[\mathscr{T}]$ dans $H^1_{\mathrm{pl}}(X,T_{\mathrm{NS}})$ vérifie $\rho([\mathscr{T}])=\mathrm{Id}$.

Remarque 3.4. — Sous les hypothèses précédentes, un torseur versel muni d'un point rationnel t au-dessus de x est un torseur universel au-dessus de (X,x). Nous avons choisi ici de distinguer la notion de torseur universel, solution du problème

universel, de celle de torseur versel, ce qui nous amène à diverger de la terminologie usuelle introduite par Colliot-Thélène et Sansuc pour lesquels tout torseur versel est dit universel.

Colliot-Thélène et Sansuc montrent que, sous les hypothèses qui précèdent, pour tout point rationnel x de X, il existe, à unique isomorphisme près, un unique torseur universel $(\mathcal{T}, t)$ au-dessus de (X, x). De plus si F est un corps de type fini sur son sous-corps premier, alors les classes d'isomorphismes de torseurs versels ayant un point rationnel sont en nombre fini [**CTS4**, proposition 2]. En notant $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de représentants de ces classes d'isomorphisme, on obtient une partition canonique finie de l'ensemble des points rationnels de X :

$$X(F) = \coprod_{i\in I} \pi_i(\mathcal{T}_i(F)),$$

$\pi_i : \mathcal{T}_i \to X$ désignant le morphisme associé au torseur $\mathcal{T}_i$.

L'intérêt des torseurs versels est souligné par les deux résultats suivants :

Théorème 3.5 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS5**, théorème 2.1.2]**)**
Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K. Soit $\mathcal{T}$ un torseur versel au-dessus de X et $\mathcal{T}^c$ une compactification projective et lisse de $\mathcal{T}$, alors

$$\mathrm{Br}(\mathcal{T}^c)/\mathrm{Br}_0(\mathcal{T}^c) = \{0\}.$$

En particulier

$$\mathcal{T}^c(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \mathcal{T}^c(\boldsymbol{A}_K).$$

Théorème 3.6 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS5**, corollaire 3.7.2]**)**
Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K. L'espace de Brauer-Manin $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est la réunion des images de $\prod_{v\in M_K} \mathcal{T}(K_v)$, où $\mathcal{T}$ décrit un système de représentants des torseurs versels au-dessus de V.

Remarque 3.7. — Cet énoncé montre d'une part que l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad V(K) \neq \varnothing$$

est vraie si les torseurs versels $\mathcal{T}$ sur V vérifient l'implication

$$\prod_{v\in M_K} \mathcal{T}(K_v) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(K) \neq \varnothing$$

et d'autre part que les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ si les compactifications projectives et lisses des torseurs versels au-dessus de V vérifient l'approximation faible.

Donnons quelques exemples où cette méthode a été utilisée :

Exemple 3.8. — Une surface de Châtelet S sur K est un modèle projectif et lisse d'une surface définie par une équation de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = P(X),$$

où P est un polynôme séparable de degré 3 ou 4. L'exemple d'Iskovskih décrit au paragraphe 2.1 est une surface de ce type. Pour ces surfaces, Colliot-Thélène et Sansuc ont démontré dans [**CTS4**, §IV] que les torseurs versels au-dessus de S sont K-birationnellement équivalents au produit d'une conique et d'une variété X intersection complète de deux quadriques dans $\mathbf{P}^7$. En outre, X contient deux droites gauches conjuguées. Le principe de Hasse et l'approximation faible ayant été démontrés pour ces variétés via la méthode de fibration décrite plus loin, on obtient que les points rationnels de S sont denses dans $S(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**], cf. également [**CT1**]).

Exemple 3.9. — Soit F un corps de groupe de Galois absolu $\mathscr{G}$. Un tore algébrique sur F est un groupe algébrique T sur F tel que $\overline{T}$ soit isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{G}^n_{m,\overline{F}}$. L'équivalence de catégorie entre groupes de type multiplicatif et $\mathbf{Z}$-modules de type fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$ envoie les tores algébriques sur les $\mathscr{G}$-réseaux, c'est-à-dire les $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$. Une variété torique généralisée est une variété irréductible V munie d'une action d'un tore algébrique T avec une orbite ouverte U telle que $\overline{U}$ soit isomorphe à $\overline{T}$.

Les torseurs universels au-dessus d'une variété torique projective et lisse ont d'abord été étudiés par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS1**, §4], ils ont ensuite été redécouverts par Delzant dans le cadre de la géométrie symplectique [**Del**]. Nous reprenons ici la construction de Cox [**Co**] qui en donne une description particulièrement élégante (cf. Salberger [**Sal2**] et Madore [**Madore**]).

Soit V une variété torique généralisée projective et lisse sur un corps F. Notons $\Sigma(1)$ l'ensemble des orbites de codimension 1 dans $\overline{V}$. On a alors une suite exacte naturelle de $\mathscr{G}$-réseaux

$$0 \to X^*(T) \to \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \to \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0$$

correspondant à une suite de tores algébriques

$$1 \to T_{\mathrm{NS}} \to T_{\Sigma(1)} \to T \to 1.$$

On considère alors l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \mathrm{Spec}(F^s[X_\sigma, \sigma \in \Sigma(1)]^{\mathscr{G}}).$$

Pour toute partie I de $\Sigma(1)$, on note H_I le sous-espace affine de $\overline{\mathbf{A}}_{\Sigma(1)}$ défini par le système d'équations

$$X_\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \in I.$$

Pour tout σ de $\Sigma(1)$, notons $D_\sigma = \overline{\sigma}$ le diviseur correspondant de $\overline{V}$. On note alors $\overline{X}$ le fermé réunion des sous-espaces H_I pour $I \subset \Sigma(1)$ tel que $\bigcap_{\sigma \in I} D_\sigma = \varnothing$. Ce fermé est défini sur F et l'ouvert $\mathscr{T} = \mathbf{A}_{\Sigma(1)} - X$ de l'espace affine $\mathbf{A}_{\Sigma(1)}$ est une variété torique pour le tore $T_{\Sigma(1)}$. Si x est un point rationnel dans l'orbite ouverte U de V, l'application naturelle $T \to V$ qui envoie l'élément neutre 1 de T sur x induit une application $T_{\Sigma(1)} \to V$ qui s'étend en un morphisme $\mathscr{T} \to V$. On vérifie que cela fait de $(\mathscr{T}, 1)$ un torseur universel au-dessus de (V, x). Les torseurs versels au-dessus de V sont isomorphes à $\mathscr{T}$ en tant que variétés. Ils vérifient donc tous l'approximation faible et les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$. Notons que les équations de normes considérées par Hasse sont des exemples de variétés toriques.

3.2. Techniques de fibration. — Cette méthode apparaît déjà dans l'étude faite par Hasse du cas des quadriques : si $n \geqslant 5$, le passage du cas de $n-1$ variables à celui de n variables peut se faire en utilisant des fibrations en quadriques.

Étant donné un morphisme $p : V \to B$, l'objectif est d'étudier si on peut déduire du fait que les obstructions de Brauer-Manin sont les seules pour les fibres de p que cela reste vrai pour V. Cette technique fut notamment explorée par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**], puis par Harari et Skorobogatov pour des fibrations au-dessus de la droite projective (cf. [**Sk1**], [**Ha1**], [**Ha3**] et [**Sk2**]). Un archétype de ce que donne cette démarche est le résultat suivant :

Théorème 3.10 **(Harari** [**Ha3**, proposition 3.1.1]**). —** *Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K et $p : V \to \mathbf{P}^1_K$ un morphisme dominant de fibre générique géométriquement irréductible. Supposons que :*

(i) *les fibres géométriques de p au-dessus de $\mathbf{A}^1_K$ sont irréductibles et de multiplicité 1,*

(ii) *la fibre générique géométrique $V_{\overline{K(T)}}$ de p est rationnellement connexe,*

(iii) *pour presque tout P appartenant à $\mathbf{P}^1(K)$ tel que la fibre V_P soit non singulière, on a*

$$\overline{V_P(K)} = V_P(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}.$$

Alors les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

La difficulté est d'approximer les points de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ par des points appartenant à l'espace de Brauer-Manin des fibres de l'application p. Identifions le corps des fonctions de $\mathbf{P}^1_K$ avec $K(T)$ et considérons le groupe

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V)/K(T)) = \bigcap_{v \in \mathscr{P}(K(V)/K(T))} \ker(\partial_v)$$

où ∂_v est le morphisme résidu défini dans le paragraphe 2.2 et $\mathscr{P}(K(V)/K(T))$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $K(V)$ qui sont triviales sur $K(T)$. Le groupe

$$\mathrm{coker}\Big(\mathrm{Br}(K(T)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V)/K(T))\Big)$$

est fini. Il existe donc un ouvert U de V de sorte que ce conoyau soit engendré par des éléments $A_1, \dots, A_r$ dans l'image de l'application $\mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(K(V))$. Harari montre alors le lemme suivant :

Lemme formel 3.11 **(Harari** [**Ha1**, corollaire 2.6.1]**,** [**CT4**]**)**
Soient V une bonne variété sur le corps de nombres K et U un ouvert non vide de V. Soit B un sous-groupe fini de $\mathrm{Br}(U)$. *Soit $(P_v)_{v \in M_K} \in \prod_{v \in M_K} U(K_v)$ tel que pour tout A de $B \cap \mathrm{Br}(V)$, on ait*

$$\langle (P_v)_{v \in M_K}, A \rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0 \ ;$$

alors, pour toute partie finie S de M_K, il existe $(M_v)_{v \in M_K}$ appartenant à l'espace des adèles de U tel que $M_v = P_v$ pour $v \in S$ et

$$\forall A \in B, \quad \sum_{v \in M_K} \langle A, M_v \rangle_v = 0.$$

D'autre part, Harari montre qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $\mathbf{P}^1(K)$ de sorte que pour tout P de H, le groupe $\mathrm{Br}(V_P)/\mathrm{Br}_0(V_P)$ pour la fibre soit engendré par les images des éléments $A_1, \dots, A_r$ de $\mathrm{Br}(K(V))$. La fin de la démonstration utilise un argument d'approximation forte pour les ensembles hilbertiens de la droite affine. Enfin l'énoncé donné ici utilise un résultat de Graber, Harris et Starr [**GHS**] qui montre que la condition de la proposition 3.1.1 de [**Ha3**] portant sur l'existence d'une section de la fibration sur $\overline{K}$ est vérifiée.

3.3. Une liste de résultats. — Nous reprenons ici une liste de cas connus donnée par Colliot-Thélène dans un exposé récent [**CT5**] (cf. également [**Sk4**, §5.2]).

L'ensemble des points rationnels de V est dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ si V est une variété d'un des types suivants :

- un modèle projectif et lisse d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est connexe (Voskresenskiĭ, Sansuc [**San**], Borovoi [**Bo2**]), ou d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe et simplement connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est abélien (Borovoi [**Bo2**]),
- un modèle projectif et lisse d'une intersection complète géométriquement irréductible et non conique de deux quadriques de $\mathbf{P}^n_K$ si $n \geqslant 8$ (Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**]) ; le groupe de Brauer étant trivial dans ce cas, ces variétés vérifient en fait le principe de Hasse et l'approximation faible,
- une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^n_K$ avec 3 points singuliers définis dans leur ensemble sur K, si $n \geqslant 3$ (Colliot-Thélène, Salberger [**CTSal**]) ; si, en outre, $n \neq 4$, alors l'approximation faible est vérifiée,
- une hypersurface cubique non singulière contenant une droite projective définie sur K dans $\mathbf{P}^n_K$ si $n \geqslant 3$ (Salberger et Skorobogatov [**Sal1**] et [**SaSk**] pour $n = 3$, Harari [**Ha3**, §5.2.2] si $n \geqslant 4$). Pour $n \geqslant 4$, on a également l'approximation faible.

Remarque 3.12. — Parmi les cas pour lesquels la question de la densité de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ reste ouverte, on peut mentionner :

- les surfaces cubiques générales ; la question de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour les surfaces cubiques diagonales a été explorée de manière algorithmique dans [**CTKS**] ;
- l'intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_K$ pour $7 \geqslant n \geqslant 4$, la difficulté étant de montrer que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule dans ce cas.

Remarque 3.13. — Sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques, Swinnerton-Dyer a obtenu les résultats qui suivent (cf. [**SD2**] et [**CT4**, §2 et 3]).

Si V est la surface projective cubique sur $\mathbf{Q}$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} a_i T_i^3 = 0$$

où les a_i sont des entiers non nuls sans facteur commun, non divisibles par un cube et vérifiant une des conditions suivantes :

(i) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et un nombre premier $q \neq 3$ divisant a_1 mais aucun des autres coefficients,

(ii) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et tel que les classes de a_1, a_2 et a_3 dans $\mathbf{F}_p^\times/\mathbf{F}_p^{\times 3}$ ne soient pas toutes égales,

alors V vérifie le principe de Hasse.

En outre, toujours sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques sur un corps de nombres, il a montré que toute hypersurface cubique diagonale dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ pour $n \geqslant 4$ vérifie le principe de Hasse.

Remarque 3.14. — D'autres résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de Schinzel. Cette hypothèse arithmétique forte s'énonce comme suit : soit $(f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathbf{Z}[X]$ une famille de polynômes irréductibles dont les coefficients dominants sont positifs et telle que $\operatorname{pgcd}_{n\in\mathbf{Z}}(\prod_{i=1}^m f_i(n)) = 1$; alors il existe une infinité de n tels que $f_i(n)$ soit premier pour $i = 1,\dots,m$. Le seul cas connu est le théorème de la progression arithmétique avec un polynôme de degré un. Ces résultats conditionnels concernent notamment des fibrations au-dessus de $\mathbf{P}^1_K$.

3.4. Le cas des espaces principaux homogènes sous une variété abélienne. — Jusqu'à maintenant nous sommes essentiellement resté dans le cadre des variétés géométriquement rationnellement connexes. Toutefois, Manin dans son exposé à Nice avait déjà montré que, pour une variété abélienne de groupe de Tate-Shafarevich fini, l'obstruction au principe de Hasse qu'il construisait était la seule. Le cas de l'approximation faible fut traité plus tard par Wang [**Wa**], ce qui donne l'énoncé suivant :

Théorème 3.15 **(Manin, Wang).** — *Soit A une variété abélienne sur le corps de nombres K et soit V un espace principal homogène sous A. Supposons que le groupe*

de Tate-Shafarevich de A

$$Ш^1(K,A) = \ker\Big(H^1(K,A) \to \prod_{v\in M_K} H^1(K_v,A)\Big)$$

soit fini; alors

(i) $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$.

(ii) *Notons $M_{\infty,K}$ l'ensembles des places archimédiennes de K Si l'adhérence de $A(K)$ dans $\prod_{v\in M_{\infty,K}}(K_v)$ est une partie ouverte de ce produit, alors*

$$\overline{V(K)} = V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}.$$

Remarques 3.16. — (i) L'accouplement $\langle A,\cdot\rangle_{A_K}$ étant localement constant, la conclusion de la deuxième assertion ne peut être valide sans l'hypothèse faite.

(ii) La finitude du groupe de Tate-Shafarevich est une conjecture forte mais classique pour les contemplateurs des variétés abéliennes.

4. L'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule

4.1. Analogues non abéliens du critère de Manin. — La notion de torseur versel donne une description alternative de l'obstruction de Brauer-Manin. Si $\mathscr{T}$ est un torseur sur V sous un groupe de type multiplicatif T, alors pour toute extension L de K et pour tout point x de $V(L)$, l'image inverse de $\mathscr{T}$ par x est un espace principal homogène sur $\mathrm{Spec}(L)$ sous T. Notons $\mathscr{T}(x)$ sa classe dans $H^1(L,T)$. On a alors que $\overline{V(K)}$ est contenu dans

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathscr{T}} = \left\{ (x_v)_{v\in M_K} \in V(\boldsymbol{A}_K) \;\middle|\; (\mathscr{T}(x_v))_{v\in M_K} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(K,T) \to \prod_{v\in M_K} H^1(K_v,T)\Big) \right\}.$$

Harari et Skorobogatov ont montré que cette inclusion subsiste si on remplace T par un groupe algébrique linéaire G arbitraire [**HS**]. Cet argument permet d'expliquer le premier exemple explicite de variété telle que

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad V(K) = \varnothing$$

produit par Skorobogatov en 1999 dans [**Sk3**]. Cet exemple est donné par les équations affines

$$(X^2+1)Y^2 = (X^2+2)Z^2 = 3(T^4 - 54T^2 - 117T - 243);$$

un modèle projectif et lisse de cette surface est donné par une surface bielliptique quotient d'un produit $C \times E$ où C et E sont deux courbes de genre 1. Dans le même esprit, Harari dans [**Ha4**] a créé une méthode fournissant des exemples où

$V(K)$ n'est pas dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ à partir de variétés dont le groupe fondamental géométrique n'est pas abélien.

Remarque 4.1. — Harari a montré dans [**Ha5**] que si G est un groupe linéaire abélien ou connexe, cette construction ne donne pas plus d'informations que l'obstruction de Brauer-Manin : l'espace obtenu contient $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

4.2. Lien avec des conjectures de Lang. — Soit $V \subset \mathbf{P}^n_K$ une hypersurface lisse de degré d et de dimension supérieure ou égale à trois. Le théorème de Lefschetz permet de montrer que, sous ces hypothèses, le quotient $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est trivial. Si $V(K)$ était dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$, il le serait dans $V(\boldsymbol{A}_K)$. Pour toute telle hypersurface possédant un point rationnnel, $V(K)$ serait dense pour la topologie de Zariski. Mais si $d > n$, V est de type général et cela contredirait une conjecture de Lang qui prédit que les points rationnels d'une variété de type général ne sont pas denses pour la topologie de Zariski [**La**, §3].

L'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$$

est également en contradiction avec des conjectures de Lang, bien que cela soit plus délicat à montrer. En 1995, Sarnak et Wang [**SW**] considèrent l'hypersurface de $\mathbf{P}^5_{\mathbf{Q}}$ définie par l'annulation du polynôme

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_5^{1130} + H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$$

avec

$$\begin{aligned} H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i=0}^{4} X_i^{1130} - 15(X_0X_1^4)^{226} + (X_1X_2^4)^{226} \\ + (X_2X_3^4)^{226} + (X_3X_4^4)^{226} + (X_4X_0^4)^{226} + (X_0^2X_2^3)^{226} \\ + (X_1^2X_3^3)^{226} + (X_2^2X_4^3)^{226} + (X_3^2X_0^3)^{226} + (X_4^2X_1^3)^{226}. \end{aligned}$$

Cette variété est hyperbolique au sens de Brody ou Kobayashi. Des conjectures de Lang prévoient que X ne possède qu'un nombre fini de points. Par conséquent, l'hypersurface X_k de $\mathbf{P}^4_K$ d'équation

$$F(kX_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 0$$

ne peut admettre de point rationnel pour k assez grand. Mais $X_k(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ pour une infinité de valeurs de k. Ces exemples ne peuvent pas être non plus expliqués par la construction d'Harari et Skorobogatov.

Plus récemment, Poonen dans [**Po**] montre que les conjectures de Lang entraînent l'existence d'intersections complètes lisses de dimension 3 dans $\mathbf{P}_K^N$ pour lesquelles le principe de Hasse n'est pas vérifié. Une telle variété est simplement connexe et de groupe de Brauer trivial et, à nouveau, l'absence de points rationnels ne peut donc être expliquée ni par la méthode de Manin ni par ses extensions non abéliennes.

5. L'obstruction de Brauer-Manin est-elle la seule ?

La formule de réciprocité du corps de classes permet également de construire des obstructions à l'existence d'un 0-cycle de degré 1. Plus généralement, ce paragraphe est consacré aux questions d'existence de cycles algébriques.

En combinant la dualité de Poitou-Tate avec la dualité de Poincaré, Saito [**Sa**] a construit pour toute bonne variété de dimension d sur K une suite exacte

$$\cdots \to H^{2i}_{\text{ét}}(V, \mu_n^{\otimes i}) \to \prod_{v\in M_K} \widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \to \mathrm{Hom}(H^{2j}_{\text{ét}}(V, \mu_n^{\otimes j}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \cdots$$

où $j = d + 1 - i$, où $\widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ désigne $H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour une place v non archimédienne, vaut $\{0\}$ si v est complexe et est un groupe fini de 2-torsion muni d'un morphisme naturel

$$H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \to \widetilde{H}^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$$

lorsque v est réelle et où $\prod_{v\in M_K} \widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ est le produit restreint des groupes précédents relativement aux images de $H^{2i}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur un ouvert $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S)$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ sur lequel n est inversible. Notons $\mathrm{CH}^i(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i de V modulo l'équivalence rationnelle. En utilisant l'application cycle

$$\mathrm{cl}_n : \mathrm{CH}^i(V_L) \to H^{2i}_{\text{ét}}(V_L, \mu_n^{\otimes i})$$

pour toute extension L de K, on obtient un accouplement (cf. [**CT2**])

$$(\cdot,\cdot) : \prod_{v\in M_K} \mathrm{CH}^i(V_{K_v}) \times H^{2j}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui est trivial sur l'image de $\mathrm{CH}^i(V)$ dans $\prod_{v\in M_K} \mathrm{CH}^i(V_{K_v})$. Colliot-Thélène [**CT2**] énonce alors la conjecture suivante :

Conjecture 5.1. — *Soit $z = (z_v)_{v \in M_K}$ un élément de $\prod_{v \in M_K} \mathrm{CH}^i(V_{K_v})$. Supposons que*

$$\forall \xi \in H^{2j}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)), \quad (z, \xi) = 0\,;$$

alors, pour tout $n > 0$, il existe $y \in \mathrm{CH}^i(V)$ tel que pour toute place non archimédienne v de K, on ait $\mathrm{cl}_n(y) = \mathrm{cl}_n(z_v)$ dans $H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$.

Remarques 5.2. — (i) Si le groupe de Tate-Shafarevich de la variété de Picard de V est fini, la conjecture est vraie pour $i = 1$.

(ii) Pour $i = \dim(V)$, on obtient un accouplement

$$\prod_{v \in M_K} \mathrm{CH}_0(V_{K_v}) \times \mathrm{Br}(V) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où CH_0 désigne le groupe des 0-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Dans ce cas, il est induit par les accouplements naturels

$$\begin{array}{rcl} Z_0(V_{K_v}) \times \mathrm{Br}(V) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \left(\sum_P n_P P, A\right) & \mapsto & \mathrm{inv}_v\left(\sum_P n_P \,\mathrm{cores}_{K_v(P)/K_v}(A(P))\right) \end{array}$$

définis par Manin [**Ma1**]. Une condition nécessaire pour l'existence d'un 0-cycle de degré 1 sur K est donc l'existence d'une famille de 0-cycles $z = (z_v)_{v \in M_K}$ tous de degré 1 tels que

$$\forall A \in \mathrm{Br}(V), \quad (z, A) = 0.$$

La conjecture impliquerait que cette condition est également suffisante ; autrement dit, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un 0-cycle de degré un serait la seule.

Cette conjecture pour $i = \dim(V)$ a été démontrée par Frossard [**Fr**] en utilisant des résultats de Salberger [**Sal1**] et Colliot-Thélène [**CT3**] pour les bonnes variétés V pour lesquelles il existe un morphisme propre et surjectif $\pi : V \to C$ de fibre générique une variété de Severi-Brauer dont l'indice est sans facteur carré au-dessus d'une courbe C projective et lisse, si le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de C est fini (cf. également l'article de [**vH**]).

6. Autres cadres

Mentionnons pour terminer que la problématique du principe de Hasse et de l'approximation faible a également été considérée dans un cadre fonctionnel :

– Dans le cas où le corps de base est $K = k(C)$ où C est une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos. En particulier, Colliot-Thélène et Gille ont montré dans [**CTG**] que l'approximation faible vaut pour les K-variétés géométriquement rationnellement connexes qui se ramènent par des fibrations à des espaces homogènes sous des groupes linéaires connexes.
– Le cas fonctionnel réel où le corps de base est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps des réels $\mathbf{R}$. En particulier, Ducros [**Du1**] et Scheiderer [**Sc**] ont montré que le principe de Hasse vaut pour les espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe. D'autre part, Ducros a prouvé que l'analogue de l'obstruction de Brauer-Manin dans ce cadre est la seule pour les fibrés en coniques ou, plus généralement, en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective ([**Du2**], [**Du3**]).

Remerciements. Je remercie chaleureusement ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai incroyablement bref et, en particulier, J.-L. Colliot-Thélène, A. Ducros, D. Harari et G. Rémond.

Références

[Az] J.-P. Azra, *Relations diophantiennes et la solution négative du 10-ème problème de Hilbert (d'après M. Davis, H. Putnam, J. Robinson et I. Matiasevitch)*, Séminaire Bourbaki 23-ème année, 1970/71, n° 383.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bo1] M. V. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), n° 1, 217–239.

[Bo2] ———, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[Bki] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats*, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1988.

[Ca] J. W. S. Cassels, *Lectures on elliptic curves*, London mathematical society student texts, vol. 24, Cambridge university press, Cambridge, 1991.

[Ch] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseignement Math. (2) **5** (1959), 153–170.

[Che] V. I. Chernousov, *The Hasse principle for groups of type E_8*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **306** (1989), n° 5, 1059–1063 ; English transl. in Soviet Math. Dokl. **39** (1989), n° 3, 592–596.

[CT1] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique des variétés rationnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (6) **1** (1992), n° 3, 295–336.

[CT2] ______, *Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale*, Algebraic K-theory (Seattle, 1997) (W. Raskind et C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, pp. 1–12.

[CT3] ______, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), n° 1, 101–124.

[CT4] ______, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001) (K. Böröczky, J. Kollar et T. Szamuely, eds.), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. 171–221.

[CT5] ______, *The local-global principle for rational points and zero-cycles*, Raymond and beverley sackler distinguished lectures in mathematics, Tel Aviv University, 2003.

[CTCS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320** (1980), 150–191.

[CTG] J.-L. Colliot-Thélène et P. Gille, *Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo-Alto, 2002), Progress in Math., vol. 226, Birkäuser, Basel, 2003, à paraître.

[CTKS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky et J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[CTSal] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, *Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc (3) **58** (1989), n° 3, 519–549.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ______, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[CTS3] ______, *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 967–970.

[CTS4] ______, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS5] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[CTSSD1] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107.

[CTSSD2] ———, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

[Co] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[De] J.-M. Deshouillers, *L'étude des formes cubiques rationnelles via la méthode du cercle (d'après D. R. Heath-Brown, C. Hooley et R. C. Vaughan)*, Séminaire Bourbaki 42-ème année, 1989/90, n° 720.

[Du1] A. Ducros, *Principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous les groupes classiques sur un corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 1*, Manuscripta Math. **89** (1996), n° 3, 335–354.

[Du2] ———, *L'obstruction de réciprocité à l'existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d'une courbe réelle*, J. reine angew. Math. **504** (1998), 73–114.

[Du3] ———, *Fibrations en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective sur le corps des fonctions d'une courbe réelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), n° 1, 71–75.

[Ei] M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme*, Math. Z. **43** (1938), 481–494.

[Fr] E. Frossard, *Obstruction de Brauer-Manin pour les zéros-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, J. reine angew. Math. **557** (2003), 81–101.

[GHS] T. Graber, J. Harris et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), n° 1, 57–67.

[Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 88–188.

[vH] J. van Hamel, *The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves*, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), n° 2, 317–337.

[Ha1] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), n° 1, 221–260.

[Ha2] ———, *Obstructions de Manin transcendantes*, Number theory (Paris 1993-1994), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 235, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 75–87.

[Ha3] ———, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 143–166.

[Ha4] ———, *Weak approximation and non-abelian fundamental groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), n° 4, 467–484.

[Ha5] ———, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322** (2002), n° 4, 811–826.

[HS] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130** (2002), n° 3, 241–273.

[Harder1] G. Harder, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengrupppen, I*, Math. Z. **90** (1965), 404–428.

[Harder2] ———, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengrupppen, II*, Math. Z. **92** (1966), 396–415.

[Harder3] ———, *Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen*, Jber. Deutsche Math.-Verein **70** (1967), 182–216.

[Has] H. Hasse, *Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen*, J. reine angew. Math. **152** (1923), 129–148.

[Hasse] ———, *Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol*, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. H **1** (1931), 64–69.

[HB] D. R. Heath-Brown, *Cubic forms in ten variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), n° 2, 225–257.

[Ho1] C. Hooley, *On nonary cubic forms*, J. reine angew. Math. **386** (1988), 32–98.

[Ho2] ———, *On nonary cubic forms. III*, J. reine angew. Math. **456** (1994), 53–63.

[Kn] M. Kneser, *Hasse principle for H^1 of simply connected groups*, Algebraic groups and discontinuous subgroups (Boulder, 1965), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, 1966, pp. 159–163.

[Lan] W. Landherr, *Über einfache Liesche Ringe*, Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. **11** (1935), 41–64.

[La] S. Lang, *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[LW] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.

[Li] C.-E. Lind, *Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven von Geschlecht Eins*, Diss. Uppsala, 1940.

[Madore] D. Madore, *Very free R-equivalence on toric models* (2003).

[Ma1] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Ma2] ———, *A course in mathematical logic*, Graduate Texts in Math., vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Ma3] ———, *Cubic forms (second edition)*, North-Holland Math. Library, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[Mi] H. Minkowski, *Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können*, J. reine angew. Math. **106** (1890), 5–26.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Ni] H. Nishimura, *Some remarks on rational points*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **29** (1955), 189–192.

[PR] V. P. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and applied mathematics, vol. 139, Academic press, London, 1991.

[Po] B. Poonen, *The Hasse principle for complete intersections in projective space*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 307–311.

[Re] H. Reichardt, *Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen*, J. reine angew. Math. **184** (1942), 12–18.

[Sa] S. Saito, *A global duality theorem for varieties over global fields*, Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, 1987) (J. F. Jardine et V. P. Snaith, eds.), Kluwer Academic Publishers, Lake Louise, 1987, 1989, pp. 425–444.

[Sal1] P. Salberger, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. Math. **91** (1988), n° 3, 505–524.

[Sal2] ———, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[SaSk] P. Salberger et A. N. Skorobogatov, *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), n° 2, 517–536.

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[SW] P. Sarnak et L. Wang, *Some hypersurfaces in* $\mathbf{P}^4$ *and the Hasse principle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 319–322.

[Sc] C. Scheiderer, *Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one*, Invent. Math. **125** (1996), n° 2, 307–365.

[Sch] W. M. Schmidt, *The density of integer points on homogeneous varieties*, Acta. Math. **154** (1985), n° 3–4, 243–296.

[Sei] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 365–374.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ———, *Cours d'arithmétique*, Le mathématicien, PUF, Paris, 1988.

[Skinner] C. M. Skinner, *Forms over number fields and weak approximation*, Compositio Math. **106** (1997), n° 1, 11–29.

[Sk1] A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres (Paris, 1988–1989) (C. Goldstein, ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhaüser, Boston, 1990, pp. 205–219.

[Sk2] ———, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), n° 5, 905–923.

[Sk3] ———, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), n° 2, 399–424.

[Sk4] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in math., vol. 144, Cambridge University Press, 2001.

[SD1] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Two special cubic surfaces*, Mathematika **9** (1962), 54–56.

[SD2] ———, *The solubility of diagonal cubic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), 891–912.

[Ta] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.

[Wa] L. Wang, *Brauer-Manin obstruction to weak approximation on abelian varieties*, Israel J. Math. **94** (1996), 189–200.

[Wi] O. Wittenberg, *Transcendental Brauer-Manin obstruction on a pencil of elliptic curves*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo-Alto, 2002), Progress in Math., vol. 226, Birkäuser, Basel, 2003, à paraître.

Mars 2004

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, F–38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX

E-mail : `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

THE VIRTUAL POINCARÉ POLYNOMIALS OF HOMOGENEOUS SPACES

by

Michel Brion & Emmanuel Peyre

Abstract. — We factor the virtual Poincaré polynomial of every homogeneous space G/H, where G is a complex linear algebraic group and H is an algebraic subgroup, as $t^{2u}(t^2-1)^r Q_{G/H}(t^2)$ for a polynomial $Q_{G/H}$ with non-negative integer coefficients. Moreover, we show that $Q_{G/H}(t^2)$ divides the virtual Poincaré polynomial of every regular embedding of G/H, if G and H are connected.

Résumé. — Nous factorisons le polynôme de Poincaré virtuel de tout espaces homogène G/H, où G est un groupe algébrique linéaire et H un sous-groupe algébrique en $t^{2u}(t^2-1)^r Q_{G/H}(t^2)$ pour un polynôme $Q_{G/H}$ avec des coefficients positifs. Nous montrons de plus que $Q_{G/H}(t^2)$ divise le polynôme de Poincaré virtuel de tout plongement régulier de G/H si G et H sont connexes.

Introduction and statement of the results

One associates to every complex algebraic variety X (possibly singular, or reducible) its *virtual Poincaré polynomial* $P_X(t)$, uniquely determined by the following properties:

(i) (additivity) $P_X(t) = P_Y(t) + P_{X-Y}(t)$ for every closed subvariety Y.

(ii) If X is smooth and complete, then $P_X(t) = \sum_m \dim H^m(X)\, t^m$ is the usual Poincaré polynomial.

Then $P_X(t) = P_Y(t)\, P_F(t)$ for every fibration $F \to X \to Y$ which is locally trivial for the Zariski topology.

Specifically, we have

$$P_X(t) = \sum_{j,m} (-1)^{j+m} \dim \mathrm{gr}^m_W(H^j_c(X))\, t^m,$$

where $gr_W^m(H_c^j(X))$ denotes the m-th subquotient of the weight filtration on the j-th cohomology group of X with compact supports and complex coefficients (see [**11**] 4.5 and [**7**]). More generally, the mixed Hodge structure on $H_c^*(X)$ yields a polynomial $E_X(s,t)$ in two variables, satisfying the same properties of additivity and multiplicativity, and such that $P_X(t) = E_X(-t,-t)$ (see [**5**] and [**2**] §3 for more details).

In this paper, we investigate the E-polynomials of homogeneous spaces under linear algebraic groups, and of their *regular* embeddings in the sense of [**3**]. It turns out that these polynomials behave much better than the usual Poincaré polynomials; the latter are generally unknown for homogeneous spaces. To state our main results, we introduce the following notation.

Let G be a complex connected linear algebraic group and let H be a closed subgroup. Let r_H (resp. u_H) be the rank (resp. the dimension of a maximal unipotent subgroup) of H, and define similarly r_G, u_G. Choose maximal reductive subgroups $H^{\mathrm{red}} \subseteq H$, $G^{\mathrm{red}} \subseteq G$ such that $H^{\mathrm{red}} \subseteq G^{\mathrm{red}}$, and maximal tori $T_H \subseteq H^{\mathrm{red}}$, $T_G = T \subseteq G^{\mathrm{red}}$ such that $T_H \subseteq T$; let W_H, $W_G = W$ be the corresponding Weyl groups. The Lie algebras of $G, H, \ldots$ will be denoted $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}, \ldots$

The group W_H acts on the Lie algebra $\mathfrak{t}_H$ and on its ring of polynomial functions, $\mathbf{C}[\mathfrak{t}_H] = R(T_H)$. The invariant subring $\mathbf{C}[\mathfrak{t}_H]^{W_H} = R(H)$ is a finitely generated, graded algebra over $\mathbf{C}$, isomorphic to $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^{\mathrm{red}}]^{H^{\mathrm{red}}}$. Its Hilbert series $\sum_{m=0}^{\infty} \dim R(H)_m\, t^m$ is the expansion of a rational function of t, denoted $F_H(t)$.

Since G is connected, $R(G)$ is a polynomial ring, and there exists a graded subspace $\mathscr{H}$ of $R(T)$ such that the multiplication map induces an isomorphism of $R(G) \otimes \mathscr{H}$ onto $R(T)$. Moreover, $\mathscr{H}$ is isomorphic to the cohomology space of the flag variety $\mathscr{F}(G)$, with complex coefficients. This isomorphism doubles degrees, and the Hodge structure on $H^*(\mathscr{F}(G))$ is pure. Therefore, the Poincaré polynomial $P_{\mathscr{F}(G)}$ is even, and we have

$$E_{\mathscr{F}(G)}(s,t) = P_{\mathscr{F}(G)}((st)^{1/2}) \text{ and } \frac{1}{(1-t)^{r_G}} = F_T(t) = F_G(t) P_{\mathscr{F}(G)}(t^{1/2}).$$

Moreover, we have

$$P_{\mathscr{F}(G)}(q^{1/2}) = |\mathscr{F}(G)(\mathbf{F}_q)|$$

for every finite field $\mathbf{F}_q$ with q elements. Here $|\mathscr{F}(G)(\mathbf{F}_q)|$ denotes the number of points over $\mathbf{F}_q$ of $\mathscr{F}(G)$ regarded as the flag variety of the split $\mathbf{Z}$-form of G^{red}.

Our first main result generalizes this to an arbitrary homogeneous space G/H, with some twists. Notice that both G and its closed subgroup H are defined over a finitely generated subring of $\mathbf{C}$, so that $(G/H)(\mathbf{F}_q)$ makes sense for large q.

Theorem 1. — *(a) With preceding notation, the virtual Poincaré polynomial $P_{G/H}$ is even, and we have*

$$E_{G/H}(s,t) = P_{G/H}((st)^{1/2}) \textit{ and } F_H(t) = F_G(t)\, t^{\dim(G/H)} P_{G/H}(t^{-1/2}).$$

Moreover, we have for all large q:

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = P_{G/H}(q^{1/2}).$$

(b) There exists a polynomial $Q_{G/H}$ with non-negative integer coefficients, such that

$$P_{G/H}(t^{1/2}) = t^{u_G - u_H}(t-1)^{r_G - r_H} Q_{G/H}(t).$$

Moreover,

$$Q_{G/H}(t) = Q_{G^{\mathrm{red}}/H^{\mathrm{red}}}(t).$$

The degree of $Q_{G/H}$ equals $\dim \mathscr{F}(G) - \dim \mathscr{F}(H^0)$, *with leading coefficient* 1, *and $Q_{G/H}(1) = \frac{|W_G|}{|W_H|}$.*
(c) If H is connected, then

$$Q_{G/H}(t) = \frac{P_{\mathscr{F}(G)}(t^{1/2})}{P_{\mathscr{F}(H)}(t^{1/2})} = t^{\dim \mathscr{F}(G) - \dim \mathscr{F}(H)} Q_{G/H}(t^{-1}).$$

In particular, $Q_{G/H}(0) = 1$.

It follows that $u_G - u_H$, $r_G - r_H$ and $Q_{G/H}$ depend only on the complex algebraic variety G/H (in fact, $r_G - r_H$ is a topological invariant, see [**1**] 4.3).

As another consequence, the Poincaré polynomial of the flag variety of a semi-simple group is divisible by the Poincaré polynomial of the flag variety of every semi-simple subgroup, and the quotient has non-negative coefficients.

Theorem 1 is proved in Section 1. Notice that (a) can be deduced from the fibration

$$G/H \to BH \to BG,$$

where BH (resp. BG) denotes the classifying space of H (resp. G); then the cohomology ring of BH is isomorphic to $R(H)$ with degrees doubled, so that the

Poincaré series of BH is $F_H(t^2)$. If moreover H is connected, then

$$P_{G/H}(t^{1/2}) = \frac{P_G(t^{1/2})}{P_H(t^{1/2})} = t^{u_G - u_H}(t-1)^{r_G - r_H}\frac{P_{\mathscr{F}(G)}(t^{1/2})}{P_{\mathscr{F}(H)}(t^{1/2})},$$

as follows from [**7**] Theorem 6.1 (ii); and a similar relation holds for $|(G/H)(\mathbf{F}_q)|$, by Lang's theorem.

So the main point of Theorem 1 is (b), especially the non-negativity of coefficients of $Q_{G/H}$. We deduce it (together with (a) and (c)) from a geometric construction that may be of independent interest. In loose words, we obtain a locally trivial fibration (for the Zariski topology)

$$S \to G/H \to Z$$

where S is a torus of dimension $r_G - r_H$, and Z is an algebraic variety satisfying Poincaré duality and whose cohomology is purely algebraic (see Lemmas 3 and 4 for a precise statement). Thus, $E_{G/H}(s,t) = (1-st)^{r_G - r_H} E_Z(s,t)$, and $E_Z(s,t)$ is the value at $(st)^{1/2}$ of the Poincaré polynomial of $H_c^*(Z)$. In the case where G and H have the same rank, it follows that $P_{G/H}(t)$ is the Poincaré polynomial of $H_c^*(G/H)$.

Next we turn to the E-polynomials of *regular embeddings*. Recall from [**3**] that a regular embedding of G/H is a smooth complex algebraic variety X endowed with an algebraic action of G, such that:
(i) X contains an open orbit isomorphic to G/H.
(ii) The complement of this open orbit is a union of smooth irreducible divisors (the *boundary divisors*), with normal crossings.
(iii) Every orbit closure is a partial intersection of the boundary divisors, and its normal bundle contains an open orbit.

Recall also that those homogeneous spaces under a connected reductive group G which admit a complete regular embedding are exactly the *spherical* homogeneous spaces, i.e., those where a Borel subgroup of G acts with an open orbit.

Since every regular embedding X contains only finitely many orbits, we have

$$E_X(s,t) = P_X((st)^{1/2})$$

by Theorem 1 and additivity. Therefore, it suffices to consider the virtual Poincaré polynomial P_X. Our second main result yields a factorization of that polynomial:

Theorem 2. — *Let X be a regular embedding of G/H, where H is connected. Then, for every orbit G/H' in X, the polynomial $Q_{G/H}(t)$ divides $Q_{G/H'}(t)$, and the quotient has non-negative integer coefficients.*

As a consequence, there exists a polynomial $R_X(t)$ with integer coefficients, such that

$$P_X(t^{1/2}) = Q_{G/H}(t)R_X(t).$$

If moreover X is complete, then the coefficients of $R_X(t)$ are non-negative.

The assumption that H is connected cannot be suppressed, as shown by an example at the end of Section 2. This section is devoted to the proof of Theorem 2. Again, the main point is the non-negativity of coefficients of $R_X(t)$; for this, we show that the equivariant cohomology ring of X is a free module of finite rank over a polynomial subring generated by $R(H)$ and indeterminates of degree 2. It would be interesting to obtain a topological interpretation of the polynomial $R_X(t)$. However, the factorization $P_X(t^{1/2}) = Q_{G/H}(t)R_X(t)$ does not originate in a fibration with total space X, as shown by the following simple example.

Consider the complex projective space $X = \mathbf{P}^{2m+1}$ of odd dimension, where the projective special orthogonal group $G = SO(2m+2)/\{\pm 1\}$ acts linearly. Then X consists of 2 orbits: the quadric Q^{2m}, and its complement with isotropy group $H \cong O(2m+1)/\{\pm 1\} \cong SO(2m+1)$, a connected subgroup; one checks that X is a regular completion of G/H. We have

$$P_{G/H}(t^{1/2}) = P_{\mathbf{P}^{2m+1}}(t^{1/2}) - P_{Q^{2m}}(t^{1/2}) = t^m(t^{m+1} - 1),$$

so that $Q_{G/H}(t) = t^m + t^{m-1} + \cdots + 1$ and that $R_X(t) = t^m + 1$. How to explain the factorization

$$P_{\mathbf{P}^{2m+1}}(t^{1/2}) = t^{2m+1} + t^{2m} + \cdots + 1 = (t^m + t^{m-1} + \cdots + 1)(t^m + 1)$$

in topological terms ?

Notice that the complex projective space $\mathbf{P}^{2m}$ of even dimension is a regular completion of the homogeneous space $SO(2m+1)/O(2m)$ (where $O(2m)$ is not connected) by the quadric $\mathbf{Q}^{2m-1}$; this yields $Q_{SO(2m+1)/O(2m)}(t) = 1$.

These are examples of complete symmetric varieties. In fact, the Poincaré polynomials of all such varieties were determined by De Concini and Springer (see [**6**]) who deduced the virtual Poincaré polynomials of adjoint symmetric spaces. Their results were the starting point for the present work, as the factorizations of Theorems 1 and 2 can be seen on examples of [**6**].

For instance, by Theorem 2, the virtual Poincaré polynomial of any regular embeding X of a connected reductive group G (viewed as a homogeneous space under the action of $G \times G$ by left and right multiplication) is divisible by $Q_G(t^2) = P_{\mathscr{F}(G)}(t^2)$. When G is semi-simple adjoint and X is its canonical completion, this agrees with the closed formula for $P_X(t)$ given in [**6**] p. 96.

1. Proof of Theorem 1

In what follows, we use [**10**] as a general reference for mixed Hodge structure, and [**14**] for algebraic groups.

We begin with an easy reduction to the case where both groups G and H are reductive. Let $R_u(H)$ be the unipotent radical of H. This unipotent group is isomorphic, as an algebraic variety, to some $\mathbf{C}^u$. Since H is the semi-direct product of $R_u(H)$ with H^{red}, we have $u = u_H - u_{H^{\mathrm{red}}}$. The quotient map $G \to G/H$ factors through

$$p : G/H^{\mathrm{red}} \to G/H,$$

a fibration with fiber $R_u(H) \cong \mathbf{C}^u$. Thus, the pullback map $H^*(G/H^{\mathrm{red}}) \to H^*(G/H)$ is an isomorphism of mixed Hodge structures. By Poincaré duality, it follows that

$$E_{G/H^{\mathrm{red}}}(s,t) = (st)^u\, E_{G/H}(s,t).$$

We now show that

$$|(G/H^{\mathrm{red}})(\mathbf{F}_q)| = q^u\, |(G/H)(\mathbf{F}_q)|$$

for q such that H^{red} is defined over $\mathbf{F}_q$ and that H is the semidirect product of $R_u(H)$ with H^{red} over $\overline{\mathbf{F}_q}$. This follows from Grothendieck's trace formula; as an alternative proof using elementary arguments of Galois cohomology, we check that the map

$$\pi : (G/H^{\mathrm{red}})(\mathbf{F}_q) \to (G/H)(\mathbf{F}_q)$$

is surjective with all fibers of order q^u. We denote by F the Frobenius endomorphism of $G(\overline{\mathbf{F}_q})$, with fixed point subgroup $G(\mathbf{F}_q)$.

Let $x \in G(\overline{\mathbf{F}_q})$ such that $xH \in (G/H)(\mathbf{F}_q)$. Then $x^{-1}F(x) \in H(\overline{\mathbf{F}_q})$. Write $x^{-1}F(x) = yz$ where $y \in R_u(H)(\overline{\mathbf{F}_q})$ and $z \in H^{\mathrm{red}}(\overline{\mathbf{F}_q})$. Since $R_u(H)(\overline{\mathbf{F}_q})$ is connected and invariant under $\mathrm{Int}(z) \circ F$, there exists $h \in R_u(H)(\overline{\mathbf{F}_q})$ such that

$y = hzF(h^{-1})z^{-1}$. Thus, $x^{-1}F(x) = hzF(h^{-1})$. Replacing x by xh, we may assume that $x^{-1}F(x) \in H^{\mathrm{red}}(\overline{\mathbf{F}_q})$. This proves the surjectivity of π.

Let now $x,y \in G(\overline{\mathbf{F}_q})$ such that $xH^{\mathrm{red}}, yH^{\mathrm{red}} \in (G/H^{\mathrm{red}})(\mathbf{F}_q)$ and that $y \in xH$. We may assume that $y = xz$ where $z \in R_u(H)(\overline{\mathbf{F}_q})$. Then $H^{\mathrm{red}}(\overline{\mathbf{F}_q})$ contains $x^{-1}F(x)$ and $y^{-1}F(y) = z^{-1}x^{-1}F(x)F(z)$. Since $H^{\mathrm{red}}(\overline{\mathbf{F}_q})$ normalizes $R_u(H)(\overline{\mathbf{F}_q})$ and their intersection is trivial, it follows that $z^{-1}x^{-1}F(x)F(z)F(x^{-1})x = 1$. Therefore, $xzx^{-1} \in (xR_u(H)x^{-1})(\mathbf{F}_q)$, and $xR_u(H)x^{-1}$ is a F-stable connected unipotent group of dimension u. So every fiber of π has order q^u.

Therefore, if Theorem 1 holds for G/H^{red}, then it holds for G/H, and

$$Q_{G/H^{\mathrm{red}}}(t) = Q_{G/H}(t).$$

So we may assume that $H = H^{\mathrm{red}}$. Then, using the fibration

$$G/H \to G/R_u(G)H \cong G^{\mathrm{red}}/H^{\mathrm{red}}$$

with fiber $R_u(G)$, one reduces similarly to the case where $G = G^{\mathrm{red}}$.

We assume from now on that G and H are reductive; as a consequence, G/H is affine.

Lemma 3. — *The following conditions are equivalent for a subtorus S of T, with Lie algebra $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$:*
(i) All isotropy subgroups of S acting on G/H are finite, and S is maximal for this property.
(ii) $\mathfrak{s} \oplus w\mathfrak{t}_H = \mathfrak{t}$ for all $w \in W$.

As a consequence, there exist subtori S satisfying (i), and all of them have dimension $r_G - r_H$. Moreover, the double coset space $S\backslash G/H$ is an affine algebraic variety, with at worst quotient singularities by finite abelian groups.

Proof. — Let $g \in G$, then the finiteness of the isotropy group of gH in S is equivalent to: $\mathfrak{s} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = 0$. As there are only finitely many isotropy groups for a torus action on an algebraic variety, the finiteness of all isotropy groups for the S-action on G/H is equivalent to: $\mathfrak{s} \cap \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{h} = 0$. Since

$$\mathfrak{s} \cap \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \cap (\mathfrak{t} \cap \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{t}_H) = \mathfrak{s} \cap W\mathfrak{t}_H,$$

this amounts to: $\mathfrak{s} \cap w\mathfrak{t}_H = \{0\}$ for all $w \in W$.

Now $\mathfrak{t}$ has a W-invariant rational structure, defined by the lattice of differentials at 1 of one-parameter subgroups of T; the rational subspaces are exactly the Lie algebras of subtori. Moreover, any rational subspace $\mathfrak{s}$ intersecting trivially

all subspaces $w\mathfrak{t}_H$ is contained in a rational complement to all these subspaces. This proves equivalence of conditions (i) and (ii), and the assertion on existence of subtori S and their dimension. For any such subtorus S, all orbits in the affine variety G/H are closed, and the isotropy groups are finite abelian groups. This implies the latter assertion. □

Remark. Lemma 3 extends to arbitrary homogeneous spaces G/H, except for the assertion that $S\backslash G/H$ is an affine algebraic variety. In fact, the quotient space $S\backslash G/H$ may well be non-separated if G/H is not affine. For example, let $G = \mathrm{SL}(2)$ and let H be its standard unipotent subgroup. The diagonal torus $D \cong \mathbf{C}^*$ of G acts on $G/H \cong \mathbf{C}^2 - \{0\}$ by $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$. All isotropy groups are trivial, but the quotient space is a classical example of a non-separated scheme : the affine line with its origin doubled.

Next choose a subtorus S of T satisfying the conditions of Lemma 3 and let

$$Z = S\backslash G/H$$

with quotient map $f : G/H \to Z$. Then there exists a decomposition of Z into finitely many disjoint, locally closed subvarieties Z_j $(j \in J)$, together with finite subgroups F_j $(j \in J)$ of S, such that every $f^{-1}(Z_j)$ is equivariantly isomorphic to $S/F_j \times Z_j$. Since S/F_j is a torus of dimension $r_G - r_H$, we have $E_{S/F_j}(s, t) = (st - 1)^{r_G - r_H}$, whence

$$E_{G/H}(s, t) = (st - 1)^{r_G - r_H} E_Z(s, t).$$

Likewise, we have for all large q:

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = (q - 1)^{r_G - r_H} |Z(\mathbf{F}_q)|.$$

Since Z has at worst finite quotient singularities, it satisfies Poincaré duality over $\mathbf{C}$. As a consequence, each closed algebraic subvariety of codimension (say) r in Z has a cohomology class in $H^{2r}(Z)$. This yields the (degree doubling) cycle map

$$\mathrm{cl} : A^*(Z) \to H^*(Z),$$

where the left hand side is the Chow group of Z, graded by codimension (see [**12**] Chapter 19).

Lemma 4. — *With preceding notation,* cl *is an isomorphism over* $\mathbf{C}$. *Moreover, the graded ring $H^*(Z)$ is isomorphic to $R(S) \otimes_{R(G)} R(H)$, and the usual Poincaré*

polynomial of Z equals

$$\frac{F_S(t^2)F_H(t^2)}{F_G(t^2)} = \frac{F_H(t^2)}{(1-t^2)^{r_G - r_H} F_G(t^2)}.$$

Proof. — We use equivariant cohomology, see e.g. [**13**]. Consider the action of T on G/H, then the equivariant cohomology ring $H_T^*(G/H)$ is clearly isomorphic to $H_H^*(G/T)$. Since $H_G^*(G/T) = H^*(BT) = R(T)$ is a free module of rank $|W|$ over $H_G^*(pt) = H^*(BG) = R(G)$, the Eilenberg-Moore spectral sequence (see [**13**] III.2) yields an isomorphism

$$H_H^*(G/T) \cong H^*(BH) \otimes_{H^*(BG)} H_G^*(G/T),$$

that is,

$$H_T^*(G/H) \cong R(T) \otimes_{R(G)} R(H).$$

This is a commutative, positively graded algebra, finite and free of rank $|W|$ over its subring $R(H)$. The latter is a Cohen-Macaulay ring of dimension r_H. Thus, the ring $H_T^*(G/H)$ is Cohen-Macaulay of dimension r_H as well, with Poincaré series

$$\frac{F_T(t^2)F_H(t^2)}{F_G(t^2)} = \frac{F_H(t^2)}{(1-t^2)^{r_G} F_G(t^2)}.$$

Since the subtorus S of T acts on G/H with finite isotropy groups, we have

$$H_T^*(G/H) \cong H_{T/S}^*(S\backslash G/H) \cong H_{T/S}^*(Z).$$

This is a finitely generated module over $H_{T/S}^*(pt) = R(T/S)$. But T/S is a torus of dimension r_H, so that $R(T/S)$ is a polynomial ring in r_H variables. Since $H_T^*(G/H)$ is Cohen-Macaulay of dimension r_H and finite over $R(T/S)$, it is a free module over that ring, by the Auslander-Buchbaum formula (see [**9**] 19.3). By the Eilenberg-Moore spectral sequence again, it follows that the canonical map

$$\mathbf{C} \otimes_{R(T/S)} H_{T/S}^*(Z) \to H^*(Z)$$

is an isomorphism. Therefore, we have

$$H^*(Z) \cong \mathbf{C} \otimes_{R(T/S)} R(T) \otimes_{R(G)} R(H).$$

But $\mathbf{C} \otimes_{R(T/S)} R(T) \cong R(S)$; thus, we obtain $H^*(Z) \cong R(S) \otimes_{R(G)} R(H)$. Moreover, $H^*(Z)$ is the quotient of $H_{T/S}^*(Z)$ by a regular sequence consisting of r_H homogeneous elements of degree 2. Therefore, the usual Poincaré polynomial of Z equals

$$(1-t^2)^{r_H} \frac{F_T(t^2)F_H(t^2)}{F_G(t^2)} = \frac{F_H(t^2)}{(1-t^2)^{r_G - r_H} F_G(t^2)}.$$

It remains to compare cohomology of Z with its Chow group. For this, we use equivariant intersection theory, see [**8**] and also [**4**]. The equivariant Chow group with complex coefficients (graded by codimension) $A_T^*(G/H)_{\mathbf{C}}$ is again isomorphic to $R(T)\otimes_{R(G)} R(H)$, by [**4**] Corollary 12. Moreover, for any scheme X with an action of T, the natural map

$$R(S)\otimes_{R(T)} A_T^*(X)_{\mathbf{C}} \to A_S^*(X)_{\mathbf{C}}$$

is an isomorphism (to see this, one reduces to the case where the quotient $X \to X/T$ exists and is a principal T-bundle, and one argues as in [**4**], p. 17). As a consequence, the map

$$R(S)\otimes_{R(G)} R(H) \to A_S^*(G/H)_{\mathbf{C}}$$

is an isomorphism; it follows that the cycle map

$$\mathrm{cl} : A_S^*(G/H)_{\mathbf{C}} \to H_S^*(G/H) = H^*(Z)$$

defined in [**8**] 2.8, is an isomorphism as well. Finally, $A_S^*(G/H)_{\mathbf{C}}$ is isomorphic to $A^*(S\backslash G/H)_{\mathbf{C}} = A^*(Z)_{\mathbf{C}}$ by [**8**] Proposition 4 and Theorem 4. □

Remark. By Lemma 4, the Betti numbers of $Z = S\backslash G/H$ are independent of the choice of S. But the algebra structure of $H^*(Z)$ may depend on S, as shown by the example where $H = \mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)$ is embedded diagonally in $H\times H = G$. Furthermore, there may exist no subtorus S acting on G/H with finite constant isotropy groups; this happens, for instance, if $G = \mathrm{SL}(3)$ and $H = \mathrm{SO}(3)$.

As a final preparation for the proof of Theorem 1, we need the following easy result of invariant theory.

Lemma 5. — *We have*

$$\lim_{t\to 1}(1-t)^{r_H} F_H(t) = \frac{1}{|W_H|}.$$

Moroever, the degree of the rational function $F_H(t)$ is at most $-\dim \mathscr{F}(H^0)$, with equality if H is connected.

Proof. — The former assertion is a (well-known) consequence of Molien's formula for the invariant ring $R(H) = \mathbf{C}[\mathfrak{t}_H]^{W_H}$:

$$F_H(t) = \frac{1}{|W_H|}\sum_{w\in W_H}\frac{1}{\det_{\mathfrak{t}_H}(1-tw^{-1})}.$$

For the latter assertion, recall that $R(H^0)$ is a graded polynomial ring with homogeneous generators of degrees $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_r$, where $r = r_H$. Thus, the

degree of $F_{H^0}(t)$ is $-d_1 - \cdots - d_r = -\dim \mathcal{F}(H^0)$. Moreover, denoting Γ the finite group H/H^0, we have an exact sequence

$$1 \to W_{H^0} \to W_H \to \Gamma \to 1.$$

Thus, Γ acts on $R(H^0)$ with invariant subring $R(H)$. Since $R(H^0)$ is a graded polynomial ring, it contains a graded Γ-stable subspace V such that the map $\mathrm{Sym}(V) \to R(H^0)$ is an isomorphism. It follows that V decomposes as a direct sum of homogeneous components V_d ; the increasing sequence of their degrees (with multiplicities given by the dimensions of the V_d) is the same as $(d_1, \ldots, d_r)$. Now

$$F_H(t) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\prod_d \det_{V_d}(1 - t^d \gamma^{-1})}$$

is a sum of rational functions of the same degree, equal to $-d_1 - \cdots - d_r = -\dim \mathcal{F}(H^0)$. □

We can now complete the proof of Theorem 1. By Lemma 4, the cohomology of Z vanishes in all odd degrees, and every space $H^{2m}(Z)$ is generated by algebraic classes. Thus, the Hodge structure on that space is pure of type (m, m), and the same holds for the dual space $H_c^{2m}(Z)$. In other words,

$$E_Z(s, t) = \sum_m \dim H_c^{2m}(Z)\, (st)^m.$$

Using Poincaré duality and Lemma 4, it follows that

$$E_Z(s, t) = (st)^{\dim(Z)} \frac{F_H((st)^{-1})}{(1 - (st)^{-1})^{r_G - r_H} F_G((st)^{-1})},$$

so that

$$E_{G/H}(s, t) = \frac{(st)^{\dim(G/H)} F_H((st)^{-1})}{F_G((st)^{-1})}.$$

On the other hand, we have

$$|Z(\mathbf{F}_q)| = \sum_m \dim H_c^{2m}(Z)\, q^m$$

as follows from Grothendieck's trace formula and purity of the weight filtration on $H_c^*(Z)$ (alternatively, one may show directly that

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{q^{\dim(G/H)} F_H(q^{-1})}{F_G(q^{-1})},$$

by arguments of Galois cohomology). This implies (a).

Taking degrees in the equality of rational functions

$$F_H(t) = F_G(t)t^{\dim(G/H)}\, P_{G/H}(t^{-1/2})$$

and using Lemma 5, we obtain that $P_{G/H}(t^{1/2})$ is divisible by

$$t^{\dim(G/H)-\dim\mathscr{F}(G)+\dim\mathscr{F}(H)} = t^{u_G-u_H}.$$

Thus, we can write $P_{G/H}(t^{1/2}) = t^{u_G-u_H}(t-1)^{r_G-r_H}Q_{G/H}(t)$ for a polynomial $Q_{G/H}(t)$ with integer coefficients. Since $P_Z(t) = t^{u_G-u_H}Q_{G/H}(t)$, these coefficients are non-negative. Moreover, Lemma 5 implies that $Q_{G/H}(1) = \frac{|W_G|}{|W_H|}$.

For any irreducible variety X, the degree of $P_X(t)$ is $2\dim(X)$, with leading coefficient 1. It follows that the degree of $Q_{G/H}(t)$ is $\dim\mathscr{F}(G) - \dim\mathscr{F}(H^0)$, with leading coefficient 1. This completes the proof of (b). Finally, (c) follows from (a), (b) and Poincaré duality for $\mathscr{F}(G)$ and $\mathscr{F}(H)$.

2. Proof of Theorem 2

Let Y be an orbit in X. Replacing X by the union of all orbits whose closure contains Y (an open G-invariant subset of X), we may assume that Y is closed in X. Then Y is the transversal intersection of boundary divisors, say $X_1, \dots, X_r$. Choose $x \in Y$ and denote by H' its isotropy subgroup. Then H' acts on the normal space to Y at x; this action is diagonalizable and given by r linearly independent characters, see [**3**]. This defines a surjective group homomorphism $H' \to (\mathbf{C}^*)^r$, whence an exact sequence

$$1 \to K \to H' \to (\mathbf{C}^*)^r \to 1$$

where K is the kernel of the H'-action on the normal space. Let K^{red} be a maximal reductive subgroup of K.

We claim that K^{red} is contained in a conjugate of H. To check this, consider the linear action on K^{red} on the tangent space T_xX and choose a K^{red}-invariant complement N to the K^{red}-invariant subspace T_xY; by construction, K^{red} fixes N pointwise. Then we can choose a K^{red}-invariant subvariety Z of X, such that Z is smooth at x and that $T_xZ = N$. Therefore, K^{red} fixes pointwise a neighborhood of x in Z, and this neighborhood meets the open orbit G/H.

Thus, we may assume that K^{red} is contained in H. Since H is connected, we can apply [7] Theorem 6.1 (ii) to the fibration $G/K^{\mathrm{red}} \to G/H$ with fiber

H/K^{red}, to obtain

$$P_{G/K^{\mathrm{red}}}(t) = P_{G/H}(t) P_{H/K^{\mathrm{red}}}(t).$$

Together with Theorem 1, it follows that

$$Q_{G/K}(t) = Q_{G/H}(t) Q_{H/K^{\mathrm{red}}}(t).$$

On the other hand, the right action of $H'/K \cong (\mathbf{C}^*)^r$ on G/K defines a principal $(\mathbf{C}^*)^r$-bundle $G/K \to G/H'$. All such bundles are locally trivial, whence $P_{G/K}(t) = (t^2 - 1)^r P_{G/H'}(t)$, and

$$Q_{G/K}(t) = Q_{G/H'}(t).$$

So, $Q_{G/H}(t)$ divides $Q_{G/H'}(t)$ and the quotient has non-negative coefficients.

By additivity, it follows that $Q_{G/H}(t)$ divides $P_X(t^{1/2})$; the quotient is an even polynomial, $R_X(t)$. Since $Q_{G/H}(0) = 1$, the coefficients of $R_X(t)$ are integers. However, their non-negativity for complete X is not an obvious fact, because of the factor $t^{u_G - u_{H'}}(t-1)^{r_G - r_{H'}}$ in each $P_{G/H'}(t^{1/2})$. For this reason, we shall present an alternative proof of the existence of $R_X(t)$, which will also yield this non-negativity property.

We begin by relating the virtual Poincaré polynomial $P_X(t)$ to equivariant cohomology of X. If V is a $\mathbf{Z}$-graded complex vector space such that every homogeneous component V_m is finite dimensional, let $F_V(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dim(V_m)\, t^m$ be its Poincaré series. If X is a variety where G acts algebraically, then $H^*_G(X)$ is a finitely generated, graded module over $H^*(BG) = R(G)$. As a consequence, the series $F_{H^*_G(X)}(t)$ is the expansion of a rational function, for which we use the same notation.

Lemma 6. — *For every regular embedding X, the rational function $F_{H^*_G(X)}(t)$ is even, and*

$$F_{H^*_G(X)}(t^{1/2}) = F_G(t)\, t^{\dim(X)} P_X(t^{-1/2}).$$

Proof. — In the case where $X = G/H$ is a unique orbit, we have $H^*_G(X) \cong H^*(BH) \cong R(H)$, whence $F_{H^*_G(X)}(t) = F_H(t^2)$. So the assertion follows from Theorem 1.

In the general case, choose a closed orbit Y in X, of codimension r, with complement U. The inclusion map $i : Y \to X$ defines a Gysin morphism

$$i_* : H^*_G(Y) \to H^*_G(X),$$

of degree $2r$. By [**3**], this map and the restriction map $H^*_G(X) \to H^*_G(U)$ fit into a short exact sequence

$$0 \to H^*_G(Y) \to H^*_G(X) \to H^*_G(U) \to 0.$$

It follows that

$$F_{H^*_G(X)}(t) = t^{2r} F_{H^*_G(Y)}(t) + F_{H^*_G(U)}(t).$$

Since $P_X = P_Y + P_U$, our assertion follows by induction. □

Remark. Lemma 6 admits a simpler formulation in terms of equivariant Borel-Moore homology $H^G_*(X)$, as defined in [**8**]. Indeed, by Poincaré duality, the rational function $F_{H^G_*(X)}(t)$ is even, and

$$F_{H^G_*(X)}(t^{1/2}) = F_G(t^{-1}) P_X(t^{1/2}).$$

In fact this holds, more generally, for every variety X where G acts with finitely many orbits.

Next let $X_1, \dots, X_n$ be the boundary divisors of the regular embedding X, and let $z_1, \dots, z_n \in H^2_G(X)$ be their equivariant cohomology classes. In the ring $H^*_G(X)$, consider the ideal I_X of $H^*_G(X)$ generated by $z_1, \dots, z_n$, and the ideal J_X, kernel of the restriction map

$$\rho : H^*_G(X) \to H^*_G(G/H) \cong R(H).$$

Clearly, I_X is contained in J_X, and the latter ideal is prime. Moreover, ρ is surjective by [**3**], so that we have an exact sequence

$$0 \to J_X \to H^*_G(X) \to R(H) \to 0.$$

Examples show that I_X may differ from J_X; but these ideals are closely related, as shown by the following result.

Lemma 7. — *We have $J_X^{2^N} \subseteq I_X$, where N denotes the number of G-orbits in X.*

Proof. — We argue by induction on N. If $N = 1$, then $X = G/H$ so that both I_X and J_X are trivial. In the general case, we use the notation of the proof of Lemma 6. The (surjective) restriction map $H^*_G(X) \to H^*_G(U)$ sends I_X (resp. J_X) onto I_U (resp. J_U).

Let $\alpha \in J_X$. Since $J_U^{2^{N-1}} \subseteq I_U$ by the induction assumption, we may assume that

$$\alpha^{2^{N-1}} = i_* \beta$$

for some $\beta \in H^*_G(Y)$. Now we have in $H^*_G(X)$:

$$\alpha^{2^N} = (i_*\beta) \cup (i_*\beta) = i_*(\beta \cup i^* i_* \beta) = i_*(\beta^2 \cup i^* i_* 1) = (i_*\beta^2) \cup (i_* 1),$$

by the projection formula. Moreover, i_*1 is the equivariant cohomology class of Y in X. Since Y is a transversal intersection of r boundary divisors, say $X_1, \ldots, X_r$, we have $i_*1 = z_1 \cdots z_r \in I_X$, and $\alpha^{2^N} \in I_X$ as well. □

Since H is connected, $R(H)$ is a graded polynomial ring, so that we can choose a graded subalgebra R of $H^*_G(X)$ that restricts isomorphically to $H^*_G(G/H) \cong R(H)$ via ρ.

Lemma 8. — *$H^*_G(X)$ is finite over its subring generated by R and $z_1, \ldots, z_n$.*

Proof. — Since the algebra $H^*_G(X)$ is positively graded, it suffices to prove that the quotient

$$H^*_G(X)/(z_1, \ldots, z_n) = H^*_G(X)/I_X$$

is a finitely generated R-module. By Lemma 7, $H^*_G(X)/I_X$ is a quotient of $H^*_G(X)/J^m_X$ for some positive integer m. Consider the finite filtration of $H^*_G(X)/J^m_X$ by the powers of the image of J_X, and notice that all the subquotients $J^p_X H^*_G(X)/J^{p+1}_X H^*_G(X)$ are finite modules over $H^*_G(X)/J_X = R(H)$. Since the latter is isomorphic to R, the assertion follows. □

We now need the following variant of the Noether normalization theorem.

Lemma 9. — *Let A be a finitely generated, positively graded algebra over an infinite field k. Let $y_1, \ldots, y_m$ be homogeneous, algebraically independent elements of A and let $z_1, \ldots, z_n$ be homogeneous elements of degree 1, such that A is finite over its subalgebra generated by $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$. Then there exist a non-negative integer n' and homogeneous elements $y'_1, \ldots, y'_m, z'_1, \ldots, z'_{n'}$ of A such that:*
(i) $y'_i - y_i \in k[z_1, \ldots, z_n]$ for $1 \leqslant i \leqslant m$.
(ii) $z'_1, \ldots, z'_{n'}$ are linear combinations of $z_1, \ldots, z_n$.
(iii) $y'_1, \ldots, y'_m, z'_1, \ldots, z'_{n'}$ are algebraically independent, and A is finite over the subring that they generate.

Proof. — The argument is similar to that of the classical Noether normalization theorem, see [**9**] 13.1; we present it for completeness. We argue by induction on n, the case where $n = 0$ being trivial. In the general case, we may assume

that $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ are algebraically dependent, and we choose a polynomial relation

$$P(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

We may assume that this relation is (weighted) homogeneous and involves z_n. Let $d_1, \ldots, d_m$ be the degrees of $y_1, \ldots, y_m$. Define $y'_1, \ldots, y'_m, z'_1, \ldots, z'_{n-1}$ by

$$y_i = y'_i + a_i z_n^{d_i}, \; z_j = z'_j + b_j z_n$$

where $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{n-1}$ are in k. Then

$$P(y'_1 + a_1 z_n^{d_1}, \ldots, y'_m + a_m z_n^{d_m}, z'_1 + b_1 z_n, \ldots, z'_{n-1} + b_{n-1} z_n, z_n) = 0.$$

Regarding the right-hand side as a polynomial in z_n, the coefficient of the leading term equals

$$P(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1).$$

Since k is infinite and by our assumptions on P, we may choose $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{n-1}$ so that this coefficient is non-zero. Then z_n is integral over the subring A' of A generated by $y'_1, \ldots, y'_m$ and $z'_1, \ldots, z'_{n-1}$. We conclude by the induction assumption for A'. □

We can now show that $Q_{G/H}(t)$ divides $P_X(t^{1/2})$. Apply Lemma 9 to the algebra $H^*_G(X)$ and to homogeneous, algebraically independent generators of its polynomial subalgebra R; then we obtain another polynomial subalgebra R' (restricting isomorphically to $R(H)$) and linear combinations $z'_1, \ldots, z'_{n'}$ of $z_1, \ldots, z_n$, such that $H^*_G(X)$ is finite over its polynomial subring $R'[z'_1, \ldots, z'_{n'}]$. Let $f(t)$ be the associated Hilbert polynomial, then

$$F_{H^*_G(X)}(t^{1/2}) = \frac{F_H(t) f(t)}{(1-t)^{n'}}.$$

Moreeover, $f(1)$ is the rank of the $R'[z'_1, \ldots, z'_{n'}]$-module $H^*_G(X)$, a positive integer. On the other hand, we have by Lemma 6:

$$F_{H^*_G(X)}(t^{1/2}) = F_G(t)\, t^{\dim(G/H)} P_X(t^{-1/2})$$

and, by Theorem 1:

$$F_H(t) = F_G(t)\, t^{\dim(G/H) - u_G + u_H} (t^{-1} - 1)^{r_G - r_H} Q_{G/H}(t^{-1}).$$

This yields

$$P_X(t^{1/2}) = t^{n' + u_G - u_H} (t-1)^{r_G - r_H - n'} Q_{G/H}(t) f(t^{-1}).$$

Since $f(1)Q_{G/H}(1) \neq 0$, we must have $r_G - r_H - n' \geqslant 0$; and since $Q_{G/H}(0) = 1$, the Laurent polynomial $t^{n'+u_G-u_H}(t-1)^{r_G-r_H-n'}f(t^{-1})$ must be a polynomial. Thus, $Q_{G/H}(t)$ divides $P_X(t^{1/2})$.

If moreover X is complete, then the $R(G)$-module $H^*_G(X)$ is free by [**3**]. Thus, the ring $H^*_G(X)$ is Cohen-Macaulay of dimension r_G. Since this ring is finite over $R'[z'_1, \ldots, z'_{n'}]$, a polynomial subring, $H^*_G(X)$ is a free module over that subring, and we have $r_G = r_H + n'$. Therefore, the Hilbert polynomial $f(t)$ has non-negative coefficients, so that the same holds for the polynomial

$$t^{n'+u_G-u_H}f(t^{-1}) = \frac{P_X(t^{1/2})}{Q_{G/H}(t)}.$$

Example. We show that Theorem 2 does not extend to all homogeneous spaces G/H. Let $G = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$ with maximal torus $T = D \times D$, where D denotes the diagonal torus of SL(2). Let $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, then the element (n, n) of G normalizes T. Let H be the subgroup of G generated by T and by (n, n). The homogeneous space G/H is spherical, and we have $T_H = T$. Denoting by x, y the obvious coordinates on $\mathfrak{t}$, one obtains $R(G) = \mathbf{C}[x^2, y^2]$ and $R(H) = \mathbf{C}[x^2, xy, y^2]$, whence

$$F_G(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2},\ F_H(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2},\ P_{G/H}(t^{1/2}) = t^4 + t^2 \text{ and } Q_{G/H}(t) = 1 + t^2.$$

We now construct a regular completion X of G/H, such that $P_X(t^{1/2})$ is not divisible by $Q_{G/H}(t)$. Consider the variety

$$Y = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

where G acts by

$$(g_1, g_2)(a, b, c, d) = (g_1 a, g_1 b, g_2 c, g_2 d).$$

Then Y is a regular embedding of G/T. Moreover, the right action of (n, n) on G/T extends to the involution σ of Y, defined by

$$\sigma(a, b, c, d) = (b, a, d, c).$$

The fixed point subset Y^σ is the closed G-orbit, $\mathrm{diag}(\mathbf{P}^1) \times \mathrm{diag}(\mathbf{P}^1)$. Since the actions of G and σ commute, G acts on the quotient Y/σ. The latter is singular along the image Z of Y^σ; the normal space to Y/σ at every point of Z is isomorphic to the quotient of $\mathbf{C}^2$ by the involution $(s, t) \mapsto (-s, -t)$. Thus, blowing up Z along Y/σ yields a smooth projective embedding X of G/H.

One may check that X is regular and that

$$P_X(t^{1/2}) = t^4 + 3t^3 + 6t^2 + 3t + 1,$$

which is prime to $Q_{G/H}(t) = t^2 + 1$. One may also check that $Q_{G/H'}(t)$ equals $t+1$ or $(t+1)^2$ for the other orbits; thus, $Q_{G/H}(t)$ is prime to all other $Q_{G/H'}(t)$.

References

[1] C. Allday and V. Puppe: Cohomological methods in transformation groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **32** (1993), Cambridge University Press, 1993.

[2] V. V. Batyrev and D. I. Dais: Strong McKay correspondence, string-theoretic Hodge numbers and mirror symmetry, *Topology* **35** (1996), 901-929.

[3] E. Bifet, C. De Concini and C. Procesi: Cohomology of regular embeddings, *Adv. Math.* **82** (1990), 1-34.

[4] M. Brion: Equivariant cohomology and equivariant intersection theory, pp. 1-37 in: Representation theories and algebraic geometry, Nato ASI Series **514**, Kluwer, 1998.

[5] V. I. Danilov and A. A. Khovanskii: Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers, *Math. USSR Izvestiya* **29** (1987), 279-298.

[6] C. De Concini and T. A. Springer: Betti numbers of complete symmetric varieties, pp. 87-107 in: Geometry Today, Progress in Math. **60**, Birkhäuser, 1985.

[7] A. Dimca and G. Lehrer: Purity and equivariant weight polynomials, pp. 161-181 in: Algebraic groups and Lie groups, Australian Math. Soc. Lecture Series **9**, Cambridge University Press, 1997.

[8] D. Edidin and W. Graham: Equivariant intersection theory, *Invent. math.* **131** (1998), 595-634.

[9] D. Eisenbud: Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Graduate Text in Math. **150**, Springer-Verlag, 1995.

[10] F. El Zein: Introduction à la théorie de Hodge mixte, Hermann, 1991.

[11] W. Fulton: Introduction to Toric Varieties, Annals of Math. Studies **131**, Princeton University Press, 1993.

[12] W. Fulton: Intersection Theory, Ergeb. Math. **2**, Springer-Verlag 1998.

[13] W. Y. Hsiang: Cohomology theory of topological transformation groups, Ergeb. Math. **85**, Springer, 1975.

[14] T. A. Springer: Linear algebraic groups. Second edition, Progress in Math. **9**, Birkhäuser 1998.

Michel Brion, Université de Grenoble I, Département de Mathématiques, Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France
E-mail : Michel.Brion@ujf-grenoble.fr, Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

Emmanuel Peyre,

COUNTING POINTS OF HOMOGENEOUS VARIETIES OVER FINITE FIELDS

by

Michel Brion and Emmanuel Peyre

Abstract. — Let X be an algebraic variety over a finite field $\mathbf{F}_q$, homogeneous under a linear algebraic group. We show that there exists an integer N such that for any positive integer n in a fixed residue class mod N, the number of rational points of X over $\mathbf{F}_{q^n}$ is a polynomial function of q^n with integer coefficients. Moreover, the shifted polynomials, where q^n is formally replaced with $q^n + 1$, have non-negative coefficients.

Résumé. — Soit X une variété algébrique sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ homogène sous un groupe algébrique linéaire. Nous démontrons que le nombre de points rationnels de X sur $\mathbf{F}_{q^n}$ est une fonction périodiquement polynomiale en q^n avec des coefficients entiers. De plus, les polynômes obtenus en remplaçant formellement q^n par $q^n + 1$ sont à coefficients positifs.

1. Introduction and statement of the results

Given an algebraic variety X over a finite field $k = \mathbf{F}_q$, one may consider the points of X which are rational over an arbitrary finite field extension $\mathbf{F}_{q^n}$. The number of these points is given by Grothendieck's trace formula,

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})| = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \operatorname{Tr}\left(F^n, H^i_c(X)\right), \tag{1.1}$$

where F denotes the Frobenius endomorphism of $X_{\bar{k}}$ and $H^i_c(X)$ stands for the ith ℓ-adic cohomology group of $X_{\bar{k}}$ with proper supports, ℓ being a prime not dividing q (see e.g. [**De77**, Thm. 3.2,p. 86]). Moreover, by celebrated results of Deligne (see [**De74, De80**]), each eigenvalue α of F acting on $H^i_c(X)$ is an algebraic number, and all the complex conjugates of α have absolute value $q^{\frac{w}{2}}$

for some non-negative integer $w \leqslant i$, with equality if X is smooth and complete. This implies the general properties of the counting function $n \mapsto |X(\mathbf{F}_{q^n})|$ predicted by the Weil conjectures.

We shall obtain more specific properties of that function under the assumption that X is *homogeneous*, i.e., admits an action of an algebraic group G over k such that $X(\bar{k})$ is a unique orbit of $G(\bar{k})$; then X is of course smooth, but possibly non-complete. We begin with a structure result for these varieties:

Theorem 1.1. — *Let X be a homogeneous variety over a finite field k. Then*

$$X \cong (A \times Y)/\Gamma, \tag{1.2}$$

where A is an abelian k-variety, Y is a homogeneous k-variety under a connected linear algebraic k-group H, and Γ is a finite commutative k-group scheme which acts faithfully on A by translations, and acts faithfully on Y by automorphisms commuting with the action of H.

Moreover, A, Y and Γ are unique up to compatible isomorphisms, Y/Γ is a homogeneous k-variety under H, and there is a canonical isomorphism

$$H^*_c(X) \cong H^*(A) \otimes H^*_c(Y/\Gamma). \tag{1.3}$$

In particular,

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})| = |A(\mathbf{F}_{q^n})| \; |(Y/\Gamma)(\mathbf{F}_{q^n})|. \tag{1.4}$$

Theorem 1.1 is deduced in Section 2 from a structure result for algebraic groups over finite fields, due to Arima (see [**Ar60**]).

In view of (1.4) and the known results on the counting function of abelian varieties, we may concentrate on homogeneous varieties under linear algebraic groups. For these, we obtain:

Theorem 1.2. — *Let X be a variety over $\mathbf{F}_q$, homogeneous under a linear algebraic group. Then $|X(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a periodic polynomial fonction of q^n with integer coefficients.*

By this, we mean that there exist a positive integer N and polynomials $P_0(t),\dots,P_{N-1}(t)$ in $\mathbf{Z}[t]$ such that

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})| = P_r(q^n) \quad \text{whenever} \quad n \equiv r \pmod{N}. \tag{1.5}$$

We then say that N is a *period* of the function $q^n \mapsto |X(\mathbf{F}_{q^n})|$.

Notice that $|X(\mathbf{F}_{q^n})|$ is generally not a polynomial function of q^n. For example, if $\mathrm{char}(k) \neq 2$, then the affine conic $X \subset \mathbf{A}^2_k$ with equation $x^2 - ay^2 = b$ is homogeneous under the corresponding orthogonal group and satisfies $|X(\mathbf{F}_{q^n})| = q^n - \varepsilon$, where $\varepsilon = 1$ if a is a square in $\mathbf{F}_{q^n}$, and $\varepsilon = -1$ otherwise.

Theorem 1.2 is proved in Section 3, by showing that each eigenvalue of F acting on $H^*_c(X)$ is the product of a non-negative integer power of q with a root of unity (Proposition 3.1). As a consequence, there exists a unique polynomial $P_X(t) \in \mathbf{Z}[t]$ such that

$$P_X(q^n) = |X(\mathbf{F}_{q^n})| \tag{1.6}$$

for any sufficiently divisible, positive integer n. Our third result yields a factorization of that polynomial:

Theorem 1.3. — *Let X be a variety over $\mathbf{F}_q$, homogeneous under a linear algebraic group, and let $P_X(t)$ be the polynomial satisfying (1.6). Then there exists a non-negative integer r such that*

$$P_X(t) = (t-1)^r Q_X(t), \tag{1.7}$$

where $Q_X(t)$ is a polynomial with non-negative integer coefficients.

This result follows from [**BP02**, Thm. 1] when X is obtained from a complex homogeneous variety by reduction modulo a large prime. However, certain homogeneous varieties over finite fields do not admit any lift to varieties in characteristic zero (see [**LR97**] for specific examples). Also, the approach of [**BP02**] relies on the existence of Levi subgroups, which fails in our setting, and on arguments of equivariant cohomology which would require non-trivial modifications.

We present a proof of Theorem 1.3 in Section 4; it combines the reduction steps of Section 3 with a result adapted from [**BP02**] in a simplified form (Lemma 4.1, the only ingredient which relies on methods of ℓ-adic cohomology).

In Section 5, we show how to replace this ingredient with arguments of invariant theory, along the lines of classical results of Steinberg (see [**St68**, §14]). This yields elementary proofs of Theorems 1.2 and 1.3, and also of our most surprising result:

Theorem 1.4. — *Let X be a variety over $\mathbf{F}_q$, homogeneous under a linear algebraic group, and let $P_0(t), \ldots, P_{N-1}(t)$ be the polynomials satisfying (1.5). Then the shifted polynomials $P_0(t+1), \ldots, P_{N-1}(t+1)$ have non-negative coefficients.*

A similar positivity result has been conjectured by Mozgovoy and Reineke in the setting of quiver moduli (see [**MR07**, Rem. 6.5] and also [**Re08**, Conj. 8.5]).

They also observed that the existence of a decomposition of the considered moduli spaces into locally closed tori would yield a geometric explanation for their positivity property. Note that such a decomposition generally does not exist in the setting of homogenenous varieties under linear algebraic groups, since some of these varieties are not rational over $\bar{k}$ (this follows from results of Saltman, see [**Sa84a, Sa84b**]). This raises the question of finding a (geometric or combinatorial) interpretation of the coefficients of our shifted polynomials.

Acknowledgements. We thank J.-P. Serre and D. Timashev for their interest in our results, and for useful suggestions. Also, we thank the referee for his careful reading and valuable comments.

Notation and conventions. Throughout this article, we fix a finite field k of characteristic p, with q elements. Also, we fix an algebraic closure $\bar{k}$ of k. For any positive integer n, we denote by $\mathbf{F}_{q^n}$ the unique subfield of $\bar{k}$ with q^n elements; in particular, $k = \mathbf{F}_q$.

By a *variety*, we mean a geometrically integral, separated scheme of finite type over k; morphisms (resp. products) of varieties are understood to be over k. An *algebraic group* G is a smooth group scheme of finite type over k; then each connected component of G is a variety. The identity element of G is denoted by e_G. Notice that every algebraic subgroup of G is "defined over k" with our conventions.

For any variety X, we set

$$X_{\mathbf{F}_{q^n}} := X \times_k \mathbf{F}_{q^n}, \quad X_{\bar{k}} := X \times_k \bar{k},$$

and we denote by F the Frobenius endomorphism of $X_{\bar{k}}$.

Given a prime number $\ell \neq p$, we set for simplicity

$$H^i(X) := H^i(X_{\bar{k}}; \mathbf{Q}_\ell),$$

the ith ℓ-adic cohomology group of $X_{\bar{k}}$. Our notation for cohomology with proper supports is

$$H^i_c(X) := H^i_c(X_{\bar{k}}; \mathbf{Q}_\ell).$$

We shall use [**DG70, Sp98**] as general references for algebraic groups, and [**De77, Mi80**] for étale cohomology.

2. Proof of Theorem 1.1

We may choose a connected algebraic group G such that X is homogeneous under G. By [**Ar60**, Thm. 1] (see also [**Ro61**, Thm. 4]), we have $G = AH$,

where A is the largest abelian subvariety of G, and H is the largest connected linear algebraic subgroup of G; moreover, A and H centralize each other. So $G \cong (A \times H)/(A \cap H)$, and we may assume that

$$G = A \times H.$$

Replacing A and H with quotient groups, we may also assume that they both act faithfully on X.

Let G_X denote the kernel of the G-action on X. Then G_X is isomorphic to a subgroup of A (via the first projection) and also to a subgroup of H. Since A is complete and H is affine, it follows that G_X is finite.

Also, X contains a k-rational point x by Lang's theorem (see [**La56**, Thm. 2]). Denote by G_x its isotropy subgroup-scheme; then G_x is linear by the finiteness of G_X together with [**Ma63**, Lem. p. 154]. In particular, the reduced neutral component K of G_x (a closed normal subgroup of G_x) is contained in H. Let $\Gamma := G_x/K$; then Γ is a finite group scheme acting on G/K on the right via the action of G_x on G by right multiplication, and

$$X \cong G/G_x \cong (G/K)/\Gamma \cong (A \times Y)/\Gamma,$$

where $Y := H/K$. Denoting by $N_G(K)$ the normalizer of K in G, we have

$$\Gamma \subset N_G(K)/K = A \times N_H(K)/K.$$

Let Γ' denote the kernel of the projection of Γ to A. Then Γ' (resp. Γ/Γ') is isomorphic to a subgroup scheme of $N_H(K)/K$ (resp. of A), and

$$X \cong \Big(A \times (Y/\Gamma')\Big)/(\Gamma/\Gamma').$$

Thus, we may assume that Γ acts faithfully on A by translations. On the other hand, Γ acts H-equivariantly on Y via the action of $N_H(K)/K$ on H/K on the right, and the kernel of this action is isomorphic to a subgroup scheme of A which acts trivially on X. Thus, Γ acts faithfully on Y. This completes the proof of (1.2).

To show the uniqueness of (A, Y, Γ), we begin with a general observation:

***Lemma 2.1.* —** *Let X be a variety over an arbitrary field. Then there exists an abelian variety A_X acting faithfully on X, such that any action of an abelian variety A on X arises from a unique homomorphism $A \to A_X$. Moreover, A_X centralizes any connected algebraic group of automorphisms of X.*

Proof. — Consider an abelian variety A and a connected algebraic group G, both acting faithfully on X. Then the morphism

$$f : A \times G \times X \longrightarrow X, \quad (a, g, x) \longmapsto aga^{-1}g^{-1}x$$

satisfies $f(a, e_G, x) = x$. By the rigidity lemma of [**Mu70**, p. 43], it follows that f factors through the projection $p_{23} : A \times G \times X \to G \times X$. But $f(e_A, g, x) = x$, so that f factors through the projection $p_3 : A \times G \times X \to X$. In other words, A centralizes G.

On the other hand, A stabilizes the smooth locus U of X. By a theorem of Nishi and Matsumura, the induced action of A on the Albanese variety of U has a finite kernel (see [**Ma63**], or [**Br07**, Thm. 2] for a more modern version). In particular, $\dim(A) \leqslant \dim(U) = \dim(X)$.

Combining these two steps yields our statement. □

Remark 2.2. — For a variety X, there may exist an infinite sequence $G_1 \subset G_2 \subset \cdots G_n \subset \cdots$ of closed connected algebraic groups, all acting faithfully and transitively on X. This happens e.g. for the variety $X = (\mathbf{A}^1 - \{0\}) \times \mathbf{A}^1$ and the group G_n consisting of automorphisms

$$x \longmapsto ax, \quad y \longmapsto y + P(x),$$

where $a \in \mathbf{G}_m$ and P is a polynomial of degree $\leqslant n$.

Returning to the situation of (1.2), we claim that $A_X = A$. To see this, consider the action of A on X via its action on itself by translations. The projection $p_2 : A \times Y \to Y$ induces a morphism

$$p : X \to Y/\Gamma \tag{2.1}$$

which is an A-torsor for the fppf topology (since the quotient morphism $Y \to Y/\Gamma$ is a Γ-torsor, and hence the square

$$\begin{array}{ccc} A \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ {\scriptstyle /\Gamma}\downarrow & & {\scriptstyle /\Gamma}\downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & Y/\Gamma \end{array}$$

is cartesian). Also, note that the quotient variety

$$Y/\Gamma = X/A = G/G_x A$$

exists and is homogeneous under $H = G/A$. Thus, A is contained in A_X, and the quotient A_X/A acts on Y/Γ. Since any morphism from the connected linear algebraic group H to an abelian variety is constant, the Albanese variety of Y/Γ is

trivial. By the Nishi-Matsumura theorem again, it follows that the action of the abelian variety A_X/A on Y/Γ is trivial as well. In particular, each $A_X(\bar{k})$-orbit in $X(\bar{k})$ is an $A(\bar{k})$-orbit. This implies $\dim(A_X) = \dim(A)$, which proves our claim.

As a consequence, A (and Y/Γ) depend only on X. On the other hand, the natural map

$$q : X = (A \times Y)/\Gamma \longrightarrow A/\Gamma$$

is a morphism to an abelian variety, with fibers isomorphic to the homogeneous variety Y under H. It follows that q is the Albanese morphism of X. In particular, the subgroup scheme Γ of A, and the Γ-variety Y, depend only on X. This shows the desired uniqueness.

To prove the isomorphism (1.3), we first consider the case where the group scheme Γ is reduced. Then we have canonical isomorphisms

$$H_c^*(X) \cong H_c^*(A \times Y)^\Gamma \cong \left(H^*(A) \otimes H_c^*(Y)\right)^\Gamma$$

$$\cong H^*(A) \otimes H_c^*(Y)^\Gamma \cong H^*(A) \otimes H_c^*(Y/\Gamma),$$

where the first and last isomorphism follow from Lemma 2.3 (i) below, the second one from the Künneth isomorphism and the properness of A, and the third one holds since the action of Γ on $H^*(A)$ is trivial (indeed, Γ acts on A by translations).

In the general case, the reduced subscheme Γ_{red} is a finite subgroup of Γ, and the natural map

$$(A \times Y)/\Gamma_{\mathrm{red}} \to (A \times Y)/\Gamma = X$$

is finite and bijective on $\bar{k}$-rational points. By Lemma 2.3 (ii) below, it follows that

$$H_c^*(X) \cong H_c^*\left((A \times Y)/\Gamma_{\mathrm{red}}\right).$$

Together with the preceding step and Lemma 2.3 (ii) again, this yields the isomorphism (1.3).

Finally, (1.4) follows by combining (1.1) and (1.3) or, more directly, by considering the morphism (2.1): for any $z \in (Y/\Gamma)(\mathbf{F}_{q^n})$, the fiber X_z (a variety over $\mathbf{F}_{q^n}$) is a torsor under $A_{\mathbf{F}_{q^n}}$. By Lang's theorem, it follows that X_z contains $\mathbf{F}_{q^n}$-rational points, and these form a unique orbit of $A(\mathbf{F}_{q^n})$.

Lemma 2.3. — (i) *Let Γ be a finite group acting on a variety X such that the quotient morphism $f : X \to Y$ exists, where Y is a variety (this assumption is satisfied*

if X is quasi-projective, see [**Mu70**, p. 69]*). Then Γ acts on $H^*_c(X)$, and we have a canonical isomorphism*

$$H^*_c(Y) \cong H^*_c(X)^\Gamma.$$

(ii) *Let $f : X \to Y$ be a finite morphism of varieties, bijective on $\bar{k}$-rational points. Then we have a canonical isomorphism*

$$H^*_c(Y) \cong H^*_c(X).$$

Proof. — (i) Note that $f_! \mathbf{Q}_\ell = f_* \mathbf{Q}_\ell$ and $R^i f_! \mathbf{Q}_\ell = 0$ for all $i \geqslant 1$, since f is finite. This yields a canonical isomorphism

$$H^*_c(X) \cong H^*_c(Y_{\bar{k}}; f_* \mathbf{Q}_\ell). \tag{2.2}$$

Moreover, Γ acts on $f_* \mathbf{Q}_\ell$ and hence on $H^*_c(X)$. Thus, (2.2) restricts to an isomorphism

$$H^*_c(X)^\Gamma \cong H^*_c(Y_{\bar{k}}; (f_* \mathbf{Q}_\ell)^\Gamma).$$

To complete the proof, it suffices to show that the natural map from the constant sheaf $\mathbf{Q}_\ell$ to $f_* \mathbf{Q}_\ell$ induces an isomorphism $\mathbf{Q}_\ell \cong (f_* \mathbf{Q}_\ell)^\Gamma$. In turn, it suffices to prove that

$$H^0(X_{\bar{y}}; \mathbf{Q}_\ell)^\Gamma \cong \mathbf{Q}_\ell, \tag{2.3}$$

where $X_{\bar{y}}$ denotes the geometric fiber of f at an arbitrary point $y \in Y$. But $X_{\bar{y}}$ is a finite scheme over the field $\overline{\kappa(y)}$, equipped with an action of Γ which induces a transitive action on its set of connected components; this implies (2.3).

(ii) is checked similarly; here the map $\mathbf{Q}_\ell \to f_* \mathbf{Q}_\ell$ is an isomorphism. □

Remarks 2.4. — (i) Lemma 2.3 is certainly well-known, but we could not locate a specific reference. The first assertion is exactly [**Sr79**, (5.10)]; however, the proof given there is only valid for Γ-torsors.

(ii) If X in Theorem 1.1 is complete, then Γ is trivial in view of a result of Sancho de Salas (see [**SS03**]). Moreover, we have $Y \cong H/Q$, where Q is a subgroup scheme of H such that the reduced subscheme Q_{red} is a parabolic subgroup. It follows easily that $|Y(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a polynomial function of q^n (for details, see Steps 1 and 3 in Section 4).

For an arbitrary homogeneous variety X, the subgroup scheme Γ is generally non-trivial. Indeed, consider an abelian variety A having a k-rational point p of order 2. Let also $Y := \mathrm{SL}(2)/T$, where $T \subset \mathrm{SL}(2)$ denotes the diagonal torus. The group Γ of order 2 acts on A via translation by p, and on Y via

right multiplication by the matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ which normalizes T; the variety $X := (A \times Y)/\Gamma$ is the desired example. One easily checks that

$$|(Y/\Gamma)(\mathbf{F}_{q^n})| = q^{2n}, \quad \text{whereas} \quad |Y(\mathbf{F}_{q^n})| = q^n(q^n + 1).$$

Thus, Y/Γ cannot be replaced with Y in the equality (1.4).

(iii) The isomorphism (1.2) only holds for homogeneous varieties defined over finite fields. Consider indeed a field k which is not algebraic over a finite subfield. By [**ST76**], there exists an elliptic curve C over k, having a k-rational point x of infinite order. Let L be the line bundle on C associated with the divisor $(x) - (0)$. Denote by G the complement of the zero section in the total space of L, and by $q : G \to C$ the projection; then q is a torsor under the multiplicative group $\mathbf{G}_m$. In fact, G has a structure of an algebraic group over k, extension of C by $\mathbf{G}_m$; in particular, q is the Albanese map. If the isomorphism (1.2) holds for G, then $C \cong A/\Gamma$ and $Y \cong \mathbf{G}_m$. Thus, G has non-constant regular functions, namely, the non-constant regular functions on the quotient $Y/\Gamma \cong \mathbf{G}_m$. In other words, there exists an integer $n \neq 0$ such that the power L^n has a non-zero section; but this is impossible, since L^n is a non-trivial line bundle of degree 0.

The above group G is an example of an anti-affine algebraic group in the sense of [**Br09**]. That article contains a classification of these groups, and further examples in characteristic zero.

3. Proof of Theorem 1.2

First, it suffices to show that $|X(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a *periodic Laurent polynomial function of q^n with algebraic integer coefficients*, i.e., there exist a positive integer N and $P_0(t), \ldots, P_{N-1}(t) \in \bar{\mathbf{Z}}[t, t^{-1}]$ satisfying (1.5), where $\bar{\mathbf{Z}}$ denotes the ring of algebraic integers. Indeed, if $P(t) \in \bar{\mathbf{Z}}[t, t^{-1}]$ and $P(q^n)$ is an integer for infinitely many positive integers n, then $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$.

Next, it suffices to show the following:

Proposition 3.1. — *Let X be a homogeneous variety under a linear algebraic group. Then each eigenvalue α of F acting on $H^*_c(X)$ is of the form ζq^j, where $\zeta = \zeta(\alpha)$ is a root of unity, and $j = j(\alpha)$ is an integer.*

Indeed, in view of Grothendieck's trace formula (1.1), that proposition implies readily that $|X(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a periodic Laurent polynomial function of q^n, with coefficients being sums of roots of unity.

Before proving the proposition, we introduce two notions which will also be used in the proof of Theorem 1.3.

Definition 3.2. — We say that a variety X is *weakly pure*, if it satisfies the assertion of Proposition 3.1.

Also, X is *strongly pure* if $H^i_c(X) = 0$ for any odd i, and for any even i, each eigenvalue of F acting on $H^i_c(X)$ is of the form $\zeta q^{\frac{i}{2}}$, where ζ is a root of unity.

Clearly, any strongly pure variety X is weakly pure; it is also pure in the (usual) sense that all the complex conjugates of eigenvalues of F acting on $H^i_c(X)$ have absolute value $q^{\frac{i}{2}}$, for all i. Yet some weakly pure varieties are not pure, e.g., tori.

Weak and strong purity are preserved under base change by any finite extension; specifically, a variety X is weakly (resp. strongly) pure if and only if so is $X_{\mathbf{F}_{q^n}}$ for some (or for any) positive integer n. Further easy properties of these notions are gathered in the following:

Lemma 3.3. — (i) *Let Γ be a finite group acting on a variety X, such that the quotient variety $Y = X/\Gamma$ exists. If X is weakly (resp. strongly) pure, then so is Y.*
(ii) *Let $f : X \to Y$ be a finite morphism of varieties, bijective on $\bar{k}$-rational points. Then X is weakly (resp. strongly) pure if and only if so is Y.*
(iii) *Let Y be a closed subvariety of a variety X, with complement U. If both Y and U are weakly (resp. strongly) pure, then so is X.*

Proof. — (i) and (ii) follow from Lemma 2.3, and (iii) from the exact sequence $H^i_c(U) \longrightarrow H^i_c(X) \longrightarrow H^i_c(Y)$. □

Next, we obtain a result of independent interest, which is the main ingredient of the proof of Proposition 3.1:

Proposition 3.4. — *Let G be a connected linear algebraic group, and $\pi : X \to Y$ a G-torsor, where X and Y are varieties. Then X is weakly (resp. strongly) pure if and only if so is Y.*

Proof. — (i) We may choose a Borel subgroup B of G and a maximal torus T of B. Then π is the composite morphism

$$X \xrightarrow{\pi_T} X/T \xrightarrow{\varphi} X/B \xrightarrow{\psi} X/G = Y,$$

where π_T is a T-torsor, φ is smooth with fiber B/T isomorphic to the unipotent radical of B, and ψ is projective and smooth with fiber G/B, the flag variety of G.

We claim that X/T is weakly (resp. strongly) pure if and only if so it X/B. Indeed, B/T is isomorphic to an affine space $\mathbf{A}^d$, and hence $R^i\varphi_!\mathbf{Q}_\ell = 0$ for all $i \neq 2d$, while $R^{2d}\varphi_!\mathbf{Q}_\ell \cong \mathbf{Q}_\ell(-d)$ via the trace map. This yields a canonical isomorphism

$$H_c^i(X/B) \cong H_c^{i+2d}(X/T)(d).$$

Thus, the eigenvalues of F in $H_c^i(X/B)$ are exactly the products βq^{-d}, where β is an eigenvalue of F in $H_c^{i+2d}(X/T)$. This implies our claim.

Next, we claim that X/B is weakly (resp. strongly) pure if and only if so is X/G. Indeed, the Leray spectral sequence associated with the flag bundle ψ degenerates (since the cohomology ring of the fiber G/B is generated by Chern classes of line bundles associated with characters of B, and all such line bundles extend to X/B); moreover, the sheaves $R^j\psi_!\mathbf{Q}_\ell = R^j\psi_*\mathbf{Q}_\ell$ are constant. This yields an isomorphism of graded $\mathbf{Q}_\ell$-vector spaces with F-action

$$H_c^*(X/B) \cong H_c^*(X/G) \otimes H^*(G/B).$$

In particular, $H_c^*(X/G)$ may be identified with a F-stable subspace of $H_c^*(X/B)$. Thus, if X/B is weakly (resp. strongly) pure, then so is X/G. The converse holds since G/B is strongly pure (as follows from the Bruhat decomposition, see Step 3 in Section 4 for details).

By combining both claims, we may assume that $G = T$. Replacing k with a finite extension, we may further assume that T is split. Thus, we are reduced to the case where $G = T = \mathbf{G}_m$. Then we have the Gysin long exact sequence

$$\cdots H_c^i(X) \longrightarrow H_c^{i-2}(Y)(2) \xrightarrow{c_1(L)} H_c^i(Y) \longrightarrow H_c^{i+1}(X)\cdots,$$

where $c_1(L)$ denotes the multiplication by the first Chern class of the invertible sheaf L associated with the $\mathbf{G}_m$-torsor $\pi : X \to Y$. Thus, if Y is weakly (resp. strongly) pure, then so is X. The converse is obtained by decreasing induction on i, since $H_c^i(Y) = 0$ for each $i > 2\dim(Y)$, and F acts on $H_c^{2\dim(Y)}(Y)$ via multiplication by $q^{\dim(Y)}$. □

We may now prove Proposition 3.1. We have $X \cong G/H$, where G is a linear algebraic group, and H a closed subgroup scheme. Since X is a variety, we may assume that G is connected. Moreover, since the reduced subscheme H_{red} is a closed algebraic subgroup, and the natural map $G/H_{\mathrm{red}} \to G/H$ is finite and bijective on $\bar{k}$-rational points, we may assume that H is an algebraic group in view of Lemma 2.3(ii).

Applying Proposition 3.4 to the torsors $G \to \mathrm{Spec}(k)$ and $G \to G/H^0$ (where H^0 denotes the neutral component of H), we see that G and G/H^0 are weakly pure. Thus, so is $G/H \cong (G/H^0)/(H/H^0)$, by Lemma 3.3(i).

4. Proof of Theorem 1.3

As above, we consider a homogeneous variety $X = G/H$, where G is a connected linear algebraic group, and H is a closed subgroup scheme. We first reduce to the case where G is reductive, and H is a closed subgroup such that H^0 is a torus. For this, we carry out a sequence of four reduction steps, where we use elementary counting arguments rather than ℓ-adic cohomology and the Grothendieck trace formula, to prepare the way for the completely elementary proofs of Section 5.

Step 1. Since the natural map $(G/H_{\mathrm{red}})(\bar{k}) \to (G/H)(\bar{k})$ is bijective, we have $|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = |(G/H_{\mathrm{red}})(\mathbf{F}_{q^n})|$ for any positive integer n, and hence

$$P_{G/H}(t) = P_{G/H_{\mathrm{red}}}(t).$$

Replacing (G,H) with (G,H_{red}), we may thus assume that H *is an algebraic group*.

Step 2. The unipotent radical $R_u(G)$ acts on X, with quotient morphism the natural map $f : G/H \to G/R_u(G)H$. The fiber of f at any coset $gR_u(G)H$ equals

$$gR_u(G)H/H \cong R_u(G)/\left(R_u(G) \cap gHg^{-1}\right) \cong R_u(G)/g\left(R_u(G) \cap H\right)g^{-1}.$$

The induced map $(G/H)(\mathbf{F}_{q^n}) \to \left(G/R_u(G)H)(\mathbf{F}_{q^n}\right)$ is surjective by Lang's theorem. Moreover, since $R_u(G)$ is connected and unipotent, each fiber has q^{nd} elements, where $d := \dim R_u(G)/\left(R_u(G) \cap H\right)$. Hence

$$P_{G/H}(t) = t^d P_{G/R_u(G)H}(t).$$

Replacing G with the quotient $G/R_u(G)$ and H with its image in that quotient, we may assume in addition that G *is reductive*.

Step 3. If H is not reductive, then it is contained in some proper parabolic subgroup P of G (see [**BT71**]). We may further assume that H is not contained in a proper parabolic subgroup of P; then the image of H in the reductive group $P/R_u(P)$ is reductive as well.

Choose a Borel subgroup B of P and a maximal torus T of B; denote by U the unipotent radical of B, and by $N_G(T)$ the normalizer of T in G. Then

$W := N_G(T)/T$ is the Weyl group of (G, T); it contains the Weyl group W_P of (P, T). Choose a set W^P of representatives in W of the quotient W/W_P. Also, for any $w \in W^P$, choose a representative $n_w \in N_G(T)$. Then, by the Bruhat decomposition, we have

$$G = \bigcup_{w \in W^P} Bn_w P, \tag{4.1}$$

where the Bn_wP are disjoint locally closed subvarieties. Moreover, for any $w \in W^P$, there exists a closed subgroup U^w of U, normalized by T, such that the map

$$U^w \times P \longrightarrow Bn_wP, \quad (x, y) \longmapsto xn_wy \tag{4.2}$$

is an isomorphism; each U^w is isomorphic to an affine space. Thus, G/H is the disjoint union of the locally closed subvarieties

$$Bn_wP/H \cong U^w \times P/H.$$

It follows that

$$|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = |(G/P)(\mathbf{F}_{q^n})|\,|(P/H)(\mathbf{F}_{q^n})|,$$

and $|(G/P)(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a polynomial function of q^n with non-negative integer coefficients. This yields the factorization

$$P_{G/H}(t) = P_{G/P}(t)\,P_{P/H}(t).$$

Thus, we may replace (G, H) with (P, H). By Step 2, we may further replace (P, H) with $\big(P/R_u(P), R_u(P)H/R_u(P)\big)$. So we may assume that *G and H are both reductive.*

Step 4. We now choose a maximal torus T_H of H, and denote by N_H its normalizer in H. We claim that the natural map

$$p : G/N_H \to G/H$$

induces a surjective map $(G/N_H)(\mathbf{F}_{q^n}) \to (G/H)(\mathbf{F}_{q^n})$ such that each fiber has $q^{n \dim(H/N_H)}$ elements.

Indeed, consider $g \in G(\bar{k})$ such that the coset $gH_{\bar{k}}$ lies in $(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})$. Then the subgroup $(gHg^{-1})_{\bar{k}}$ of $G_{\bar{k}}$ is defined over $\mathbf{F}_{q^n}$. Moreover, the fiber of p at $gH_{\bar{k}}$ is isomorphic to the variety of maximal tori of $(gHg^{-1})_{\bar{k}}$; hence its number

of $\mathbf{F}_{q^n}$-rational points equals $q^{n\dim(H/N_H)}$, by a theorem of Steinberg (see [**St68**, Cor. 14.16]). This implies our claim and, in turn, the equality

$$P_{G/H}(t) = t^{-\dim(H/N_H)}\, P_{G/N_H}(t).$$

Replacing (G, H) with (G, N_H), we may thus assume that H^0 *is a torus*.

We may also freely replace k with any finite extension, since this does not affect the definition of P_X, nor the statement of Theorem 1.3.

By Lemma 4.1 below (a version of [**BP02**, Lem. 1, Lem. 2]), there exists a torus $S \subset G$ acting on G/H^0 with finite isotropy subgroup schemes, such that the quotient $S\backslash G/H^0$ is strongly pure. Then S also acts on $X = G/H$ with finite isotropy subgroup schemes, and the quotient

$$S\backslash X = (S\backslash G/H^0)/(H/H^0)$$

is also strongly pure by Lemma 3.3(i).

We now claim that there exists a decomposition of X into finitely many locally closed S-stable subvarieties

$$X_i \cong (S/\Gamma_i) \times Y_i,$$

where Γ_i is a finite subgroup scheme of S. Indeed, by a theorem of Chevalley, X is G-equivariantly isomorphic to an orbit in the projectivization $\mathbf{P}(V)$ of a finite-dimensional G-module V. Choosing a basis of S-eigenvectors in the dual module V^* yields homogeneous coordinates on $\mathbf{P}(V)$, and hence a decomposition of $\mathbf{P}(V)$ into locally closed S-stable tori S_i (where some prescribed homogenous coordinates are non-zero, and all others are zero). Clearly, S acts on each S_i via a homomorphism $f_i : S \to S_i$. Denote by Γ_i the kernel of f_i. Then we may identify S/Γ_i with a subtorus of S_i, and hence there exists a "complementary" subtorus $S_i' \subset S_i$ such that the multiplication map $(S/\Gamma_i) \times S_i' \to S_i$ is an isomorphism. If S_i meets X, then Γ_i is finite, and the natural map $(S/\Gamma_i) \times (X \cap S_i') \to X \cap S_i$ is an isomorphism. Thus, our claim holds for the subvarieties $X_i := X \cap S_i$ and $Y_i := X \cap S_i'$.

That claim yields a similar decomposition of $S\backslash X$ into the subvarieties Y_i. Note that each S/Γ_i is a torus of dimension

$$r := \dim(S) = \dim(T) - \dim(H).$$

Thus, we have for any sufficiently divisible n:

$$
\begin{aligned}
|X(\mathbf{F}_{q^n})| = \sum_i |X_i(\mathbf{F}_{q^n})| &= \sum_i |(S/\Gamma_i)(\mathbf{F}_{q^n})|\,|Y_i(\mathbf{F}_{q^n})| \\
&= (q^n-1)^r \sum_i |Y_i(\mathbf{F}_{q^n})| = (q^n-1)^r\,|(S\backslash X)(\mathbf{F}_{q^n})|.
\end{aligned}
$$

In other words, $P_X(t) = (t-1)^r P_{S\backslash X}(t)$. By strong purity, the coefficients of the polynomial $P_{S\backslash X}(t)$ are non-negative; this yields the desired factorization.

Lemma 4.1. — *Let G be a connected reductive group, and $H \subset G$ a torus. Choose a maximal torus T of G containing H and denote by W the Weyl group of (G,T).*

Then, possibly after base change by a finite extension $\mathbf{F}_{q^N}$, there exist subtori S of T such that $T = S\,w(H)$ and $S \cap w(H)$ is finite for all $w \in W$.

Any such torus S acts on G/H with finite isotropy subgroup schemes, and the quotient $S\backslash G/H$ is a strongly pure, affine variety.

Proof. — We may assume that T is split. Let Λ be its character group; this is a lattice equipped with an action of W, and containing the lattice Λ^H of characters of T/H. We may find a subgroup Λ' of Λ such that Λ/Λ' is a lattice, $\Lambda' \cap w(\Lambda^H) = \{0\}$ and $\Lambda' + w(\Lambda^H)$ has finite index in Λ for any $w \in W$ (indeed, the subspaces $w(\Lambda^H)_{\mathbf{Q}}$ of the rational vector space $\Lambda_{\mathbf{Q}}$ have a common complement). Then $\Lambda' = \Lambda^S$ for a subtorus S of T which satisfies the first assertion.

For the second assertion, we may choose a Borel subgroup B of G that contains T. As in (4.1, 4.2), consider the Bruhat decomposition $G = \bigcup_{w\in W} Bn_wB$ and the isomorphisms

$$U^w \times U \times T \longrightarrow Bn_wB, \quad (u,v,t) \longmapsto un_wvt.$$

The resulting projection

$$p : Bn_wB \longrightarrow T$$

is equivariant with respect to $T \times T$ acting on Bn_wB via left and right multiplication, and on T via

$$(x,y)\cdot z = w^{-1}(x)\,z\,y^{-1}.$$

The fiber of p at the identity element of T is isomorphic to the affine space $U^w \times U$. This yields a cartesian square

$$\begin{array}{ccc} Bn_wB & \xrightarrow{p} & T \\ {\scriptstyle /H}\big\downarrow & & {\scriptstyle /H}\big\downarrow \\ Bn_wB/H & \xrightarrow{f} & T/H, \end{array}$$

where f is T-equivariant. Moreover, T/H is homogeneous under S acting via $s \cdot tH = w^{-1}(s)tH$, and the corresponding isotropy subgroup scheme is $S \cap w^{-1}(H)$. Thus, Bn_wB/H is the quotient of $U^w \times U \times S$ by $S \cap w^{-1}(H)$ acting linearly on $U^w \times U$, and on S via multiplication.

By our assumption on S, it follows that all isotropy subgroup schemes for its action on G/H are finite; in particular, all orbits are closed. Since the variety G/H is affine, the quotient $S\backslash G/H$ exists and is affine as well. Moreover, this quotient is decomposed into the locally closed varieties

$$S\backslash Bn_wB/H \cong (U \times U^w)/\big(S \cap w(H)\big).$$

Thus, $S\backslash G/H$ is strongly pure in view of Lemma 3.3(i). □

5. Elementary proofs of Theorems 1.2, 1.3 and 1.4

As in Section 4, we may assume that $X = G/H$, where G is a connected reductive group and H is a closed subgroup such that H^0 is a torus. We first obtain a formula for the number of $\mathbf{F}_{q^n}$-rational points of X, by standard arguments of Galois descent.

Denote by Γ the finite group H/H^0. For any $\gamma \in \Gamma$, choose a representative $h_\gamma \in H(\bar{k})$. By Lang's theorem, we may choose $g_\gamma \in G(\bar{k})$ such that $h_\gamma = g_\gamma^{-1}F(g_\gamma)$.

Consider a point $x \in (G/H)(\bar{k})$ with representative $g \in G(\bar{k})$. Then $x \in (G/H)(\mathbf{F}_q) = (G/H)^F$ if and only if $g^{-1}F(g) \in H(\bar{k})$, that is, $g^{-1}F(g) \in h_\gamma H^0(\bar{k})$ for a unique $\gamma \in \Gamma$. Equivalently, we have $g = zg_\gamma$, where $z \in G(\bar{k})$ satisfies

$$z^{-1}F(z) \in F(g_\gamma)H^0(\bar{k})F(g_\gamma^{-1}).$$

Moreover,

$$F(g_\gamma)H^0F(g_\gamma^{-1}) = F(g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1}) = g_\gamma h_\gamma H^0 h_\gamma^{-1} g_\gamma^{-1} = g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1}.$$

Thus, each $g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1}$ is defined over k, and

$$z^{-1}F(z) \in g_\gamma H^0(\bar{k}) g_\gamma^{-1}.$$

Applying Lang's theorem again, we see that

$$z \in G(\mathbf{F}_q) g_\gamma H^0(\bar{k}) g_\gamma^{-1}.$$

Thus, the preimage of $(G/H)(\mathbf{F}_q)$ in $(G/H^0)(\bar{k})$ is the disjoint union of the orbits $G(\mathbf{F}_q) g_\gamma H^0$, where $\gamma \in \Gamma$. This yields the equality

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{|G(\mathbf{F}_q)|}{|(g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1})(\mathbf{F}_q)|}. \tag{5.1}$$

But $G(\mathbf{F}_q) = G^F$ and $(g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1})(\mathbf{F}_q) = (g_\gamma H^0 g_\gamma^{-1})^F \cong (H^0)^{\gamma^{-1}F}$, where γ acts on H^0 via conjugation by h_γ (this makes sense since H^0 is commutative). Thus, we may rewrite (5.1) as

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{|G^F|}{|(H^0)^{\gamma F}|}. \tag{5.2}$$

This still holds when q is replaced with q^n, and F with F^n, where n is an arbitrary positive integer.

Next, we obtain a more combinatorial formula for $|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})|$. Denote by

$$\Lambda = \Lambda_{H^0} := \mathrm{Hom}(H^0, \mathbf{G}_m)$$

the character group of the torus H^0. Then Λ is a lattice, where Γ acts via its action on H^0 by conjugation. Moreover, F defines an endomorphism of Λ that we still denote by F, via $\big(F(\lambda)\big)(x) = \lambda\big(F(x)\big)$ for all points λ of Λ and x of H^0. Since H^0 splits over some finite extension $\mathbf{F}_{q^N}$, we have

$$F^N = q^N \,\mathrm{id}$$

as endomorphisms of Λ. Thus, we may write $F = qF_0$, where F_0 is an automorphism of finite order of the rational vector space $\Lambda_{\mathbf{Q}}$. Then F_0 normalizes Γ, and

$$|(H^0)^{\gamma F}| = |\Lambda/(\gamma F - \mathrm{id})\Lambda| = |\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}}}(\gamma F - \mathrm{id})| = \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}}}(q\,\mathrm{id} - F_0^{-1}\gamma^{-1})$$

by results of [**Ca85**, 3.2, 3.3]. As a consequence,

$$|(H^0)^{\gamma F}| = q^{\dim(H)} \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{id} - F^{-1}\gamma^{-1}).$$

Combined with (5.2), this yields

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{|G^F|}{q^{\dim(H)}} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{id} - F^{-1}\gamma)}. \tag{5.3}$$

Now consider the expansion

$$\frac{1}{\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{id} - F^{-1}\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{S^n(\Lambda_{\mathbf{Q}})}(F^{-1}\gamma),$$

where S^n denotes the nth symmetric power. Since all eigenvalues of F in $\Lambda_{\mathbf{Q}}$ have absolute value q, the series in the right-hand side converges absolutely. Thus, we may write

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{|G^F|}{q^{\dim(H)}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{S^n(\Lambda_{\mathbf{Q}})} \Big(F^{-1} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma\Big). \tag{5.4}$$

Since the operator $\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ of any Γ-module M is the projection onto the subspace M^Γ of Γ-invariants, the series in the right-hand side of (5.4) equals

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{S^n(\Lambda_{\mathbf{Q}})^\Gamma}(F^{-1}) = \mathrm{Tr}_{S^\Gamma}(F^{-1}),$$

where S denotes the symmetric algebra of $\Lambda_{\mathbf{Q}}$, and S^Γ the subalgebra of Γ-invariants; here F acts on S by algebra automorphisms, and preserves S^Γ. This yields the equality

$$|(G/H)(\mathbf{F}_q)| = \frac{|G^F|}{q^{\dim(H)}} \mathrm{Tr}_{S^\Gamma}(F^{-1}). \tag{5.5}$$

To obtain the desired combinatorial formula, it remains to compute $|G^F|$. For this, choose a maximal torus T of G containing H^0 (and defined over k), with normalizer $N_G(T)$ and Weyl group W; denote by Λ_T the character group of T, and by R its symmetric algebra over $\mathbf{Q}$. Applying (5.5) to $H = N_G(T)$ yields

$$|G^F| = \frac{q^{\dim(G)}}{\mathrm{Tr}_{R^W}(F^{-1})}$$

in view of Steinberg's theorem. Substituting in (5.5) and replacing F with F^n yields our combinatorial formula

$$|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = q^{n\dim(G/H)} \frac{\mathrm{Tr}_{S^\Gamma}(F^{-n})}{\mathrm{Tr}_{R^W}(F^{-n})}. \tag{5.6}$$

Here F acts on R^W and S^Γ by automorphisms of graded algebras which are diagonalizable over $\bar{\mathbf{Q}}$ with eigenvalues of the form ζq^j, where ζ is a root of unity and j is a non-negative integer.

We now obtain an invariant-theoretical interpretation of the right-hand side of (5.6). The restriction map $\Lambda_T \to \Lambda_{H^0}$ induces a surjective, F-equivariant homomorphism

$$\rho : R \longrightarrow S.$$

We claim that $\rho(R^W)$ is contained in S^Γ. To see this, consider $\gamma \in \Gamma$ and its representative $h_\gamma \in H(\bar{k}) \subset N_G(H^0)(\bar{k})$. Then T and $h_\gamma^{-1} T h_\gamma$ are maximal tori of the centralizer $C_G(H^0)$. It follows that h_γ is a $\bar{k}$-rational point of $N_G(T)C_G(H^0)$. Thus, the automorphism of S induced by γ lifts to an automorphism of R induced by some $w \in W$; this implies our claim.

By that claim, S^Γ is a graded R^W-module; that module is finitely generated, since the R^W-module R is finitely generated. Moreover, R^W is a graded polynomial algebra over $\mathbf{Q}$, and hence S^Γ admits a finite free resolution

$$0 \to R^W \otimes E_m \xrightarrow{\varphi_m} R^W \otimes E_{m-1} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} R^W \otimes E_0 \to S^\Gamma \to 0,$$

where $E_0, \ldots, E_m$ are finite-dimensional vector spaces equipped with an action of F, and $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ are F-equivariant homomorphisms of R^W-modules. Thus,

$$\mathrm{Tr}_{S^\Gamma}(F^{-n}) = \mathrm{Tr}_{R^W}(F^{-n}) \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \ \mathrm{Tr}_{E_i}(F^{-n})$$

for all integers n. Together with (5.6), this yields

$$|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = q^{n\dim(G/H)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \ \mathrm{Tr}_{E_i}(F^{-n}) \tag{5.7}$$

for any positive integer n.

We may further assume that our free resolution is minimal, i.e., each φ_i maps bijectively a basis of E_i to a minimal set of generators of the R^W-module $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})$ (see [**Ei95**, Lem. 19.4]). In particular, $E_0 \cong \mathbf{Q}$, and each E_i is F-equivariantly isomorphic to a subspace of $R^W \otimes E_{i-1}$. Since the action

of F on R^W is diagonalizable over $\bar{\mathbf{Q}}$ with eigenvalues of the form ζq^j as above, it follows by induction on i that the same holds for the action of F on E_i, and hence on $R^W \otimes E_i$. Together with (5.7), this yields that $|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a linear combination of powers $\zeta^{-n} q^{n(\dim(G/H)-j)}$ with integer coefficients. In other words, $|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})|$ is a periodic Laurent polynomial function of q^n with algebraic integer coefficients. As noted at the beginning of Section 3, this implies Theorem 1.2.

We now adapt these arguments to prove Theorem 1.3. Again, we may replace $\mathbf{F}_q$ with $\mathbf{F}_{q^N}$ and assume that the torus T is split, i.e., F acts on $(\Lambda_T)_{\mathbf{Q}}$ as $q\,\mathrm{id}$. Then the actions of F on the algebras $R, R^W, S, \ldots$ are determined by their gradings, and $\mathrm{Tr}_R(F^{-n}), \mathrm{Tr}_{R^W}(F^{-n}), \mathrm{Tr}_S(F^{-n}), \ldots$ are obtained from the Hilbert series $h_R(t), h_{R^W}(t), h_S(t), \ldots$ of the corresponding graded algebras by putting $t = q^{-n}$.

Consider the graded algebra

$$A := R \otimes_{R^W} S^\Gamma.$$

Since R is a free R^W-module of finite rank, the S^Γ-module A is also free, of finite rank; moreover,

$$h_A(t) = \frac{h_R(t)\, h_{S^\Gamma}(t)}{h_{R^W}(t)} = \frac{h_{S^\Gamma}(t)}{(1-t)^{\dim(T)}\, h_{R^W}(t)}. \tag{5.8}$$

The algebra of invariants S^Γ is Cohen-Macaulay of Krull dimension $\dim(H)$ (see e.g. [**Ei95**, Exercise 18.14]), and hence so is A. But A is a finitely generated module over the polynomial algebra R. By Noether normalization, it follows that A is a finitely generated module over a polynomial subalgebra $R' \subset R$ generated by elements $z_1, \ldots, z_{\dim(H)}$ of degree 1. In particular, $z_1, \ldots, z_{\dim(H)}$ generate an ideal of A of finite codimension; therefore, they form a regular sequence in A. It follows that A is a free module of finite rank over R' (see e.g. [**Ei95**, Cor. 18.17]); thus, the Hilbert series of A satisfies

$$h_A(t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^{\dim(H)}},$$

where $Q(t)$ is a polynomial with non-negative integer coefficients. Combined with (5.8), this yields the equality

$$\frac{h_{S^\Gamma}(t)}{h_{R^W}(t)} = (1-t)^r\, Q(t),$$

where $r = \dim(T) - \dim(H)$. Evaluating at q^{-n} and using (5.6) yields the desired factorization,

$$|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = (q^n - 1)^r \, q^{n(\dim(G/H)-r)} \, Q(q^{-n})$$

(note that the function $(t-1)^r \, t^{\dim(G/H)-r} \, Q(t^{-1})$ is polynomial by Theorem 1.2, and hence so is the function $t^{\dim(G/H)-r} \, Q(t^{-1})$).

Finally, we prove Theorem 1.4. By (5.1), we may assume that H is connected, and hence that

$$|(G/H)(\mathbf{F}_{q^n})| = \frac{|G(\mathbf{F}_{q^n})|}{|H(\mathbf{F}_{q^n})|}.$$

By [**St68**] (see also [**Ca85**, 2.9]), the numerator and denominator of the right-hand side are products of terms $q^{nd} - \zeta^n$, where d is a positive integer, and ζ is either 0 or a root of unity. It follows that the non-zero roots of the polynomials $P_0(t), \ldots, P_{N-1}(t)$ of (1.5) are roots of unity. Since these polynomials have real coefficients, their roots are either 0, 1, -1, or come by pairs of complex conjugates $\zeta, \bar{\zeta}$, where ζ is a root of unity. Moreover, each polynomial $(t+1-\zeta)(t+1-\bar{\zeta})$ has non-negative real coefficients; thus, the same holds for each $P_r(t)$.

Remarks 5.1. — (i) The final step of the preceding proof does not extend to all homogeneous varieties under linear algebraic groups, as the polynomials $P_0(t), \ldots, P_N(t)$ may have roots of absolute value > 1.

For example, let Γ be a group of order 2, and H_r the semi-direct product of the split r-dimensional torus $\mathbf{G}_m^r$ with Γ, where the non-trivial element of Γ acts on $\mathbf{G}_m^n$ via $(t_1, \ldots, t_r) \mapsto (t_1^{-1}, \ldots, t_r^{-1})$. Then $H_r^0 = \mathbf{G}_m^r$ and $H_r \cong H_1 \times \cdots \times H_1$ (r copies); moreover, H_1 is the subgroup of SL(2) consisting of all diagonal or anti-diagonal matrices. Thus, H_r is isomorphic to a closed F-stable subgroup of GL($2r$), where F is the usual Frobenius endomorphism of GL($2r$) that raises all matrix coefficients to the power q. With the notation of the preceding proof, we have

$$|\,\mathrm{GL}(2r)^F| = q^{r(2r-1)} \prod_{i=1}^{2r-1} (q^i - 1)$$

and

$$\frac{1}{q^{\dim(H_r)}} \mathrm{Tr}_{S^\Gamma}(F^{-1}) = \frac{1}{2q^r}\Big(\frac{1}{(1-q^{-1})^r} + \frac{1}{(1+q^{-1})^r}\Big) = \frac{Q_r(q)}{(q^2-1)^r},$$

where

$$Q_r(t) := \frac{1}{2}\Big((q+1)^r + (q-1)^r\Big) = \sum_{i,\, 0 \leqslant 2i \leqslant r} \binom{r}{2i} t^{r-2i}.$$

By (5.5), it follows that the homogeneous variety $X_r := \mathrm{GL}(2r)/H_r$ satisfies

$$|X_r(\mathbf{F}_q)| = Q_r(q)\, q^{r(2r-1)} \prod_{i=1}^{r} (q^{2i-1} - 1) \prod_{j=1}^{r} \frac{q^{2j}-1}{q^2-1}.$$

In particular, $|X_r(\mathbf{F}_q)|$ is a polynomial in q, and the maximal absolute value of its roots tends to infinity as $r \to \infty$.

(ii) By the reduction steps in Section 4 and the equation (5.3), we may take for the period N the least common multiple of the orders of all the Frobenius endomorphisms of tori with dimension $\leqslant \mathrm{rk}(G)$. As a consequence, we may take

$$N = \mathrm{lcm}\,\Big(n, \varphi(n) \leqslant \mathrm{rk}(G)\Big),$$

where φ denotes the Euler function.

References

[Ar60] S. Arima, *Commutative group varieties*, J. Math. Soc. Japan **12** (1960), 227–237.

[BT71] A. Borel and J. Tits, *Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs I*, Inventiones math. **12** (1971), 95–104.

[BP02] M. Brion and E. Peyre, *The virtual Poincaré polynomials of homogeneous spaces*, Compositio Math. **134** (2002), 319–335.

[Br07] M. Brion, *Some basic results on actions of non-affine algebraic groups*, arXiv: math.AG/0702518, to appear in the proceedings of the conference "Symmetry and Spaces" (E. Campbell, ed).

[Br09] M. Brion, *Anti-affine algebraic groups*, J. Algebra **321** (2009), 934–952.

[Ca85] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[De74] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 273–307.

[De77] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lect. Notes in Math. **569**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[De80] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1980), 137–252.

[DG70] M. Demazure and P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.

[Ei95] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1995.

[La56] S. Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563.

[LR97] N. Lauritzen and A. Rao, *Elementary counterexamples to Kodaira vanishing in prime characteristic*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), 21–25.

[Ma63] H. Matsumura, *On algebraic groups of birational transformations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **34** (1963), 151–155.

[Mi80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[MR07] S. Mozgovoy and M. Reineke, *On the number of stable quiver representations over finite fields,* arXiv: 0708.1259.

[Mu70] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, Oxford, 1970.

[Re08] M. Reineke, *Moduli of representations of quivers,* arXiv: 0802.2147.

[Ro61] M. Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984–988.

[Sa84a] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Sa84b] D. J. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.

[SS03] C. Sancho de Salas, *Complete homogeneous varieties: structure and classification,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3651–3667.

[ST76] I. R. Shafarevich and J. Tate, *The rank of elliptic curves*, Sov. Math. Dokl. **8** (1967), 917–920.

[Sp98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups. Second edition,* Progress in Math. **9**, Birkhäuser, Boston, 1998.

[Sr79] B. Srinivasan, *Representations of finite Chevalley groups*, Lect. Notes in Math. **764**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[St68] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **80**, AMS, Providence, 1968.

Michel Brion and Emmanuel Peyre, Université de Grenoble I, Département de Mathématiques, Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France • *E-mail :* `Michel.Brion@ujf-grenoble.fr`
E-mail : `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`

PROGRÈS EN IRRATIONALITÉ. [D'APRÈS C. VOISIN, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, B. HASSETT, A. KRESCH, A. PIRUTKA, B. TOTARO, Y. TSCHINKEL ET AL.]

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — C. Voisin a inventé une nouvelle méthode pour prouver que des classes de variétés ne sont pas stablement rationnelles, c'est-à-dire que leur produit avec un espace affine n'est pas rationnel. Cette méthode repose sur la décomposition de la diagonale dans le groupe de Chow et sur des propriétés de spécialisation de cette décomposition. Parmi ces nouvelles familles, mentionnons les revêtements doubles de l'espace projectif de dimension trois ou quatre ramifiés le long d'une hypersurface quartique très générale et les solides quartiques très généraux. Ces méthodes permettent également de démontrer que la rationalité ne se conserve pas par déformation, même au sein d'une famille de variétés lisses de dimension quatre.

Abstract. — C. Voisin has invented a new method to prove that members of families of varieties are not stably rational, that is their product with an affine space is not rationnal. This method is based upon the decomposition of the diagonal in the Chow group and the specialisation properties of this decomposition. Among the new families concerned by this method are the double covers of the projective space of dimension three or four ramified along a very general quartic hypersurface and quartic threefolds. These methods also allow to construct a family of smooth varieties of dimension four for which the locus of rationality is neither open nor closed.

1. Rationalité et irrationalité

1.1. Notions de rationalité. — À la base, les questions de rationalité concernent la possibilité de paramétrer les solutions d'équations polynomiales en plusieurs variables à l'aide de fonctions rationnelles. Considérons par exemple la lemniscate de Bernoulli d'équation

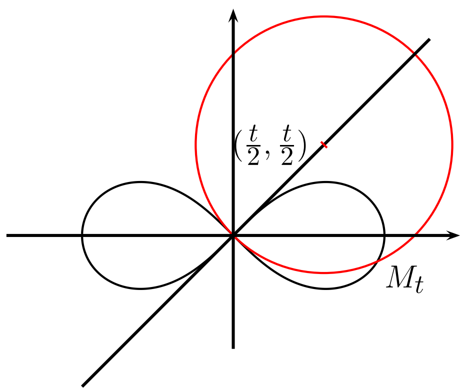
$$(X^2+Y^2)^2 - X^2 + Y^2 = 0. \tag{1}$$

Pour tout nombre réel t, le cercle de centre $(t/2, t/2)$ et passant par $(0,0)$ rencontre la courbe en le point de coordonnées $(0,0)$ et le point

$$M_t = \left(\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}\right)$$

et l'application φ donnée par $t \mapsto M_t$ définit une bijection de $\mathbf{R}$ sur les

Figure 1. Lemniscate de Bernoulli



points de la courbe d'équation (1). Ce paramétrage permet en particulier de décrire explicitement l'ensemble des solutions à coordonnées rationnelles de l'équation (1). En effet, l'application réciproque de φ est donnée par

$$\varphi^{-1}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

pour tout point (x,y) de la lemniscate distinct de l'origine et $\varphi^{-1}(0,0) = 0$, si bien que l'image par φ d'un nombre réel t a des coordonnées rationnelles si et seulement si t est lui-même un nombre rationnel.

En dimension supérieure, il convient de préciser le type de paramétrage recherché. Considérons l'exemple suivant, dû à M. Ojanguren. On considère la surface de Châtelet S d'équation

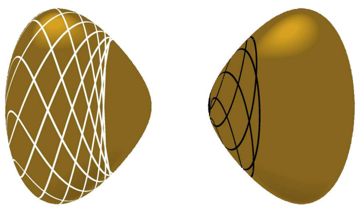
$$Y^2 + Z^2 = 2X(X^2 - 3). \tag{2}$$

Le plan H d'équation $Z = 2$ est tangent à la surface en le point $P_0 = (-1, 0, 2)$. Les droites de H d'équation $Y = s(X+1)$ rencontrent la surface S en P_0 et en le point $M_s = \frac{1}{2}(s^2+4, s^3+6s)$. Comme la surface est une surface de révolution autour de l'axe des X, il suffit de choisir un paramétrage du cercle unité tel que $t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ pour obtenir une application φ

$$(s,t) \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{-1+t^2}{1+t^2} \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2+4 \\ s^3+6s \\ 4 \end{pmatrix}$$

qui envoie les points de $\mathbf{R}^2$ dans les points réels de S. Cela permet par exemple de trouver certaines des solutions rationnelles de l'équation ou d'exhiber des courbes paramétrées par des fonctions rationnelles contenues dans la surface (figure 2). Cette application n'est cependant ni in-

FIGURE 2. Surface de Châtelet



jective ni surjective. En effet, soit $P = (x, y, z)$ une solution de l'équation (2). Si $x > 2$, le point P a deux antécédents par φ, il en a un si $x = 2$ et aucun si $x < 2$. En fait, il n'est pas possible de trouver des applications rationnelles induisant une bijection ψ d'un ouvert dense U de $\mathbf{R}^2$ sur un ouvert dense de la surface. En effet, notons $\widetilde{S}$ une compactification projective et lisse de S. Étant donnés deux points distincts P et Q de U la restriction de ψ à l'intersection $U \cap (PQ)$ s'étend en un

morphisme de la droite projective sur $\mathbf{R}$ dans $\widetilde{S}$. Il en résulte que l'image de ψ est contenue dans une des deux composantes connexes de $\widetilde{S}$.

D'un point de vue plus algébrique, l'application φ induit un morphisme du corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}(X, Y)[Z]/(Y^2 + Z^2 - 2X(X^2 - 3))$ dans le corps $\mathbf{R}(s, t)$, définissant ainsi une extension de corps de degré 2, mais la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{K}$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{R}(s, t)$.

Dans la suite de cet exposé, une variété est supposée irréductible et une *belle* variété sur un corps $\mathbf{K}$ est une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $\mathbf{K}$.

Définitions 1.1. — Soit V une belle variété sur un corps $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{K}(V)$ le corps des fonctions de V. La variété V est dite

a) $\mathbf{K}$-*rationnelle* s'il existe un entier n et un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;

b) $\mathbf{K}$-*stablement rationnelle* s'il existe des entiers m et n et un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)(X_1, \dots, X_m)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;

c) $\mathbf{K}$-*rétractilement rationnelle* s'il existe un ouvert dense U de V, un ouvert W d'un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ et des morphismes de variétés $f : U \to W$ et $g : W \to U$ de sorte que la composée $g \circ f$ soit l'application identité de U.

d) $\mathbf{K}$-*unirationnelle* s'il existe un entier n et un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ dans $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;

e) *rationnellement connexe par chaînes* si pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ qui est algébriquement close, deux points de $V(\mathbf{L})$ peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles.

On peut démontrer les implications suivantes :

$$\text{a)} \implies \text{b)} \implies \text{c)} \implies \text{d)} \implies \text{e)}.$$

Si V est de dimension 1 et possède un point rationnel, le théorème de Lüroth [**Lü**] implique l'équivalence entre ces cinq conditions. Sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, il résulte du théorème de G. Castelnuovo [**Ca**] que toutes ces implications sont des équivalences lorsque la variété V est de dimension 2 (*cf.* [**Ha**, §1.4]). Par exemple, la surface de Châtelet ci-dessus devient rationnelle lorsqu'on étend les scalaires à $\mathbf{C}$.

En dimension supérieure, des contre-exemples sont connus pour la réciproque de chacune des implications a) $\Rightarrow$ b) et c) $\Rightarrow$ d), y compris sur

le corps des nombres complexes. Ainsi M. Artin et D. Mumford donnent dans [**AM**] un exemple de variété unirationnelle V sur $\mathbf{C}$ qui n'est pas rationnelle en utilisant comme invariant le sous-groupe de torsion du groupe de cohomologie singulière $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, résultat qui fit l'objet d'un exposé dans ce séminaire par P. Deligne [**De**]. Comme la non-trivialité de ce sous-groupe de torsion est en fait une obstruction à la rationalité rétractile, la variété qu'ils considèrent n'est pas rétractilement rationnelle. À la même époque, Yu. Manin et V. A. Iskovskikh donnaient dans [**IM**] une famille d'exemples de variétés unirationnelles non rationnelles reposant sur le groupe des automorphismes birationnels et C. H. Clemens et F. A. Griffiths dans [**CG**] donnaient un autre exemple d'une telle variété mais en utilisant la jacobienne intermédiaire. Pour la réciproque de l'implication a) $\Rightarrow$ b), le premier contre-exemple est dû à A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer [**BCTSSD**] et repose également sur le calcul de la jacobienne intermédiaire. Il fut présenté dans ce séminaire par L. Moret-Bailly [**MB**].

L'orateur ne connaît pas à l'heure actuelle de contre-exemples à la réciproque des implications b) $\Rightarrow$ c) ou d) $\Rightarrow$ e) sur le corps des nombres complexes. Sur un corps qui n'est pas algébriquement clos, les tores algébriques fournissent des exemples de variétés rétractilement rationnelles qui ne sont pas stablement rationnelles : [**CTS**] et [**HY**].

Toutes les obstructions à la rationalité stable utilisées dans la suite de cet exposé sont en fait des obstructions à la rationalité rétractile. Le terme stable peut donc être remplacé par rétractile à chacune de ses occurrences.

L'objectif de cet exposé est de présenter une technique récente introduite dans l'article [**Vo2**] de C. Voisin ainsi que des variantes de cette technique qui permettent de démontrer que « la plupart » des membres de diverses familles classiques de variétés ne sont pas stablement rationnels.

D'autre part, il est naturel de s'interroger sur le lien entre déformation des variétés et rationalité. L'exposé de J.-P. Serre de février 1957 [**Se**] reprend l'interprétation de K. Kodaira du critère de rationalité de Castelnuovo pour les surfaces algébriques complexes. Il en résulte que la rationalité est préservée dans les familles lisses en dimension $\leqslant 2$. Les techniques présentées ici permettent en particulier de construire des familles de variétés projectives et lisses de dimension $\geqslant 4$ telles que le lieu des fibres rationnelles ne soit ni ouvert ni fermé.

À tous les collègues, en particulier A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, S. Druel, A. Pirutka et Y. Tschinkel, qui ont relu ce texte dans un délai extrêmement court, je présente à la fois mes remerciements les plus vifs pour les suggestions qu'ils m'ont faites et mes regrets de n'avoir pas été capable de corriger l'ensemble des défauts qu'ils m'ont signalés. Je remercie également les participants au groupe de travail sur la décomposition de la diagonale qui eut lieu à l'université de Pékin en juillet 2016 pour leurs présentations qui m'ont aidé pour la préparation de cet exposé.

1.2. Invariants cohomologiques. — Avant d'entrer dans le vif du sujet, faisons une digression sur une classe d'invariants qui généralise l'invariant utilisé par Artin et Mumford, à savoir le sous-groupe de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. En un sens, l'obstruction à la stable rationalité considérée par la suite, à savoir la décomposition de Chow de la diagonale, peut être vue comme un avatar universel de ces invariants.

Dans [**CTO**], J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren ont introduit une famille d'invariants birationnels, les groupes de cohomologie non ramifiée. Pour comprendre la construction de ces groupes, on peut penser à la description des fonctions inversibles sur une variété comme l'ensemble des éléments du corps des fonctions qui n'ont ni pôles ni zéros : de façon imagée, une classe de cohomologie non ramifiée est une classe dans le groupe de cohomologie galoisienne du corps de fonctions de la variété qui « n'a ni pôles ni zéros ».

Un cadre général pour les invariants non ramifiés est décrit par J.-L. Colliot-Thélène dans [**CT**], nous nous placerons ici dans le cadre des modules de cycles définis par M. Rost dans [**Ro**]. Rappelons que pour tout corps $\mathbf{L}$, l'anneau de K-théorie de Milnor est l'anneau gradué $K^*_{\mathrm{M}}(\mathbf{L})$ quotient de la $\mathbf{Z}$-algèbre tensorielle $T_{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}^*)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes (1-x)$ pour $x \in \mathbf{L} - \{0,1\}$. Étant donné un schéma S sur un corps $\mathbf{K}$, on peut considérer la catégorie $\mathscr{F}(S)$ des corps $\mathbf{L}$ munis d'un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbf{L}) \to S$. Une valuation v au-dessus de S est un morphisme de $\mathbf{K}$-schémas $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v) \to S$ où $\mathscr{O}_v$ est un anneau local de type géométrique sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire obtenu en localisant une algèbre intègre de type fini sur $\mathbf{K}$ en un point régulier de codimension 1. Une théorie de modules de cycles sur S est alors un foncteur covariant

M^* de la catégorie $\mathscr{F}(S)$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules gradués, muni des structures suivantes :

(i) À tout morphisme $\varphi : \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ de $\mathscr{F}(S)$ correspondant à une extension finie de corps est associé un morphisme de corestriction $M^*(\mathbf{L}') \to M^*(\mathbf{L})$;

(ii) Pour tout objet $\mathbf{L}$ de $\mathscr{F}(S)$, le groupe gradué $M^*(\mathbf{L})$ est muni d'une structure de $K_{\mathrm{M}}^*(\mathbf{L})$-module gradué ;

(iii) Pour toute valuation v au-dessus de S, on dispose de morphismes de résidu de degré -1 :

$$M^i(\mathrm{Fr}(\mathscr{O}_v)) \xrightarrow{\partial_v} M^{i-1}(\kappa_v),$$

où $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}_v)$ désigne le corps des fractions de l'anneau local $\mathscr{O}_v$ et κ_v son corps résiduel.

Ces différentes structures doivent satisfaire en outre diverses conditions, notamment de compatibilité, que nous ne détaillerons point ici [**Ro**, pp. 329 et 337]. Soit $\mathbf{K}$ un corps. Étant donné une théorie de modules de cycles M^* sur $\mathbf{K}$, le groupe non ramifié de degré i associé à une belle variété V est donné par

$$M^i_{\mathrm{nr}}(V) = \bigcap_v \ker(\partial_v : M^i(\mathbf{K}(V)) \longrightarrow M^{i-1}(\kappa_v))$$

où v décrit l'ensemble des valuations correspondant aux points de codimension 1 de V. On peut démontrer que ce groupe est un invariant pour la rationalité stable de V [**Ro**, proposition 2.2 et corollaire 12.10]. On retrouve, comme cas particulier en degré 2 le groupe de Brauer non ramifié de V, noté $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(V)$, et en degré supérieur ses généralisations $H^i_{\mathrm{nr}}(\mathbf{K}(V), \mu_n^{\otimes j})$, où μ_n désigne le faisceau des racines n-èmes de l'unité. Pour une variété complexe rationnellement connexe par chaînes V, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(V)$ est isomorphe à la partie de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ utilisée par M. Artin et D. Mumford dans [**AM**].

L'avantage de cette description est que les morphismes de résidus peuvent être calculés de façon relativement explicite, ce qui permet de construire des classes dans la cohomologie non ramifiée, voire même de donner des méthodes de calcul de ces invariants non ramifiés. Dans cette direction, on peut mentionner les travaux de F. A. Bogomolov [**Bo**], qui donnent une description complète du groupe de Brauer non ramifié pour le corps des fonctions rationnelles invariantes $\mathbf{C}(V)^G$ pour une représentation linéaire V d'un groupe G.

Détaillons une méthode pour obtenir explicitement des éléments non nuls dans le groupe de Brauer non ramifié. Les éléments du groupe de Brauer d'un corps $\mathbf{K}$ peuvent être décrits comme les classes d'isomorphisme des algèbres de dimension finie sur $\mathbf{K}$ qui sont des corps de centre $\mathbf{K}$ [**Bki**, p. 276, prop. 4]. Si la caractéristique du corps est différente de deux, l'algèbre de quaternions associée à un couple (a, b) d'éléments de $\mathbf{K}^*$ est définie comme l'algèbre associative et unifère engendrée par deux éléments I et J vérifiant les relations

$$I^2 = a, \qquad J^2 = b \qquad JI = -IJ;$$

elle fournit un élément $(a, b)_2$ de $\mathrm{Br}(\mathbf{K})$ qui appartient au groupe de 2-torsion et est non nul si et seulement si l'algèbre de quaternions est un corps.

Décrivons maintenant le morphisme de résidu. Soit P un point de codimension 1 dans une belle variété V sur $\mathbf{K}$; notons v la valuation correspondante. Sur la partie de 2-torsion, l'application résidu en P est un morphisme de groupes

$$\mathrm{Br}(\mathbf{K}(V))[2] \xrightarrow{\partial_v} \kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2.$$

Pour des éléments a, b de $\mathbf{K}(V)^*$, le quotient $b^{v(a)}/a^{v(b)}$ est un élément inversible de $\mathscr{O}_v$ dont on peut considérer l'image $\overline{b^{v(a)}/a^{v(b)}}$ dans κ_v^*. Le résidu $\partial_v((a, b)_2)$ est alors donné par la classe de $(-1)^{v(a)v(b)}\overline{b^{v(a)}/a^{v(b)}}$ dans le groupe $\kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2$.

À titre d'exemple, pour la surface de Châtelet présentée précédemment, l'élément $(X, -1)_2$ définit une classe non nulle de $\mathrm{Br}(\mathbf{R}(\widetilde{S}))$ qui ne provient pas de $\mathrm{Br}(\mathbf{R}) = \{0, (-1, -1)_2\}$ et qui est non ramifiée. En effet, le résidu en le point de codimension 1 de $\widetilde{S}$ pour lequel $v(X) = 1$ (resp. $v(1/X) = 1$) est la classe de -1 dans $\kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2$; comme le corps κ_v est isomorphe à $\mathbf{R}(Y)[Z]/(Y^2 + Z^2)$, cette classe est triviale. Le fait que le morphisme $\mathrm{Br}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\widetilde{S})$ ne soit pas surjectif fournit une nouvelle obstruction à la rationalité stable de cette surface. Notons que l'image de cette classe dans $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(\widetilde{S}))$ est, quant à elle, nulle.

En utilisant les groupes de cohomologie non ramifiée de degré supérieur, J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren produisent dans [**CTO**] des exemples de variétés unirationnelles non stablement rationnelles V sur $\mathbf{C}$ dont le sous-groupe de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est trivial.

La question de déterminer si, pour une classe de variétés donnée, *tous* les invariants non ramifiés sont triviaux est une des motivations qui a conduit, dans [**ACTP**], à une approche qu'on pourrait qualifier de motivique et à la décomposition de la diagonale.

2. Décomposition de la diagonale

Au sens des correspondances motiviques, la rationalité rétractile d'une variété permet d'écrire l'identité comme une somme de deux projecteurs particuliers. Nous allons maintenant décrire plus précisément cette décomposition.

2.1. La catégorie des correspondances. — Soit V un schéma de type fini sur un corps $\mathbf{K}$. Soit $p \in \mathbf{N}$. On note $V_{(p)}$ (resp. $V^{(p)}$) l'ensemble des points de V dont l'adhérence est de dimension (resp. codimension) p dans V. Pour tout point P de V, on note $\kappa(P)$ le corps résiduel, qui est le corps des fonctions de l'adhérence de P dans V. Pour tout point $P \in V_{(p)}$ contenu dans l'adhérence Y d'un point $Q \in V_{(p+1)}$, l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,P}$ définit un morphisme de groupes de $\kappa(Q)^*$ dans $\mathbf{Z}$, qui correspond à l'ordre d'annulation en P. On obtient ainsi une application diviseur

$$\operatorname{div} : \bigoplus_{Q \in V_{(p+1)}} \kappa(Q)^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in V_{(p)}} \mathbf{Z}$$

et le groupe de Chow en dimension p, noté $\mathrm{CH}_p(V)$, est défini comme le conoyau de l'application diviseur. Cela définit un foncteur CH_p qui est covariant pour les morphismes propres.

Pour une variété non singulière V de dimension n sur un corps $\mathbf{K}$, on définit le groupe de Chow en codimension p, par $\mathrm{CH}^p(V) = \mathrm{CH}_{n-p}(V)$. En codimension un, on retrouve ainsi le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(V)$. Le produit d'intersection munit le groupe $\bigoplus_{i=0}^n \mathrm{CH}^i(V)$ d'une structure d'anneau (*cf.* [**Fu2**, §8.3]).

Ce produit permet de définir la catégorie des correspondances, première étape vers une catégorie des motifs géométriques. Les objets de cette catégorie sont les belles variétés sur $\mathbf{K}$, les morphismes d'une variété X de dimension m vers une variété Y de dimension n, appelés correspondances de X vers Y, forment le groupe

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \mathrm{CH}^m(X \times Y).$$

Soient X, Y et Z des belles variétés sur $\mathbf{K}$. Notons $p_{X,Y}$ (resp. $p_{Y,Z}$, $p_{X,Z}$) la projection de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y$ (resp. $Y \times Z$, $X \times Z$). Rappelons que le graphe de la composée d'applications $f : X \to Y$ de graphe Γ_f et $g : Y \to Z$ de graphe Γ_g est donné par

$$\Gamma_{g \circ f} = p_{X,Z}((X \times \Gamma_g) \cap (\Gamma_f \times Z)). \tag{3}$$

La composée d'une correspondance α de $\mathrm{Corr}(X, Y)$ avec une correspondance β de $\mathrm{Corr}(Y, Z)$ est donnée par

$$\beta \circ \alpha = p_{X,Z*}(p_{X,Y}^*(\alpha).p_{Y,Z}^*(\beta)).$$

La formule (3) entraîne que l'application qui envoie un morphisme de variétés de Y vers X sur la classe de la réciproque de son graphe, c'est-à-dire le graphe obtenu par échange des deux composantes, définit un foncteur contravariant de la sous-catégorie pleine des belles variétés sur le corps $\mathbf{K}$ dans la catégorie des correspondances. Ce foncteur envoie le morphisme identité sur la classe de la diagonale. Les foncteurs de cohomologie usuels qui sont des foncteurs contravariants de la catégorie des belles variétés dans la catégorie des groupes abéliens se factorisent au travers de la catégorie des correspondances si bien que les correspondances induisent des morphismes entre groupes de cohomologie.

2.2. Trivialité universelle. — Soit A un anneau commutatif. Pour tout schéma $\mathscr{X}$ sur A et toute A-algèbre commutative B, on note $\mathscr{X}_B$ le B-schéma déduit de $\mathscr{X}$ par extension des scalaires de A à B, c'est-à-dire le produit $\mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathscr{X}$.

Une remarque élémentaire mais cruciale pour cet exposé est qu'une variété $\mathbf{K}$-rationnelle (resp. $\mathbf{K}$-stablement rationnelle) est $\mathbf{L}$-rationnelle (resp. $\mathbf{L}$-stablement rationnelle) sur toute extension de corps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Supposons maintenant qu'on dispose d'un invariant F, contravariant ou encore covariant pour les morphismes propres, sur les belles variétés à valeurs dans les groupes abéliens qui est un invariant birationnel et tel que $F(V)$ soit isomorphe à $F(V \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})$ pour toute belle variété V. En particulier l'invariant F est un invariant pour la rationalité stable. Alors l'invariant F est *universellement trivial* pour les variétés $\mathbf{K}$-stablement rationnelles au sens suivant : étant donnée une belle variété V sur le corps $\mathbf{K}$ on dit que F est *universellement trivial pour* V si et seulement si le morphisme structural de $V_{\mathbf{L}}$ induit un isomorphisme entre $F(V_{\mathbf{L}})$ et $F(\mathbf{L}) = F(\mathrm{Spec}(\mathbf{L}))$ pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.

Mais reprenons l'argument utilisé pour l'exemple de la surface de Châtelet : sur un corps algébriquement clos $\mathbf{K}$, si une belle variété V est rationnellement connexe par chaînes sur $\mathbf{K}$, deux points P et Q sur V peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles. Or pour un point P sur une courbe rationnelle et tout point P_0 de cette courbe, on peut trouver une fonction rationnelle sur la courbe dont le diviseur est $[P]-[P_0]$. Il en résulte que le degré définit un isomorphisme du groupe de Chow $\mathrm{CH}_0(V)$ sur $\mathrm{CH}_0(\mathbf{K}) = \mathbf{Z}$. Le groupe $\mathrm{CH}_0(V)$ d'une variété rationnellement connexe par chaînes est donc trivial, c'est-à-dire que le degré est un isomorphisme, sur toute extension algébriquement close du corps de base. Nous allons maintenant démontrer que, pour une variété stablement ou rétractilement rationnelle, ce groupe est en fait universellement trivial au sens précédent. Les exemples fournis par M. Artin et D. Mumford montrent que le groupe CH_0 peut être trivial sur toute extension algébriquement close sans être universellement trivial.

La trivialité universelle du groupe des 0-cycles peut s'exprimer en termes de correspondances [**Me**], [**ACTP**] :

Définition 2.1. — Une *décomposition de Chow de la diagonale* pour une variété propre et intègre V de dimension n sur un corps $\mathbf{K}$ est la donnée d'un fermé strict Z de V, de la classe α d'un 0-cycle de degré 1 supporté par le lieu lisse de V et d'un cycle D de dimension n sur $Z \times V$ de sorte que la classe de la diagonale Δ_V s'écrive

$$[\Delta_V] = \mathrm{pr}_2^*(\alpha) + [D] \tag{4}$$

dans le groupe $\mathrm{CH}_n(V \times V)$.

Proposition 2.2 **(A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala)**
Soit V une belle variété de dimension n sur un corps $\mathbf{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le groupe* CH_0 *des* 0*-cycles est universellement trivial pour V ;*

(ii) *La variété V possède un* 0*-cycle de degré* 1 *et le degré est injectif sur le groupe* $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{K}(V)})$ *;*

(iii) *La variété V possède un* 0*-cycle de degré* 1 *et pour tout* 0*-cycle α de degré* 1 *sur V, la différence* $\mathrm{Id}_V - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ *dans le groupe de correspondances* $\mathrm{Corr}(X,X)$ *est équivalente à la classe d'un cycle supporté par $Z \times V$ où Z est un fermé strict de V ;*

(iv) *La variété V admet une décomposition de Chow de la diagonale.*

Remarque 2.3. — Lorsqu'on considère une décomposition analogue dans les groupes de Chow à coefficients rationnels, les différentes conséquences de ce type de décomposition ont été étudiées par de nombreux auteurs depuis l'article de S. Bloch et V. Srinivas [**BS**] (*cf.* également [**Vo1**]).

Démonstration. — Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) résultent des définitions.

Supposons la condition (ii) vérifiée. On écrit l'extension des scalaires $V_{\mathbf{K}(V)}$ comme le produit $\mathrm{Spec}(\mathbf{K}(V)) \times V$. Soit α un 0-cycle de degré 1 sur V. Par hypothèse, l'image de α dans $\mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)})$ et la classe du point générique η sont égales. Or la classe du point générique est l'image de la classe de la diagonale Δ_V par le morphisme

$$(\eta \times \mathrm{Id})^* : \mathrm{CH}^n(V \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)}).$$

Par conséquent la différence $\beta = [\Delta_V] - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ appartient au noyau de ce morphisme. Mais le groupe de Chow $\mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)})$ est isomorphe à la limite inductive des groupes $\mathrm{CH}^n(U \times V)$ où U décrit les ouverts de Zariski non vides de V. Il existe donc un tel ouvert U de sorte que l'image de β dans $\mathrm{CH}^n(U \times V)$ soit nulle. Notons Z le complémentaire de U dans V. La suite exacte [**Fu2**, proposition 1.8]

$$\mathrm{CH}_n(Z \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}_n(V \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}_n(U \times V) \longrightarrow 0$$

montre alors que β est supporté par $Z \times V$. L'assertion (iii) est donc vérifiée.

Démontrons maintenant l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit $\mathbf{L}$ une extension de $\mathbf{K}$. On fixe une décomposition de Chow de la diagonale de V, donnée par la formule (4). Or une correspondance $\beta \in \mathrm{Corr}(V, V)$ induit un endomorphisme β_* du groupe $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ donné par la formule

$$\beta_*(\gamma) = (\mathrm{pr}_2)_*(\beta_{\mathbf{L}} \cdot \mathrm{pr}_1^*(\gamma)),$$

pour tout 0-cycle γ. Mais par un lemme de déplacement [**GLL**, cor. 6.7], comme V est lisse, pour tout ouvert de Zariski U non vide de V un 0-cycle de V est équivalent à un 0-cycle dont le support est contenu dans U. Il en résulte que l'application induite par la correspondance $\mathrm{Id} - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ sur $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ est nulle. Or ${\mathrm{pr}_2}^*(\alpha)$ induit l'application donnée par $\gamma \mapsto \deg(\gamma)\alpha$. On obtient $\gamma = \deg(\gamma)\alpha$ pour tout 0-cycle γ de $V_{\mathbf{L}}$. Le degré est donc un isomorphisme du groupe $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ sur $\mathbf{Z}$. $\square$

Remarque 2.4. — Si une belle variété V admet un point rationnel P, alors une décomposition de Chow de la diagonale, lorsqu'il en existe, peut être choisie de la forme

$$[\Delta_V] = [V \times \{P\}] + [D]$$

où D est supporté par $Z \times V$ pour un fermé strict Z de V.

Proposition 2.5. — *Soit V une belle variété sur un corps $\mathbf{K}$. Si la variété V est $\mathbf{K}$-rétractilement rationnelle, alors elle admet une décomposition de Chow de la diagonale.*

Nous reprenons la preuve de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka [**CTP1**].

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le degré définit un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(V)$ sur $\mathbf{Z}$. On reprend les notations de la définition de $\mathbf{K}$-rétractilement rationnelle.

Supposons d'abord le corps $\mathbf{K}$ infini. L'ouvert W de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ contient alors un point rationnel M. Soit P un point fermé de l'ouvert U de V. Comme la composée $g \circ f$ est l'identité, les corps résiduels $\mathbf{L} = \mathbf{K}(P)$ et $\mathbf{K}(f(P))$ sont isomorphes. La multiplication fournit un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres surjectif $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ ce qui donne un $\mathbf{L}$-point R de $V_{\mathbf{L}}$ au-dessus de P. Soit D une droite projective de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{L}}$ passant par les points $M_{\mathbf{L}}$ et $f(R)$. L'application g induit un unique morphisme de D vers la variété propre $V_{\mathbf{L}}$ qu'on peut composer avec la projection vers la variété V. Le 0-cycle $f(R) - M_{\mathbf{L}}$ est rationnellement équivalent à 0. Il en est de même de son image dans V, qui est $P - [\mathbf{L} : \mathbf{K}]g(M)$.

Le lemme de déplacement déjà mentionné assure qu'un 0-cycle α de V est équivalent à un cycle supporté par U, l'argument précédent démontre donc que α est rationnellement équivalent à $\deg(\alpha)g(M)$ et le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(V)$ sur $\mathbf{Z}$.

Dans le cas d'un corps fini, on considère des extensions de degrés premiers entre eux sur lesquelles l'ouvert W possède un point rationnel. Comme la composée de la corestriction et de la restriction coïncide avec la multiplication par le degré de l'extension, cela démontre que le noyau et le conoyau du morphisme de degré $\deg : \mathrm{CH}_0(V) \to \mathbf{Z}$ sont annihilés par des nombres premiers entre eux, ils sont donc réduits à 0. ☐

L'énoncé suivant signifie essentiellement que l'absence de décomposition de la diagonale est un invariant plus fin que les invariants introduits au §1.2.

Proposition 2.6 **(A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala)**
Soit V une belle variété qui admet une décomposition de Chow de la diagonale. Alors, pour toute théorie de modules de cycle à la Rost M^*, les groupes non ramifiés associés M^*_{nr} sont universellement triviaux.

Outils de la preuve. — L'argument principal est un résultat de N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev qui assure que les correspondances qui sont la classe d'un cycle de support contenu dans $Z \times X$ pour un fermé strict Z de X agissent trivialement sur les groupes non ramifiés associés aux modules de cycles [**KM**, RC8]. Dans une décomposition de Chow de la diagonale (4), écrivons le 0-cycle α sous la forme $\alpha = \sum_{i\in I} m_i P_i$. Alors, pour tout $i \in I$, la correspondance $\mathrm{pr}_2^*([P_i])$ induit sur le groupe non ramifié du module de cycle la composée des applications

$$M^i_{\mathrm{nr}}(V) \xrightarrow{\text{év}} M^i(\kappa(P_i)) \xrightarrow{\text{Cores}} M^i(\mathbf{K}) \longrightarrow M^i_{\mathrm{nr}}(V)$$

où év désigne l'application d'évaluation [**Ro**, p. 339, (E)] et Cores l'application de corestriction. Il en résulte que le morphisme induit par $\mathrm{Id}_V = pr_2^*(\alpha)$ s'ecrit $\iota \circ s$ où ι désigne l'application $M^i(\mathbf{K}) \to M^i_{\mathrm{nr}}(V)$ et, comme α est de degré 1, la composée $s \circ \iota$ est l'identité de $M^i(\mathbf{K})$. Les applications s et ι sont donc réciproques l'une de l'autre ce qui démontre que ι est un isomorphisme. Comme une décomposition de Chow de la diagonale est compatible avec l'extension des scalaires, il en résulte que les groupes non ramifiés associés aux modules de cycles sont universellement triviaux. □

Remarque 2.7. — Une réciproque de ce résultat est donnée dans [**Me**].

3. Décomposition en famille

Une des raisons de considérer le groupe de Chow comme invariant birationnel est le fait que le groupe de Chow se comporte bien par spécialisation. C. Voisin donna une première formulation pour la spécialisation de la décomposition de la diagonale dans [**Vo2**, theorem 2.1 (i)], sa preuve permet d'obtenir l'énoncé suivant dont la formulation est issue de [**CTP1**] :

Théorème 3.1. — *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos $\mathbf{K}$ de caractéristique 0, soit $\pi : V \to B$ un morphisme projectif à fibres intègres admettant une section. Il existe une famille au*

plus dénombrable $(B_i)_{i\in I}$ *de sous-schémas fermés de* B *telle que l'ensemble des points* b *de* $B(\mathbf{K})$ *pour lesquels* V_b *admet une décomposition de Chow de la diagonale est* $\bigcup_{i\in I} B_i(\mathbf{K})$*.*

Corollaire 3.2. — *Soit* B *un schéma lisse de type fini sur un corps algébriquement clos* $\mathbf{K}$ *de caractéristique* 0*, soit* $\pi : V \to B$ *un morphisme projectif à fibres intègres admettant une section et soit* 0 *un élément de* $B(\mathbf{K})$*. Si la fibre* V_0 *n'admet pas de décomposition de la diagonale, il en est de même de la fibre* V_b *en tout point* b *très général de* B*.*

Rappelons que le terme *très général* signifie « appartenant au complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de la variété ».

Nous esquissons ici la preuve du théorème telle qu'elle est détaillée en appendice dans l'article [**CTP1**] de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka. Elle repose sur l'existence des schémas de Chow.

Dans ce paragraphe, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soient V et B des schémas au-dessus d'un schéma S sur $\mathbf{K}$. On suppose que V est projectif sur S et que B est réduit et normal. Une *famille bien définie de cycles de* V *sur* B est la donnée d'un cycle $C = \sum_{i\in I} m_i[C_i]$ de $V \times_S B$ de sorte que

(i) Chaque C_i est un sous-schéma intègre de $V \times_S B$;

(ii) Les applications $g_i : C_i \to B$ obtenues par restriction de la seconde projection sont propres, d'image une composante irréductible de B ;

(iii) Les composantes irréductibles des fibres des applications g_i sont de dimension d.

Pour un schéma projectif X/S, le foncteur qui à un S-schéma semi-normal Z associe l'ensemble des familles bien définies de cycles effectifs de dimension d et de degré d' de X sur Z est représenté par un S-schéma projectif et semi-normal $\mathfrak{Chow}^{d,d'}_{X/S}$ [**Ko**, Th. I.3.21, p. 52]. On omettra par la suite les exposants d et d' pour alléger les notations. Ces schémas sont équipés d'une famille universelle

$$\mathfrak{Univ}_{X/S} \longrightarrow \mathfrak{Chow}_{X/S}\,.$$

Un point crucial de la preuve du théorème 3.1 consiste à contrôler le lieu d'équivalence rationnelle entre deux familles de cycles.

Proposition 3.3. — *Soit* B *un schéma intègre et normal sur un corps* $\mathbf{K}$*, soit* $V \to B$ *un morphisme projectif et soit* (Z_1, Z_2) *un couple*

de familles bien définies de cycles effectifs de dimension m. *Alors*

$$\{\, b \in B(\mathbf{K}) \mid [Z_{1,b}] = [Z_{2,b}] \text{ dans } \mathrm{CH}_m(Y_b) \,\}$$

est une réunion dénombrable de sous-schémas fermés.

En reprenant la définition des groupes de Chow et en se ramenant au besoin à une base lisse par désingularisation ou altération, cet énoncé se déduit du lemme suivant :

Lemme 3.4. — *Soient* B *un* $\mathbf{K}$*-schéma lisse et* $V \to B$ *un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable de schémas normaux* $(T_i)_{i\in I}$ *au-dessus de* B *munis chacun d'un couple de familles de cycles* (C'_i, C''_i) *paramétrés par* T_i *de sorte que pour tout* $b \in B(\mathbf{K})$ *et toute sous-variété* W *de dimension* $d+1$ *dans* V_b *il existe une désingularisation* $\widetilde{W}$ *de* W *telle que pour tout diviseur de fonctions* $D = D_1 - D_2$ *sur* $\widetilde{W}$, *avec* D_1 *et* D_2 *effectifs, il existe* $i \in I$ *et* $t \in T_i(\mathbf{K})$ *au-dessus de* b *de sorte que* $(D_1, D_2) = ((C'_i)_t, (C''_i)_t)$.

Esquisse de la preuve. — Tout d'abord, on utilise une famille universelle $F \to H$ pour les sous-variétés intègres de V qui sont plates sur B et de dimension relative $d+1$; on décompose alors $H = H_1 \cup \cdots \cup H_n$ en une réunion de schémas localement fermés de H, de façon à obtenir une désingularisation $\widetilde{F}_k \to F_k$ dont les fibres au-dessus de H_k sont lisses. Le lemme résulte alors de l'existence du schéma de Picard : considérons l'application induite par le morphisme qui à un diviseur associe sa classe dans le groupe de Picard

$$\left(\mathscr{D}\mathrm{iv}_{\widetilde{F}_k/H_k}\right)^2 \longrightarrow \left(\mathscr{P}\mathrm{ic}_{\widetilde{F}_k/H_k}\right)^2.$$

Soit T la normalisation d'une composante de l'image inverse de la diagonale. Les familles universelles au-dessus de chacun des termes du produit définissent un couple de familles de cycles paramétrés par T. On obtient ainsi les schémas et cycles demandés. □

Pour déduire le théorème de la proposition, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.5. — *Soient* B *un* $\mathbf{K}$*-schéma lisse et* $V \to B$ *un morphime projectif. Il existe une famille dénombrable* $(F_i)_{i\in I}$ *de* B*-schémas lisses équipés chacun d'une famille* C_i *de cycles de* $V \times_B V$ *au-dessus de* F_i, *de sorte que pour tout* $b \in B(\mathbf{K})$ *et tout cycle effectif* Z *de* $V_b \times_{\mathbf{K}} V_b$ *dont*

l'image par la première projection est incluse dans un diviseur de V_b, il existe $i \in I$ et $x \in F_i(\mathbf{K})$ au-dessus de b tel que Z s'identifie à $(C_i)_x$.

Esquisse de la preuve. — On considère ici la famille universelle $W \to H$ où H est une composante du schéma de Hilbert qui paramètre les diviseurs effectifs de V au-dessus de B. La famille $D = W \times_B X \to H$ est projective et on peut en considérer les schémas de Chow. Soit F une composante de $\mathfrak{Chow}_{D/H}$ et C la famille universelle au-dessus de F. Considérons la famille C comme une famille de cycles de $V \times_B V$ paramétrée par F. Quitte à désingulariser F, on peut le supposer lisse. L'ensemble des familles ainsi obtenues, qui est dénombrable, satisfait les conditions du lemme. $\square$

Preuve du théorème 3.1. — Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_0(V)$ un élément de degré 1. Écrivons $\mathrm{pr}_1^*(\alpha) = [T_1] - [T_2]$, pour des cycles effectifs T_1 et T_2 de $V \times_B V$. En utilisant le lemme 3.5, on se ramène à l'étude de l'égalité

$$[(\Delta_V)_{(b,b')}] + [C_b] + [(T_2)_{(b,b')}] = [C_{b'}] + [(T_1)_{(b,b')}]$$

où le couple (b, b') décrit chacun des produits $F_i \times_B F_j(\mathbf{K})$ pour $(i, j) \in I^2$. On applique alors la proposition 3.3. $\square$

4. Relèvement

La situation dans laquelle on veut appliquer la méthode de déformation du paragraphe précédent est la suivante : on considère une famille de variétés génériquement lisses, mais possédant une fibre singulière Y dont la désingularisation $\widetilde{Y}$ est d'une autre nature. On souhaite alors démontrer que l'existence d'une décomposition de Chow de la diagonale sur une fibre très générale implique l'existence d'une telle décomposition sur la variété $\widetilde{Y}$. Par contraposée, s'il existe une obstruction à l'existence d'une telle décomposition sur $\widetilde{Y}$, on aura une obstruction à la rationalité stable d'une fibre très générale. Mais, à cette fin, il faut pouvoir relever une décomposition de Chow de la diagonale sur la désingularisation de la fibre singulière.

Toutefois cela n'est pas toujours possible. L'exemple le plus simple est celui des surfaces cubiques lisses sur $\mathbf{C}$ qui sont rationnelles et possèdent donc une décomposition de Chow de la diagonale. Mais au sein de la famille des hypersurfaces de degré 3 dans l'espace projectif de dimension 3, certaines surfaces cubiques singulières S sont des cônes au-dessus d'une

courbe elliptique. Une désingularisation $\widetilde{S}$ de S est birationnellement isomorphe au produit $E \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ et par conséquent le groupe $A_0(\widetilde{S})$ des classes de 0-cycles de degré 0 est isomorphe au groupe $E(\mathbf{C})$ et la désingularisation n'admet pas de décomposition de la diagonale. On peut noter que, dans ce cas particulier, la fibre de la désingularisation au-dessus du point singulier est isomorphe à E et ne possède pas non plus de décomposition de Chow de la diagonale.

Une première version du relèvement se trouve dans l'article de C. Voisin et s'applique dans le cas où les singularités de la fibre spéciale sont au pire des singularités quadratiques ordinaires [**Vo2**, theorem 2.1 (i)]. Nous décrivons ici la méthode développée dans l'article de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka. Cette méthode utilise la notion suivante qui est une version relative de la notion de trivialité déjà utilisée sur un corps :

Définition 4.1. — Un morphisme propre $f : X \to Y$ de variétés sur le corps $\mathbf{K}$ est dit universellement CH_0-trivial, si, pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$, le morphisme induit $\mathrm{CH}_0(X_{\mathbf{L}}) \to \mathrm{CH}_0(Y_{\mathbf{L}})$ est un isomorphime.

Le relèvement à une désingularisation repose alors sur la proposition suivante :

Proposition 4.2. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel propre de variétés sur le corps $\mathbf{K}$. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *Le morphisme f est universellement CH_0-trivial ;*

(ii) *La variété X est lisse et possède un 0-cycle de degré 1 ;*

(iii) *Il existe un ouvert non vide U de Y au-dessus duquel la restriction de f est un isomorphime et tel que, pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$, tout 0-cycle de degré 0 de $Y_{\mathbf{L}}$ dont le support est contenu dans $U_{\mathbf{L}}$ a une image nulle dans $\mathrm{CH}_0(Y_{\mathbf{L}})$.*

alors X admet une décomposition de Chow de la diagonale.

Un critère pour vérifier l'assertion (i) est donné par la proposition suivante :

Proposition 4.3. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre variétés sur $\mathbf{K}$. On fait l'hypothèse suivante :*

($*$) *Pour tout point y du schéma Y, la fibre X_y est universellement CH_0-triviale au-dessus du corps résiduel $\kappa(y)$.*

Alors l'application f est universellement CH_0-triviale.

Remarque 4.4. — On prendra garde, dans cet énoncé, au fait qu'il ne suffit pas de considérer les points fermés de Y.

Preuve de la proposition 4.2. — Les hypothèses étant stables par extensions de corps, il suffit de démontrer que le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(X)$ sur $\mathbf{Z}$. Par la condition (ii), le degré est surjectif. Par le lemme de déplacement déjà mentionné, comme X est lisse, tout 0-cycle est équivalent à un 0-cycle de support contenu dans $f^{-1}(U)$, où U est un ouvert de Y vérifiant la condition (iii). Soit α un 0-cycle de degré 0 de X dont le support est contenu dans $f^{-1}(U)$. Par la condition (iii), son image dans $\mathrm{CH}_0(Y)$ est triviale. Mais par (i), le morphisme f induit un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(X)$ dans $\mathrm{CH}_0(Y)$, ce qui implique que la classe de α est nulle. □

Preuve de la proposition 4.3. — L'hypothèse $(*)$ étant stable par extension de corps, il suffit de vérifier que l'application $f_*: \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$ est un isomorphisme. En appliquant $(*)$ aux points fermés, le morphisme f_* est surjectif. Soit α un 0-cycle de X qui appartient au noyau de f_*. Il existe donc une famille finie $(C_i)_{i\in I}$ de courbes irréductibles de Y et des fonctions $g_i \in \mathbf{K}(C_i)^*$ telles que

$$f_*(\alpha) = \sum_{i\in I} \mathrm{div}(g_i).$$

Appliquons $(*)$ aux points génériques de chacune de ces courbes. Soit $i \in I$. Il existe donc un 0-cycle de degré 1 dans la fibre $X_{\mathbf{K}(C_i)}$. En prenant l'adhérence des points de ce cycle, on obtient une famille d'entiers relatifs $(n_{i,j})_{j\in J_i}$ et une famille de courbes $(\widetilde{C}_{i,j})_{j\in J_i}$ de X, de sorte que

$$\sum_{j\in J_i} n_{i,j}[\mathbf{K}(\widetilde{C}_{i,j}) : \mathbf{K}(C_i)] = 1.$$

Notons $g_{i,j}$ l'image de g_i dans $\mathbf{K}(\widetilde{C}_{i,j})^*$. On pose

$$\alpha' = \alpha - \sum_{(i,j)} \mathrm{div}(g_{i,j}).$$

on a alors l'égalité

$$f_*(\alpha') = f_*(\alpha) - \sum_i \mathrm{div}\Big(\prod_j N_{\mathbf{K}(\widetilde{C}_{i,j})/\mathbf{K}(\widetilde{C}_i)}(g_{i,j})\Big) = 0$$

en tant que 0-*cycle* de Y. Soit S l'image par l'application f du support de α'. On peut écrire $\alpha' = \sum_{Q\in S} \alpha'_Q$ où α'_Q est un 0-cycle supporté par

la fibre X_Q. Comme $f_*(\alpha') = 0$, les 0-cycles α'_Q sont de degré 0. Par l'hypothèse $(*)$, ils sont rationnellement équivalents à 0. Il en est donc de même de α' et donc de α. ☐

5. Spécialisation sur un trait

J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka présentent dans [**CTP1**] un énoncé de spécialisation sur un trait qui peut même être utilisé en inégale caractéristique :

***Théorème 5.1* (J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka)**
Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\mathbf{K}$ et de corps résiduel k algébriquement clos. Notons $\overline{\mathbf{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{K}$. Soit $\mathscr{X}$ un schéma fidèlement plat et propre sur $\operatorname{Spec}(A)$ *dont les fibres sont géométriquement intègres. Soient X la fibre générique $\mathscr{X}_{\mathbf{K}}$ et Y la fibre spéciale $\mathscr{X}_k$. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *Il existe une désingularisation $f : \widetilde{Y} \to Y$ de Y de sorte que f soit universellement* CH_0*-triviale ;*

(ii) *La fibre générique géométrique $\overline{X} = X_{\overline{\mathbf{K}}}$ admet une désingularisation $\widetilde{X} \to \overline{X}$.*

Si la $\overline{\mathbf{K}}$-variété $\widetilde{X}$ est universellement CH_0*-triviale, alors il en est de même de la k-variété $\widetilde{Y}$.*

Remarque 5.2. — Pour faire le lien avec le théorème 3.1, il convient de remarquer que sur les complexes, les groupes de Chow d'une fibre lisse très générale sont isomorphes aux groupes de Chow de la fibre générique géométrique (*cf.* [**Vi**, lemma 2.1]).

Esquisse de la preuve. — Tout d'abord en considérant une extension finie adéquate de $\mathbf{K}$, on se ramène au cas où la désingularisation $\widetilde{X}$ est définie sur $\mathbf{K}$ et universellement CH_0-triviale. Soit alors η le point générique de Y. L'anneau local $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\eta}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\mathbf{K}(X)$ et de corps résiduel $k(Y) = k(\widetilde{Y})$. Soit B son complété, le corps résiduel de B est encore $k(Y)$. Soit F le corps des fractions de B. Le B-schéma $\mathscr{X}_B$ a pour fibre générique X_F qui admet $\widetilde{X}_F$ comme désingularisation et comme fibre spéciale $Y' = Y_{k(Y)}$ qui admet $\widetilde{Y}' = \widetilde{Y}_{k(\widetilde{Y})}$ comme désingularisation, avec un morphisme de désingularisation qui est universellement CH_0-trivial. D'après la proposition 2.2, il

suffit de démontrer que le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(\widetilde{Y}')$ sur $\mathbf{Z}$. Par hypothèse, le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(\widetilde{X_F})$ sur $\mathbf{Z}$. Démontrons que tout zéro-cycle de degré 0 de Y' à support dans le lieu lisse a une classe nulle dans $\mathrm{CH}_0(Y')$. Soit U un ouvert dense du lieu lisse de X_F au-dessus duquel la désingularisation est un isomorphisme. Tout d'abord il existe un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{CH}_0(X_F) \to \mathrm{CH}_0(Y')$$

(*cf.* [**Fu1**, §4.4] et [**Fu2**, proposition 2.6]). Notons z un 0-cycle de degré 0 supporté par le lieu lisse de Y'. Comme B est complet, par le lemme de Hensel, il se relève en un 0-cycle z_1 supporté par le lieu lisse de X. Le lemme de déplacement déjà mentionné assure que le 0-cycle z_1 est équivalent à un 0-cycle de U qui se relève donc en un 0-cycle z_3 de la désingularisation. Par hypothèse, la classe α du 0-cycle z_3 est triviale et il en donc de même de la classe de z dans $\mathrm{CH}_0(Y')$ qui est l'image de α par l'application composée

$$\mathrm{CH}_0(\widetilde{X_F}) \longrightarrow \mathrm{CH}_0(X_F) \longrightarrow \mathrm{CH}_0(Y').$$

Ce fait nous met en mesure d'appliquer la proposition 4.2. □

6. Exemples

La stratégie proposée par C. Voisin dans [**Vo2**] ou [**Vo3**] pour obtenir de nouveaux exemples de variétés qui ne sont pas stablement rationnelles est de construire des familles de variétés dont la fibre générique est lisse et auxquelles on peut appliquer le corollaire 3.2, avec une fibre V_0 possédant une désingularisation $\widetilde{V}_0 \to V_0$ à laquelle la décomposition de la diagonale se relève. Si on peut démontrer qu'un groupe de cohomologie non ramifiée de $\widetilde{V}_0$ est non nul, il en résulte que la variété $\widetilde{V}_0$ n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. Il en est alors de même d'une fibre très générale V_b et ces fibres ne sont pas stablement rationnelles.

Il convient de noter que, décrite ainsi, cette méthode ne permet pas de dire qu'une variété donnée par des équations explicites n'est pas rationnelle. Elle permet seulement de dire que dans une famille donnée sur le corps des complexes « la plupart » des fibres ne sont pas rationnelles.

La version développée par J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka et présentée succinctement ici permet d'appliquer la méthode sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et peut être itérée.

Nous allons maintenant donner quelques cas où ces méthodes ont été utilisées avec succès. La méthode inventée par C. Voisin et ses variantes ont inspiré de nombreux auteurs et les exemples qui suivent ne représentent qu'une sélection arbitraire de l'orateur parmi les résultats obtenus au moment de l'exposé. L'auditeur intéressé pourra également lire la synthèse faite par A. Pirutka [**Pi**]. Chaque résultat nécessite tout d'abord d'exhiber une famille à laquelle la méthode s'applique. En particulier, il faut pouvoir contrôler la résolution des singularités de la fibre spéciale, ce qui peut représenter une vraie prouesse technique.

6.1. Revêtements doubles. — Cette classe d'exemples est déjà celle considérée dans l'article d'Artin et Mumford [**AM**]. L'exemple initial de C. Voisin donné dans [**Vo2**] correspond au cas des revêtements doubles de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ ramifiés le long d'une surface quartique très générale ayant au plus 7 point nodaux.

Reprenons tout d'abord la construction d'Artin et Mumford. On se donne une conique lisse de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ définie par un polynôme α homogène de degré 2 ainsi que deux cubiques lisses définies par des équations homogènes δ_1 et δ_2, de sorte que chacune des cubiques rencontre tangentiellement la conique en trois points distincts et l'intersection des deux cubiques est de cardinal 9. Alors on peut démontrer qu'il existe un polynôme homogène γ de degré 4 et un polynôme homogène β de degré 3 tels que $\delta_1\delta_2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. La surface quartique d'équation homogène

$$\alpha(X_0, X_1, X_2)X_3^2 + \beta(X_0, X_1, X_2)X_3 + \gamma(X_0, X_1, X_2) = 0$$

est le revêtement double de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié le long de la courbe d'équation $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, c'est-à-dire $\delta_1\delta_2 = 0$. Autrement dit, le lieu de ramification est la réunion des deux cubiques choisies. La surface quartique possède dix points nodaux, à savoir les images inverses des 9 intersections entre les deux cubiques et le point (0:0:0:1). Le revêtement correspondant a également dix points nodaux qui sont les images inverses de ces dix points de la surface quartique.

Mais d'une part les déformations des surfaces quartiques induisent des déformations des revêtements associés, d'autre part les surfaces quartiques lisses sont des surfaces $K3$ dont la classification est connue [**K3**]. Cela permet donc d'appliquer la machinerie présentée dans cet exposé. Mais par le résultat d'Artin et Mumford, une désingularisation V du revêtement double dans leur cas possède des éléments de torsion non nuls

dans le groupe de cohomologie $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, il en est de même pour le groupe de Brauer non ramifié. Par la proposition 2.6, le solide correspondant ne possède pas de décomposition de Chow de la diagonale et il en est de même des revêtements très généraux obtenus par déformations.

En utilisant également la décomposition de Chow de la diagonale, A. Beauville démontre dans [**Be**] qu'un revêtement double de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ ramifié le long d'une surface sextique très générale n'est pas stablement rationnel.

En dimension supérieure, B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel dans [**HPT1**] obtiennent de même qu'un revêtement double de $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ ramifié en un volume quartique très général n'est pas stablement rationnel. La difficulté pour appliquer la machinerie est de trouver un exemple explicite d'un tel revêtement dont la désingularisation satisfait les conditions de la proposition 4.2 et possède un groupe de cohomologie non ramifiée non nul. L'exemple utilisé ici est la variété correspondant au volume quartique

$$xyt^2 + xzu^2 + yz(x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)) = 0.$$

La variété correspondante est birationnelle à l'hypersurface de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ d'équation

$$yzs^2 + xzt_1^2 + xyu_1^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz))v_1^2 = 0$$

qui est une variété fibrée en quadriques sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ dont le groupe de Brauer non ramifié est non trivial.

Dans cette direction, en suivant la méthode de J. Kollár et B. Totaro décrite ci-dessous, J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka dans [**CTP2**] démontrent que les revêtements cycliques de degré p de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ ramifiés le long d'une hypersurface de degré d très générale ne sont pas stablement rationnels lorsque p est un nombre premier, $n \geqslant 3$ et d est un multiple de p supérieur ou égal à $n + 1$. Par la suite, T. Okada [**Oka1**] a généralisé ce résultat à tous les revêtements cycliques de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ ramifiés le long d'hypersurfaces très générales de degré d lorsque $d \geqslant n + 1$.

6.2. Solides quartiques. — Dans [**IM**], V. A. Iskovskikh et Y. I. Manin démontrent que les automorphismes birationnels d'une hypersurface quartique de $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ sont des automorphismes, ce qui prouve que le groupe de ces automorphismes birationnels est fini et que ces variétés ne sont pas rationnelles. Toutefois, cela ne répond pas à la question de la rationalité stable de ces variétés. La variante de la méthode de C. Voisin présentée

par J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka dans [**CTP1**] permet de démontrer que ces volumes très généraux ne sont pas stablement rationnels. Là encore un point-clef pour utiliser cette méthode est la construction d'un volume quartique dont la résolution est birationnelle à un solide d'Artin et Mumford, avec un morphisme qui est CH_0-universellement trivial.

6.3. Fibrés en coniques. — Dans [**HKT**], B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel considèrent le cas des fibrés en coniques au-dessus d'une surface rationnelle. Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de deux. Soit S une belle surface rationnelle. Une fibration en coniques au-dessus de S est un morphisme de belles variétés propre et plat $\pi : V \to S$ dont la fibre générique est une conique non singulière. Le lieu des points de S en lesquels la fibre est singulière définit une courbe C de S. En ces points, la fibre est formée de droites éventuellement confondues ; on obtient ainsi un revêtement de degré deux de la courbe C. On peut démontrer que ce revêtement caractérise la fibration, à équivalence birationnelle près. On peut donc obtenir des familles de fibrés en coniques en considérant des espaces de revêtements de courbes contenues dans S. Plus précisément, soit L un fibré en droites sur S défini par une courbe irréductible lisse de S. Soit F une composante irréductible dans l'espace des revêtements étales de degré 2 des courbes nodales contenues dans le système linéaire défini par L. Tout point de F correspond à une fibration en coniques au-dessus de S. On suppose que F admet un point correspondant à un revêtement au-dessus d'une courbe réductible dont les composantes irréductibles sont lisses, tel que le revêtement déduit par restriction au-dessus de chacune des composantes de cette courbe soit non trivial. Alors B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel démontrent que la fibration en conique correspondant à un point très général de F n'est pas stablement rationnelle. Cette question est reprise par C. Böhning et H.-C. Graf von Bothmer dans [**BGvB**], avec une méthode qui n'utilise pas les champs et les gerbes.

6.4. Hypersurfaces de grand degré. — Dans [**Ko**, theorem 5.14], J. Kollár prouve que, sur $\mathbf{C}$, les hypersurfaces très générales de degré $d \geqslant 2\left\lceil\frac{n+3}{3}\right\rceil$ dans $\mathbf{P}^{n+1}_{\mathbf{C}}$ avec $n \geqslant 3$ ne sont pas rationnelles. Dans [**To1**], B. Totaro démontre, en utilisant la méthode de J. Kollár et le théorème 5.1, que des hypersurfaces très générales de degré $d \geqslant 2\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$

ne sont pas stablement rationnelles. Lorsque le degré est pair, le résultat vaut même pour des hypersurfaces lisses sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Lorsque le degré est pair, la preuve repose sur l'utilisation du théorème 5.1 et une réduction en caractéristique 2. Plus précisément la fibre spéciale considérée est un revêtement double inséparable. Cela donne une résolution des singularités explicite dont les diviseurs exceptionnels sont des quadriques, ce qui permet de vérifier les hypothèses de la proposition 4.3 ; l'invariant stablement rationnel utilisé est le groupe des sections du faisceau Ω^{n-1}. En effet, B. Totaro démontre que, pour une belle variété V sur un corps $\mathbf{K}$, si V admet une décomposition de Chow de la diagonale, les groupes $H^0(V, \Omega^i)$ sont nuls pour $i > 0$.

Pour traiter le cas du degré impair, B. Totaro utilise une déformation qui fait dégénérer une hypersurface de degré $2a + 1$ en la réunion d'une hypersurface de degré $2a$ et d'un hyperplan.

6.5. Variétés de Fano de dimension 3. — De nombreux travaux sont dédiés à la rationalité des volumes de Fano.

Ainsi, dans le cas où l'indice vaut 1, la non-rationalité des volumes de Fano obtenus comme hypersurfaces dans un espace projectif pondéré résulte des travaux de V. A. Iskovskikh et Y. Manin [**IM**], de A. Corti, A. V. Pukklikov et M. Reid [**CPR**] et de I. Cheltsov et J. Park [**CP**] qui prouvent que les volumes considérés sont birationnellement rigides et donc non rationnels.

Dans le cas lisse, B. Hassett et Y. Tschinkel démontrent dans [**HT**], à l'aide des méthodes de décomposition de la diagonale, qu'un volume de Fano lisse qui n'est pas rationnel et n'est pas birationnellement isomorphe à un volume cubique n'est pas stablement birationnel.

Reprenant la méthode d'inégale caractéristique de B. Totaro, T. Okada étudie dans [**Oka2**] la rationalité des « orbivariétés » de Fano de dimension 3 obtenues comme hypersurfaces dans des espaces projectifs pondérés. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs. Rappelons qu'on définit l'espace projectif pondéré $\mathbf{P}(a_0, \ldots, a_n)$ comme le schéma projectif associé à l'anneau gradué $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_n]$, où la variable X_i a pour degré a_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

La question de la stable rationalité restait en partie ouverte. T. Okada combine les différents résultats obtenus dans le théorème suivant :

Théorème 6.1. — *Soit V une hypersurface très générale de degré d dans l'espace projectif pondéré $\mathbf{P}(a_0, \ldots, a_4)$ avec $1 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant$*

$a_3 \leqslant a_4$. *On suppose que V est une orbivariété de Fano, c'est-à-dire que le faisceau canonique est ample. Alors les assertions suivantes sont équivalentes ;*

(i) *L'inégalité $d < 2a_4$ est vérifiée ou $d = 2a_4 = 2a_3$;*

(ii) *L'hypersurface V est rationnelle.*

Si, en outre, V n'est pas un solide cubique, ces conditions sont équivalentes à l'assertion

(iii) *L'hypersurface V est stablement rationnelle.*

Il résulte en particulier du théoréme 6.1 que, parmi les vingt-sept familles d'hypersurfaces dans l'espace projectif pondéré de dimension 4 qui sont de Fano et d'indice $\geqslant 3$, vingt familles correspondent à des variétés rationnelles et un membre très général des sept autres n'est pas stablement rationnel.

7. Rationalité et déformation

La question de la stabilité par déformation de la rationalité pour les variétés lisses sur **C** est très naturelle, et les experts étaient convaincus depuis longtemps qu'il devait exister des contre-exemples à cette stabilité.

Pour une famille de variété $Y \to B$ sur un corps algébriquement clos, le lieu des points b de B en lesquels la fibre est rationnelle est connu pour être une réunion dénombrable de parties localement fermées de B (*cf.* [**FF**]).

L'exemple des surfaces cubiques déjà mentionné montre que la rationalité n'est pas stable par spécialisation lorsqu'on admet des singularités. En dimension 3, il découle des travaux de T. de Fernex et T. Fusi [**FF**] et de C. Hacon et J. M$^{\mathrm{c}}$Kernan [**HM**] que la rationalité est stable par spécialisation pour les variétés klt. En dimension supérieure, B. Totaro donne dans [**To2**], des contre-exemples avec des singularités terminales en dimension $\geqslant 5$ et des singularités canoniques en dimension 4.

Dans [**HPT2**], B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel considèrent des fibrés en quadriques au-dessus du plan projectif. Ils obtiennent des familles de telles variétés lisses de dimension 4 au-dessus d'une base connexe sur **C** dont les fibres très générales ne sont pas stablement rationnelles mais dont les fibres rationnelles sont denses pour la topologie complexe. Le lieu des fibres rationnelles pour cet exemple est donc en particulier ni ouvert ni fermé.

Concrètement l'exemple est obtenu en considérant des hypersurfaces lisses V de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ données par une équation bihomogène de degré $(2,2)$. Cela fournit via la première projection une variété fibrée en quadriques de dimension 2 au-dessus du plan projectif. Le lieu de dégénérescence de cette fibration π correspond au lieu en lequel la forme quadratique considérée est dégénérée.

La fibre générique Q est une quadrique au-dessus de $\mathbf{K} = \mathbf{C}(X,Y)$ qui est rationnelle sur ce corps si et seulement si Q admet un point défini sur $\mathbf{K}$, ce qui correspond à une section rationnelle de la fibration. Par un théorème de T. A. Springer, cela est équivalent à l'existence d'un point rationnel sur une extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ de degré impair. En considérant la variété des droites contenues dans les fibres de π, B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel démontrent que cela est vérifié si V admet une classe de cohomologie entière dans $H^{2,2}(V,\mathbf{C})$ dont le degré d'intersection avec les fibres est impair. Ils démontrent alors que si B désigne l'espace de modules des hypersurfaces de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^3$ de bidegré $(2,2)$ alors le lieu des b pour lesquels l'hypersurface correspondante admet une classe de cohomologie convenable est dense pour la topologie réelle. Cet argument utilisant la théorie de Hodge est dû à C. Voisin.

Pour obtenir que la fibre très générale n'est pas rétractilement rationnelle, il faut également disposer d'une fibre qui admet une désingularisation dont on sait qu'elle n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. On considère pour cela le cas particulier déjà mentionné de l'équation

$$yzs^2 + xzt^2 + xyu^2 + F(x,y,z)v^2 = 0,$$

où

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz).$$

La démonstration passe par un calcul explicite de la désingularisation ce qui fournit une preuve du fait que le morphisme de désingularisation est universellement CH_0-trivial au sens de la définition 4.1. Par contre, la variété obtenue par désingularisation admet un groupe de cohomologie non ramifiée de degré 2 qui est non trivial, résultat donné dans [**Pi**], ce qui permet d'appliquer la machinerie décrite auparavant, et une fibre très générale de la fibration n'est pas rétractilement rationnelle.

Références

[AM] M. Artin et D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1972), 75–95.

[ACTP] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, *Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane*, Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic (Palo Alto, 2013) (A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado et B. Viray, eds.), Progress in Math., Birkhäuser, 2016, à paraître.

[Be] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, Bull. Lond. Math. Soc. **48** (2016), n° 2, 321–324.

[BCTSSD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), 283–318.

[BS] S. Bloch et V. Srinivas, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Am. J. Math. **105** (1983), n° 5, 1235–1253.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516 ; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[BGvB] C Böhning et H.-C. Graf von Bothmer, *On stable rationality of some conic bundles and moduli spaces of Prym curves*, `http://arxiv.org/abs/1605.03029`, à paraître dans Comm. Math. Helvetici (2016).

[Bki] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitre 8*, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[Ca] G. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.

[CP] I. Cheltsov et J. Park, *Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. (2016), à paraître.

[CG] C. H. Clemens et P. A. Griffiths, *The intermediate jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, Purity and the Gersten Conjecture*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob et A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 1–64.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTP1] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension* 3 *: non rationalité stable*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) **49** (2016), 371–397.

[CTP2] ———, Циклические накрытия, которые не являются стабильно рациональными, Izvestija RAN, Ser. Math. **80** (2016), n° 4, 35–47.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **10** (1977), 175–229.

[CPR] A. Corti, A. V. Pukhlikov et M. Reid, *Fano 3-fold hypersurfaces*, Explicit birational geometry of 3-folds, London Math. Soc. Lecture Note, vol. 281, Cambridge university press, Cambridge, 2000, pp. 175–258.

[De] P. Deligne, *Variétés unirationnelles non rationnelles [d'après M. Artin et D. Mumford]*, Séminaire Bourbaki 24-ème année, 1971/72, n° 402.

[FF] T. de Fernex et D. Fusi, *Rationality in families of threefolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo **62** (2013), n° 1, 127–135.

[Fu1] W. Fulton, *Rational equivalence on singular varieties*, Publ. Math. IHÉS **45** (1975), 147–167.

[Fu2] ———, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[GLL] O. Gabber, Q. Liu et D. Lorenzini, *The index of an algebraic variety*, Invent. Math. **192** (2013), 567–626.

[HM] C. Hacon et J. McKernan, *On Shokurov's rational connectedness conjecture*, Duke Math. J. **138** (2007), n° 1, 119–136.

[Ha] J. Harris, *Lectures on rationally connected varieties*, EAGER Advanced School in Algebraic Geometry, Levico Terme, notes by J. Kock (2001).

[HKT] B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, Math. Annalen **365** (2016), 1201–1217.

[HPT1] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *A very general quartic double fourfold is not stably rational*, `http://arxiv.org/abs/1605.03220` (2016).

[HPT2] ———, *Stable rationality of quadric surface bundles over surfaces*, `http://arxiv.org/abs/1603.09262` (2016).

[HT] B. Hassett et Y. Tschinkel, *On stable rationality of Fano threefolds and Del Pezzo fibrations*, `http://arxiv.org/abs/1601.07074`, à paraître dans J. reine angew. Math. (2016).

[HY] A. Hoshi et A. Yamasaki, *Rationality problems for algebraic tori*, Mem. Amer. Math. Soc. (2016), à paraître.

[IM] V. A. Iskovskikh et Y. I. Manin, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, Mat. Sb. **86** (1971), 140–166 ; English transl. in Math. USSR Sb. **15** (1971), 141–166.

[K3] *Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes*, Astérisque 126, Soc. Math. France, Paris, (1985).

[KM] N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev, *On standard norm varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **46** (2013), n° 1, 175–214.

[Ko] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Lü] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Ann. **9** (1875), 163–165.

[Me] A. S. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), n° 1, 51–64.

[MB] L. Moret-Bailly, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Séminaire N. Bourbaki, 37-ème année (1984/85), exposé n° 643, Astérisque, vol. 133–134, SMF, Paris, 1986.

[Oka1] T. Okada, *Stable rationality of cyclic covers of projective spaces*, `http://arxiv.org/abs/1604.08417` (2016).

[Oka2] ———, *Stable rationality of orbifold Fano threefold hypersurfaces*, `http://arxiv.org/abs/1608.01186` (2016).

[Pi] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, `http://arxiv.org/abs/1603.09261` (2016).

[Ro] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 319–393.

[Se] J.-P. Serre, *Critère de rationalité pour les surfaces algébriques*, Séminaire N. Bourbaki, 9-ème année (1956/57), exposé n° 146, Édition hors série, vol. 4, SMF, Paris, 1995.

[To1] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), 883–891.

[To2] ———, *Rationality does not specialize among terminal varieties*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **161** (2016), 13–15.

[Vi] C. Vial, *Algebraic cycles and fibrations*, Doc. Math. J. DMV (2013), n° 18, 1521–1553.

[Vo1] C. Voisin, *Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), n° 1, 141–174.

[Vo2] ———, *Unirational threefolds with no universal codimension* 2 *cycle*, Invent. Math. **201** (2015), n° 1, 207–237.

[Vo3] ———, *Stable birational invariants and the Lüroth problem*, Advances in geometry and mathematical physics, Surveys in Differential Geometry, vol. XXI, International Press, Boston, 2016, pp. 313–342.

---

15 février 2024

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes et CNRS, CS 40700, 38058 Grenoble CEDEX 09, France
E-mail : `Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`

GROUPES ALGÉBRIQUES TRÈS SPÉCIAUX/VERY SPECIAL ALGEBRAIC GROUPS

par

Michel Brion and Emmanuel Peyre

Résumé. — We say that a smooth algebraic group G over a field k is very special if for any field extension K/k, every G_K-homogeneous K-variety has a K-rational point. It is known that every split solvable linear algebraic group is very special. In this note, we show that the converse holds, and discuss its relationship with the birational classification of algebraic group actions.

Abstract. — Nous disons qu'un groupe algébrique lisse G sur un corps k est très spécial si pour toute extension de corps K/k, toute K-variété homogène sous G_K a un point K-rationnel. On sait que tout groupe linéaire résoluble scindé est très spécial. Dans cette note, nous obtenons la réciproque et nous discutons ses relations avec la classification birationnelle des actions de groupes algébriques.

1. Introduction

Consider a smooth algebraic group G over a field k, and a G-variety X. By a theorem of Rosenlicht, there exist a dense open G-stable subset $X_0 \subset X$ and a morphism $f : X_0 \to Y$, such that the fiber of f at any point $x \in X_0$ is the orbit of x; moreover, f identifies the function field of Y with the field of G-invariant rational functions on X (see [**14**, Thm. 2], and [**1**, Sec. 7] for a modern proof). We say that the rational map $f : X \dashrightarrow Y$ is the rational quotient of X by G.

From this, one readily derives a birational classification of G-varieties with prescribed invariant function field. To state it, we introduce some notation. Given a finitely generated field extension K/k, we consider pairs (X, ι), where X is a G-variety and $\iota : K \xrightarrow{\simeq} k(X)^G$ is an isomorphism of fields over k. We say that two pairs (X, ι) and (X', ι')

are equivalent, if there exists a G-equivariant birational isomorphism $\varphi : X \dashrightarrow X'$ such that the isomorphism $\varphi^* : k(X')^G \xrightarrow{\simeq} k(X)^G$ satisfies $\varphi^* \circ \iota' = \iota$. We may now state :

Proposition 1. — *There is a one-to-one correspondence between equivalence classes of pairs* (X, ι) *as above, and isomorphism classes of* G_K*-homogeneous* K*-varieties.*

This easy result (which is implicitly known, see e.g. [**12**, §2.7]) motivates the consideration of those smooth algebraic groups for which all rational quotients have rational sections. These are described as follows :

Theorem 2. — *The following conditions are equivalent for a smooth algebraic group* G *:*

(i) *For any* G*-variety* X*, the rational quotient* $f : X \dashrightarrow Y$ *has a rational section.*

(ii) *For any field extension* K/k*, every* G_K*-homogeneous* K*-variety has a* K*-rational point.*

(iii) G *has a composition series with quotients isomorphic to* $\mathbb{G}_a$ *or* $\mathbb{G}_m$*.*

The equivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) follows readily from Rosenlicht's theorem on rational quotients. The implication (iii)$\Rightarrow$(ii) is also due to Rosenlicht (see [**14**, Thm. 10]). The proof of the converse implication is the main contribution of this note.

The algebraic groups satisfying (iii) are exactly the split solvable linear algebraic groups in the sense of [**10**, Def. 6.33]. On the other hand, (ii) obviously implies that for any field extension K/k, every G-torsor over $\mathrm{Spec}(K)$ is trivial. By [**13**], this is equivalent to G being special as defined by Serre in [**16**], that is, every locally isotrivial G-torsor over a variety is Zariski locally trivial. For this reason, we will call *very special* the algebraic groups satisfying (ii).

In fact, every split solvable linear algebraic group G satisfies a much stronger condition : for any field extension K/k, every G_K-homogeneous variety is rational (as follows from [**15**, Thm. 5]). Equivalently, the field extension $k(X)/k(X)^G$ is purely transcendental for any G-variety X. This yields a further characterization of very special groups.

One may also consider algebraic groups G that are possibly non-smooth, and require that for any field extension K/k, every G_K-homogeneous K-scheme has a K-rational point (where a scheme X equipped with an action a of G is said to be homogeneous if the morphism $\mathrm{id} \times a : G \times X \to X \times X$ is faithfully flat). But the result is unchanged, since every G-torsor over $\mathrm{Spec}(K)$ is trivial, and hence G is smooth in view of [**13**, Prop. 2.3].

This note is organized as follows. The proof of Proposition 1 is presented in Section 2. The implications (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftarrow$(iii) are proved in Section 3, which also makes the first steps in the proof of (ii)$\Rightarrow$(iii). In Section 4, we show that any very special torus is split. Together with the fact that any special unipotent group is split (see [**11**, Thm. 1.1]), this enables us to complete the proof of (ii)$\Rightarrow$(iii) in Section 5.

Notation and conventions. We fix a ground field k and choose an algebraic closure $\bar{k}$. We denote by k_s the separable closure of k in $\bar{k}$, and by Γ_k the Galois group of k_s/k. Given a field extension K/k and a k-scheme X, we denote by X_K the K-scheme $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(K)$.

A *variety* is an integral separated k-scheme of finite type. An *algebraic group* G is a k-group scheme of finite type. We say that G is *linear* if it is smooth and affine.

Given an algebraic group G, a *G-variety* is a variety X equipped with a G-action,

$$a : G \times X \longrightarrow X, \quad (g,x) \longmapsto g \cdot x.$$

We say that a G-variety X is *G-homogeneous* if G is smooth, X is geometrically reduced, and the morphism

$$\mathrm{id} \times a : G \times X \longrightarrow X \times X, \quad (g,x) \longmapsto (x, g \cdot x)$$

is surjective. If in addition X is equipped with a k-rational point x, then we say that X is a *G-homogeneous space*; then $X \simeq G/\mathrm{Stab}_G(x)$, where $\mathrm{Stab}_G(x)$ denotes the stabilizer.

Every homogeneous space is smooth and quasi-projective; thus, so is every homogeneous variety.

2. Proof of Proposition 1

Consider a pair (X, ι) and choose a dense open G-stable subset $X_0 \subset X$ with quotient $f : X_0 \to Y$ as in Rosenlicht's theorem. Identifying $k(Y)$ with K via ι, the generic fiber of f is a G_K-homogeneous K-variety, say Z_0. If we replace X_0 with an open subset X_1 satisfying the same properties, then Z_0 is replaced with another G_K-homogeneous K-variety Z_1, which is G_K-equivariantly birationally isomorphic to Z_0. But every G_K-equivariant birational isomorphism $Z_0 \dashrightarrow Z_1$ is an isomorphism : this is proved in [**5**, Lem. 4] for homogeneous spaces, and the general case follows by Galois descent. So we obtain a G_K-homogeneous K-variety Z; moreover, replacing (X, ι) with an equivalent pair replaces Z with a G_K-equivariantly isomorphic variety.

Conversely, consider a G_K-homogeneous K-variety Z. We may then choose an immersion of Z in some projective space $\mathbb{P}^n_K$. Also, choose a k-variety Y with function field K and consider the closure W of Z in $\mathbb{P}^n_Y$. Then W is a k-variety equipped with a k-morphism $f : W \to Y$. The action map $a : G_K \times_{\mathrm{Spec}(K)} Z \to Z$ is identified with a morphism $G \times_{\mathrm{Spec}(k)} Z \to Z$, which yields a rational action of G on W (since W and Z have the same function field). By construction, the field of invariant rational functions on W is identified with K. We now use Weil's regularization theorem (see the main result of [**18**] and [**14**, Thm. 1]) : W is G-birationally isomorphic to a G-variety X. This associates with Z a pair (X, ι), unique up to equivalence.

One may readily check that the two constructions above are mutually inverse, by using again the fact that every equivariant birational isomorphism between homogeneous varieties is an isomorphism.

3. Proof of Theorem 2 : first steps

We first show the equivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii). Under the correspondence described in the proof of Proposition 1, the rational sections of $f : X \dashrightarrow Y$ correspond to the K-points of the associated G_K-homogeneous variety. Thus, (i) is equivalent to the assertion that (ii) holds for any finitely generated field extension of k. Given an arbitrary field extension K/k and a G_K-homogeneous variety Z, there exist a finitely generated subextension L/k and a G_L-homogeneous variety W such that $W_L \simeq Z$. Then every L-rational point of W yields a K-rational point of Z ; this completes the proof.

To show the equivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii), we begin with some easy observations. First, if G is very special, then G_K is a very special K-group for any field extension K/k. Further properties are gathered in the following :

Lemma 3. — *Consider an exact sequence of algebraic groups*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

(i) *If G is very special, then so is Q.*

(ii) *If N and Q are very special, then so is G.*

Démonstration. — (i) Just note that Q is smooth and every Q_K-homogeneous variety is homogeneous under the induced action of G_K.

(ii) Since N and Q are smooth, G is smooth as well. Let K/k be a field extension, and X a G_K-homogeneous K-variety. Then there is a quotient $f : X \to Y = X/N_K$, where Y is a Q_K-homogeneous variety : indeed, if X has a K-rational point x, then $X \simeq G_K/H$ where $H := \mathrm{Stab}_{G_K}(x)$ and we may take for f the canonical morphism $G/H \to G/N_K \cdot H$. The case of an arbitrary G_K-homogeneous variety X follows from this by using Galois descent together with the smoothness and quasi-projectivity of X.

Since Q_K is very special, Y has a K-rational point y. The fiber of f at y is a K-variety, homogeneous under N_K. As the latter is very special, it follows that this fiber has a K-rational point. $\square$

Finally, note that a smooth commutative algebraic group G is very special if and only if for any field extension K/k, every quotient of G_K is special.

These observations yield a quick proof of the implication (iii)$\Rightarrow$(ii) : by Lemma 3 (ii), it suffices to show that $\mathbb{G}_a$ and $\mathbb{G}_m$ are very special. Since these groups are commutative, it suffices in turn to show that for any field extension K/k, every quotient of $\mathbb{G}_{a,K}$ or

$\mathbb{G}_{m,K}$ is special. But every quotient of $\mathbb{G}_{a,K}$ is isomorphic to $\mathbb{G}_{a,K}$ (see [**6**, IV.2.1.1]), and likewise for $\mathbb{G}_{m,K}$; moreover, $\mathbb{G}_a$ and $\mathbb{G}_m$ are special. This yields the assertion.

One may show similarly that every G_K-homogeneous K-variety is rational, for any split solvable linear algebraic group G and any field extension K/k.

We now start the proof of the implication (ii)⇒(iii) with the following :

Lemma 4. — *Let G be a very special algebraic group. Then G is connected, linear and solvable.*

Démonstration. — As the assertions are invariant under field extensions, we may assume k algebraically closed. Since G is special, it is connected and linear by [**16**, Thm. 1]. Moreover, every quotient group of G is special in view of Lemma 3 (i). In particular, the largest semisimple quotient H of G is special, as well as the largest adjoint semisimple quotient $H/Z(H)$, where $Z(H)$ denotes the (scheme-theoretic) center. By a result of Grothendieck (see [7, Thm. 3]), the special semisimple groups are exactly the products of special linear groups and symplectic groups. In particular, every special adjoint semisimple group is trivial. Thus, so is $H/Z(H)$, and G is solvable. □

4. Very special tori

Let T be a torus. We denote by $M = \mathrm{Hom}_{k_s-\mathrm{gp}}(T_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ its character group ; this is a free abelian group of finite rank equipped with a continuous action of the absolute Galois group $\Gamma = \Gamma_k$. By an unpublished result of Colliot-Thélène (see [**8**, Thm. 18] ; this result is implicitly contained in [**4**]), T is special if and only if the Γ-module M is *invertible*, i.e., a direct factor of a permutation Γ-module. From this, we derive a criterion for T to be very special :

Lemma 5. — *The following conditions are equivalent :*

(i) *T is very special.*

(ii) *Every quotient group of T is special.*

(iii) *For any subgroup of finite index $\Gamma' \subset \Gamma$, every Γ'-submodule $M' \subset M$ is invertible.*

Démonstration. — (i)⇒(ii) This follows from Lemma 3.

(ii)⇒(iii) The invariant subfield $K := k_s^{\Gamma'} \subset k_s$ is a finite separable extension of k with absolute Galois group Γ', and T_K is the K-torus with character group M viewed as a Γ'-module. Moreover, the Γ'-submodule M' of M corresponds to a quotient torus T' of T_K. By asumption, T' is special ; thus, M' is invertible.

(iii)$\Rightarrow$(i) Let K/k be a field extension. Then again, the character group of T_K is M equipped with its action of the absolute Galois group Γ_K. We claim that this action factors through that of Γ.

To show this, note that the action of Γ_K on K_s stabilizes the subfields k_s and Kk_s. This yields an exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_s/Kk_s) \longrightarrow \Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_s/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Kk_s/K) \longrightarrow 1.$$

Since T_{k_s} is split, so is T_{Kk_s} and hence the action of Γ_K on M factors through an action of $\mathrm{Gal}(Kk_s/K)$. The latter group may be identified with a subgroup of $\mathrm{Gal}(k_s/k) = \Gamma$, proving the claim.

Every T_K-homogeneous K-variety X is a torsor under a quotient T' of T_K, which in turn corresponds to a Γ_K-stable submodule of M. By the claim and the assumption, it follows that T' is special, i.e., X has a K-rational point. $\square$

Lemma 6. — *Let T be a very special torus. Then T is split.*

Démonstration. — It suffices to show that Γ acts trivially on M. Equivalently, for any subgroup $\Gamma' \subset \Gamma$ acting on M via a quotient of prime order $p \geqslant 2$, the Γ'-action on M is trivial.

Denote by C_p the cyclic group of order p. By Lemma 5, the C_p-module M is invertible, as well as any submodule M'. In particular, there exist a C_p-module N and two integers $a, b \geqslant 0$ such that

$$M' \oplus N \simeq \mathbb{Z}^a \oplus (\mathbb{Z}C_p)^b$$

as C_p-modules. By localizing at the prime ideal $(p) \subset \mathbb{Z}$, we obtain an isomorphism of $\mathbb{Z}_{(p)}C_p$-modules

$$M'_{(p)} \oplus N_{(p)} \simeq \mathbb{Z}^a_{(p)} \oplus (\mathbb{Z}_{(p)}C_p)^b.$$

Moreover, $\mathbb{Z}_{(p)}$ and $\mathbb{Z}_{(p)}C_p$ are indecomposable $\mathbb{Z}_{(p)}C_p$-modules (this is obvious for $\mathbb{Z}_{(p)}$; for $\mathbb{Z}_{(p)}C_p$, one uses the isomorphism of $\mathbb{Q}C_p$-modules

$$\mathbb{Q}C_p \simeq \mathbb{Q} \oplus V,$$

where $\mathbb{Q}$ is a trivial module and V is an irreducible non-trivial module of dimension $p-1$; moreover, this isomorphism is not defined over $\mathbb{Z}_{(p)}$). As the Krull-Schmidt theorem holds for $\mathbb{Z}_{(p)}C_p$-modules (see [**9**, Thm. 2]), there exist integers $c, d \geqslant 0$ such that

$$M'_{(p)} \simeq \mathbb{Z}^c_{(p)} \oplus (\mathbb{Z}_{(p)}C_p)^d.$$

In particular, if M' is not fixed pointwise by C_p, then its rank (as a $\mathbb{Z}$-module) is at least p.

Consider the $\mathbb{Q}C_p$-module $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. If M is not fixed pointwise by C_p, then $M_{\mathbb{Q}}$ contains a $\mathbb{Q}C_p$-module W isomorphic to V (since every simple $\mathbb{Q}C_p$-module is isomorphic to $\mathbb{Q}$ or V). Thus, $M' := M \cap W$ is a C_p-submodule of M, not fixed pointwise by C_p and of rank $p-1$; a contradiction. So Γ acts trivially on M as desired. □

Remark 7. — The localization argument in the above proof cannot be avoided, since the Krull-Schmidt theorem generally fails for C_p-modules. More specifically, we may choose p so that the ring R has nontrivial class group, and choose a non-principal ideal $A \subset R$. Then A is a summand of a free R-module, but is not isomorphic to R.

5. Completion of the proof of Theorem 2

It remains to show the implication (ii)⇒(iii). Let G be a very special algebraic group, and recall from Lemma 4 that G is connected, linear and solvable. Choose a maximal torus T of G; then T_K is a maximal torus of G_K for any field extension K/k (see [**10**, Thm. 17.82]).

If k is perfect, then $G = U \rtimes T$, where U denotes the unipotent radical of G (indeed, $G_{\bar{k}} = U_{\bar{k}} \rtimes T_{\bar{k}}$, see e.g. [**10**, Thm. 16.33]). As a consequence, T is a quotient group of G, and hence is very special by Lemma 3 (i). In view of Lemma 6, it follows that T is split. But the smooth connected unipotent group U is split as well (see e.g. [**10**, Cor. 16.23]), and hence so is G.

For an arbitrary field k, consider the derived subgroup $\mathscr{D}(G)$; this is a smooth connected unipotent normal subgroup of G (see e.g. [**10**, Cor. 6.19, Prop. 16.34]). The quotient group $G/\mathscr{D}(G)$ lies in a unique exact sequence of commutative algebraic groups

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G/\mathscr{D}(G) \longrightarrow V \longrightarrow 0, \tag{5.1}$$

where M is of multiplicative type and V is unipotent; moreover, (5.1) splits uniquely over the perfect closure k_i of k (see e.g. [**10**, Thm. 16.3]). As a consequence, the natural morphism $T \to G/\mathscr{D}(G)$ induces an isomorphism $T \xrightarrow{\simeq} M$. Also, V is a quotient group of G, and hence is special. Since V is unipotent, it is split by [**11**, Thm. 1.1]. In view of [**2**, Lem. 5.7], it follows that the exact sequence (5.1) has a unique splitting. Thus, we may identify $G/\mathscr{D}(G)$ with $T \times V$. In particular, T is a quotient group of G. Using Lemmas 3 and 6, it follows that T is split.

Denote by U the pull-back of V in G. Then U is a smooth connected unipotent group, and $G \simeq U \rtimes T$. By [**2**, Thm. 3.7], U has a largest split subgroup U_{split}; moreover, the formation of U_{split} is compatible with separable field extensions. As a consequence, U_{split} is normal in G. Also, T acts trivially on U/U_{split} in view of [**2**, Cor. 4.4]. Thus,

$G/U_{\text{split}} \simeq U/U_{\text{split}} \times T$. In particular, U/U_{split} is a quotient group of G, and hence is special. Using again [**11**, Thm. 1.1], it follows that U is split, and hence so is G.

Remark 8. — By inspecting the proof of Theorem 2, one may check that the conditions (i), (ii), (iii) are equivalent to

(iv) *Every quotient group of G is special.*

If G is linear, they are also equivalent to

(i)' *The rational quotient map $V \dashrightarrow V/G$ has a rational section for any finite-dimensional representation $G \to \mathrm{GL}(V)$.*

Indeed, the implication (i)⇒(i') is obvious. We show that (i)'⇒(iv) : let Q be a quotient group of G, and choose a faithful finite-dimensional representation $\rho : Q \to \mathrm{GL}(W)$. Then G acts on $\mathrm{GL}(W)$ by right multiplication via ρ. Moreover, $\mathrm{GL}(W)$ may be viewed as an open subset of $V := \mathrm{End}(W)$, stable by the linear representation of G in V by right multiplication via ρ again. Thus, the rational quotient map $V \dashrightarrow V/G$ may be viewed as the Q-torsor $\mathrm{GL}(W) \to \mathrm{GL}(W)/Q$. By assumption, this torsor has a rational section, and hence is locally trivial for the Zariski topology. It follows that Q is special by using [**16**, Thm. 2] (which is obtained over an algebraically closed field, but whose proof holds unchanged over an arbitrary field).

Acknowledgements. We thank Jean-Louis Colliot-Thélène, Zinovy Reichstein and an anonymous referee for helpful comments and suggestions. Our original proof of Lemma 5 used the classification of indecomposable C_p-modules (see [**3**, §74]). Colliot-Thélène sent us an alternative proof, which avoids this classification. The proof presented here owes much to a suggestion of the referee.

Références

[1] J. P. Bell, D. Ghioca, Z. Reichstein, *On a dynamical version of a theorem of Rosenlicht*, Ann. Sci. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **17** (2017), no. 1, 187–204.

[2] B. Conrad, *The structure of solvable groups over general fields*, in : Panoramas et Synthèses **46** (2015), 159–192.

[3] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Amer. Math. Soc., 1966.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.

[5] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **3** (1970), 507–588.

[6] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.

[7] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, in : Sém. C. Chevalley **3** (1958), no. 5, 1–37.

[8] M. Huruguen, *Special reductive groups over an arbitrary field*, Transform. Groups **21** (2016), 1079–1104.

[9] A. Jones, *On representations of finite groups over valuation rings*, Illinois J. Math. **9** (1965), 297–303.

[10] J. S. Milne, *Algebraic groups. The theory of group schemes of finite type over a field*, Cambridge Stud. Adv. Math. **170**, Cambridge University Press, 2017.

[11] Nguyen Duy Tan, *Special unipotent groups are split*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), 2465–2469.

[12] V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Invariant theory*, in : Encyclopaedia of Mathematical Sciences **55**, Algebraic geometry IV, 123–278, Springer, 1994.

[13] Z. Reichstein, D. Tossici, *Special groups, versality and the Grothendieck-Serre conjecture*, arXiv : 1912.08109, Doc. Math., to appear.

[14] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401–443.

[15] M. Rosenlicht, *Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields*, Ann. Mat. Pura Appl. **62** (1963), 97–120.

[16] J.-P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*, in : Sém. C. Chevalley **3** (1958), no. 1, 1–37.

[17] M. Demazure, A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962–64, Schémas en groupes (SGA3)*, Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes, Doc. Math. **7**, Soc. Math. France, Paris, 2011.

[18] A. Weil, *On algebraic groups of transformations*, Amer. J. Math. **77** (1955), 355–391.

Michel Brion and Emmanuel Peyre, Michel BRION : Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 09., Tél. 04 76 51 42 98, Fax 04 76 51 44 78., Courriel : Michel.Brion@univ-grenoble-alpes.fr • Emmanuel PEYRE : Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 09., Tél. 04 76 51 44 39, Fax 04 76 51 44 78., Courriel : Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr

DOSSIER DE CANDIDATURE À L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES SYNTHÈSE DE L'ACTIVITÉ SCIENTIFIQUE ET PROGRAMME DE RECHERCHE

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Ce texte, réalisé pour mon habilitation, fait une synthèse de mes realisations et de mes projets de recherche en 1997.

Abstract. — This text, which was written for my "habilitation à diriger des recherches", is a survey of my results and projects in 1997.

Table des matières

1. Liste des publications et prépublications

[1] *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.
[2] *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, in K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara 1992), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence 1995, pp. 369–401.
[3] *Corps de fonctions de variétés homogènes et cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896.
[4] *Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties*, Prépublication IRMA 1996/12 (1996), 1–35.

[5] *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n$^{\rm o}$ 1, 101–218.
[6] *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Prépublication (1996), 1–36.

2. Travaux de recherches

L'ensemble de mes travaux et projets de recherches est axé sur deux thèmes principaux d'une part, le calcul de groupes liés à la cohomologie galoisienne et d'autre part l'étude asymptotique du nombre et de la répartition des points de hauteur bornée sur diverses variétés algébriques projectives.

Le but de ce texte est d'essayer de donner pour chacun des thèmes abordés une brève description des résultats obtenus, en les situant autant que possible dans leur contexte, ainsi que les perspectives de recherches envisagées.

2.1. Cohomologie galoisienne. — Mes recherches en cohomologie galoisienne sont centrées sur trois problèmes, que je décrirai en détail dans les paragraphes suivants la construction de nouveaux exemples de corps unirationnels non-rationnels, y compris dans le cadre du problème de Noether, l'étude du noyau de l'application de restriction lorsqu'on passe d'un corps de base au corps de fonctions d'une variété de drapeaux généralisés et l'étude de classes négligeables. Mais ces trois thèmes sont en fait intimement liés l'éventuelle construction de nouveaux exemples de réponses négatives au problème de Noether passe par l'étude des classes négligeables et des caractérisations de ces classes sont fournies par des corps de fonctions de drapeaux généralisés.

2.1.1. *Cohomologie non ramifiée.* —

2.1.1.1. *Introduction.* — Etant donné une variété algébrique dont un ouvert est paramétré par des fractions rationnelles, une question naturelle, étudiée depuis le XIX-ème siècle est de déterminer si cette paramétrisation peut être choisie de façon à être génériquement bijective. En termes du corps de fonctions de la variété cela revient à se demander si un corps contenu dans une extension transcendante pure du corps de base est lui-même transcendant sur ce dernier. Les groupes de cohomologie non ramifiée ont été construits par Colliot-Thélène et Ojanguren comme obstruction à une réponse positive à cette question. Avant de donner la définition de ces groupes je vais faire de brefs rappels sur ce problème.

Définitions 2.1.1. — On note k un corps de base fixé. Soient K et L deux corps de fonctions sur k, c'est-à-dire engendrés par un nombre fini d'éléments en tant que surcorps de k.

Le corps K est une *extension rationnelle* de k si et seulement si c'est une extension transcendante pure de k.

Les corps K et L sont dits *stablement isomorphes* si et seulement s'il existe de indéterminées $U_1, \ldots, U_m$ et $T_1, \ldots, T_n$ ainsi qu'un isomorphisme

$$K(U_1, \ldots, U_m) \xrightarrow{\sim} L(T_1, \ldots, T_n)$$

au-dessus de k.

On dit que K est *stablement rationnel* s'il est stablement isomorphe à k.

Enfin il est unirationnel s'il se plonge au-dessus de k dans une extension rationnelle de k.

Le problème est donc de déterminer si une extension unirationnelle donnée est rationnelle. Dans ce cadre, la méthode donnée par Lüroth en 1876 dans [**Lü**] permet de montrer que tout corps unirationnel de degré de transcendance 1 sur k est rationnel. En 1894, Castelnuovo montre dans [**Ca**] que si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, cela est également vrai pour les extension de degré de transcendance deux sur k.

L'existence de contre-exemples a d'abord été démontrée au-dessus de corps non algébriquement clos ou de caractéristique finie. Ainsi Segre construit en 1951 des surfaces cubiques unirationnelles sur $\mathbf{R}$ dont le nombre de composantes connexes, qui est un invariant birationnel, n'est pas égal à un [**Seg**], et en 1958 Zariski donne des exemples de surfaces unirationnelles non rationnelles sur un corps algébriquement clos de caractéristique finie [**Za**].

Divers exemples de variétés unirationnelles non rationnelles de dimension trois sur $\mathbf{C}$ ont été construites presque simultanément en utilisant trois types d'invariants le sous-groupe de torsion de $H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ où X est un modèle propre et lisse du corps dans l'exemple d'Artin et Mumford [**AM**], le groupe d'automorphismes birationnels pour celui d'Iskovskih et Manin [**?**] et la jacobienne intermédiaire dans Clemens et Griffiths [**CG**].

Les groupes de cohomologie non ramifiée ont été définis par Colliot-Thélène et Ojanguren dans [**CTO**] comme généralisation de l'interprétation algébrique de l'invariant utilisé par Artin et Mumford, c'est-à-dire le groupe de Brauer non ramifié. Il faut noter que c'est en fait un invariant pour la rationalité stable. La jacobienne intermédiaire, permet par contre de construire des exemples de corps stablement rationnels non rationnels comme cela a été fait par Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [**BCTSSD**].

Notations 2.1.1. — Soit K un corps de clôture séparable K^s. Pour tout $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret M, le i-ème groupe de cohomologie galoisienne est défini par
$$H^i(K,M) = H^i(\mathrm{Gal}(K^s/K),M)$$
où le terme de droite est la limite inductive pour L extension galoisienne finie de K des groupes de cohomologie usuels
$$H^i(\mathrm{Gal}(L/K),M^{\mathrm{Gal}(L^s/L)}).$$
Soit p la caractéristique de K. Pour tout nombre entier n non divisible par p, μ_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans K^s. On note $\mu_n^{\otimes 0}$ le module $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et pour tout $j > 0$, $\mu_n^{\otimes j}$ le module $\mu_n^{\otimes j-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_n$ et $\mu_n^{\otimes -j}$ son dual. Si $i > 0$ et $j \in \mathbf{Z}$, on définit alors
$$H^i(L,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{n\in\mathbf{N}-(p)} H^i(L,\mu_n^{\otimes j})$$
et, pour $j = 0, 1$ ou 2,
$$H^i(L,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = \varinjlim H^{i-j}(L,K_j(L^s)/p^r).$$
En effet, si n est une puissance de p, le rôle des racines n-ièmes de l'unité est joué, à un décalage près, par la partie logarithmique du complexe de De Rham-Witt $W_r\Omega^\bullet$ sur k qui, dans ces cas particuliers, coïncide avec $K_j(L^s)/p^r$ (cf [**?**]). En définitive, on convient que, pour $j = 0$, 1, ou 2,
$$H^i(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L,(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)).$$
Si K est un corps de fonctions sur k, on note $\mathscr{P}(K/k)$ l'ensemble des anneaux de valuation discrète de rang un tels que $k \subset A \subset K$ et dont le corps des fractions est K.

Pour tout élément A de $\mathscr{P}(K/k)$, on note K_A le complété de K en A, κ_A le corps résiduel et I_A le groupe d'inertie défini par la suite exacte
$$0 \to I_A \to \mathrm{Gal}(K_A^s/K_A) \to \mathrm{Gal}(\kappa_A^s/\kappa_A) \to 0.$$
Le suite spectrale de Hochschild-Serre correspondante
$$H^p(\kappa_A,H^q(I_A,C)) \Rightarrow H^{p+q}(K_A,C)$$
permet de définir pour tout $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module C de n-torsion, où n est inversible dans K un morphisme
$$H^p(K_A,C) \xrightarrow{d_2} H^{p-1}(\kappa_A,H^1(I_A,C)) \xrightarrow{\sim} H^{p-1}(\kappa_A,C(-1)) \tag{2.1.1.1}$$

avec $C(-1) = C \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_n^{\otimes -1}$.

Définition 2.1.2. — Avec les notations qui précèdent, le *morphisme résidu* en A est l'application

$$\partial_A : H^p(K, C) \to H^{p-1}(\kappa_A, C(-1))$$

obtenu en composant le morphisme canonique de $H^p(K, C)$ vers $H^p(K_A, C)$ avec l'application (2.1.1.1).

***Définition 2.1.3* (Colliot-Thélène et Ojanguren, [CTO])**
Les *groupes de cohomologie non ramifiée* de K relativement à k sont définis par

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A \in \mathscr{P}(K/k)} \operatorname{Ker} \partial_A.$$

Si $p = 0$ et $i = 2$, on obtient en passant à la limite inductive le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k}(K)$, qui, pour un corps unirationnel au-dessus de $\mathbf{C}$, coïncide avec la partie de torsion de $H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ où X est un modèle propre et lisse de K.

Par ailleurs Colliot-Thélène et Parimala ont montré dans [**CTP**], que, si X est une variété quasi-projective géométriquement connexe de dimension n sur $\mathbf{R}$, alors pour tout $i \geqslant n+1$, $H^n_{\mathrm{nr}/\mathbf{R}}(\mathbf{R}(X), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^S$ où S est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.

En outre, il résulte d'un théorème de pureté et de la théorie de Bloch-Ogus [**BO**] que si X est un modèle propre et lisse du corps K alors $H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j})$ coïncide avec le groupe $H^0(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^i_{\text{ét}}(\mu_n^{\otimes j}))$ où $\mathscr{H}^i_{\text{ét}}(\mu_n^{\otimes j})$ désigne le faisceau pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau qui associe à un ouvert U le groupe de cohomologie étale $H^i(U_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes j})$.

La propriété à l'origine de l'intérêt pour ces groupes est la suivante

***Proposition 2.1.1* (Colliot-Thélène et Ojanguren, [CTO**, Proposition 1.2**])**
Si K et L sont deux corps de fonctions stablement isomorphes sur k, alors pour tout i, $n > 0$ et tout $j \in \mathbf{Z}$, il existe un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{nr}/k}(L, \mu_n^{\otimes j}).$$

2.1.1.2. *Exemples de corps unirationnels non stablement rationnels.* — Dans [**CTO**], Colliot-Thélène et Ojanguren construisent un exemple de corps unirationnel non rationnel de degré de transcendance six sur $\mathbf{C}$ et dont le groupe de Brauer non ramifié est trivial.

Le but de [1], qui correspond à ma thèse, est de donner un mécanisme de construction de tels exemples. L'idée, inspirée de Saltman [**Sa1**] et Bogomolov [**Bo**] est de se donner un sous-groupe fini F de $K^\times/K^{\times l}$ où l est un nombre premier distinct de p et de remonter les morphismes résidus de l'algèbre $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^n(K,\mu_p^{\otimes n})$ à l'algèbre extérieure $\Lambda^* F$.

Plus précisément la théorie de Kummer donne un morphisme $K^\times/K^{\times l} \to H^1(K,\mu_l)$ qui envoie la classe de $a \in K^\times$ sur la classe (a) du cocycle donné par $\sigma \mapsto \sigma(a^{1/l})/a^{1/l}$ où $a^{1/l}$ est une racine l-ième de a dans K^s. Si K contient les racines $2l$-ièmes de l'unité, alors ce morphisme induit pour tout sous-groupe fini F de $K^\times/K^{\times l}$ un morphisme

$$\Phi^* : \Lambda^* F \to \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^n(K,\mu_l^{\otimes n}).$$

On note K^i l'image inverse par Φ^i de

$$\operatorname{Im}(H^i(k,\mu_l^{\otimes i}) \to H^i(K,\mu_l^{\otimes i}))$$

et S^i l'orthogonal de K^i dans le dual $(\Lambda^i F)^\vee$ de $\Lambda^i F$. Mais $(\Lambda^i F)^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(F^\vee)$ et on note S^i déc le sous-groupe de S^i engendré par les éléments de la forme $u \wedge v$ avec $u \in F^\vee$ et $v \in \Lambda^{i-1} F^\vee$.

Théorème 2.1.2 **([1, theorem 2]).** — *Avec les notations ci-dessus on a une injection*

$$(S^i/S^i\,\text{déc})^\vee \to \operatorname{Coker}(H^i(k,\mu_n^{\otimes i}) \to H^i_{\mathrm{nr}/k}(K,\mu_n^{\otimes i})).$$

Le principe pour construire des contre-exemples est alors de partir d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel F et d'un sous-groupe S de $\Lambda^i F^\vee$ qui n'est pas engendré par une famille d'éléments de la forme $u \wedge v$ avec $u \in F^\vee$ et $v \in \Lambda^{i-1} F^\vee$, puis de construire un corps unirationnel K et un morphisme $\Phi^1 : F \to K^\times/K^{\times p}$ de sorte que le groupe S coïncide avec le groupe S^i défini par Φ^1.

La première partie est la plus aisée, il suffit par exemple de prendre $F = \bigoplus_{i=1}^{2i} \mathbf{F}_p f_i$ et

$$S = \langle f_1^\vee \wedge \cdots \wedge f_i^\vee + f_{i+1}^\vee \wedge \cdots \wedge f_{2i}^\vee \rangle$$

où $f_1^\vee, \dots, f_{2i}^\vee$ est une base duale de $f_1, \dots, f_{2i}$.

Pour la seconde on utilise une construction générique si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F, on plonge F dans $k(X_1, \dots, X_n)^\times/p$ en renvoyant f_i sur la classe de X_i.

Cela induit une injection

$$\Phi_0^i : \Lambda^* F \to H^*(k(X_1, \dots, X_n), \mu_p^{\otimes *}).$$

On utilise, lorsqu'ils existent, des corps de scindage générique de $\Phi_0^i(S^{\perp})$. Cela est possible dans les cas suivants

- Si $i = 2$, alors par le théorème d'Amitsur [**Am**], si L est un corps, tout α de $H^2(L, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}\, L_{(p)}$, où $\mathrm{Br}\, L_{(p)}$ désigne la partie de p-torsion du groupe de Brauer, a un corps de scindage générique. De manière plus précise, si V est une variété de Severi-Brauer, c'est-à-dire une variété sur L telle que $V \times L^s$ soit isomorphe à un espace projectif, alors elle définit par descente galoisienne une classe dans

$$H^1(L, \mathrm{Aut}\, \mathbf{P}^n_{L^s}) = H^1(L, \mathrm{PGL}_n(L^s)) \to \mathrm{Br}\, L_{(n)}.$$

On note $[V]$ la classe ainsi obtenue dans le groupe de Brauer. Alors le corps de fonctions $L(V)$ est un corps de scindage générique pour $[V]$. En outre tout élément du groupe de Brauer est la classe d'une variété de Severi-Brauer. En procédant par récurrence on obtient à l'aide de produits de variétés de Severi-Brauer des corps de scindage générique pour tout sous-groupe fini du groupe de Brauer.

- Si $i = 3$, si p est un nombre premier et L est un corps contenant une racine primitive p-ième de l'unité ξ et si $\alpha \in H^3(L, \mu_p^{\otimes 3})$ est de la forme $\alpha = (a_1) \cup (a_2) \cup (a_3)$ avec $a_i \in L^{\times}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, alors on considère l'algèbre $A = A_{\xi}(a_1, a_2)$ engendrée par deux éléments I et J avec les relations

$$I^p = a_1,\ J^p = a_2,\ IJ = \xi JI$$

et la variété Y d'équation $\mathrm{Nrd}_A(x) = a_3$. Alors Suslin a montré dans [**?**, theorem 7.7] que

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(L, \mu_p^{\otimes 2}) \to H^3(L(Y), \mu_p^{\otimes 2})) = \langle (a_1) \cup (a_2) \cup (a_3) \rangle.$$

Ceci permet de construire pour tout premier p des extensions unirationnelles de $\mathbf{C}$ avec

$$\begin{cases} H^3_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(L, \mu_p^{\otimes 3}) \neq 0 \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(L) = \{0\}. \end{cases}$$

- Si $p = 2$ et $\alpha \in H^i(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de la forme $\alpha = (a_1) \cup \cdots \cup (a_i)$, alors un candidat naturel de corps L' tel que

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(L', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \langle \alpha \rangle$$

est le corps de fonctions de la quadrique projective associée à la forme de Pfister

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_i \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle.$$

Ce résultat a été montré par Arason [**Ara**] pour $i = 3$, par Jacob et Rost [**JR**] pour $i = 4$ et annoncé par Voevodsky pour $i \geqslant 5$. Cela permettrait de construire pour tout i des extensions unirationnelles K de $\mathbf{C}$ telles que $H^i_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(K, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \neq 0$ et pour $i \leqslant 5$, telles qu'en outre $H^j_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(K, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ si $j < i$.

2.1.1.3. *Invariants sous l'action d'un groupe.* — Un cas particulier du problème précédent est le problème de Noether, à savoir l'étude de la rationalité d'un corps de la forme $k(W)^G$ où G est un groupe algébrique linéaire et W une représentation de G sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique 0.

2.1.1.4. *Le cas des groupes finis.* — En ce qui concerne les groupes finis, Saltman et Bogomolov ([**Sa1**] et [**Bo**]) ont construit plusieurs exemples de groupe G tels que pour toute représentation fidèle W de G, on ait

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k} k(W)^G \neq 0.$$

Sous-jacents à ces exemples est la description due à Bogomolov du groupe de Brauer non ramifié en termes de la cohomologie de G

Théorème 2.1.3 **(Bogomolov, [Bo]).** — *Soit $\mathscr{B}_G$ l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G, c'est à dire abéliens et engendrés par un sous-ensemble de cardinal inférieur ou égal à deux, alors pour toute représentation fidèle W de G sur k, corps algébriquement clos et de carctéristique 0, on a*

$$\bigcap_{H \in \mathscr{B}_G} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Res}^G_H : H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G).$$

En degré supérieur, le problème est compliqué par la présence de classes négligeables sur lesquelles nous reviendrons et, à ma connaissance, on n'a construit aucun exemple avec $H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mu_n^{\otimes j})$ non nul.

Toutefois Saltman a démontré le résultat profond suivant

Théorème 2.1.4 **(Saltman, [Sa2]).** — *Si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, et W une représentation fidèle de G sur k alors $H^i_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ provient de $H^i(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.*

Dans l'autre direction j'ai pu montrer le résultat suivant

Proposition 2.1.5. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, si γ est un élément de $H^i(G,\mu_n^{\otimes j})$ tel que pour tout sous-groupe H de G et tout sous-groupe cyclique I du centre de H on ait*

$$\mathrm{Res}_H^G(\gamma) \in \mathrm{Im}\,(H^i(H/I,\mu_n^{\otimes j}) \to H^i(H,\mu_n^{\otimes j}))$$

alors l'image γ' de γ dans $H^i(k(W)^G,\mu_n^{\otimes j})$ est non ramifiée.

Dans le cas particulier où G est extension centrale d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel U par un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel V, et si k contient les racines $2p$-ièmes de l'unité, alors on a un diagramme commutatif

$$(2.1.1.2)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(U,\mu_p^{\otimes i}) & \longrightarrow & \Lambda^i(U^\vee) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \Phi^i \\ H^i(G,\mu_p^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^i(k(W)^G,\mu_p^{\otimes i}). \end{array}$$

Par le paragraphe 2.1.1.2, si on pose $S^i = (\mathrm{Ker}\,\Phi^i)^\perp \subset \Lambda^i U$ et si on note $S^i\text{déc}$ le sous-groupe de S^i des éléments décomposables, alors on a une injection

$$(S^i/S^i\text{déc})^\vee \to \mathrm{Coker}\,(H^i(k,\mu_p^{\otimes i}) \to H^i_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,\mu_p^{\otimes i})).$$

Toutefois, on ne connaît pas de méthode permettant de calculer ce noyau en général, nous reviendrons également sur ce problème dans le cadre des classes négligeables. Mais si on considère l'application

$$\theta : \Lambda^2 U \to V$$

définie par

$$\forall g_1, g_2 \in G,\ [g_1,g_2] = \theta(\pi(g_1)\wedge\pi(g_2))$$

où π désigne la projection de G sur U, alors on peut montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi^2 = \mathrm{Ker}\,\theta^\perp$ et par conséquent $\mathrm{Ker}\,\Phi^i \supset \mathrm{Ker}\,\theta^\perp \wedge \Lambda^{i-2}U^\vee$ pour $i \geqslant 2$ et

$$S^i \subset (\mathrm{Ker}\,\theta^\perp \wedge \Lambda^{i-2}U^\vee)^\perp.$$

Notons K^i ce dernier groupe. Alors $S^i\text{déc} \subset K^i\text{déc}$. Par conséquent, tout élément de $\Lambda^i U^\vee$ dont la restriction à $K^i\text{déc}$ est triviale a une image non ramifiée dans $H^i(k(W)^G,\mu_p^{\otimes i})$. En outre, si $i = 3$, on peut même montrer que l'image inverse de $H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G,\mu_p^{\otimes 3})$ dans $\Lambda^3 U^\vee$ coïncide avec $K^3\text{déc}$ (cf. [4, proposition 9.4]).

2.1.1.5. *Le cas des groupes semi-simples.* — En ce qui concerne les groupe algébriques réductifs, les seuls résultats connus sont négatifs. En particulier, Saltman a démontré que si V est une représentation quasi-libre de PGL_n sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique 0, c'est à dire qu'il existe un ouvert affine PGL_n-invariant U de V et un point x de U dont le stabilisateur est trivial et l'orbite fermée, alors

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(V)^{\mathrm{PGL}_n}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0.$$

La méthode qu'il utilise est une réduction à l'étude de groupes de cohomologie de la forme $H^i(W, R)$ où $i = 2$ ou 3, où $W = \mathfrak{S}_n$ est le groupe de Weyl de PGL_n et où R est un W-réseau. Cette réduction fonctionne également pour tout groupe semi-simple et il serait intéressant de determiner quel type de majoration cela fournit pour des groupes de la forme

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(V)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

où G est un autre groupe adjoint classique.

2.1.1.6. *Variétés de drapeaux généralisés.* — Une autre classe de variétés pour lesquelles on a étudié les groupes de cohomologie non ramifiée est celle des variétés de drapeaux généralisés, c'est à dire des variétés projectives homogènes sous l'action d'un groupe algébrique linéaire de sorte que le stabilisateur d'un point géométrique soit lisse.

Comme dans ce cas le corps de fonctions de la variété V n'est pas unirationnel en général, il faut, pour décrire ces groupes de cohomologie, expliciter à la fois le noyau et le conoyau de l'application de restriction

$$H^i(k, C) \to H^0(V_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(C)) \tag{2.1.1.3}$$

où C est un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module.

En utilisant les complexes de Lichtenbaum, Kahn montre dans [**Kah1**] l'existence d'un isomorphisme naturel entre

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$

et

$$H^1(\mathrm{Gal}\,(k^s/k), K_2(k^s(V))/K_2k^s).$$

Ce dernier groupe s'insère, dans le cas des variétés de drapeaux généralisés, dans une suite exacte longue donnée par Colliot-Thélène et Raskind dans [**CTR**]. On

obtient de cette manière une suite exacte
(2.1.1.4)
$$(\operatorname{Pic} V^s \otimes k^{s\times})^{\operatorname{Gal}(k^s/k)} \xrightarrow{\phi} \operatorname{Ker}(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$
$$\xrightarrow{\theta} \operatorname{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Dans [2] et [3], nous montrons que le morphisme ϕ peut être décrit de la manière suivante les raies extrêmales du cône des classes de diviseurs effectifs dans $\operatorname{Pic} V^s$ définissent une base B de ce groupe qui est globalement invariante sous l'action du groupe de Galois. Pour toute $\operatorname{Gal}(k^s/k)$-orbite O de B, soit k_O l'extension séparable de k qui lui correspond. On a alors une suite exacte canonique

$$\operatorname{Pic} V \to \mathbf{Z}[B]^{\operatorname{Gal}(k^s/k_O)} \to \operatorname{Br} k_O \to \operatorname{Br} k_O(V).$$

On note α_O l'image de $\sum_{b \in O} b \in \mathbf{Z}[B]^{\operatorname{Gal}(k^s/k)}$ dans $\operatorname{Br}(k_O)$. Alors ϕ coïncide avec l'application

$$\sum_{O \text{ orbite}} k_O^\times \xrightarrow{\oplus N_{k_O/k}(.\cup \alpha_O)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Dans [4], je donne également le lien entre les classes α_O et l'algèbre séparable A construite par Panin dans [**Pa**] pour décrire la K-théorie de la variété V.

La description du morphisme θ est plus difficile. Une méthode de calcul est donnée dans [4] dans le cas particulier où V est le produit d'une conique par une autre variété de drapeaux généralisés.

En utilisant la suite exacte (2.1.1.4) on obtient par exemple que l'homologie du complexe

$$\sum_O k_O^\times \xrightarrow{\oplus N_{k_O/k}(.\cup \alpha_O)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est triviale si la dimension de V est inférieure ou égale à deux et cyclique ou triviale si cette dimension est trois (cf. [4, corollaires 7.1 et 7.2]). Elle donne aussi un lien direct entre les résultats d'Arason sur le noyau de l'application de restriction [**Ara**] et celui de Karpenko sur le second groupe de Chow des quadriques [**Kar**]. Enfin elle nous permet de construire des exemples de produits de trois coniques ayant de la torsion dans le second groupe de Chow.

Dans [**Me**], Merkur′ev a étendu cette suite vers la gauche en montrant que le noyau de ϕ coïncide avec le groupe $H^1(V, \mathscr{K}^2)$. Dans [**Kah2**], Kahn montre comment cette suite exacte peut se déduire également de la suite spectrale d'Hochschild-Serre pour l'hypercohomologie relative de $k(V)$ au-dessus de k à

coefficients dans le complexe de Lichtenbaum $\Gamma(2)$ et qu'en outre cela permet de relier le conoyau du morphisme de restriction (2.1.1.3) à l'homologie du complexe

$$\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s) \to H^4(V^s_{\text{ét}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Kahn a également montré comment en utilisant les résultats annoncés par Voevodsky, on pouvait obtenir des informations sur la partie de 2-torsion du conoyau de l'application de restriction en degré quatre, ce qui redonne en partie les résultats de [**KRS**].

Il serait intéressant de prolonger cette étude en degré supérieur, ne serait-ce que dans des cas particuliers comme celui des quadriques.

2.1.2. *Classes négligeables.* —

2.1.2.1. *Introduction.* — La notion de classe négligeable a été définie par Serre dans [**?**] si G est un groupe fini et A un G-module, un élément γ de $H^n(G,A)$ est *négligeable* si et seulement si pour tout corps k et tout morphisme continu ϕ du groupe $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ vers G, $\phi^*(x)$ est trivial dans $H^n(k,A)$.

Entre autres résultats sur ces classes, Serre a notamment démontré les assertions suivantes

Théorème 2.1.6 **(Serre,** [**?**, (7.1) et (7.2)]**). —** *Si G est fini, il existe un entier $N(G)$ tel que pour tout $n > N(G)$, toute classe d'ordre impair de degré supérieur à $N(G)$ soit négligeable.*

Si G est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, alors les classes négligeables dans $H^*(G,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ forment un idéal engendré par les produits $a^2b - ab^2$ pour a et b dans $H^1(G,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ qui est isomorphe au dual de G.

Dans la suite on s'intéressera à une notion plus faible de classe négligeable si k est un corps, G un groupe fini et A un G-module, nous dirons qu'un élément γ de $H^n(G,A)$ est totalement k-négligeable si et seulement si pour toute extension K de k et tout morphisme continu $\phi : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to G$, $\phi^*(x)$ est trivial dans $H^n(K,A)$.

En outre nous considérerons tout particulièrement le cas où $A = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Il est bien connu qu'en degré deux, si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, alors on a une injection

$$H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Br}(k(W)^G)$$

pour tout groupe G et toute représentation fidèle W de G au-dessus de k. Il en résulte qu'aucune classe de $H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ n'est totalement k-négligeable.

Saltman a été le premier à construire des classes totalement k-négligeables de degré trois dans ce cadre. Le principe de leur construction donnée dans [**Sa2**] est le suivant soit W une représentation fidèle de G sur k, soit F le $\mathbf{Z}$-module libre sur l'ensemble des sous-variétés irréductibles de codimension deux de W qui sont invariantes sous l'action de G et soit $R \subset F$ le sous-module engendré par les diviseurs de fonctions rationnelles f sur une sous-variété irréductible G-invariante de codimension un de W telles que f^n soit G-invariante pour un entier n. Alors le quotient F/R est indépendant de la représentation fidèle choisie et est noté $N^3(G)$. Comme le note Saltman, ce groupe peut être considéré comme une sorte de groupe de Chow équivariant.

Théorème 2.1.7 **(Saltman** [**Sa2**, theorem 4. 14]**). —** *Avec les notations ci-dessus, il existe une surjection du groupe des classes totalement k-négligeables vers* $N^3(G)$.

Saltman montre ensuite que si G est un 2-groupe non commutatif possédant un sous-groupe cyclique d'indice 2, alors $N^3(G)$ est non nul.

2.1.2.2. *Lien avec les variétés de drapeaux.* — Si G est un groupe et k un corps, Serre a introduit la notion centrale de cas test, qui est la donnée d'une extension K de k et d'un morphisme continu $\phi : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to G$ de sorte qu'une classe γ soit totalement k-négligeable si et seulement si $\phi^*(\gamma)$ est nul.

L'exemple le plus simple de tel cas test est justement donné par le corps des fonctions invariantes $k(W)^G$ où W est une représentation fidèle de G sur k. L'inconvénient toutefois de ce cas test est que ce corps d'invariants ne possède pas a priori de modèle géométrique lisse naturel auquel on puisse appliquer des techniques géométriques.

Toutefois, dans le cas particulier où G est une extension centrale d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel U par un autre V, on dispose d'un modèle plus géométrique construit dans [4, §9] de la manière suivante. On considère la suite exacte

$$0 \to V \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} U \to 0. \tag{2.1.2.1}$$

Comme dans le paragraphe 2.1.1.3, cela induit un morphisme $\theta = \Lambda^2 U \to V$ défini par le commutateur. On suppose pour simplifier que l'application θ est surjective. On fixe un corps de base k de caractéristique 0 et contenant les racines de l'unité. Soit K_0 le corps $k(X_1,\dots,X_n)$ où n est la dimension de U. On a alors un morphisme du dual $U^\vee$ de U vers $H^1(k(X_1,\dots,X_n),\mu_p)$ envoyant une base duale d'une base $u_1,\dots,u_n$ de U vers la famille $(X_1),\dots,(X_n)$. Or le morphisme

θ induit une application $V^\vee \to \Lambda^2 U^\vee$ d'où un morphisme

$$\tilde{\theta} : V^\vee \to H^2(k(X_1,\dots,X_n), \mu_p^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Br} k(X_1,\dots,X_n)_{(p)}.$$

La notion de corps de scindage générique amène à considérer les variétés de Severi-Brauer $Y_1,\dots,Y_n$ dont les classes dans le groupe de Brauer représentent les images d'une base $v_1^\vee,\dots,v_m^\vee$ de $V^\vee$. On note K le corps de fonctions $k(X_1,\dots,X_n)(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$. Alors le morphisme induit

$$\phi_U : \operatorname{Gal}(K^s/K) \twoheadrightarrow U$$

est tel que $\phi_U^*(\gamma) = 0$ où γ est la classe représentant l'extension (2.1.2.1). Par conséquent ϕ_U s'étend en un unique morphisme surjectif

$$\phi : \operatorname{Gal}(K^s/K) \twoheadrightarrow G.$$

Ce morphisme ϕ fournit un cas test [4, proposition 9.1].

En particulier, en considérant à nouveau le diagramme (2.1.1.2), on peut vouloir étudier les éléments de $\Lambda^3(U^\vee)$ dont les relevés dans $H^3(U, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ donnent des clasees négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ce qui revient à étudier les éléments de $\Lambda^3 U^\vee$ dont l'image dans $H^3(K_0, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ appartient au noyau de l'application de restriction de K_0 à $K(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$. On peut alors utiliser les résultats du paragraphe 2.1.1.6 pour contrôler ce noyau.

On obtient ainsi que si U est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ et si V est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de base $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant 4}$ et si γ est l'élément de $H^2(U, V) \xleftarrow{\sim} S^2(U^\vee) \otimes V$ donné par la formule

$$\gamma = u_2^\vee u_5^\vee \otimes v_1 + u_4^\vee u_1^\vee \otimes v_2 + u_6^\vee u_3^\vee \otimes v_3 + (u_1^\vee + u_3^\vee + u_5^\vee)(u_2^\vee + u_4^\vee + u_6^\vee) \otimes v_4$$

alors l'élément $u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_3^\vee + u_4^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee$ de $\Lambda^3 U^\vee$ fournit des classes non nulles mais totalement k-négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ où G est l'extension de U par V définie par γ et k un corps de caractéristique 0 contenant les racines de l'unité.

2.1.2.3. *Perspectives.* — Notons tout d'abord que dans le cas considéré au paragraphe précédent la suite exacte (2.1.1.4) s'écrit

$$K_0^{\times m} \xrightarrow{\oplus . \cup \tilde{\theta}(v_i^\vee)} \operatorname{Ker}(H^3(K_0, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to \mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_m)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Or l'image dans $\Lambda^3 U^\vee$ du noyau de l'application naturelle

$$H^3(U, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

coïncide avec le produit de $U^\vee$ par l'image de $V^\vee$ dans $\Lambda^2 U^\vee$. On en déduit que que les classes négligeables considérées dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont liées au sous-groupe de torsion de $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$. Mais en fait ces variétés de Saveri-Brauer ont des modèles $\mathscr{Y}_i$ au-dessus du tore $T = \mathbf{G}_m^n$ et en prenant la variété produit $\mathscr{Y} = \times_T \mathscr{Y}_i$, on peut décrire ces classes négligeables en termes de $CH^2(\mathscr{Y})_{\mathrm{tors}}$. Or $\mathscr{Y}$ possède un G-revêtement galoisien naturel qui permet d'interpréter également ce groupe comme un groupe de Chow équivariant respectivement à une action du groupe G, comme dans la méthode utilisée par Saltman.

Il serait très intéressant de trouver un cadre commun à ces deux méthodes liant classes négligeables à coefficients $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et groupe de Chow équivariant.

D'autre part, les seuls exemples qui me sont connus de classes négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont de 2-torsion et dans les deux cas, le nombre premier 2 joue un rôle tout à fait particulier. Il n'est donc pas sans intérêt d'étudier le problème de l'existence de classes négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'ordre premier à 2.

2.2. Points rationnels de hauteur bornée. —

2.2.1. *Introduction.* —

2.2.1.1. *Généralités.* — Un des problèmes à l'origine de la géométrie algébrique est l'étude de l'ensemble des solutions d'équations polynomiales et, plus précisément, en reprenant la question posée en introduction aux éléments de géométrie algébrique de Dieudonné et Grothendieck [**EGA**], « s'il est infini, peut-on donner des estimations asymptotiques du nombre de solutions satisfaisant à des inégalités supplémentaires où figurent des paramètres lorsque ces paramètres tendent vers certaines limites ? »

L'objectif est en fait de pouvoir interpréter ce comportement asymptotique en termes de la géométrie de la variété.

Parallèlement on est amené à étudier la répartition asymptotique des solutions, c'est à dire de quelle façon le comportement asymptotique du nombre de solutions dans un ouvert donné dépend de cet ouvert, que ce soit pour la topologie de Zariski ou la topologie adélique.

De nombreux progrès ont été réalisés récemment dans ce domaine notamment grâce à l'impulsion donnée par Manin.

Plus précisément, on fixe une variété V projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k. L'objet naturel pour compter les points rationnels de V est une hauteur d'Arakelov $\mathbf{h}$, dont on rappellera la définition au

paragraphe suivant. Pour tout sous-espace localement fermé de F de V on considère pour tout H de $\mathbf{R}_{>0}$

$$n_{F,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in F(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

Dans tous les exemples qui me sont connus, on a que, si ce cardinal reste fini, alors son comportement asymptotique est de la forme

$$CH^a(\log H)^{b-1}$$

où $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ et C est une constante réelle positive. A ces trois constantes correspond trois niveaux de précision dans l'interprétation, ainsi que trois notions de répartitions. Ainsi la variation de la constante a correspond à la notion de sous-variété strictement accumulatrice due à Manin, la constante b à la notion d'accumulation modérée tandis que la variation de C pour la topologie adélique fournira une notion d'équidistribution.

2.2.1.2. *Les hauteurs d'Arakelov.* —

Notations 2.2.1. — Dans la suite k désigne un corps de nombres et $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers. On notera M_k l'ensemble des places de k, c'est à dire des topologies sur k définies par des normes. On identifie l'ensemble des places non archimédiennes avec l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_k$ et on note M_∞ son complémentaire. Pour tout v de M_k, on note k_v le complété de k en v et on normalise la norme $|.|_v$ correspondante par

$$\forall v|p,\ \forall x \in k_v,\ |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si v est une place finie, $\mathcal{O}_{k_v}$ désigne l'anneau local des entiers de k_v et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel. Si v appartient à M_∞ et $[k_v : \mathbf{R}] = 2$, on fixe un isomorphisme de k_v à $\mathbf{C}$.

La lettre d désigne le discriminant de k, défini comme le carré du déterminant de la matrice $(\sigma_i\omega_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ où N est le degré de l'extension $k/\mathbf{Q}$, $\{\sigma_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ l'ensemble des plongements de k dans $\mathbf{C}$ et $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ une base de O_k sur $\mathbf{Z}$.

Soit $\mathscr{X}$ un schéma sur un anneau A. Alors pour toute A-algèbre B, $\mathscr{X}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si X est défini sur un corps E de clôture algébrique $\overline{E}$, on note $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{E}}$. Le groupe de Picard de X est noté $\mathrm{Pic}\,X$,son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ et son faisceau canonique ω_X. On note $C_{\mathrm{eff}}(X)$ le cône des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$.

Si V est une variété sur un corps de nombres k, on se donne un modèle lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_k$, c'est à dire un schéma lisse tel que $\mathscr{V}_k$ soit isomorphe à V. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de k on dispose d'une application canonique $\mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}) \to V(k_\mathfrak{p})$. L'espace adélique associé à V est alors défini comme la limite inductive

$$\varinjlim_{S} \prod_{v\in S} V(k_v) \times \prod_{v\notin S} \mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_v})$$

où S décrit les ensembles finis de places contenant les places archimédiennes. Cet espace est muni de la limite des topologies produits.

Définitions 2.2.1. — Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k et L un fibré en droites au-dessus de V. Pour toute place v de k, une *métrique v-adique* sur L est une application

$$\|.\|_v : L(k_v) \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$$

ne s'annulant que sur la section nulle, telle que, pour tout ouvert W de V et toute section s de L sur W l'application qui envoie x sur $\|\mathrm{s}(x)\|_v$ soit continue pour la topologie v-adique, et telle que

$$\forall \lambda \in k_v,\ \forall x \in L(k_v),\ \|\lambda x\|_v = |\lambda|_v\, \|x\|_v.$$

Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ de sorte qu'il existe un ensemble fini $S \subset M_f$, un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur l'anneau des S-entiers $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ de sorte que pour toute place $v \in M_f - S$, la métrique $\|.\|_v$ soit définie à l'aide de $\mathscr{L}$ de la manière suivante si x appartient à $V(k_v)$, son adhérence dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{k_v}}$ fournit un élément $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_v})$ et $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ définit un $\mathcal{O}_{k_v}$-sous-module de rang un de $L(x) = x^*(L)$ dont on note y_0 un générateur la norme $\|.\|_v$ sur $L(x)$ est alors donnée par la formule

$$\forall y \in L(x),\ \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

Une *hauteur d'Arakelov* $\mathbf{h}$ sur V est la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$ où L est un fibré en droites et $(\|.\|_v)_{v\in M_k}$ une métrique adélique sur L.

Si $\mathbf{h}$ est une hauteur d'Arakelov sur V et x un point rationnel de V, alors la *hauteur de x relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\forall y \in L(x) - \{0\},\ \mathbf{h}(x) = \prod_{v\in M_k} \|y\|_v^{-1}.$$

En effet par la formule du produit, le terme de droite est indépendant du choix de y.

Pour tout sous-ensemble localement fermé W de V et tout réel strictement positif H, on considère

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

L'ensemble $\mathscr{H}(V)$ des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov muni du produit tensoriel est un groupe et on a un morphisme canonique

$$o : \mathscr{H}(V) \to N(V)$$

où $N(V)$ désigne le quotient $\mathrm{NS}(V)/\mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}}$. On appelle *système de hauteurs* tout morphisme $\mathbf{H}$ de $N(V)$ dans $\mathscr{H}(V)$ qui est une section de o.

Tout système de hauteurs $\mathbf{H}$ définit un accouplement

$$\mathbf{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(k) \to \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que pour tout L de $N(V)$ et tout x de $V(k)$ on ait

$$\mathbf{H}(L \otimes 1, x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

Comme dans [**Ar**] ou [**FMT**], on considère alors la *fontion zêta des hauteurs* définie pour tout ouvert de Zariski U par la série

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s) = \sum_{x \in U(k)} \mathbf{H}(s,x)^{-1}$$

série qui converge sur un cône ouvert de $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$.

Il faut noter que si la classe du fibré L dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ appartient à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, alors il existe un ouvert U sur lequel pour tout H de $\mathbf{R}_{>0}$, on a

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) < +\infty.$$

Notre but est donc d'étudier le comportement asymptotique de ce nombre lorsque H tend vers l'infini.

2.2.1.3. *Premier niveau : la puissance de H.* —

Définition 2.2.2. — Soient $\mathbf{h}$ une hauteur d'Arakelov sur une variété projective et lisse V et F un sous-ensemble localement fermé de V. Alors

$$a_F(L) = \varlimsup_{H \to +\infty} \log n_{F,\mathbf{h}}(H)/\log H \leqslant +\infty$$

ne dépend que du choix de la classe de L dans le groupe $N(V)$, [**BM**, proposition 1.4].

La constante $a_F(L)$ représente donc la puissance de H apparaissant dans le comportement asymptotique $n_{F,\mathbf{h}}(H)$.

Définition 2.2.3. — (cf. [**BM**, définition 2.1])

$$a^{\text{géo}}(L) = \inf\{\,\gamma \in \mathbf{R}_{>0} \mid \gamma[L] + [\omega_V^{-1}] \in C_{\text{eff}}(V)\,\} \leqslant +\infty.$$

Les deux constantes sont liées par la conjecture suivante

Conjecture 2.2.1 **(Batyrev et Manin** [**BM**, conjectures A et B]**)**

Si L est ample, pour tout réel ε strictement positif, il existe un ouvert de Zariski non vide U de V tel que

$$a_U(L) < a^{\text{géo}}(L) + \varepsilon.$$

Si en outre V est de Fano, c'est à dire si ω_V^{-1} est ample, alors il existe k_0 tel que pour toute extension finie k' de k contenant k_0 et tout ouvert de Zariski non vide U suffisamment petit de V, on ait

$$a_{U_{k'}}(L) = a^{\text{géo}}(L).$$

Remarques 2.2.2. — Remarquons quelques cas particulier de cette conjecture si V est de type général, c'est à dire si ω_V est quasi-ample, alors $a^{\text{géo}}(L) = 0$ pour tout L et on peut rapprocher cette conjecture de celles de Lang et Vojta qui prévoient que dans ce cas l'ensemble des points rationnels n'est pas Zariski dense dans V.

Si V est une surface avec $\omega_V = 0$, alors par [**BM**, théorème 3.5], elle implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute hauteur $\mathbf{h}$ dont le fibré L est ample, si $V(\varepsilon, L)$ désigne la réunion des courbes k-rationnelles C telles que $(C, L) < 2\varepsilon^{-1}$, alors

$$n_{V,\mathbf{h}}(H) = n_{V(\varepsilon,L),\mathbf{h}}(H) + \mathscr{O}(H^{\varepsilon}).$$

De manière intuitive, la « plupart » des points de V sont dans l'union des courbes k-rationnelles de V.

Si V est une variété abélienne alors il résulte des travaux de Neron que pour tout L ample et toute hauteur $\mathbf{h}$ relative à L,

$$\begin{array}{ccc} n_{V,\mathbf{h}}(H) & \sim & C(\log H)^r \\ H & \to & +\infty \end{array}$$

et la conjecture est vérifiée.

La dépendance de $a_U(L)$ en U permet de définir la notion d'accumulation stricte

***Définitions 2.2.2* (Batyrev et Manin [BM, §2]).** — Un sous-espace fermé irréductible F de V est dit *L-accumulateur* si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

Si $\tilde{F}$ est une normalisation de F et $\tilde{F}_0$ l'ouvert des points lisses de $\tilde{F}$, on définit également

$$a_F^{\text{géo}}(L) = \inf\{\, p/q,\ p, q \in \mathbf{N} - \{0\} \mid h^0(\tilde{F}_0, \phi^*(L)^{\otimes p} \otimes \omega_{\tilde{F}_0}^{\otimes q}) > 0 \,\}$$

où $\phi : \tilde{F}_0 \to V$ est l'application naturelle.

Le fermé F est alors dit géométriquement *L-accumulateur* si et seulement si

$$a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$$

Une question naturelle est alors le lien entre sous-variétés accumulatrices et sous-variétés géométriquement accumulatrices.

Si les théorèmes taubériens peuvent être appliqués à la fonction envoyant un complexe s sur $\zeta_{\mathbf{H}}(sL)$, alors la constante $a_U(L)$ est donnée par

$$a_U(L) = \inf\{\, \sigma \mid \zeta_{U,\mathbf{H}}(sL) \text{ converge pour } \operatorname{Re} s > \sigma \,\}$$

ce qui conduit à la conjecture suivante

***Conjecture 2.2.3* (Batyrev, Manin, Tschinkel).** — *Si V est une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs sur V, alors pour tout ouvert U suffisamment petit la fonction $\zeta_{U,\mathbf{H}}$ converge sur le cône*

$$\omega_V^{-1} + \overset{\circ}{\widehat{C_{\text{eff}}(V)}} + i\,\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}.$$

2.2.1.4. *Deuxième niveau : la puissance de* $\log H$. —

Définitions 2.2.3. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur d'Arakelov sur V variété projective et lisse. On note L le fibré sous-jacent. Pour tout sous-ensemble constructible F de V, on pose

$$b_F(\mathbf{h}) = \varlimsup_{H \to +\infty} \log(n_{F,\mathbf{h}}(H)/H^{a_F(L)})/\log\log H + 1 \leqslant +\infty.$$

Avec les mêmes notations, si $0 < a^{\text{géo}}(L) < +\infty$, on note $b^{\text{géo}}(L)$ la codimension de la face du cône $[\omega_V^{-1}] + C_{\text{eff}}(V)$ contenant $a^{\text{géo}}(L)[L]$.

Ces deux constantes sont liées par la question suivante

Question 2.2.4. — *(cf.* [**BM**, conjecture C']*) Pour quelles variétés V parmi celles telles que ω_V^{-1} ne soit pas effectif, a-t-on que pour toute hauteur $\mathbf{h}$ dont le fibré L est à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, pour tout corps k suffisamment grand et tout ouvert U assez petit*

$$b_U(\mathbf{h}) = b^{\text{géo}}(L).$$

En montrant que pour un choix judicieux du système de hauteurs sur les variétés de drapeaux généralisés, la fonction zêta est une série d'Eisenstein, Franke, Manin et Tschinkel ont déduit des travaux de Langlands le résultat suivant

Théorème 2.2.5 **(Franke, Manin et Tschinkel,** [**FMT**, §2]**)**
La réponse à la question 2.2.4 est positive si V est une variété de drapeaux généralisés possédant un point rationnel, c'est à dire un quotient $P\backslash G$ où G est un groupe algébrique linéaire semi-simple et P un sous-groupe parabolique lisse de G.

Remarques 2.2.6. — Il résulte également de leurs travaux qu'une réponse positive est compatible avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses de grande dimension dans l'espace pojectif ainsi qu'avec le produit de variétés.

Salberger a également démontré que si V est la surface obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et si U désigne le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels, alors il existe $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_k})$ et $C > 0$ telle que

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \leqslant CH \log^4 H.$$

Toutefois batyrev et Tschinkel ont construit dans [**BT2**] un exemple de variété de Fano fibrée en surfaces cubiques au-dessus de l'espace projectif pour laquelle la réponse à la question est négative.

On pourrait définir une notion d'accumulation en termes de la constante b, comme on l'a fait pour a, mais les exemples amènent a considérer plutôt la notion suivante

Définitions 2.2.4. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur dont le fibré est à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$. Un fermé irréductible strict F de V est dit *modérément accumulateur* pour $\mathbf{h}$ si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim_{H\to+\infty}} \frac{n_{W,\mathbf{h}}(H)}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} > 0$$

Si en outre F est lisse et $0 < a_F^{\text{géo}}(L) < +\infty$, alors on définit $b_F^{\text{géo}}(L)$ comme la codimension dans $\mathrm{NS}(F) \otimes \mathbf{R}$ de la face du cône $[\omega_F^{-1}] + C_{\text{eff}}(F)$ contenant $a_F^{\text{géo}}(L)[L_{|F}]$.

On peut alors se demander si les sous-variétés modérément accumulatrices minimales sont données soit par la relation $a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$ auquel cas F est géométriquement accumulatrice ou bien par la relation $a_F^{\text{géo}}(L) = a_V^{\text{géo}}(L)$ et $b_F^{\text{géo}}(L) \geqslant b_V^{\text{géo}}(L)$.

Remarque 2.2.7. — Si $V = \mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$ et si $\mathbf{h}$ est une hauteur de fibré $\mathcal{O}(m, m')$ avec $m > m' > 0$, toutes les fibres de la projection sur le premier facteur sont modérément accumulatrices. Dans ce cas si

$$o(\mathbf{h}) \in \overbrace{C_{\text{eff}}(V)}^{\circ} - \mathbf{R}_{>0}[\omega_V^{-1}]$$

alors les sous-variétés modérément accumulatrices sont Zariski denses.

Par contre, si $o(\mathbf{h}) = [\omega_V^{-1}]$, à ma connaissance les seuls exemples étudiés où on ait des raisons de croire à leur densité sont ceux donnés par Batyrev et Tschinkel dans [**BT2**].

Comme dans le paragraphe précédent, la question 2.2.4 est liée à une question analogue en termes de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 2.2.4. — (cf. Köcher [**Kö**]) Si C est un cône dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E muni d'un réseau L, la fonction caractéristique de C est définie par

$$\forall s \in E \otimes \mathbf{C},\ \chi_C(s) = \int_{C^\vee} \exp^{-\langle s,y\rangle} dy$$

où $C^\vee$ est le cône dual de C c'est à dire

$$C^\vee = \{ x \in E^\vee \mid \forall y \in C,\ \langle x,y\rangle > 0 \}$$

et dy est la mesure de Haar normalisée par le réseau L.

En particulier, on note $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$ la fonction caractéristique du cône des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Question 2.2.8. — *(cf. Batyrev et Tschinkel,* [**BT1**] *et* [**BT3**]*) Pour quelles variétés V dont la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs et dont les points rationnels sont Zariski denses existe-t-il*

un ouvert U et un système de hauteurs $\mathbf{H}$ de sorte que la fonction $\zeta_{U,\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$ s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant

$$\omega_V^{-1} + C_{\mathrm{eff}}(V) + i\,\mathrm{Pic}\,V \otimes \mathbf{R}$$

et prenne une valeur non nulle en ω_V^{-1} ?

Théorème 2.2.9 **(Batyrev et Tschinkel, [BT1] et [BT3])**
La réponse à la question 2.2.8 est positive si V est une compactification équivariante lisse d'un tore sur k.

2.2.2. *Troisième niveau : la constante.* —

2.2.2.1. *Formule empirique.* — Dans [5], je me suis intéressé à la constante C dans le cas particulier où le fibré L est le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Le point de départ de ce travail est une remarque de Beukers qui m'a été transmise par Manin au sujet du produit eulérien

$$\prod_{p \text{ premier}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^4 \left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$$

qui apparaît dans la constante que j'avais obtenue pour le plan projectif éclaté en trois points rationnels en position générale. Beukers avait effectivement noté que le facteur (p^2+4p+1) n'était autre que le nombre de points dans la variété sur le corps $\mathbf{F}_p$ et 4 le rang du groupe de Picard.

Cette remarque ainsi que diverses considérations sur les variations de la constante en fonction du choix de la métrique m'ont amené aux constructions qui suivent.

Hypothèses 1. — On supppose désormais que V est une variété projective, lisse et géométriquement intègre vérifiant les conditions suivantes
(i) les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2,
(ii) le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ est sans torsion,
(iii) le faisceau anti-canonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$,
(iv) $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski.

Notations 2.2.5. — On fixe dans ce paragraphe une hauteur d'Arakelov $\mathbf{h}$ de la forme $(\omega_V^{-1}, (\|.\|_v)_{v\in M_k})$.

Pour toute place v de k, on normalise la mesure de Haar dx_v sur k_v de la manière suivante
- si $v \in M_f$ alors $\int_{\mathcal{O}_{k_v}} dx_v = 1$,

- si $k_v = \mathbf{R}$, alors dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors $dx_v = idz\,d\bar{z} = 2dx\,dy$.

Pour toute place v de k, $\|.\|_v$ correspond à une mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v dx_{1,v} \ldots dx_{n,v},$$

pour tout système de coordonnées locales analytiques sur $V(k_v)$, le produit $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ étant vu comme section locale de ω_V^{-1}.

On se donne un ensemble fini S de mauvaises places pour V contenant l'ensemble des places archimédiennes et un modèle $\mathcal{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$.

Pour toute place $\mathfrak{p}$ de $M_f - S$, le terme local de la fonction L associée à $\operatorname{Pic} \overline{V}$ est défini par

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{-s} \operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid \operatorname{Pic} \mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}}$ désigne le morphisme de Frobenius géométrique en $\mathfrak{p}$, c'est à dire l'inverse du morphisme induit fonctoriellement par le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^{N(\mathfrak{p})}$.

La fonction L globale est alors définie par le produit eulérien

$$L_S(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}).$$

Quitte à augmenter S ce produit converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ en 1 (cf. [5, lemme 2.2.5]).

On définit les facteurs de convergence $(\lambda_v)_{v \in M_k}$ par

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic} \overline{V}) & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les conjectures de Weil démontrées par Deligne [**De**] impliquent que la mesure adélique $\prod_{v \in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ converge et définit une mesure borélienne sur $V(\boldsymbol{A}_k)$ (cf. [5, proposition 2.2.2]).

Définition 2.2.6. — La *mesure de Tamagawa* associée à $\mathbf{h}$ est définie par

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}} = (\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic}\overline{V}))\frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}} \prod_{v\in M_k} \lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$$

où t est le rang de $\operatorname{Pic} V$.

Remarque 2.2.10. — Elle est indépendante du choix de S.

Définition 2.2.7. — On pose

$$\tau_{\mathbf{h}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)}),$$

$$\alpha(V) = \frac{\chi_{C_{\text{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})}{(t-1)!}$$

et

$$\beta(V) = \# H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{V}).$$

Remarques 2.2.11. — Le choix de l'adhérence des points rationnels comme domaine d'intégration est inspiré par l'étude faite par Swinnerton-Dyer dans [**SD**].

La constante $\alpha(V)$ est rationnelle lorsque le cône des diviseurs effectifs est un cône polyédrique rationnel de $\mathrm{NS}(V)\otimes\mathbf{R}$, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i\in I}\mathbf{R}_{\geqslant 0}e_i\otimes 1$ où $(e_i)_{i\in I}$ est une famille finie de $\mathrm{NS}(V)$.

L'introduction de la constante $\beta(V)$ est due à Batyrev et Tschinkel ([**BT1**] et [**BT3**]).

Question 2.2.12. — *Si V est une varitéé vérifiant les hypothèses 1, si* $\mathbf{h}$ *est une hauteur d'Arakelov sur V de fibré associé ω_V^{-1}, et si le complémentaire U dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour h est un ouvert de Zariski non vide de V, à quelle condition a-t-on*

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \underset{H\to+\infty}{\sim} \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)H(\log H)^{t-1} \tag{2.2.2.1}$$

où t est le rang du groupe de Picard de V ?

2.2.2.2. *Résultats.* — Les résultats qui viennent appuyer cette formule empirique sont les suivants

(i) La formule asymptotique 2.2.2.1 est stable par produit de variétés [**FMT**, proposition 2] et [5, corollaire 4.3],

(ii) Elle est compatible avec les résultats de la méthode du cercle [5, corollaire 5.4.9],

(iii) Elle coïncide avec les résultats de Schanuel et de Langlands, Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisés possédant un point rationnel [5, théorèmes 6.1.1 et 6.2.2],
(iv) Batyrev et Tschinkel ont démontré qu'elle est valide pour les variétés toriques [**BT1**] et [**BT3**], résultat qui avait été démontré dans quelques cas particuliers dans [5, §8 à 11].

2.2.2.3. *Equirépartition.* — De même que les notions d'accumulation et d'accumulation modérée correspondaient aux variations des constantes $a_F(L)$ et $b_F(L)$, la notion d'équidistribution correspond aux variations de la constante C. Il faut noter que, lorsque $L = \omega_V^{-1}$ cette constante est en général indépendante de l'ouvert de Zariski choisi lorsque celui-ci est contenu dans le complémentaire des sous-variétés accumulatrices. On peut alors passer à l'analyse plus fine de sa dépendance du point de vue de la topologie adélique.

Définition 2.2.8. — Nous dirons qu'un ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ est bon si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ de fibré associé ω_V^{-1} telle que $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\partial W) = 0$ où $\partial W = \overline{W} - W$. Cela est alors vrai pour toute telle hauteur.

On dit alors que les points rationnels de V sont *équidistribués* sur U ouvert de Zariski de V si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ de fibré ω_V^{-1} telle que pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ on ait

$$\frac{\#\{x \in U(k) \cap W \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} \to \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(W \cap \overline{V(k)})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)})} \qquad H \to +\infty. \tag{2.2.2.2}$$

Remarques 2.2.13. — Si les points de V sont équidistribués sur U, alors celui-ci est nécessairement inclus dans le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices de V.

Si la formule asymptotique 2.2.2.1 et les limites 2.2.2.2 sont valides pour une même hauteur $\mathbf{h}$, alors elles sont vraies pour toute hauteur d'Arakelov relative à ω_V^{-1} (cf. [5, proposition 3.3])

Par [5, proposition 6.2.15] et [5, proposition 5.5.3], les points de V sont équidistribués sur V si V est une variété de drapeaux généralisée ou si V est une intersection complète lisse de grande dimension.

2.2.2.4. *Expression en termes de la fonction zêta.* — On peut également affiner la question 2.2.12 de la manière suivante

Question 2.2.14. — *(cf.* [5], [**BT1**] *et* [**BT3**]*) Pour quelles variétés V vérifiant les hypothèses 1 existe-t-il* $\mathbf{H}$ *et U de sorte que la fonction*

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$$

s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant

$$\omega_V^{-1}+C_{\mathrm{eff}}(V)+i\operatorname{Pic}V\otimes\mathbf{R}$$

et prenne la valeur $\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)$ en ω_V^{-1} ?

2.2.3. *Montée aux torseurs universels.* — Dans [6], je montre comment ces diverses questions s'expriment de manière naturelle lorsqu'on les relève aux torseurs universels. La notion de torseur universel a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS1**] et [**CTS2**] en liaison avec le principe de Hasse et l'approximation faible. Dans le cas des intersections complètes lisses dans l'espace projectif, ils sont donnés par le cône au-dessus de la variété et, dans le cas des variétés toriques, par le spectre de l'anneau des coordonnées homogènes (cf. [**Sal**, §8]).

Leur rôle dans le problème qui nous intéresse apparaît de manière implicite dans le cas des intersections complètes lisses et de manière plus explicite dans les démonstrations de la formule (2.2.2.1) pour les variétés toriques étudiées dans [5], dans le travail de Robbiani [**Ro**] et dans le travail de Salberger et de Skorobogatov sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5. Plus récemment, Salberger a démontré dans [**Sal**] que la constante $\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)$ peut s'exprimer comme somme de nombres de Tamagawa pour les torseurs universels.

Mon but dans [6] a été en fait de généraliser les notions qui interviennent dans le cas des intersections complètes lisses dans l'espace projectif pour écrire les questions qui précèdent sous la forme de passage d'une somme sur les points rationnels des torseurs universels à l'intégrale sur l'espace adélique associé.

Définitions 2.2.5. — Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E et $\pi : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat et $\mu : G\times X \to X$ une action de G sur X compatible avec π, alors X est un *G-torseur* ou *espace principal homogène sous G* au-dessus de Y si et seulement si l'application $(g,x)\mapsto(gx,x)$ est un isomorphisme de $G\times_E X$ sur $X\times_Y X$.

Si T est un tore sur E, c'est à dire une E-forme de $\mathbf{G}_m^n$, de groupe des caractères $X^*(T)$ sur E^s, alors à tout torseur $\mathcal{T}$ sous T au-dessus d'une variété propre, lisse et géométriquement intègre X, on associe

$$\rho(\mathcal{T})\in\operatorname{Hom}_{\mathrm{Gal}(E^s/E)}(X^*(T),\operatorname{Pic}X_{E^s})$$

qui envoie un caractère ξ de T sur la classe du $\mathbf{G}_m$-torseur $\xi_*(\mathcal{T})$ dans $\operatorname{Pic}X_{E^s}$.

Un *torseur universel* pour une variété propre, lisse et géométriquement intègre X dont le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic} X_{E_s}$, est discret et sans torsion est un torseur $\mathcal{T}$ sous le tore T_{NS}, caractérisé par $X^*(T_{\mathrm{NS}}) = \mathrm{Pic} X_{E^s}$, tel que $\rho(\mathcal{T})$ soit le morphisme identité.

Notation 2.2.9. — On note $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(V)) \subset C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône défini par

$$\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(V)) = \{ x \in \mathrm{Pic}\, V \otimes \mathbf{R} \mid \forall y \in C_{\mathrm{eff}}(V)^{\vee},\ \langle x, y \rangle > 1 \}.$$

Hypothèses 2. — Dans la suite on supposera en outre que

(i) le faisceau anticanonique ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(V))$,

(ii) le cône $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est un cône polyédrique rationnel de $\mathrm{Pic}\,\overline{V} \otimes \mathbf{R}$,

(iii) le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur de fibré ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide U de V,

(iv) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, c'est-à-dire que si $\mathcal{T}$ est un tel torseur alors

$$\prod_{v \in M_k} \mathcal{T}(k_v) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{T}(k) \neq \varnothing$$

et, pour tout ensemble fini S de places, $\mathcal{T}(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} \mathcal{T}(k_v)$.

Notations 2.2.10. — Soit K une extension finie de k telle que $\mathrm{Pic}\, V_K$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$. On fixe un système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K. Si L est un fibré en droites et $(L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ un représentant de $\mathbf{H}_K([L])$, on a une métrique adélique définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_k,\ \forall x \in V(k_{\mathfrak{p}}),\ \forall y \in L(x),\ \|y\|_{\mathfrak{p}} = (\prod_{\mathfrak{P} | \mathfrak{p}} \|y\|_{\mathfrak{P}})^{1/[K:k]}.$$

On obtient un système de hauteurs pour V appelé *système induit.*

Si $\mathcal{T}$ est un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel y_0, alors pour tout fibré en droites L, sa classe définit un morphisme $\mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}\,\overline{V}$ envoyant 1 sur $[L]$, ce qui induit une surjection $\phi_L : T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$ et le $\mathbf{G}_m$-torseur $\phi_{L*}(\mathcal{T})$ est isomorphe au $\mathbf{G}_m$-torseur obtenu en ôtant à L la section nulle, d'où un morphisme $\psi_L : \mathcal{T} \to L^{\times}$ compatible avec ϕ_L. On fixe une place $\mathfrak{P}_0$ de K. On définit alors $\|.\|_{\mathfrak{P}}^L : \mathcal{T}(K_{\mathfrak{P}}) \to \mathbf{R}_{>0}$ par

$$\forall y \in \mathcal{T}(K_{\mathfrak{P}}),\ \|y\|_{\mathfrak{P}}^L = \begin{cases} \|\psi_L(y)\|_{\mathfrak{P}} / \|\psi_L(y_0)\|_{\mathfrak{P}} & \text{si } \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_0 \\ \|\psi_L(y)\|_{\mathfrak{P}} / \|\psi_L(y_0)\|_{\mathfrak{P}}\, \mathbf{H}_K(L, \pi(y_0))^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $(L, (||.||_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ représente $H_K([L])$.

Pour toute place $\mathfrak{P}$ de K on pose alors

$$\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) = \{y \in \mathcal{T}(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall L \in C_{\text{eff}}(V_{K_{\mathfrak{P}}}),\ ||y||_{\mathfrak{P}}^{L} \geqslant 1\}$$

et si $\mathfrak{p}$ est une place de k

$$\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}) = \mathcal{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}).$$

Définition 2.2.11. — Le produit restreint de $\mathcal{T}(k_{\mathfrak{p}})$ relativement aux $\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$ est indépendant des choix effectués (cf. [6, corollaire 4.2.3]), on l'appelle *espace adélique associé à* $\mathcal{T}$ *et à* $C_{\text{eff}}(\overline{V})$ et on le note $\mathcal{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$.

Nous allons maintenant munir cet espace de type adélique d'une mesure canonique.

Notations 2.2.12. — Soient T un tore, de groupe des caractères $X^*(T)$ et $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant \dim T}$ un base de $X^*(T)$. Alors la forme différentielle

$$\omega_T = \bigwedge_{i=1}^{\dim T} \xi_i^{-1} d\xi_i$$

est indépendante, au signe près, du choix de la base et est définie sur le corps de base.

Comme dans [**We**], ω_T définit pour toute place v de k une mesure $\boldsymbol{\omega}_{T,v}$ sur $T(k_v)$.

Si $\mathcal{T}$ est un torseur universel au-dessus de V et x un point de $V(k_v)$ au-dessus duquel $\mathcal{T}$ a un point rationnel y_0 sur k_v, on définit la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}$ par la relation

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y) = \int_{T_{\text{NS}}(k_v)} f(r.y_0)||r.y_0||_v^{\omega_V}\,\boldsymbol{\omega}_{T_{\text{NS}},v}(r).$$

La mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ sur $\mathcal{T}(k_v)$ est alors définie par

$$\int_{\mathcal{T}(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y) = \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y)$$

où $\mathbf{h}$ est un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V^{-1}])$.

Proposition 2.2.15 **([6, proposition 4.4.2 et lemme 4.4.3])**

Le produit des mesures $\prod_{v\in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ *converge sur* $\mathcal{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ *et définit une mesure canonique sur cet espace adélique.*

Nous aurons également besoin des fonctions L associées par Draxl à un cône de caractères d'un tore [**Dr**].

Définitions 2.2.6. — Si T est un tore sur k et C un cône polyédrique rationnel de $X^*(T)$, k' une extension finie de k déployant T et $\mathfrak{P}$ une place de k', alors

$$T(C, \mathcal{O}_{K_\mathfrak{P}}) = \{ r \in T(K_\mathfrak{P}) \mid \forall \xi \in C \cap X^*(T), \xi(r) \in \mathcal{O}_{K_\mathfrak{P}} \}$$

et si $\mathfrak{p}|\mathfrak{P}$,

$$T(C, \mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}) = T(C, \mathcal{O}_{K_\mathfrak{P}}) \cap T(k_\mathfrak{p}).$$

Pour toute place v de k, on note $\mathscr{G}_v$ le stabilisateur de v dans $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ et $X^*(T)_v$ le groupe $X^*(T)^{\mathscr{G}_v}$. On dispose alors d'un morphisme

$$\log_v : T(k_v) \to X^*(T)_v^\vee \otimes \mathbf{R}$$

qui à $r \in T(k_v)$ associe $\chi \mapsto \log|\chi(r)|_v / \log q_v$ où q_v vaut $\#\mathbf{F}_v$ si v est finie, e si $k_v = \mathbf{R}$ et e^2 sinon.

Le terme local de la fonction L associée à C est alors défini pour tout s appartenant à $C + iX^*(T) \otimes \mathbf{R}$ par

$$L_v(s, T, C) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_{T,v}(T(\mathcal{O}_{k_v}))} \int_{T(C, \mathcal{O}_{k_v})} \exp(\langle s, \log_v r \rangle) \boldsymbol{\omega}_{T,v}(r)$$

et pour tout ensemble fini de places S la fonction globale correspondante est donnée par

$$L_S(s, T, C) = \prod_{v \in M_k - S} L_v(s, T, C).$$

Draxl a montré dans [**Dr**, proposition 3] que ce produit eulérien converge sur

$$\mathscr{D}(C) = \{ x \in C \mid \forall y \in C^\vee, \langle x, y \rangle > 1 \}.$$

Notation 2.2.13. — Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de représentants des classes d'isomorphisme de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Par [**CTS1**, proposition 2], cette famille est finie.

Théorème 2.2.16. — *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses 1 et 2, il existe des fonctions*

$$\phi_{\mathcal{T}_i}^{\mathbf{H}} : \mathrm{Pic}\, V \otimes \mathbf{C} \times \mathcal{T}_i(k_v) \to \mathbf{C}$$

telles que

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s) L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{i \in I} \sum_{y \in \mathcal{T}_i(k)} \phi_{\mathcal{T}_i}^{\mathbf{H}}(s, y)$$

et

$$\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})L_S(\omega_V^{-1}, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{i\in I}\int_{\mathcal{T}_i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(A_k)} \phi_{\mathcal{T}_i}^{\mathbf{H}}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y)$$

La question 2.2.14 se ramène donc a l'étude de différences de la forme

$$\sum_{y\in\mathcal{T}(k)} \phi_{\mathcal{T}}^{\mathbf{H}}(s,y) - \int_{\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(A_k)} \phi_{\mathcal{T}}^{\mathbf{H}}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y)$$

pour chaque torseur universel $\mathcal{T}$ au-dessus de V. Il est également possible de remonter la question 2.2.12 aux torseurs universels pour la ramener à l'étude de différences analogues.

2.2.4. *Passage à l'espace affine.* — Les familles de variétés pour lesquelles on a pu répondre à la question 2.2.12 peuvent être essentiellement regroupées en deux groupes distincts d'une part les intersections complètes lisses dans l'espace projectif pour lesquelles on dispose de la méthode du cercle et d'autre part les variétés munies d'une action d'un groupe algébrique avec une orbite ouverte auxquelles on applique des techniques d'analyse harmonique fine. En dehors de ces deux cas, on ne dispose pas de méthode générale. Toutefois Salberger a obteu en utilisant les torseurs universels une majoration de la forme souhaitée pour la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur le plan projectif, surface qui ne rentre dans aucun des deux grands groupes précédents.

On peut alors se demander si d'autres aspects de la méthode du cercle, en dehors de ceux évoqués au paragraphe précédent, se généralisent également. Dans cette dernière section nous allons donner quelques éléments de réponse à cette question.

2.2.4.1. *Plongement des torseurs universels dans un espace affine.* — Si V est une compactification équivariante lisse d'un tore T sur k, alors les torseurs universels sont isomorphes en tant que variété au spectre de l'anneau des coordonnées homogènes (cf. [**Del**], [**Oda**] et [**Sal**]) qui est un ouvert de l'espace affine.

Plus généralement, si V est une intersection complète lisse dans une telle compactification $\mathbf{P}_\Sigma$ d'un tore T sur k telle que $\mathrm{Pic}\,\overline{\mathbf{P}_\Sigma}$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et ω_V^{-1} soit à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, alors les torseurs universels sont donnés comme image inverse de la variété dans la spectre $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ de l'anneau des coordonnées homogènes.

Dans le cas général, on peut construire un plongement de $\mathcal{T}$ dans un espace affine ayant des propriétés similaires à celui de l'exemple précédent. Pour cela

on fixe une famille génératrice $([L_j])_{j\in J}$ de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ donnée par des éléments de $\operatorname{Pic}\overline{V}$ et qui soit invariante sous l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ et on note $\mathscr{M}(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base J. C'est, par définition, un module de permutation et on a un épimorphisme naturel

$$p : \mathscr{M}(\overline{V}) \twoheadrightarrow \operatorname{Pic}\overline{V}.$$

Le fibré vectoriel $\overline{E} = \sum_{j\in J} L_j^{\vee}$ provient d'un unique fibré E sur V et le produit $\times_{V\, j\in J} L_j^{\times}$ provient de l'unique torseur R sous le tore $T(\mathscr{M}(\overline{V}))$ au-dessus de V dont l'invariant $\rho(\mathrm{R})$ est p.

Le morphisme p induit en outre une injection

$$j : T_{\mathrm{NS}} \to T(\mathscr{M}(\overline{V}))$$

et on obtient un morphisme

$$\tilde{j} : \mathcal{T} \to \mathrm{R} \subset E$$

tel que

$$\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap E(\boldsymbol{A}_k).$$

Considérons alors l'espace vectoriel

$$A = \left(\sum_{j\in J} \Gamma(\overline{V}, L_j)^{\vee}\right)^{\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

On a un morphisme naturel d'évaluation

$$\mathrm{ev} : E \to A.$$

Quitte à augmenter la famille $([L_j])_{j\in J}$, on peut supposer que cela définit un plongement de $\mathcal{T}$ dans A. En outre l'action de T_{NS} sur $\mathcal{T}$ s'étend en une action sur A.

Toutefois, il y a une différence entre $\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et

$$\prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k).$$

Cependant pour tout point x de $V(k_v)$, il existe une famille finie $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant M}$ d'éléments de $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ telle que

$$A(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v) = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant M} b_i.\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v).$$

D'autre part, la différence entre $A(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v)$ et $\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v)$ est d'autant plus grande que le point x est proche des points bases des diviseurs L_i, qui dans divers exemples coïncident avec les sous-variétés accumulatrices. Il serait intéressant d'étudier ce lien de manière plus systématique.

Notons que ce plongement de $\mathcal{T}$ dans A est associé à un plongement de V dans une variété torique, à savoir le quotient de l'ouvert des points semi-simples de A sous l'action de T_{NS} par ce tore.

2.2.4.2. *Intersections complètes dans une variété torique.* — Plaçons-nous dans le cas particulier ci-dessus, à savoir une intersection complète lisse dans une variété torique $\mathbf{P}_\Sigma$ avec $\operatorname{Pic}\overline{\mathbf{P}_\Sigma} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}\overline{V}$. Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel au-dessus de V contenant un point rationnel. Comme précédemment, on note $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ le spectre de l'anneau des coordonnées homogènes qui est un ouvert d'un espace affine A sur lequel T_{NS} agit et on a un plongement j de $\mathcal{T}$ dans A qui est compatible avec l'action de T_{NS}.

Si, en outre, $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ coïncide par l'isomorphisme ci-dessus avec $C_{\mathrm{eff}}(\overline{\mathbf{P}_\Sigma})$ on a également la relation

$$\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v \in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap \widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k).$$

L'idée est donc de se ramener à $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$, qui jouera le rôle de l'espace affine du cas des intersections dans l'espace projectif.

Soient $f_1, \dots, f_m$ des polynômes sur A tels qu'il existe des caractères $\xi_1, \dots, \xi_m$ de T_{NS} de sorte que

$$\forall x \in A \otimes \overline{k},\ \forall t \in T_{\mathrm{NS}}(\overline{k}), f_i(tx) = \xi_i(t) f_i(x)$$

et tels que $\mathcal{T}$ soit l'intersection complète dans $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ des hypersurfaces définies par les équations $f_1, \dots, f_m$.

Par hypothèse, $\operatorname{Pic}\overline{V} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}\overline{\mathbf{P}_\Sigma}$ et on suppose que le système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ s'étend à $\mathbf{P}_\Sigma$, c'est à dire qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Pic}\overline{\mathbf{P}_\Sigma} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Pic}\overline{V} \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{H}}_K} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{H}_K} \\
\mathscr{H}((\mathbf{P}_\Sigma)_K) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathscr{H}(V_K).
\end{array}$$

Si, comme cela est vraisemblable, l'application Res est surjective, on peut toujours étendre $\mathbf{H}_K$. On dispose alors des fonctions $\phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s,y)$ et $\phi^{\tilde{\mathbf{H}}}_{\widetilde{P_\Sigma}}(s,y)$ dont on vérifie qu'il étend la précedente.

On fixe un caractère non-trivial $\chi : \boldsymbol{A}_k/k \to \mathbf{S}^1$. On a alors des dualités

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}_k/k \times k & \to & \mathbf{S}^1 \\ (x,y) & \mapsto & e(\langle x,y\rangle) := \chi(xy) \end{array} \qquad \text{et } (\boldsymbol{A}_k/k)^m \times k^m \to \mathbf{S}^1$$

On note $d\xi$ la mesure auto-duale sur $\boldsymbol{A}_k{}^m$.

De manière formelle une double transformation de Fourier donne la formule

$$\sum_{y\in\mathcal{T}(k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y) = \int_{\boldsymbol{A}_k{}^m/k^m} \sum_{x\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \phi^{\tilde{\mathbf{H}}}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(s,x)e(\langle \xi, \boldsymbol{f}(x)\rangle)d\xi \tag{2.2.4.1}$$

Toutefois la série intérieure ne converge pas absolument au voisinage de ω_V^{-1}. Une solution pourrait être d'utiliser des fonctions du type

$$\lambda(s,y,\xi,\varepsilon) = \phi^{\tilde{\mathbf{H}}}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(s,x)e(\langle \xi, \boldsymbol{f}(x)\rangle) \prod_{v\in S} e(-\langle \varepsilon_v, (|f_i(x)|_v)_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle)$$

où pour tout $v\in S$, $\varepsilon_v \in \mathbf{R}^m_{>0}$.

Quant à l'analogue intégral, en s'inspirant du travail d'Igusa, on peut espérer une formule du type suivant (cf. [**Pat**, page 5])

$$\int_{\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y) = \int_{\boldsymbol{A}_k{}^m} \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon)\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(y)d\xi. \tag{2.2.4.2}$$

Dans un premier temps, mon intention est d'étudier le domaine de validité des formules (2.2.4.1) et (2.2.4.2). Dans un deuxième temps il faudrait comparer

$$\int_{\boldsymbol{A}_k{}^m/k^m} \sum_{x\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon)d\xi$$

à

$$\int_{\boldsymbol{A}_k{}^m} \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon)\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(y)d\xi.$$

Pour cela il faut se donner $M(\varepsilon,s) \subset \boldsymbol{A}_k{}^m$, analogue des arcs majeurs et $m(\varepsilon,s)$ son complémentaire, analogue des arcs mineurs, de sorte que $M(\varepsilon,s) \to \boldsymbol{A}_k{}^m/k^m$, puis majorer sur $m(\varepsilon,s)$ à la fois la somme et l'intégrale et sur $M(\varepsilon,s)$ la différence

$$\sum_{y\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon) - \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon). \tag{2.2.4.3}$$

De telles majorations, qui constituent dans le cas des intersections complètes dans l'espace projectif, le cœur même de la méthode du cercle, devront tout d'abord être recherchées dans des cas simples, comme celui des hypersurfaces dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$, cas sur lequel travaillent déjà Salberger et Robbiani, les éclatés de points dans des hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$, etc...

Notons enfin que l'étude de majorations de différences du style de (2.2.4.3) apparaissent déjà dans le cas des variétés toriques. Il est donc envisageable que les techniques introduites par Batyrev et Tschinkel puissent aussi jouer un rôle dans ce cadre plus général.

Références

[Am] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Ara] J. K. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.

[AM] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1972), 75–95.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ______, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[BCTSSD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, et P. Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), 283–318.

[BO] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–202.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[Ca] G. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.

[CG] C. H. Clemens and P. A. Griffiths, *The intermediate jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTP] J.-L. Colliot-Thélène and R. Parimala, *Real components of algebraic varieties and étale cohomology*, Invent. Math. **101** (1990), 81–99.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathscr{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n$^{\circ}$ 2, 375–492.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n$^{\circ}$ 3, 315–339.

[EGA] J. A. Dieudonné et A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1971.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[JR] B. Jacob and M. Rost, *Degree four cohomological invariants for quadratic forms*, Invent. Math. **96** (1989), 551–570.

[Kah1] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kah2] ———, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 395–416.

[KRS] B. Kahn, M. Rost, and R. Sujatha, *Unramified cohomology of quadrics*, preprint (1996).

[Kar] N. A. Karpenko, *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*, Algebra i analiz **2** (1990), n$^{\circ}$ 1, 141–162 ; English transl. in Leningrad Math. J. **2** (1991), n$^{\circ}$ 1, 119–138.

[Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im* $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.

[Lü] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Ann. **9** (1875), 163–165.

[Me] A. S. Merkur′ev, *The group* $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ *for projective homogeneous varieties*, Algebra i Analiz **7** (1995), 136–164 ; English transl. in St Petersburg Math. J. **7** (1996), 421–444.

[Oda] T. Oda, *Recent topics on toric varieties*, Selected papers on number theory and algebraic geometry (K. Nomizu, ed.), Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 172, AMS, Providence, 1996, pp. 77–91.

[Pa] I. A. Panin, *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties*, K-theory **8** (1994), n^o 6, 541–585.

[Pat] S. J. Patterson, *The Hardy-Littlewood method and Diophantine analysis in the light of Igusa's work*, Mathematica Gottingensis, Schriftenreihe des Sonderforschungsbereichs Geometrie und Analysis 11, Mathematisches Institut, Göttingen, 1985.

[Ro] M. Robbiani, *Rational points of bounded height on Del Pezzo surfaces of degree six*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 403–422.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sa1] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Sa2] ______, *Brauer groups of invariant fields, geometrically negligible classes, an equivariant Chow group, and unramified* H^3, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 189–246.

[Seg] B. Segre, *Sull'existenza, sia nel campo razionale che nel campo reale di involuzioni piane non birazionali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Sc. Fis. mat. e nat. **10** (1951), 94–97.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

[Za] O. Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = p_2 = 0$ *of an algebraic surface*, Illinois J. of Math. **2** (1958), 303–315.

15 février 2024

EMMANUEL PEYRE, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France
E-mail : peyre@math.u-strasbg.fr

Glossaire

$\mathscr{O}_k$ (anneau des entiers) 4
$\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$ (Morphisme de Frobenius) 4
$\|\cdot\|_w$ 506
$\mathscr{H}(V)$ 510
$\widehat{\deg}(E)$ 511
h_L 512
H_L 512
$\mathrm{Br}(V)$: Brauer group of V. 569
$\mathrm{NS}(V)$: Néron-Severi group 573
$\mathscr{H}(V)$: Arakelov heights. 579
X^s : Extension of scalars to the separable closure 583
$X^*(H_s)$: Group of characters 583
$\mathscr{P}(E)$: Newton polygon 602

Index

Table des matières