Variations de structures de Hodge, Variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

José Bertin, Chris Peters
Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

Sommaire

0. Introduction

L'objet de ces notes est de proposer une introduction assez détaillée à la partie la plus élémentaire de la théorie des variations de structures de Hodge avec des indications brèves sur les développements les plus récents. Pour motiver et illustrer cette étude, il nous a semblé pertinent d'exposer les grandes lignes d'un chapitre excitant et nouveau de géométrie algébrique : les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir, en mettant surtout l'accent sur les questions qui véritablement relèvent des structures de Hodge et leurs variations. Cette théorie issue des réflexions d'un groupe de physiciens, conduit entre autre choses à des prédictions remarquables sur le nombre de courbes rationnelles, et même de tout genre, tracées sur une classe de variétés de dimension trois.

Le texte s'adresse en priorité à des étudiants, ou mathématiciens non spécialistes, mais qui cependant ont une certaine familiarité avec les techniques usuelles de la géométrie algébrique ou analytique complexe. Cela est particulièrement clair dans le premier chapitre où le cadre retenu, assez général, est alternativement celui des schémas et des variétés analytiques. Le langage de base utilisé pour formuler et prouver les résultats est naturellement celui de l'algèbre homologique, à partir des notions de cohomologie et d'hypercohomologie des faisceaux. Le lecteur trouvera dans le texte ci-joint d'Illusie [Ill] un exposé succinct mais largement suffisant. Il doit être signalé au lecteur que plusieurs excellents textes existent dans la littérature qui proposent une introduction à un aspect ou à un autre de la théorie des variations de structure de Hodge, citons par exemple les plus classiques [Co-G], [G-S], [P-S] et, plus récemment [B-Z], avec tout naturellement l'article fondamental de Schmid [S]. Nous espérons cependant que parallèlement à ces textes, nos notes pourront à l'occasion rendre quelques services. Sur le thème de la seconde partie, beaucoup de textes traitant du sujet, écrits dans le "style de la physique" sont d'un accès malaisé pour un mathématicien. On peut souhaiter de même que nos notes apportent un complément utile aux textes récents de M. Kontsevich [K1], [K2], D. Morrison [Mor 1] et C. Voisin [V] qui traitent aussi des aspects mathématiques du sujet.

Le texte est divisé en deux parties non indépendantes. La partie I consacrée aux développements généraux sur les variations de Structures de Hodge (chapitre 1 à 6) et la partie II qui poursuit sur les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir. Pour aider le lecteur nous avons fait débuter chaque chapitre par un court résumé. Situons maintenant le contenu de ces notes dans leur contexte. Les variations de structures de Hodge apparaissent naturellement lorsque, au lieu d'avoir une variété algébrique, par exemple donnée par une équation homogène (hypersurface) $\{f = 0\}$, on considère une famille de variétés algébriques, par exemple lorsque l'équation dépend de paramètres (variables additionnelles). Précisément, dans ces notes, une *famille* sera une application holomorphe $f : X \to S$ telle que $X \subset \mathbb{P}^n \times S$ et f, la restriction à X de la projection sur S, étant partout de rang maximal. Les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont des variétés projectives lisses, et on sait par le texte ci-joint de Demailly [Dem] que chaque espace vectoriel $H^w(X_s, \mathbb{C})$ porte une structure de Hodge de poids w, c'est le résultat fondamental de la théorie de Hodge. On sait aussi (loc. cit.§10) que $H^w(X_s, \mathbb{C})$ est la fibre d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{H}$ sur S ; il est donc naturel et fondamental d'étudier le comportement de la structure de Hodge définie sur $H^w(X_s, \mathbb{C})$, lorsque $s \in S$ varie, c'est-à-dire globalement sur S. D'une autre manière, si on pense à la classe $[\omega(s)]$ d'une forme différentielle fermée $\omega(s)$ comme dépendant du paramètre s, et si γ est un cycle de dimension (réelle) w dans une fibre X_{s_0}, qu'on peut voir comme un cycle sur toute fibre voisine X_s de X_{s_0} du fait de la trivialité locale topologique de la famille, il est alors possible de considérer la période de ω, c'est-à-dire la fonction $\int_\gamma \omega$. Pour étudier la variation des périodes par rapport à s, il est nécessaire de dériver : $\frac{d}{ds}\left(\int_\gamma \omega\right)$. Le cycle étant fixé, on veut dériver sous le signe somme. Cela sera justifié par l'existence d'une connexion, la connexion de Gauss-Manin qui conduira à la règle de dérivation :

$$d/ds \int_\gamma \omega(s) = \int_\gamma \nabla_{\frac{d}{ds}} \omega(s)$$

$\nabla_{\frac{d}{ds}}$ étant la dérivée covariante dans la direction de $\frac{d}{ds}$.

Dans le §10 de [Dem], il est prouvé aussi que le fibré $\mathcal{H}^w$ est le fibré associé au système localement constant $\bigcup_{s\in S} H^w(X_s, \mathbb{C})$, il est donc plat ; la connexion plate résultante est la *connexion de Gauss-Manin.* De plus, si au lieu des sous-espaces $H^{p,q}(X_s)$, on considère les sous-espaces $F^pH^w(S_s, \mathbb{C}) = \oplus_{r\geqslant p} H^{r,w-r}(X_s)$ de la filtration de Hodge, alors ces sous-espaces sont les fibres d'un sous-fibré holomorphe $\mathcal{F}^p$ de $\mathcal{H}^w$, définissant la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{H}^w$. Le fibré $\mathcal{H}^w$ équipé de cette *filtration de Hodge* et de la connexion de Gauss-Manin est l'exemple fondamental d'une *variation de structures de Hodge*, notion introduite par Griffiths dans [Grif1].

Ainsi, dans le paragraphe 1 nous donnons la construction détaillée des fibrés de Hodge, comme conséquence de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham (voir le texte ci-joint d'Illusie) dans le cadre général des variétés algébriques non nécessairement complexes.

Dans le §2 nous construisons la connexion de Gauss-Manin et nous prouvons la propriété de transversalité. L'exposition de ce paragraphe est assez détaillée car le théorème de transversalité de Griffiths est le point de départ central de toute la théorie, comme on pourra s'en convaincre en parcourant la seconde partie. Les manipulations sur les complexes de De Rham et leurs résolutions sont en fait proches de ce qui est fait dans [Ill]. Nous prouvons aussi que la connexion de Gauss-Manin est algébrique, suivant en cela les calculs de Katz et Oda [K-O]. C'est cet aspect qui est devenu extrêmement important dans les développements récents (§6).

Dans le §3, on introduit les *domaines de périodes de Griffiths* qui sont des espaces de paramètres pour les structures de Hodge polarisées de poids et nombres de Hodge fixés. Si $f : X \to S$ est une famille, on définit, quitte à se restreindre à la cohomologie primitive, l'application des périodes $p : S \to D$ (si S n'est pas simplement connexe il faut remplacer S par son revêtement universel) ; on traduit dans ce cadre la propriété de tranversalité. L'étude de la différentielle de l'application des périodes conduit naturellement à la notion de *Variation Infinitésimale de Structures de Hodge* introduite dans [C-G-G-H] et traitée à la fin du §3. Cette notion est nécessaire pour justifier certains points fondamentaux du chapitre II.

Revenons à la situation considérée au début, celle d'une famille de variétés paramétrée par une base compacte. Dans cette situation on ne pourra éviter la présence de fibres singulières ; il est donc naturel d'étudier le comportement de la variation autour du lieu des fibres singulières. Pour simplifier on suppose que la base est le disque unité Δ, que $f : X \to \Delta$ est de rang maximal au dessus des points de $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. On dit que f est une *dégénérescence à un paramètre*. Tourner une fois autour de 0 induit l'action de *monodromie locale* $T : H^w(X_s) \to H^w(X_s)$, $s \in \Delta$. Cette action préserve la structure entière, la polarisation et la filtration de Hodge. Le théorème de la monodromie locale de [La] et [S] dit que T est quasi-unipotente, c'est-à-dire, pour $k, m \in \mathbb{N}$ convenables, $(T^k - \mathbb{1})^m = 0$. Un autre résultat important est le théorème local des cycles invariants de [Cl] qui dit qu'une classe $\alpha \in H^w(X_s)$ est T-invariante si et seulement si α est la restriction à X_s d'une classe définie sur X tout entier. La démonstration de ce théorème nécessite la construction d'une filtration de Hodge sur $H^w(X_s)$ différente de la filtration classique et qui est mieux adaptée au passage à la limite quand s tend vers zéro, la *filtration de Hodge limite*. L'opérateur de monodromie T, lui aussi induit une filtration, celle des poids, et jointe à la filtration limite on obtient une structure plus compliquée appelée : *structure de Hodge mixte* sur $H^w(X_s)$, ou encore la *structure limite*. Dans le §4 nous exposerons brièvement la notion de structure de Hodge mixte et les résultats fondamentaux de Deligne [Del4] et [Del5] sur l'existence d'une telle structure sur les variétés algébriques qui ne sont pas nécessairement compactes ni lisses. Ensuite nous donnerons une description de la structure limite en résumant quelques résultats importants qui se trouvent dans les articles [S] et [Cl]. Le §4 se termine par une description des faisceaux des cycles proches et évanescents qui est essentielle pour comprendre le travail de Saito [Sa1] sur les modules de Hodge, travail très partiellement esquissé dans le §6.

Dans le §5 nous résumons quelques résultats récents de Simpson sur les *fibrés de Higgs*, qui forment dans un certain sens une généralisation des variations de structures de Hodge et qui lui ont permis d'obtenir des conséquences surprenantes concernant les groupes *kählériens*, c'est-à-dire les groupes qui peuvent apparaître comme les groupes fondamentaux d'une variété kählérienne compacte.

La notion compliquée de *module de Hodge* joue un rôle central dans les développements récents de la théorie de Hodge. Elle nécessite l'introduction des $\mathcal{D}$-modules, faisceaux pervers et une compréhension de la correspondance de Riemann-Hilbert, qui décrit le lien entre ces deux notions. Dans le §6 nous décrivons brièvement ces notions ainsi qu'une application importante à la cohomologie d'intersection, introduite par Goresky et MacPherson dans [G-M] : le groupe de cohomologie d'intersection $IH^w(X)$ d'une variété algébrique complexe X porte une structure de Hodge pure de poids w.

Décrivons le contenu de la partie II. Comme dit au début, il y a peu de temps que les physiciens travaillant en physique quantique ont mis en évidence un nouveau phénomène de dualité. Les conséquences mathématiques, encore largement au stade des spéculations, sont fascinantes. Les exposés [F-G] et [G] décrivent en détail dans le langage de la physique ce cercle d'idées. Parmi les diverses manifestations de dualité, la symétrie miroir a attiré l'attention des géomètres algébristes, principalement à la suite du travail d'un groupe de physiciens [C-O-G-P], traduit partiellement en langage mathématique par D. Morrison [Mor1]. Le cadre de cette symétrie est celui *des variétés de Calabi-Yau* (§7). Une conséquence naïve (vérifiée par l'observation) est que ces variétés sont distribuées par paires, une paire étant formée de la variété miroir de l'autre, et que le tableau des nombres de Hodge de l'une se déduit du tableau de l'autre par une rotation d'un quart de tour. La symétrie prédit naturellement beaucoup plus, par exemple que les nombres de courbes rationnelles de "degré" fixé sur l'une est déductible d'informations fournies par la variation de la structure complexe de l'autre. Pour mettre en forme partiellement cette assertion, on étudie le comportement des périodes des 3-formes holomorphes lorsque la structure complexe varie. On détermine l'équation différentielle naturelle satisfaite par ses périodes, qui est *l'équation de Picard-Fuchs*. Cet aspect est traité en détail, avec au préalable la description donnée par Griffiths de la cohomologie d'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$. Les détails sont dans le §8, et suivent en partie l'exposé de [C-G]. Les calculs sont détaillés car c'est essentiellement ici qu'on peut tout calculer. Notons que le contexte géométrique (différentiel) a été formalisé par les physiciens sous le nom de "géométrie spéciale" [Str].

Dans les §9 et 10, on traite l'exemple célèbre depuis [C-O-G-P] de l'hypersurface quintique de $\mathbb{P}^4$ et de sa variété miroir. Les méthodes de la partie I interviennent lors de la discussion de l'accouplement de Yukawa. Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau de dimension 3, soit $\omega(s)$ une 3-forme holomorphe relative ($s \in \Delta$) et soit enfin $\nabla_{\frac{d}{ds}} : \mathcal{H}^3 \to \mathcal{H}^3$ la dérivée covariante induite par la connexion de Gauss-Manin. Il résulte de la propriété de transversalité que $\nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$ est une somme de termes de type $(3,0)$ et $(2,1)$ et donc $\int_{X_s}\omega(s)\wedge\nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s) = 0 = \int_{X_s}\omega(s)\wedge\nabla^2_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$. Par contre reste la fonction non-nulle :

$$\kappa_{sss} = \int_{X_s}\omega(s)\wedge\nabla^3_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$$

qui est *l'accouplement de Yukawa*.

Cette fonction satisfait à une équation différentielle liée à l'équation de Picard-Fuchs. L'analyse cruciale ici est celle du comportement de κ_{sss} lorsque s tend vers zéro. On verra pour justifier l'existence d'un paramètre canonique qu'il est nécessaire de s'appuyer sur l'existence d'une structure de Hodge limite, argument essentiellement dû à Morrison [Mor1]. Le paramètre canonique auquel on vient de faire allusion est de la forme $q = \exp(2\pi i\tau)$ où τ est le quotient de deux périodes convenables. Cela étant fait, on peut définir le q-développement de κ_{sss} pour $s \to 0$ et observer que ce développement fait apparaître des coefficients *entiers positifs*, qui selon le principe de symétrie conduisent aux nombres de courbes rationnelles de degré donné sur l'hypersurface quintique, nombres inabordables par la géométrie algébrique sauf en degré petit. Cet exemple montre clairement qu'en liaison avec le phénomène de symétrie miroir se posent à côté de nombreuses questions géométriques, et de très intéressants problèmes arithmétiques. Ces questions sont esquissées dans [L-Y].

Dans le paragraphe final (§11) nous discuterons, selon une idée de Deligne [Del6], une approche possible de la symétrie miroir en termes d'une dualité entre certaines variations de structures de Hodge.

Terminons cette introduction en donnant quelques indications bibliographiques qui peuvent aider le lecteur à pénétrer ce vaste domaine.

- L'article [Grif3] peut être considéré comme le premier article de synthèse. Il contient beaucoup d'exemples et des calculs concrets ; les problèmes énoncés dans cet article ont inspiré beaucoup de monde et bien que maintenant partiellement résolus, il reste encore "des choses à faire".
- Ensuite dans [G-S] on trouve entre autre une introduction relativement élémentaire à la théorie de Hodge mixte appliquée aux questions de dégénérescences.
- L'article [P-S] explique comment on peut utiliser les variations infinitésimales pour résoudre certains cas du *problème de Torelli* : une variété est-elle déterminée (à isomorphisme près) par la structure de Hodge sur la cohomologie (entière) ? On trouve, là aussi, une introduction aux domaines de périodes et aux espaces des modules.
- La monographie [Grif4] est une très bonne introduction au sujet, elle contient des articles assez détaillés sur les variations de structures de Hodge (aussi sur les VSH infinitésimales). Y figure aussi une discussion des propriétés de la courbure de la métrique naturelle d'un domaine de périodes, résultat qui est utilisé dans le §4. On notera que l'article fondamental [S] de Schmid contient des paragraphes pouvant servir d'introduction efficace à certains aspects de la théorie de Griffiths.
- L'article [B-Z] se veut une synthèse des travaux récents sur la théorie de Hodge. On y trouvera plus de détails sur les matières des §4–6. Les progrès récents sur le problème de Torelli (voir ci-dessus) par contre ne sont pas traités du tout. Pour les $\mathcal{D}$-modules le lecteur consultera les articles dans [Bo] et pour la cohomologie d'intersection et la relation avec les $\mathcal{D}$-modules on lira le joli livre [Ki].
- Comme indiqué plus haut, l'article [V] peut servir comme introduction au problème de symétrie miroir. On trouve ici non seulement un traitement du coté mathématique mais aussi une brève introduction à l'origine "physique" de la conjecture. Voir aussi l'article [F-V] et les livres [H] et [Y2] pour des indications sur les aspects physiques. Signalons pour terminer la référence [B-C-O-V] dans la littérature physique, que le lecteur pourra consulter pour des perspectives exaltantes.

Nous voudrions remercier tous ceux qui nous ont aidé pour rendre cet exposé plus lisible ; en particulier Jim Carlson, Eduardo Cattani, Bernard Malgrange et Joseph Steenbrink.

Partie I. Variations de structures de Hodge

1. Fibrés de Hodge

On reprend dans ce paragraphe la définition algébrique (et analytique) des faisceaux de cohomologie de De Rham de l'exposé d'Illusie [Ill]. La filtration naïve sur le complexe des formes différentielles relatives donne lieu à la suite spectrale de Hodge vers De Rham et définit la filtration de Hodge sur l'aboutissement, la cohomologie relative. Dans le cas d'une famille de variétés analytiques complexes, projectives et lisses on obtient la filtration de Hodge [Dem] qui est une filtration par des sous-fibrés holomorphes du fibré de cohomologie relative. Le language utilisé est celui de l'hypercohomologie [Ill].

Fixons les notations utilisées dans la suite : un schéma est un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique nulle. On peut supposer $k = \mathbb{C}$ si on veut. Pour les incidences du choix de la caractéristique positive, nous renvoyons à [Ill]. Lorsque $k = \mathbb{C}$, on passera sans explications précises de la structure de schéma à la structure d'espace analytique associée. De la même manière, si X est un schéma lisse, on aura à considérer la structure de variété C^∞ sous-jacente sans avoir à le signaler avec précision.

Un faisceau sera un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules ou bien un faisceau abélien si on ne retient que la structure C^∞. La cohomologie, outil indispensable lorsqu'on a à manipuler des familles, est la cohomologie à coefficients dans un faisceau (voir le livre [God] par exemple).

Nous utiliserons aussi le langage de *l'hypercohomologie*. Soit $\Omega^\bullet$ un complexe (borné inférieurement) et $\Omega^\bullet \to I^\bullet$ une "résolution" injective (ou flasque), c'est-à-dire qui est un isomorphisme si on passe aux faisceaux de cohomologie, alors $H^\bullet(X, \Omega^\bullet)$ est par définition l'objet gradué $h^\bullet(\Gamma(X, I^\bullet))$; de même si $f : X \to S$ est une application continue, un morphisme de schémas, etc., $\mathbb{R}^\bullet f_*(\Omega^\bullet) = h^\bullet(f_*(I^\bullet))$ est l'objet gradué formé des images directes supérieures à coefficients dans le complexe $\Omega^\bullet$.

Considérons par exemple la cohomologie d'une variété C^∞, à coefficients constants $\mathbb{C}$. C'est par définition $H^i(X, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ = faisceau constant. Le complexe de De Rham $\mathcal{A}_X^\bullet$ des formes différentielles C^∞ à coefficients complexes est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ (*lemme de Poincaré*), donc le fait classique :

$$H^i(X, \mathbb{C}) = H^i(X, \mathcal{A}_X^\bullet) = h^i(\Gamma(X, \mathcal{A}_X^\bullet)).$$

Si X est une variété analytique complexe, le faisceau Ω_X^p étant le faisceau des p-formes holomorphes, le complexe de De Rham holomorphe $\Omega_X^\bullet$ est une résolution de $\mathbb{C}$ (*lemme de Poincaré holomorphe*), d'où :

$$H^i(X, \mathbb{C}) = H^i(X, \Omega_X^\bullet) \qquad \text{(hypercohomologie).}$$

Si maintenant X est un schéma, supposé lisse (non singulier), on peut considérer le complexe $\Omega_{X/k}^\bullet$ des formes différentielles algébriques (de Kähler). Les espaces vectoriels $H^i(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$ sont par définition, la cohomologie de De Rham (algébrique) de X. Si $k = \mathbb{C}$, et si X est en plus projective, il résulte des théorèmes de comparaison algébrique-analytique (GAGA) [Se] que $H^i(X, \Omega^\bullet_X)$ est le même selon que $\Omega^\bullet_X$ est le complexe algébrique ou le complexe holomorphe. Donc si $k = \mathbb{C}$, la cohomologie de X pour la topologie transcendante se calcule à partir des formes différentielles algébriques.

Passons à la *situation relative.* Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas ; on suppose f propre. On peut définir ([Ill]) le complexe des formes de Kähler relatif $\Omega^\bullet_{X/S}$, qui est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules de type fini (f est de type fini), et avec pour différentielle $d_{X/S}$, un opérateur $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ linéaire. La formation de $\Omega^\bullet_{X/S}$ est compatible aux changements de base. Si S, X et f sont lisses, et si $k = \mathbb{C}$, on a l'analogue analytique $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ (resp. C^∞, $\mathcal{A}^\bullet_{X/S}$) qui est compatible aux changements de base.

On définit les faisceaux de cohomologie de De Rham (algébrique) par ([Ill])

$$\mathcal{H}^k(X/S) := \mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}).$$

Intuitivement, la fibre en $s \in S$ de $\mathcal{H}^k(X/S)$ est $H^k(X_s, \Omega^\bullet_{X_s/k})$, si on note $X_s{=}f^{-1}(s)$. A côté des faisceaux de cohomologie de De Rham, il y a les *faisceaux de Hodge* : $R^q f_*(\Omega^p_{X/S})$, c'est-à-dire si S est réduit à un point, $H^q(X, \Omega^p_{X/k})$.

Si $k = \mathbb{C}$, et si on remplace les formes différentielles algébriques relatives $\Omega^\bullet_{X/S}$ par les formes holomorphes relatives $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ là encore les théorèmes de comparaison, assurent que le résultat est le même.

Filtrons le complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$ (algébrique, holomorphe,...) par la *filtration de Hodge* (ou naïve)

$$F^p(\Omega^\bullet_{X/S}) = (\Omega^\bullet_{X/S})^{\geqslant p}$$

qui est le complexe qui a le même terme en degré $i \geqslant p$, et qui est nul en degré $< p$. Alors, la suite spectrale associée à cette filtration finie, et au foncteur f_*, est la suite spectrale de Hodge vers De Rham :

$$\text{(HDR)} \qquad E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}(X/S) = \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega^\bullet_{X/S}).$$

Il en découle une filtration sur l'aboutissement $F^p\mathcal{H}^k(X/S)$, la filtration de Hodge de la cohomologie de De Rham, et un objet gradué associé

$$E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^p\left(\mathcal{H}^{p+q}(X/S)\right).$$

L'hypothèse essentielle est :

1.1. Hypothèse. *La suite spectrale de Hodge vers De Rham (relative) dégénère au terme E_1.*

Cela signifie

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_\infty$$

en particulier

$$E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) = \frac{F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)}{F^{p+1}\mathcal{H}^{p+q}(X/S)}.$$

Cette hypothèse est discutée dans [Ill]. Contentons-nous de l'énoncé suivant qui indique les conséquences très importantes sur les faisceaux de Hodge (voir [Del3], th. 5.5 et [Dem] §10 pour le cas complexe).

1.2. Théorème. *Soit S un schéma de caractéristique 0 ; on suppose le morphisme $f : X \to S$ propre et lisse. Alors :*

(i) *Les faisceaux $R^p f_*(\Omega^p_{X/S})$ sont localement libres de type fini de formation compatible à tout changement de base.*

(ii) *La suite spectrale (HDR) dégénère au terme E_1.*

(iii) *Les faisceaux $F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)$ sont localement libres de rang fini et de formation compatible à tout changement de base.*

(iv) *La suite spectrale (HDR) a pour fibre en $s \in S$, la suite spectrale correspondante à X_s.*

1.3. Remarques.

Si S est lisse, connexe, la théorie transcendante [Dem] dit que les nombres de Hodge $h^{p,q}(s) = \dim H^{p,q}(X_s)$ sont constants. Alors on peut en déduire que $R^p f_*(\Omega^p_{X/S})_s = H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})$. Dans le cas général, la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge en un point $s \in S$ entraîne (i) à (iv) par des arguments généraux de Grothendieck ("lemme d'échange" [Del3], th. 5.5).

Supposons $k = \mathbb{C}$, et toujours $f : X \to S$ propre et lisse. Par le lemme de Poincaré holomorphe relatif, le complexe $\Omega^{\bullet\mathrm{an}}_{X/S}$ est une résolution du faisceau $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ (image réciproque faisceautique). (Il suffit de se restreindre à la fibre $X_s = f^{-1}(s)$). Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(X/S) &= R^k f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S))\\ &\cong \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} R^k f_*\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Pour justifier cette identification, rappelons le théorème de changement de base en cohomologie (à supports propres) (voir Iversen [Iv]). Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

avec f propre, X, S, T, Y des espaces localement compacts. Pour tout faisceau abélien F sur X, on a un isomorphisme canonique :

$$p^*R^k f_*F \xrightarrow{\sim} R^k g_* q^* F.$$

Si on tient compte de la formule de projection (loc. cit.) on a l'identification ci-dessus. Ainsi on a un lien (si $k = \mathbb{C}$), entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie à coefficients constants, que nous préciserons dans le §2.A.

Dorénavant on utilise la convention suivante :

1.4. Définition. *Une famille de variétés algébriques projectives est la donnée d'un morphisme $f : X \to S$, lisse à fibres connexes tel que f factorise par $\mathbb{P}^N \times S$: il existe une immersion fermée $i : X \to \mathbb{P}^N \times S$, telle que $f = \mathrm{pr}_S \circ i$.*

Le morphisme f est donc propre. On se place dans l'hypothèse de dégénérescence de la suite spectrale de Hodge. La filtration décroissante $\mathcal{F}^p(\mathcal{H}^k(X/S))$, est rappelons-le, la *filtration de Hodge*. Les $\mathcal{F}^p$ sont des sous-fibrés vectoriels de $\mathcal{H}^k(X/S)$, et $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \cong R^q f_*(\Omega^p_{X/S})$.

2. Connexion de Gauss-Manin

Pour étudier la variation des classes de cohomologie de De Rham dans une famille, il est essentiel de pouvoir dériver ces classes par rapport aux coordonnées locales sur la base S. Le but de ce paragraphe est de donner un sens précis à cela en expliquant en détail les constructions de Katz et Oda ([Ka], [K-O]). La construction met en évidence une "connexion" sur une résolution du complexe de De Rham qui après passage à la cohomologie conduit à la connexion de Gauss-Manin. Le cadre de ce paragraphe est celui des schémas.

2.A. Systèmes locaux

Soit S un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{V}$ (d'ensembles, de groupes, d'espaces vectoriels etc.) localement constant est appelé un *système local*. Donc il y a un recouvrement ouvert de S tel que $\mathcal{V}$ soit constant sur les ouverts de ce recouvrement. On voit facilement qu'un faisceau localement constant est constant sur un espace simplement connexe et donc le relèvement de $\mathcal{V}$ au revêtement universel est constant de fibre V disons ; alors on obtient $\mathcal{V}$ comme quotient de $\tilde{S} \times V$ par le groupe fondamental de S qui agit sur $\tilde{S} \times V$ de façon naturelle : $\gamma((\tilde{s}), f) = (\tilde{s} \cdot \gamma, \gamma^{-1} f)$, où $\gamma \in \pi_1(S)$ agit à droite sur $\tilde{S}$ et à gauche sur V. Cette action conduit à une représentation de $\pi_1(S)$ dans V, la *représentation de monodromie*.

On suppose maintenant que S est un schéma (resp. espace analytique, variété C^∞) avec faisceau structural $\mathcal{O}_S$. On appelle *faisceau associé* au système local $\mathcal{V}$, le faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$; il est localement libre, c'est-à-dire un fibré vectoriel sur S. Un tel fibré vectoriel est caractérisé par le fait qu'il existe un recouvrement ouvert trivialisant tel que sur l'intersection de deux de ces ouverts, la matrice de transition est à coefficients constants

Rappelons [Dem] qu'une *connexion* sur $\mathcal{F}$, est un opérateur k-linéaire $\nabla : \mathcal{F} \to \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ (resp. $\Omega^{1,\mathrm{an}}_S \otimes \mathcal{F}, \mathcal{A}^1_S \otimes \mathcal{F}$), qui satisfait à la règle de Leibniz :

$$\nabla(ae) = da \otimes e + a\nabla e.$$

On peut étendre ∇ en une application k-linéaire : $\nabla : \Omega^p_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \to \Omega^{p+q}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ en forçant la règle : $\nabla(\alpha \otimes e) = d\alpha \otimes e + (-1)^p \alpha \wedge \nabla e$ ($\alpha = p$-forme). Alors l'opérateur

$R = \nabla\nabla$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire ; on a

$$R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \Omega^2_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) = \Omega^2_S(\mathrm{End}(\mathcal{F})),$$

on l'appelle *l'opérateur de courbure* de ∇. La connexion est dite *intégrable* (ou *plate*) si $R = 0$, donc si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_S \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla} \Omega^2_S \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \cdots$$

est un complexe. On l'appelle le *complexe de De Rham associé*, vu le cas particulier $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S$, $\nabla = d$.

Rappelons que pour tout champ v sur X (ou sur un ouvert de X), l'opérateur k-linéaire ∇_v (contraction de ∇ avec v) est appelé la dérivée covariante dans la direction de v. La condition d'intégrabilité équivaut à

(plat) $$[\nabla_v, \nabla_w] = \nabla_{[v,w]} \qquad (v,\ w \text{ champs sur } X),$$

$[v, w]$ étant le crochet des champs v et w.

Lorsque $k = \mathbb{C}$, si ∇ est une connexion intégrable sur le fibré vectoriel $\mathcal{F}$ (faisceau localement libre de rang n), le théorème d'existence local des solutions des équations différentielles linéaires, ici l'équation $\nabla e = 0$, entraîne que $\mathcal{V} = \ker(\nabla) \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau localement constant et que $\mathcal{F} = \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ est le fibré associé à $\mathcal{V}$. Alors $\nabla = 1 \otimes d$, ce qui signifie que si on choisit localement une base $\{e_i\}$ de F, composée de sections plates (sections de $\mathcal{V}$) : $\nabla(\sum_i a_i \otimes e_i) = \sum_i da_i \otimes e_i$.

Inversement, pour un faisceau $\mathcal{V}$ localement constant sur S, $\mathcal{F} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_S$ le fibré associé, $\nabla = 1 \otimes d$ est une connexion plate avec $\ker \nabla = \mathcal{V}$. Donc, il y a une équivalence de catégories, entre les fibrés plats, i.e. les couples $(\mathcal{F}, \nabla)$ avec $R_\nabla = 0$) et les faisceaux localement constants de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels, les morphismes de fibrés étant les morphismes horizontaux.

Revenons à la situation géométrique avec $f : X \to S$, qui représente une famille de variétés algébriques projectives, lisses. On a vu [Dem §10], qu'une famille est localement triviale du point de vue C^∞ et donc que les faisceaux abéliens $R^k f_* \mathbb{C}$, $R^k f_* \mathbb{R}$, $R^k f_* \mathbb{Z}$ sont des systèmes locaux. Ainsi $\mathcal{H}^k(X/S) = R^k f_*(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$; on appelle *connexion de Gauss-Manin* sur le fibré de cohomologie $\mathcal{H}^k(X/S)$, l'unique connexion (holomorphe) qui a pour sections horizontales (ou plates), les sections de $R^k f_*(\mathbb{C})$, i.e. :

$$\nabla_{\mathrm{GM}}(e) = 0 \Longleftrightarrow e \in R^k f_*(\mathbb{C}).$$

2.B. L'application de Kodaira-Spencer

Maintenant k est arbitraire, et S est un schéma lisse de type fini sur k. Du fait de la lissité de f, on a une suite exacte

(1) $$0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_S) \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0\ .$$

Cette extension, qui en général est non triviale, est associée à une classe $c \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S))$, et comme $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre, on a la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) \cong H^1(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) \ ;$$

l'image de c par l'application canonique

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1 S)}) & \longrightarrow & H^0(X, R^1 f_*(T_{X/S} \otimes f^*(\Omega^1_S)) \\ = T_{X/S} \otimes f^*(\Omega^1_S) & & \| \\ & & H^0(X, \Omega^1_S \otimes R^1 f_*(T_{X/S})) \end{array}$$

est appelée la *classe de Kodaira-Spencer* de X/S ; on peut voir cette classe comme un morphisme, le *morphisme de Kodaira-Spencer* : $\rho_{X/S} : T_S \longrightarrow R^1 f_*(T_{X/S})$. La fibre $(\rho_{X/S})_s = \rho_s : T_{S,s} \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$ est *l'application de Kodaira-Spencer* en $s \in S$.

Rappelons ([Ill]) que si $c \in H^1(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ est la classe d'une extension $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$, le morphisme bord $\partial : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{G})$ s'identifie avec le cup-produit avec c.

L'application de Kodaira-Spencer en s mesure comment X_s se déforme dans la famille X/S au voisinage de s, du moins infinitésimalement

On reviendra à l'application de Kodaira-Spencer dans le §3.C.

2.C. Algébricité de la connexion de Gauss-Manin

Les faisceaux $\mathcal{H}^k(X/S)$, $\mathcal{F}^p\mathcal{H}^k$ ont une définition algébrique, via la cohomologie de De Rham algébrique ; on va voir qu'il en est de même pour la connexion de Gauss-Manin.

Passons au complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/k} = \Lambda^\bullet \Omega^1_{X/k}$; ce complexe n'est pas en général “multiplicatif” par rapport aux deux extrêmes. On introduit alors la filtration de Koszul de $\Omega^\bullet_{X/k}$ qui mesure cette déviation. La définition vaut pour toute extension $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$ (de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres). On pose :

$$F^p \Lambda^\bullet \mathcal{H} = \mathrm{image}\big(\Lambda^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet \mathcal{F}[-p] \longrightarrow \Lambda^\bullet \mathcal{H}\big)$$

on a clairement $\mathrm{Gr}^p = F^p/F^{p+1} \cong \Lambda^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet \mathcal{F}[-p]$, $[-p]$ signifie qu'il y a un décalage de $-p$ dans le degré. Considérons la suite exacte de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ & & \mathcal{G} \otimes \Lambda^\bullet \mathcal{F}[-1] & & & & \Lambda^\bullet \mathcal{F} & & \end{array}$$

qui en degré k, conduit à l'extension :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1} \mathcal{F} \longrightarrow (F^0/F^2)^k \longrightarrow \Lambda^k \mathcal{F} \longrightarrow 0 \ .$$

Une vérification aisée montre que la classe $c_k \in H^1(X, \mathrm{Hom}(\Lambda^k \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{F})$ se déduit de c par l'application produit intérieur

$$I : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^k \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{F})$$

où $I(\lambda)(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \lambda(f_i) \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_i \wedge \cdots \wedge f_p$.

Retournons à la situation géométrique. L'application de Kodaira-Spencer se déduit de la classe de l'extension (1) ; on va voir que la connexion de Gauss-Manin se déduit de la classe de l'extension de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ & & f^*(\Omega^1_S) \otimes \Omega^\bullet_{X/S}[-1] & & & & \Omega^\bullet_{X/S} & & \end{array} \tag{2}$$

(se reporter à [Ill] pour une définition précise).

Considérons le morphisme bord en hypercohomologie

$$\partial : R^k f_*(\mathrm{Gr}^0) \longrightarrow R^{k+1} f_*(\mathrm{Gr}^1)$$

qui après identification est

$$\begin{array}{rcl} \partial : \mathcal{H}^k(X/S) & \longrightarrow & R^{k+1} f_*(f^*(\Omega^1_S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_{X/S}[-1]) \\ & & \| \\ & & \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}^k(X/S) \end{array}$$

on en vient au résultat principal :

2.1. Théorème.

1) *∂ est une connexion intégrable sur le fibré de cohomologie de De Rham $\mathcal{H}^k(X/S)$.*

2) *Le complexe de de Rham associé : $(\mathcal{H}^k(X/S) \otimes \Omega^\bullet_S, \partial)$ s'identifie au complexe $E_1^{\bullet,k}$ déduit de la suite spectrale de $\Omega^\bullet_X$ filtré par la filtration de Koszul, relativement au foncteur f_*.*

3) *Si $k = \mathbb{C}$, après identification des faisceaux, ∂ coïncide avec ∇.*

Avant de donner les détails de la preuve, indiquons que *1)* et *2)* s'obtiennent facilement si on tient compte de la compatibilité de la filtration de Koszul relativement au produit extérieur : $F^i \wedge F^j \subset F^{i+j}$. Cela permet de définir un accouplement dans la suite spectrale

$$E_1^{pq} \times E_1^{p'q'} \longrightarrow E_1^{p+p',q+q'}, \qquad (e, e') \longmapsto ee'$$

tel que $e'e = (-1)^{(p+q)(p'+q')} ee'$ et $d_1(ee') = (d_1 e)e' + (-1)^{p+q} e \cdot d_1(e')$. Il est peut être plus convaincant de mettre sous forme explicite ∂, l'intégrabilité sera alors une conséquence facile du résultat. C'est la procédure que nous allons détailler en plusieurs étapes.

Étape 1

Le problème étant local sur S, on peut supposer S affine (de Stein, dans le cadre analytique). On suppose d'abord que $X = S \times T$ est un produit, sans supposer que T est projectif; on peut de la même façon supposer que X est étale sur $\mathbb{A}^n \times S$. Avec cette hypothèse de trivialité de la famille, la suite exacte (1) est scindée, et $\Omega_X^\bullet = p_1^*(\Omega_S^\bullet) \otimes p_2^*(\Omega_T^\bullet)$ (produit tensoriel de complexes). On peut identifier $p_2^*(\Omega_T^\bullet)$ avec $\Omega_{X/S}^\bullet$, alors la différentielle totale d_X se décompose en $d_X = d_S + d_{X/S}$. On fera attention au fait que le produit tensoriel est sur $\mathcal{O}_X$, alors que la différentielle est seulement k-linéaire. Localement, on peut décrire la situation de la manière suivante : soit $S = \mathrm{Spec}(A)$, $T = \mathrm{Spec}(B)$, donc $X = \mathrm{Spec}(A \otimes_k B)$. Prenons $\Omega_S^\bullet = \Lambda^\bullet \Omega_{A/k}^1$, $\Omega_T^\bullet = \Lambda^\bullet \Omega_{B/k}^1$, qui sont des algèbres graduées sur A (resp. B). Alors on a $\Omega_{X/k}^1 = \Omega_S^1 \otimes_k B \oplus A \otimes_k \Omega_T^1$ et $\Omega_X^\bullet = \Omega_S^\bullet \otimes_k \Omega_T^\bullet$ avec la structure naturelle de $A \otimes_k B$ algèbre graduée. La différentielle est $d_X = d_S + d_T$, avec la signification usuelle : $d_X(\alpha \otimes \beta) = d_S(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes d_T(\beta)$, si $\alpha \in \Omega_S^p$, $\beta \in \Omega_T^q$. Notons que $\Omega_{X/S}^\bullet = A \otimes_k \Omega_T^\bullet$, $d_{X/S} = 1 \otimes d_T$. Le morphisme quotient $\pi : \Omega_X^\bullet \to \Omega_{X/S}^\bullet$ admet une section naturelle φ (de groupes), telle que, avec un abus d'écriture :

$$\varphi(h d_{X/S} f_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S} f_p) = h d_{X/S} f_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S} f_p$$

où à droite $d_{X/S}$ est la différentielle partielle issue de la décomposition $d_X = d_S + d_{X/S}$. On a

$$F^p = \bigoplus_{i \geqslant p} \Omega_S^i \otimes \Omega_T^j \qquad \text{et} \quad \Omega_X^\bullet = F^1 \bigoplus \Omega_{X/S}^\bullet.$$

2.2. Lemme. *Il existe une dérivation I (produit intérieur total) de l'algèbre $\Omega_X^\bullet$, donc $I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge I(\beta)$, telle que $I(dg) = d_S g$. De plus, on a pour toute forme $\omega \in \Omega_X^\bullet$:*

$$\varphi\pi(\omega) - \omega \equiv -I(\omega) \pmod{F^2 \Omega_X^\bullet}.$$

Preuve. Avec la description $\Omega_X^\bullet = \Omega_S^\bullet \otimes_k \Omega_T^\bullet$, on prend pour I, la “dérivation”,

$$d(\alpha \wedge \beta) = p\alpha \wedge \beta \qquad \text{si } \alpha \text{ est de degré } p\ .$$

Notons que I est $\mathcal{O}_X$ $(= A \otimes_k B)$ linéaire.

Pour la seconde assertion, on peut supposer $g = a \otimes b$, $(a \in A,\ b \in B)$, alors $d_X g = d_S a \otimes b + a \otimes d_T b$ avec $d_S g = d_S a \otimes b$ et $d_{X/S} g = a \otimes d_T b$. On a $I(d_X g) = d_S a \otimes b = d_S g$. Ceci donne plus généralement $I(g dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_p) = \sum_{i=1}^{n} g dg_1 \wedge \cdots \wedge d_S g_i \wedge \cdots \wedge dg_p$.

Pour la dernière propriété, supposons $\omega = gdg_1 \wedge \cdots \wedge d_S g_i \wedge \cdots \wedge dg_p$, alors

$$\begin{aligned}\varphi\pi(\omega) &= g d_{X/S} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{X/S} g_p \\ &= g(dg_1 - d_S g_1) \wedge \cdots \wedge (g_p - d_S g_p) \\ &= \omega - I(\omega) \pmod{F^2\Omega^\bullet_X} .\end{aligned}$$

□

Étape 2

On suppose S affine, et on choisit un recouvrement ouvert fini $X = \bigcup_{\alpha=1}^{m} U_\alpha$, où U_α est supposé étale sur $\mathbb{A}^n \times S$. Ainsi avec une telle trivialisation (se rapporter à l'appendice) on peut, comme indiqué dans l'étape 1, décomposer le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{U_\alpha/k}$ en un produit tensoriel $\Omega^\bullet_S \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_{U_\alpha/S}$, et décomposer la différentielle d_X sur U_α, en $d_{X/U_\alpha} = d^\alpha_S + d^\alpha_{X/S}$. Notons φ_α la section de $\pi : \Omega^\bullet_{U_\alpha} \to \Omega^\bullet_{U_\alpha/S}$ qui résulte de cette décomposition, et soit I_α le produit intérieur correspondant.

La connexion de Gauss-Manin, décrit, de manière cohomologique, cette décomposition (locale) de $\Omega^\bullet_X$ en un produit tensoriel $\Omega^\bullet_S \otimes \Omega^\bullet_{X/S}$. Considérons $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X)$ (resp. $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F^p)$, etc.), le complexe de Čech à coefficients dans $\Omega^\bullet_X$ (resp. ...) ([Ill]) on sait (loc. cit.) que le morphisme canonique $\Omega^\bullet_X \to \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X)$ est un quasi-isomorphisme. Notons aussi, que les ouverts U_α étant affines, alors le foncteur $K^\bullet \longmapsto \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, K^\bullet)$ est exact, par suite :

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathrm{Gr}^p(\Omega^\bullet_X)) = \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F^p)/\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^{p+1}).$$

La différentielle du complexe de Čech est noté $d+\delta$ où d est la différentielle au niveau des formes, et δ la différentielle "de Čech" :

$$(\delta\beta)(i_0, \ldots, i_q) = (-1)^p \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \beta(i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_q)$$

(si $\beta \in \mathcal{C}^{p,q} = \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_X)$).

Pour tout indice α, soit $h_\alpha = d^\alpha_S \circ \varphi_\alpha$ vu comme morphisme de complexes : $h_\alpha : \mathrm{Gr}^0(\Omega^\bullet_X)\big|_{U_\alpha} \longrightarrow \mathrm{Gr}^1(\Omega^\bullet_X)[1]\big|_{U_\alpha}$ (vérification immédiate), et soit $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta - \varphi_\alpha \pmod{F^2}$, donc

$$\psi_{\alpha\beta} : \mathrm{Gr}^0(\Omega^\bullet_X)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} \longrightarrow \mathrm{Gr}^1(\Omega^\bullet_X)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

On a $\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\gamma}$ (pour tout (α, β, γ)), et $(h_\beta - h_\alpha)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = d\psi_{\alpha\beta}$, ce qui signifie

$$d^\alpha_S \varphi_\alpha - d^\beta_S \varphi_\beta = (d^\alpha_S + d^\alpha_{X/S})\varphi_\alpha - (d^\beta_S + d^\beta_{X/S})\varphi_\beta - (\varphi_\alpha - \varphi_\beta) d_{X/S}$$

on peut ainsi définir un morphisme de complexes

$$h : \mathrm{Gr}^0 \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathrm{Gr}^1[1])$$

qui induit (dans la catégorie dérivée) un morphisme

$$\nabla : \mathrm{Gr}^0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^1[1].$$

Le lecteur pourra comparer avec la démonstration du lemme (5.4) dans [Ill].

Si on passe à la cohomologie, ∇ induit la connexion de Gauss-Manin. On va faire une construction plus précise, et en déduire l'intégrabilité de la connexion.

Étape 3

Soit $\beta \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_X)$, posons :

$$\mathcal{L}(\beta)(i_0, \ldots, t_q) = d_S^{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_q)) \qquad \text{(dérivée de Lie totale)}$$

puis

$$I(\beta)(i_0, \ldots, i_{q+1}) = (-1)^p(I_{i_0} - I_{i_1})(\beta(i_1, \ldots, i_{q+1}) \qquad \text{(produit intérieur total)}$$

et

$$\varphi(\beta)(i_0, \ldots, i_p) = \varphi_{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_p)) \ .$$

Notons que $\mathcal{L}$ est de bidegré $(1,0)$, I de bidegré $(0,1)$.

Un calcul élémentaire conduit au

2.3. Lemme. $\nabla = \mathcal{L} + I$ *est un morphisme de complexes*

$$\mathcal{L} + I \in \mathrm{Hom}\left(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X), \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_X[1]\right).$$

Notons que par construction, $\nabla(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^i)) \subseteq \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F^{i+1})$. Pour s'assurer que sur la cohomologie, le morphisme induit par $\nabla = \mathcal{L} + I : \mathrm{Gr}^0 \to \mathrm{Gr}^1[1]$ est bien la connexion de Gauss-Manin, la propriété suivante est exactement ce qu'il faut :

2.4. Lemme.

$$(d_X + \delta)\varphi - \varphi(d_{X/S} + \delta) \equiv (\mathcal{L} + I) \circ \varphi \pmod{\check{\mathcal{C}}^\bullet(F^2)}.$$

Preuve. Soit $\beta \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_{X/S})$;

$$(d_X\varphi - \varphi d_{X/S})(\beta)(i_0, \ldots, i_q) = d_S^{i_0}\varphi_{i_0}(\beta(i_0, \ldots, i_q)) \ .$$

Un calcul aisé montre que

$$(\delta\varphi - \varphi\delta)(\beta)(i_0, \ldots, i_{q+1}) = (-1)^{p+1}(\varphi_{i_0} - \varphi_{i_1})(\beta(i_1, \ldots, i_{q+1})).$$

Il suffit alors de vérifier que

$$(-1)^{p+1}(\varphi_{i_0} - \varphi_{i_1})(\omega) \equiv (-1)^p I^{i_0}\varphi_{i_1}(\omega) \pmod{F^2}$$

pour toute forme $\omega \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \Omega_{X/S})$. Si on pose $\varphi_{i_1}(\omega) = \alpha$, cette congruence équivaut à $\varphi_{i_0}(\pi(\alpha)) - \alpha \equiv -I_{i_0}(\alpha) \pmod{F^2}$, qui découle alors du lemme 2. □

L'intégrabilité de la connexion de Gauss-Manin découle immédiatement de la formule du lemme 4. En effet, on en déduit

$$\nabla((d_X + \delta)\varphi - \varphi(d_{X/S} + \delta)) \equiv \nabla^2 \circ \varphi \pmod{\check{\mathcal{C}}^\bullet(F^3)}$$

car ∇ est de degré 1 pour la filtration de Koszul et comme ∇ et $d_X + \delta$ commutent,

$$(d_X + \delta)(\nabla \circ \varphi) - (\nabla \circ \varphi)(d_{X/S} + \delta) \equiv \nabla^2 \circ \varphi (\operatorname{mod} F^3).$$

Donc ∇^2 induit le morphisme nul (au sens des catégories dérivées) de Gr^0 dans $\mathrm{Gr}^2[2]$.

Avant de conclure, il est utile de souligner le point suivant. Ce qui a été construit dans les étapes 1 à 3 (lemme 2.3) est une connexion ("la connexion de Gauss-Manin") au niveau du complexe de De Rham (le complexe de Čech du complexe de De Rham). Cette connexion non nécessairement intégrable induit au niveau cohomologique la connexion (intégrable) de Gauss-Manin.

Pour terminer la preuve du théorème, reste à vérifier que la construction ci-dessus ne dépend pas du choix de $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, ce qui est complètement standard.

Si $k = \mathbb{C}$, il est aussi immédiat que la construction ci-dessus s'applique avec S de Stein, et les U_α de Stein, et que le résultat est identique. Pour se convaincre de l'identité entre cette construction de ∇ et la définition purement topologique, on observe que la propriété de décomposition locale du complexe de De Rham, qui est locale sur X dans le cas algébrique et analytique, devient locale sur S avec le complexe des formes C^∞. Donc on peut supposer que $X \to S$ est une filtration C^∞ triviale. Dans ce cas, on peut construire des morphismes ∇ au niveau des complexes de De Rham C^∞, soit $\nabla : \mathcal{A}_X^\bullet \to \mathcal{A}_X^\bullet[1]$, et $\nabla = d_S$ (relativement à une décomposition). Alors, il est à peu près évident que sur la cohomologie, ∇ induit $d_S \otimes 1$

$$\nabla = 1 \otimes d_S : \mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1} f_*(\mathrm{Gr}^1[1]) = \mathcal{A}_S^1 \otimes \mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet).$$

et $\mathbb{R}^q f_*(\mathcal{A}_{X/S}^\bullet) = \mathbb{R}^q f_*(\Omega_{X/S}^{\bullet\mathrm{an}})$ est le faisceau constant $H^q(T, \mathbb{C})$ sur S (si $X = T \times S$). □

2.D. Propriété de transversalité de ∇

Pour tout complexe $\Omega^\bullet$, la filtration de Hodge de $\Omega^\bullet$ est la filtration naïve $\Omega^{\bullet\geqslant}$; on a relativement au décalage :

$$(\Omega^\bullet[n])^{\geqslant p} = (\Omega^{\bullet\geqslant p+n})[n].$$

Considérons la suite exacte de complexes (cf. (2))

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^1 & \longrightarrow & F^0/F^2 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & \| & & \\
 & & f^*(\Omega^1_S)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^\bullet_{X/S}[-1] & & & & \Omega^\bullet_{X/S} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

passons au cran i de la filtration de Hodge, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_S)\otimes\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S}[-1] \longrightarrow (F^0/F^2)^{\geqslant i} \longrightarrow \Omega^{\bullet\geqslant i}_{X/S} \longrightarrow 0$$

et en passant à la cohomologie, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{R}^{k+1}f_*(\mathrm{Gr}^1[1]) = \Omega^1_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{R}^k f_*(\Omega^{\bullet\geqslant i}_{X/S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{R}^{k+1}f_*(\mathrm{Gr}^1[1]^{\geqslant i}) = \mathbb{R}^{k+1}f_*(f^*(\Omega^1_S)\otimes(\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S}[-1])\,. \\
 & & \| \\
 & & \Omega^1_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbb{R}^k f_*(\Omega^{\bullet\geqslant i-1}_{X/S})
\end{array}$$

Les images des flèches verticales du diagramme sont respectivement $\mathcal{F}^i\mathcal{H}^k(X/S)$ et $\Omega^1_S\otimes\mathcal{F}^{i-1}\mathcal{H}^k(X/S)$, et de plus $\partial=\nabla$, donc on a la *propriété de transversalité* pour la connexion de Gauss-Manin.

$$\nabla(\mathcal{F}^i\mathcal{H}^k(X/S)) \subseteq \Omega^1_S\otimes\mathcal{F}^{i-1}\mathcal{H}^k(X/S)\ .$$

Supposons que la suite spectrale de Hodge vers De Rham dégénère (par ex. $k=\mathbb{C}$), alors $E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) = F^p\mathcal{H}^{p+q}(X/S)/F^{p+1}\mathcal{H}^{p+q}(X/S)$.

De plus, il est clair que par passage du gradué associé à la filtration de Hodge sur $\mathcal{H}^k(X/S)$, ∇ induit une application $\mathcal{O}_S$-linéaire.

$$\overline{\nabla} : R^q f_*(\Omega^p_{X/S}) \longrightarrow \Omega^1_S\otimes R^{q+1}f_*(\Omega^{p-1}_{X/S})\ .$$

Alors $\overline{\nabla}$ est le cup-produit avec l'application de Kodaira-Spencer

$$\rho_{X/S}\in H^0(S,\Omega^1_S\otimes\mathbb{R}^1 f_*(T_{X/S})).$$

D'où finalement :

2.5. Théorème. *Relativement à la filtration de Hodge $F^\bullet \mathcal{H}^k(X/S)$, la connexion de Gauss-Manin satisfait à la propriété de transversalité de Griffiths :*

$$\nabla(F^i\mathcal{H}^k) \subseteq \Omega^1_S \otimes F^{i-1}(\mathcal{H}^k) .$$

Si la suite spectrale de Hodge vers De Rham dégénère (par exemple si $k = \mathbb{C}$), l'application $\mathcal{O}_S$-linéaire induite sur le gradué associé, par la dérivation ∇, coïncide avec le cup-produit avec la classe de Kodaira-Spencer.

□

2.6. Notes.

1) Toute l'étude faite, dans les §1 et §2, admet une transcription quasi-immédiate dans le cadre logarithmique. On suppose que $D \subset X$ est un diviseur qui est une réunion de diviseurs lisses relativement à la base S, et de sorte que D est à croisements normaux relativement à S. Dans ce contexte, on peut définir (voir [Ill] §7) la complexe $\Omega^\bullet_{X/S}(\log D)$ des *formes différentielles régulières sur $X - D$, à pôles logarithmiques le long de D*. Pour le cas le plus simple d'un hypersurface lisse voir le §8 et pour le cas général voir [Ka]. On obtient une suite spectrale de Hodge-vers-De Rham :

$$E_1^{pq} = R^q f_*(\Omega^p_{X/S}(\log D)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$$

et la connexion de Gauss-Manin

$$\nabla : R^q f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D)) \longrightarrow \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{R}^q f_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$$

qui satisfait à la propriété de transversalité de Griffiths, relativement à la filtration de Hodge $F^\bullet$, du moins si on suppose que la suite spectrale ci-dessus dégénère au terme E_1 ($k = \mathbb{C}$). Le lecteur consultera le travail fondamental de N. Katz [Ka] pour les détails.

2) Dans un travail récent [H-S], Hinich et Schechtman ont introduit une application de Kodaira-Spencer d'ordre supérieur, qui s'applique à des opérateurs différentiels et plus seulement à des dérivations.

Appendice : "Coordonnées locales" en géométrie algébrique.

Pour lever tout doute sur les calculs locaux du §2, rappelons comment on travaille avec des coordonnées locales en géométrie algébrique.

Soit X/k un schéma de type fini, lisse sur le corps k. Alors le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/h}$ est localement libre de rang fini $n = \dim X$; au voisinage de tout point $x \in X$, on peut trouver des sections régulières $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telles que $\{ds_1, \ldots, ds_n\}$ est une base de $\Omega^1_{X/h}$ sur U.

2.7. Définition. *On appelle $s_1, \ldots, s_n$ un système de coordonnées uniformisantes (ou paramètres locaux) sur U.*

On peut alors définir la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial s_i}$ au moyen de la formule ($\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$)

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial s_i} ds_i \ .$$

La relation $d^2 = 0$ entraîne $\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2}{\partial s_j \partial s_i}$ ($\forall (i,j)$). Soit maintenant $f : X \to Y$ un morphisme étale. Alors le morphisme canonique $df : f^*(\Omega^1_{Y/k}) \to \Omega^1_{X/k}$ est un isomorphisme. Ainsi si $s_1, \ldots, s_n$ sont des coordonnées uniformisantes sur $V \subset Y$, $t_1 = f^*(s_1), \ldots, t_n = f^*(s_n)$ est un système de coordonnées uniformisantes sur $U = f^{-1}(V)$. On a par construction :

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f^*(\alpha)) = f^*\big(\frac{\partial \alpha}{\partial s_i}\big) \qquad (\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)) \ .$$

Si maintenant U est un ouvert du schéma X, et U est étale sur $\mathbb{A}^n \times S$, supposons que $s_1, \ldots, s_n$ sont les coordonnées naturelles sur $\mathbb{A}^n$. La restriction à U de ces $n+m$ coordonnées définit un système de coordonnées locales sur U.

3. Variations de structures de Hodge

Dans ce paragraphe nous introduisons les notions de variation de structures de Hodge, de domaine de périodes et de variation infinitésimale de structures de Hodge.

3.A. Introduction aux variations de structures de Hodge

Soit $X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ une variété projective lisse de dimension n, il y a sur $H_{\mathbb{R}} = H^k(X, \mathbb{R})$ la structure suivante, appelée *structure de Hodge réelle de poids k*.

1) Une décomposition (de Hodge)

$$H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

avec $H^{p,q} = \overline{H}^{q,p}$.

2) Une filtration de Hodge $F^p = \bigoplus_{i \geqslant p} H^{i,j}$, telle que $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$, $(p+q=k)$ et $H_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F}^{q+1}$.

(1 et 2 sont équivalentes).

Si H et H' sont des espaces vectoriels réels qui portent une structure de Hodge (réelle) de poids k, resp. k', alors il est aisé de voir que sur H^*, $H \otimes H'$ et $\operatorname{Hom}(H, H')$ il y a une structure de Hodge naturelle de poids $-k$, $k+k'$ et $k'-k$. En particulier $\operatorname{Hom}(H,H)$ a une structure de Hodge de poids 0, et

$$\operatorname{Hom}(H,H)^{(a,b)} = \big\{\lambda : H \to H,\ \lambda(H^{p,q}) \subseteq H^{p+a,q+b}\big\}.$$

On peut interpréter une structure de Hodge comme une représentation réelle du groupe algébrique réel :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}\big[x, y, (x^2+y^2)^{-1}\big]$$

(Restriction de Weil du groupe algébrique $\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$). Cela explique que l'on puisse effectuer des opérations de dualité et $\otimes$ sur les structures de Hodge.

Dans le cas géométrique, c'est-à-dire quand X est de kähler, rappelons qu'il y a sur $H_{\mathbb{C}} = H^k(X,\mathbb{C})$, une forme bilinéaire de parité $(-1)^k$: la *forme de Hodge-Riemann* ([Dem])

$$Q(\alpha,\beta) = (-1)^{k(k-1)/2}\int_X \alpha\wedge\beta\wedge\omega^{n-k} \qquad (\dim X = n)$$

(Q est symétrique si k est pair, alternée si k est impair). Lorsque la forme $(1,1)$ réelle ω est entière, donc si X est algébrique projective, et ω provient de la classe d'une section hyperplane, Q est alors entière sur le réseau $H^k(X,\mathbb{Z})/(\mathrm{torsion})$. Rappelons les *relations bilinéaires de Hodge-Riemann* :

(R1) $$Q(H^{p,q}, H^{p',q'}) = 0 \qquad \text{sauf si } (p',q') = (q,p).$$

Il est équivalent de dire que le Q-orthogonal de F^p est F^{k-p+1}. En effet, $F^p = \bigoplus_{i\geqslant p} H^{i,j}$, $F^{k-p+1} = \bigoplus_{i\geqslant k-p+1} H^{i,j}$, ainsi si $i \geqslant p$, on a $j = k-i \leqslant k-p$, d'où $Q(F^\ell, F^{k-p+1}) = 0$. Mais

$$\dim F^p = \sum_{i\geqslant p} h^{i,j} = \sum_{i\geqslant p} h^{j,i} = \sum_{j\leqslant k-p} h^{j,i} = \mathrm{codim}(F^{k-p+1})\ .$$

Donc $F^{k-p+1} = (F^p)^\perp$.

(R2) $$\text{Si } 0 \neq \xi \in \mathrm{Prim}^{p,q}, \qquad \sqrt{-1}^{\,p-q}Q(\xi,\bar{\xi}) > 0\ .$$

Si on introduit l'opérateur de Weil, qui est l'opérateur réel $C \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H_{\mathbb{C}})$, tel que $C_{\big|H^{p,q}} = \sqrt{-1}^{\,p-q}$, la forme $\langle\alpha,\beta\rangle := Q(C\alpha,\bar{\beta})$ est une forme hermitienne appelée *forme de Hodge*. La forme de Hodge est définie positive sur la partie primitive $\mathrm{Prim}^k(X,\mathbb{C})$ de $H^k(X,\mathbb{C})$.

Une structure de Hodge (pure) de poids k *polarisée* est la donnée d'une structure de Hodge réelle de poids k : $(H_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C} = \oplus H^{p,q}$, $H^{p,q} = \overline{H}^{q,p})$ et d'une *polarisation* ; la polarisation est la donnée d'un réseau $H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{R}}$, puis une forme bilinéaire non dégénérées de parité $(-1)^k$ sur $H_{\mathbb{R}}$, qui est entière sur le réseau (mais pas forcément unimodulaire) :

$$Q(H_{\mathbb{Z}}\times H_{\mathbb{Z}}) \subseteq \mathbb{Z}.$$

On exige les deux conditions (R1) et (R2) de Riemann ; en particulier :

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = Q(C\alpha,\bar{\alpha}) > 0 \qquad (\alpha\neq 0)$$

avec C = opérateur de Weil.

Un isomorphisme de structures de Hodge polarisées, est un isomorphisme qui préserve les polarisations, i.e. les structures entières, et les formes bilinéaires.

Soit maintenant $f : X \to S$ une famille de variétés algébriques projectives lisses ; on suppose $X \subset \mathbb{P}^N \times S$ et f est la restriction à X de la projection sur S. Soit $X_s = f^{-1}(s) = X \cap \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \times \{s\}$. Comme il est expliqué dans [Dem], X_s porte sur chaque $H^k(X_s, \mathbb{C})$ une structure de Hodge réelle, et $\mathrm{Prim}^k(X_s, \mathbb{C})$ possède en plus une polarisation définie par la forme $\omega_s \in H^{1,1}(X_s, \mathbb{Z})$, déduite du plongement $X_s \subset \mathbb{P}^N$.

Ces structures de Hodge réelles (resp. polarisées) définissent une famille (ou variation) de structures de Hodge. On a en effet les objets suivants :

1) Un système local de groupes abéliens libres de rang fini (constant),

$$\mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} = R^k f_*(\mathbb{Z})/(\text{torsion}),$$

idem avec $\mathcal{H}^k_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}$).

2) Un fibré vectoriel ($\mathcal{O}_S$ module localement libre) $\mathcal{H}^k = \mathbb{R}^k f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$ ($\Omega^\bullet_{X/S}$ = formes algébriques, ou holomorphes).

3) Une filtration décroissante de $\mathcal{H}^k$ par des sous-fibrés holomorphes $\{\mathcal{F}^p\}_{p=0,\dots,k}$ (filtration de Hodge) (si on passe à la fibre en $s \in S$, $\mathcal{H}^k_s = H^k(X_s, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}^p_s$ est exactement la filtration de Hodge sur $H^k(X_s, \mathbb{C})$). On a $\mathcal{F}^p \cap \overline{\mathcal{F}}^{q+1} = 0$, $(p+q = k)$.

Soit $\omega \in H^0(S, R^2 f_*(\mathbb{Z}))$ l'image de la classe de la section hyperplane relative (section localement constante). La section ω induit en chaque $s \in S$, $\omega_s \in H^2(X_s, \mathbb{Z})$ qui est la forme entière $(1, 1)$ qui polarise X_s. On a ainsi :

4) Une forme bilinéaire non dégénérée localement constante, dite “forme de Hodge-Riemann”, $Q : \mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{H}^k_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{H}^{2n}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

5) Une connexion (intégrable) $\nabla : \mathcal{H}^k \to \Omega^1_S \otimes \mathcal{H}^k$: la connexion de Gauss-Manin, telle que le système local des sections horizontales est $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}$.

6) Propriété de transversalité de Griffiths

$$\nabla(\mathcal{F}^p) \subseteq \Omega^1_S \otimes \mathcal{F}^{p-1}.$$

7) L'opérateur L de Lefschetz, admet une forme globale : L est le cup-produit avec ω. Noter que L est un opérateur horizontal ; on définit $\mathcal{H}^k_{\mathrm{prim}}$ comme le noyau de

$$L^{n-k+1} : \mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{H}^{2n-k+2}.$$

La fibre en $s \in S$ de $\mathcal{H}^k_{\mathrm{prim}}$ est $\mathrm{Prim}^k(X_s, \mathbb{C})$.

On résume toutes ces données, par la définition suivante, d'une variation de structures de Hodge (polarisées) (“VHS” en abrégé).

La définition suivante a été formulée par Griffiths ([Grif1]).

3.1. Définition. *Une famille de structures de Hodge (réelles) de poids k, sur S, est la donnée de*

1) *Un faisceau localement constant d'espaces vectoriels réels $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ sur S ;*
2) *Une filtration finie $\{\mathcal{F}^p\}$ du fibré vectoriel $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_S$ ($\mathcal{F}^p$ est un sous-fibré holomorphe) ;*

avec les conditions :

(VHS-1) *La connexion naturelle $\nabla = 1 \otimes d_S$ sur $\mathcal{H}$ est telle que $\nabla \mathcal{F}^p \subseteq \Omega^1_S \otimes \mathcal{F}^{p-1}$*

(VHS-2) *En tout point $s \in S$, $\{\mathcal{F}^p_s\}$ définit sur $\mathcal{H}_{\mathbb{R}})_s$ une structure de Hodge (réelle) de poids k.*

Une polarisation est la donnée, en sus, d'un faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, de $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, avec $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \equiv \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, et une forme bilinéaire localement constante non dégénérée

$$Q : \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui induit en tout $s \in S$ une polarisation de $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})_s$.

Nous ne considérons que des structures de Hodge polarisées.

3.2. Définition. *Soit $\{H_{\mathbb{Z}}, \{\mathcal{F}^p\}, \nabla, Q\}$ une variation de structures de Hodge polarisées sur S. Le groupe de monodromie du faisceau localement constant $H_{\mathbb{Z}}$ est appelé le groupe de monodromie de la variation (VHS).*

Pour définir ce groupe, on fixe $s_0 \in S$ et on considère selon la prescription de §2.A la représentation de monodromie

$$T : \pi_1(S, s_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}((H_{\mathbb{Z}})_{s_0}).$$

Du fait que la forme Q est (localement) constante, l'image de T (i.e. le groupe de monodromie) est inclus dans le groupe orthogonal $G_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}((H_{\mathbb{Z}})_{s_0}, Q)$.

Rappelons que le faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ s'obtient par :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \widetilde{S} \times H_{\mathbb{Z}} / \pi_1(S, s_0) \qquad (H_{\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0})$$

où $\pi_1(S, s_0)$ agit par $\gamma(t, \alpha) = (t\gamma, T(\gamma)^{-1}\alpha)$. La représentation de monodromie décrit comment une section locale de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ se déforme par prolongement analytique le long d'un lacet. Comme on suppose S connexe, toutes les fibres de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes à $H_{\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0}$ mais non canoniquement.

3.B. Domaine des périodes de Griffiths

Il est naturel de vouloir décrire “l'ensemble des structures de Hodge” sur $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, polarisées par la forme Q sur $H_{\mathbb{Z}}$, avec des nombres de Hodge $h^{p,q}$ fixés. On fixe donc $H_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^n$ un groupe abélien, Q une forme (alternée ou symétrique selon la parité de k, le poids) entière et non dégénérée sur $H_{\mathbb{Z}}$. Les nombres de Hodge $h^{p,q}$

($= h^{q,p}$), avec $\sum_{p+q=k} h^{p,q} = n$, sont fixés ; noter qu'alors $\dim F^p = \sum_{i\geqslant p, i+j=k} h^{i,j}$ est fixé ($= f^p$). On note $\mathrm{Gr}(k, H_{\mathbb{C}})$ la variété des sous-espaces de dimension k de $H_{\mathbb{C}}$. Rappelons les relations bilinéaires de Riemann :

1) Le Q-orthogonal de F^p (dans $H_{\mathbb{C}}$) est F^{k-p+1} et
2) Si C est l'opérateur de Weil tel que $C(\xi) = \sqrt{-1}^{\,p-q}\xi$ pour $\xi \in H^{p,q}$, on a $Q(C\xi, \bar{\xi}) > 0$ si $0 \neq \xi$.

3.3. Notations. On note

$$\begin{aligned}\check{D} = \big\{ &\text{filtrations } F^{\bullet} = \{F^p\}_{p=0,\dots,h} \text{ de } H = H_{\mathbb{C}},\\ &\text{telles que } \dim F^p = f^p, \text{ et pour tout } p,\ Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0\big\}.\end{aligned}$$

(Alors F^{k-p+1} est le Q-orthogonal de F^p).

On appelle D le sous-ensemble de $\check{D}$ formé des structures de Hodge, c'est-à-dire avec la condition 2 ci-dessus.

On note $G_{\mathbb{R}}$ le groupe orthogonal de $(H_{\mathbb{R}}, Q)$ et $G_{\mathbb{C}}$ le complexifié, $G_{\mathbb{C}} = O(H_{\mathbb{C}}, Q)$.

3.4. Proposition.

1) *$\check{D}$ est une sous-variété non singulière de $\prod_p \mathrm{Gr}(f^p, H)$, qui est en fait un espace homogène du groupe de Lie complexe $G_{\mathbb{C}}$.*

$$\check{D} = G_{\mathbb{C}}/B, \qquad \textit{(B sous-groupe parabolique)}$$

2) *D est un ouvert de $\check{D}$, qui est une orbite du groupe de Lie réel $G_{\mathbb{R}}$:*

$$D = G_{\mathbb{R}}/V \qquad (V = G_{\mathbb{R}} \cap B).$$

Preuve. La preuve n'est pas très difficile, c'est un exercice d'algèbre linéaire (théorème de Witt par exemple). On note que D acquiert une structure de variété analytique complexe (ouvert de $\check{D}$). Il est souvent commode de fixer une structure de Hodge initiale, $\{H_0^{p,q}\}$, et alors d'identifier $\check{D}$ avec $G_{\mathbb{C}}/B$, où B est le stabilisateur de $\{F_0^p\}$, et V le stabilisateur de $\{H_0^{p,q}\}$ dans $G_{\mathbb{R}}$. □

Il est important de décrire le fibré tangent à $\check{D}$, ainsi que les sous-fibrés universels $\mathcal{F}^p$ du fibré trivial $H \otimes \mathcal{O}_{\check{D}}$, comme fibrés vectoriels homogènes sur ces espaces homogènes.

Rappelons que si $F \subset H$ est un sous-espace de dimension d, l'espace tangent de $\mathrm{Gr}(d, H)$ en $[F]$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}(F, H/F)$. à partir de là, un vecteur tangent à $\check{D}$ en $F^{\bullet} = \{F^p\}$, peut-être identifié à une collection d'applications linéaires

$$\xi_p : F^p \longrightarrow H/F^p$$

avec les compatibilités suivantes :

$$\begin{array}{ccc} F^p & \xrightarrow{\xi_p} & H/F^p \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ F^{p+1} & \xrightarrow{\xi_{p+1}} & H/F^{p+1} \end{array}$$

est commutatif et

$$Q(\xi_p(\alpha),\beta)+Q(\alpha,\xi_{k-p+1}(\beta))=0 \qquad (\alpha\in F^p,\ \beta\in F^{k-p+1})$$

[version infinitésimale de la première relation bilinéaire].

Rappelons qu'on a choisi un point de base $\{H_0^{p,q}\}\in D$. Soit

$$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})=\big\{X\in\mathrm{End}(H), Q(X(\alpha),\beta)+Q(\alpha,X(\beta))=0\big\}.$$

Il y a une structure de Hodge de poids 0 sur $\mathfrak{g}$, avec

$$\mathfrak{g}^{r,s}=\big\{X\in\mathfrak{g},\ X(H^{p,q})\subseteq H^{p+q,q+s}\big\}.$$

Alors $\mathfrak{b}=\mathrm{Lie}(B)=\bigoplus_{r\geqslant 0}\mathfrak{g}^{r,-r}$, et le fibré tangent $T_{\check{D}}$ est le fibré homogène $G_{\mathbb{C}}\times_B\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, B agissant par la représentation adjointe.

Soit $\mathfrak{g}_0=\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$, alors $\mathfrak{v}=\mathrm{Lie}(V)=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}^{0,0}$. Noter que $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{v}\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, qui correspond au fait que l'ouvert $D\subset\check{D}$ est une orbite de $G_{\mathbb{R}}$.

3.5. Définition ([Grif1])**.** Le sous-fibré $G_{\mathbb{C}}\times_B\mathfrak{g}^{-1,1}/\mathfrak{b}$ de $T_{\check{D}}$ est appelé le sous-fibré horizontal (notation $T_{\mathrm{hor}}(\check{D})$). Un vecteur tangent $\xi=\{\xi_p\}$, est horizontal si $\xi_p(\mathcal{F}^p)\subseteq\mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p$.

Si on veut décrire le fibré universel $\mathcal{F}^p\subset H\otimes\mathcal{O}_{\check{D}}$, en termes de fibrés associés à des fibrés principaux, on note que le fibré trivial $H\otimes\mathcal{O}_{\check{D}}$ (de fibre H, base $\check{D}$) est le fibré $G_{\mathbb{C}}\times_B H$, et $\mathcal{F}^p=G_{\mathbb{C}}\times_B\mathcal{F}_0^p$ (par définition B est le stabilisateur de la filtration $\{\mathcal{F}_0^p\}$.

3.6. Exemple (Demi-espace de Siegel)**.** On suppose $k=1$ (poids un). La filtration de Hodge se réduit à $H=F^0\supset F^1\supset 0$, avec $(F^1)^\perp=F^1$ (pour la forme alternée Q). Alors $\check{D}$ est la grassmanienne lagrangienne de (H,Q), et $\check{D}=\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{C})/B$ si $\dim H=2g$. On vérifie classiquement que $D=\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})/U(g,\mathbb{C})$ s'identifie au demi-espace de Siegel $\{\tau\in M_g(\mathbb{C}),{}^t\tau=\tau \text{ et } \mathrm{Im}\,\tau>0\}$.

Soit une VHS : $\{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}},\mathcal{F}^p,\nabla,Q\}$; cette donnée ne conduit pas directement à un morphisme $S\to D$, du fait que $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ est seulement localement constant. Par contre, localement sur un ouvert $\mathcal{U}$ de S, on peut trivialiser le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$, au moyen de sections plates (de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$), alors la filtration induite par les $\mathcal{F}^p$ donne lieu à un morphisme (holomorphe)

$$\Phi : \mathcal{U} \to D \subset \check{D}.$$

Globalement, on peut transporter la VHS au revêtement universel $\widetilde{S}$ de S, et le choix d'une trivialisation du système local $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ sur $\widetilde{S}$, conduit à un morphisme $\tilde{\Phi} : \widetilde{S} \to D \subset \check{D}$.

Il est immédiat de voir que le groupe de monodromie (global) Γ agit proprement discontinûment sur D, alors on obtient le *morphisme des périodes*, en passant au quotient par Γ :

$$\Phi : S \longrightarrow \Gamma \backslash D.$$

L'observation importante sur $\tilde{\Phi}$ (ou tout relèvement local) est la propriété d'horizontalité, traduction de la condition de transversalité de Griffiths sur ∇. Pour tout $s \in S$,

$$\text{(Trans)} \qquad d\Phi_s(T_{S,0}) \subseteq T_{\mathrm{hor},\Phi(s)}(D).$$

Pour rendre cette propriété claire, détaillons-la sur un voisinage de $s_0 \in S$. On trivialise le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$ au moyen de sections plates $\{\tau_i\}$. On peut supposer que $H_0^{p,q}$ $(= H^{p,q}(s_0))$ a pour base $(\tau_i)_{f_{p+1} < i \leqslant f_p}$, alors $\mathcal{F}_0^p$ a pour base $\{\tau_i\}_{i \leqslant f_p}$. On peut trouver une trivialisation locale $\{e_i(s)\}$ de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S$ par des sections telles que $e_i(s_0) = \tau_i$, et localement, $(e_1, \ldots, e_{f_p})$ est une base de $\mathcal{F}^p$. Soit $e_i = \sum A_{ji}\tau_j$ la matrice de changement de repères (pour abréger on écrit $s_0 = 0$). Les τ_i étant plates, $\nabla e_i = \sum dA_{ji}\tau_j = \sum_k c_{ki}e_k$, avec $c = A^{-1}dA$. L'hypothèse de transversalité implique $c_{ji} = 0$ pour $i \leqslant f_p$, $j > f_{p+1}$. L'application linéaire ξ_α associée à $d\Phi_{s_0}(\partial/\partial s_\alpha)$ est telle que pour $i \leqslant f_p$:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(\tau_i) &= \frac{\partial e_i}{\partial s_\alpha}(0) \pmod{\mathcal{F}_0^p} \\ &= \sum_{f_{p+1} < j} \frac{\partial A_{ji}}{\partial s_\alpha}(0)\tau_j. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial A_{ji}(0)}{\partial s_\alpha} = \langle c_{ji}(0), \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \rangle,$$

on a bien (Trans).

Pour utilisation ultérieure, indiquons la propriété suivante, conséquence de la nullité de la courbure de ∇.

3.7. Proposition. *Si* ∂_1, $\partial_2 \in T_{S,s}$, $\xi_i = d\Phi_s(\partial_i) \in \mathfrak{g}^{-1,1}$, *alors* $[\xi_1, \xi_2] = 0$ (*crochet dans* $\mathfrak{g}$).

Preuve. Rappelons la formule (plat) du paragraphe 2. Elle implique qu'il suffit de montrer que $[\partial_1, \partial_2] = 0$ vu comme endomorphisme de $H_0^{p,q}$. Donc on peut supposer $\xi_1 = \partial/\partial s_\alpha$, $\xi_2 = \partial/\partial s_\beta$.

Posons $c_{ji}^\alpha = \langle c_{ji}, \partial/\partial s_\alpha \rangle$, alors $c_{ji}^\alpha(0) = \partial A_{ji}/\partial s_\alpha\big|_0$. Il suffit de montrer que $\partial c_{ji}^\alpha/\partial s_\beta - \partial c_{ji}^\beta/\partial s_\beta$ s'annule en 0 pour $f_{p+1} < i, j \leqslant f_p$.

On a vu que

$$c_{ji}^\alpha = \sum_k A_{jk}^{-1} \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\alpha} = 0 \qquad \text{si } \ i \leqslant f_p,\ j > f_{p+1} \ .$$

En dérivant par rapport à s_β, puis en évaluant en 0, on obtient pour i, j dans l'intervalle $]f_{p+1}, f_p]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{ji}}{\partial s_\beta \partial s_\alpha}(0) &= \sum_k \frac{\partial A_{jk}}{\partial s_\alpha}(0) \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\beta}(0) \\ &= \sum_k \frac{\partial A_{jk}}{\partial s_\beta}(0) \frac{\partial A_{ki}}{\partial s_\alpha}(0) \end{aligned}$$

qui donne le résultat. □

3.C. Déformations et IVHS (Variations infinitésimales de structures de Hodge)

La question la plus naturelle à ce stade est de savoir si la variation de structure complexe est déterminée par sa variation de structure de Hodge (*problème de Torelli*). Il est clair que cela est faux en général : prendre la famille produit. Donc il faut se restreindre aux familles pour lesquelles la structure complexe varie vraiment au moins infinitésimalement. La variation infinitésimale étant mesurée par l'application de Kodaira-Spencer, on ne regarde que des familles ayant la propriété que l'application de Kodaira-Spencer est partout injective. Ce sont les *familles effectives*. La variation de structure de Hodge au niveau infinitésimal est décrite par la dérivée de l'application des périodes. Ainsi une version infinitésimale du problème de Torelli est de savoir si cette dérivée est injective pour des familles effectives. Voir [P-S] pour ce cercle d'idées.

Complètons la discussion en précisant ce qu'on entend par une *déformation universelle* ou *verselle*. Ici on fixe une variété X_o, on travaille avec des familles sur une base pointée (S, o), considérée comme germe, telle que la fibre au dessus de o est la variété fixée X_o. Ces types de familles sont appelés *déformations de* X_o. Une telle déformation $f : X \to S$ est *complète* si toute autre déformation $g : Y \to T$ de X_o se déduit de $f : X \to S$ par un changement de base (au niveau des germes)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

où $p : (T, o) \to (S, o)$, et le carré ci-dessus est cartésien. Si le morphisme p est unique, X/S est appelé *universelle*. En général ce n'est pas le cas, mais souvent sa différentielle $dp(o)$ est unique et dans ce cas la déformation X/S est dite *verselle*. Par exemple, si X/S est complète, pour obtenir une déformation verselle, on peut restreindre la famille à une sous-variété convenable qui passe par o. Attention : une déformation peut très bien être (uni)verselle en $o \in S$ mais pas en d'autres points de S.

Kodaira et Spencer ont montré [K-S2] que f est complète si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer est une surjection.

3.8. Conséquence. *$f : X \to S$ est verselle en o si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer*

$$\rho : T_{S,o} \to H^1(T_{X_o})$$

est un isomorphisme. ($\dim S$ est alors considéré comme le nombre de paramètres pour la structure complexe).

Bien qu'amelioré par Kuranishi, le résultat de Kodaira suffit pour beaucoup d'exemples, notamment pour les hypersurfaces dans l'espace projectif, comme dans l'exemple suivant. Le résultat de Kuranishi dit qu'il y a toujours une famille verselle, pourvu qu'on accepte comme base S un espace analytique (il est essentiel d'accepter des éléments nilpotents dans le faisceau structural de S). Dans ce cadre une famille $f : X \to S$ est une application holomorphe et propre telle que, quitte à restreindre S, localement X est un produit $U_i \times S$ et $f|U_i \to S$ coincide avec la projection sur le second facteur. Voir [Ku] pour les détails.

3.9. Exemple. Si $f : X \to S$ est la famille tautologique des hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$, l'application de Kodaira-Spencer est une surjection si $n \geqslant 2$ ou $n = 2$ et $d \neq 4$. Pour obtenir une déformation verselle il faut restreindre cette famille à un petit disque transversal à une orbite par $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ d'une hypersurface fixée. Pour les détails voir [K-S §14(C)].

Retournons à la différentielle de l'application des périodes, pour une famille $f : X \to S$ verselle. On fixe $o \in S$, on regarde la fibre X_o au dessus du point o et la différentielle $\delta = d\Phi(o)$ en o. C'est une application linéaire

$$\delta : T_{S,o} \longrightarrow \mathfrak{g}^{-1,1} \subset \bigoplus_p \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

avec les propriétés suivantes (3.7) :

(1) *Pour tout vecteur tangent t en o, $\delta(t) \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$.*

(2) *Si $t_1, t_2 \in T_{S,o}$, les endomorphismes $\delta(t_1)$ et $\delta(t_2)$ commutent.*

3.9. Définition. Soit une structure de Hodge (réelle) sur H. Une donnée (d'algèbre linéaire) (T, H, δ, Q)

$$\delta : T \longrightarrow \mathfrak{g}^{-1,1}$$

qui satisfait à (1) et (2) est appelée par Griffiths et Harris [C-G-G-H], une variation infinitésimale de structures de Hodge (IVHS).

Dans une IVHS géométrique, l'application linéaire induite par

$$\delta(t) : H^{p,q} \to H^{p-1,q+1}$$

est le cup-produit avec l'image de t par l'application de Kodaira-Spencer $T_{S,o} \to H^1(X_0, T_{X_0})$ (cf. §2B et §2C).

Au départ d'une IVHS, on peut effectuer des opérations d'algèbre linéaire. Par exemple, si $t_1, \ldots, t_k \in T_{S,o} = T$, on peut composer les applications $\delta(t_1), \ldots, \delta(t_k)$, ce qui donne une application

$$H^{k,0} \xrightarrow{\delta(t_1)} H^{k-1,1} \xrightarrow{\delta(t_2)} H^{k-2,2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta(t_k)} H^{0,k}.$$

Notons $\delta(t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{Hom}(H^{k,0}, H^{0,k})$ le résultat. Rappelons que $H^{0,k}$ et $H^{k,0}$ sont en dualité par la forme Q. Alors les propriétés (1) et (2) conduisent aisément aux résultats suivants :

(i) $\delta(t_1, \ldots, t_k)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $H^{k,0}$

(ii) $\delta(t_1, \ldots, t_k)$ est symétrique en les arguments $t_1, \ldots, t_k$.

D'où une application linéaire :

(iter) $$\delta : \mathrm{Sym}^k(T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}}(H^{k,0}, H^{0,k}) \cong \mathrm{Sym}^2(H^{k,0})$$

qui, comme on peut s'y attendre, contient des informations significatives sur X_0.

4. Dégénérescence

Dans ce paragraphe on introduit la notion de structure de Hodge mixte. Ensuite on regarde les familles de base un disque épointé, déduites d'une morphisme propre de base le disque, en omettant la fibre au dessus de l'origine. On appelle une telle situation dégénérescence, car la fibre au dessus de l'origine peut être singulière. Dans cette situation, tourner une fois autour de l'origine induit sur la cohomologie l'application de Picard-Lefschetz ou de monodromie locale. La quasi-unipotence de cette application est une propriété fondamentale qui est discutée brièvement dans le §4.B. Finalement, dans le §4.C on définit les cycles proches et évanescents, notions indispensables pour comprendre les développements récents sur la monodromie locale.

4.A. Structures de Hodge mixtes

Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration croissante $W_\bullet$

$$\cdots W_k \subset W_{k+1} \subset W_{k+2} \cdots$$

On suppose qu'il y a une filtration décroissante $F^\bullet$

$$\cdots F^k \subset F^{k-1} \subset F^{k-2} \cdots$$

sur $H = H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$. On dit que ces deux filtration définissent *une structure de Hodge mixte* si la filtration induite par $F^\bullet$ sur $\mathrm{Gr}_\ell^W = W_\ell/W_{\ell-1}$ est une structure de Hodge pure de poids ℓ. La filtration induite est $F^p(\mathrm{Gr}_\ell^W) = W_\ell \cap F^p \big/ W_{\ell-1} \cap F^p$. Les *nombres de Hodge* sont les nombres de Hodge de Gr_ℓ^W. Donc $h^{p,q} = h^{q,p}$ mais en général il y a des nombres de Hodge non-nuls pour des valeurs de $p+q$ différentes.

Si on peut trouver une bigraduation $H = \oplus H^{p,q}$ telle que $W_\ell \otimes \mathbb{R} = \sum_{r+s\leqslant \ell} H^{r,s}$ et $F^p = \sum_{r\geqslant p} H^{r,s}$ on dit que la structure mixte est *scindée*. Deligne a trouvé (voir [C-K-S1]) un scindement canonique :

$$I^{a,b} = F^p \cap W_{a+b} \cap ((\bar{F}^b \cap W_{a+b}) + \overline{G}_{a+b-2}^{b-1}), \qquad \text{où } \ G_q^p := \sum_{j\geqslant 0} F^{p-j} \cap W_{q-j}$$

et donc

$$W_\ell = \bigoplus_{a+b\leqslant \ell} I^{a,b}, \qquad F^p = \bigoplus_{a\geqslant p} I^{a,b}.$$

Attention : bien que $h^{a,b} = \dim H^{a,b}$ en général on n'a pas $I^{b,a} = \overline{I}^{a,b}$, si c'est le cas on dit que le scindement est défini sur $\mathbb{R}$. On peut toujours "déformer" une structure mixte sur $\mathbb{R}$ (dans la définition de structure mixte on part d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) en une structure scindée sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas $I^{a,b} = F^a \cap \bar{F}^b \cap W_{a+b}$.

Dans l'exposé [Dem] il et prouvé que le groupe de cohomologie $H^w(X,\mathbb{Z})$ d'une variété compacte kählérienne X porte une structure de Hodge pure de poids w. En particulier cela s'applique aux variétés complexes projectives non-singulières.

Lorsque X est quasi projective, éventuellement singulière, en fait pour tout schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, Deligne a prouvé [Del 4], [Del5], que $H^w(X,\mathbb{Z})$ porte une structure de Hodge mixte qui dépend fonctoriellement de X. Les nombres de Hodge de cette structure ne peuvent être non nuls que pour $0 \leqslant p,q \leqslant w$, en fait $w-n \leqslant p,q \leqslant n$ si $w \geqslant n = \dim X$. Si X est lisse il n'y a que des poids $\geqslant w$ ($h^{p,q} = 0$ si $p+q < w$), par contre pour X propre il n'y a que des poids $\leqslant w$. Naturellement si X est projective lisse, la structure de Hodge mixte sur $H^w(X,\mathbb{Z})$ se réduit à la structure pure classique de poids w.

Pour rendre crédible la définition ci-dessus d'une structure de Hodge mixte, expliquons brièvement comment lorsque X est un $\mathbb{C}$-schéma lisse quasi projectif une telle structure émerge (voir [Del4] pour les détails). La première étape consiste à compactifier X, c'est-à-dire réaliser X comme le complémentaire $X = \overline{X} \setminus D$ d'un diviseur à croisements normaux ([Ill] §7). Une telle compactification existe ; pour simplifier la discussion, on suppose que D est une réunion de diviseurs lisses se coupant transversalement. On se place dans le cadre analytique ; les formes sont donc holomorphes. Le théorème de De Rham ordinaire, qui dit que $H^w(X,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(X,\Omega_X^\bullet)$ n'est pas suffisant. Si $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ est l'inclusion, on observe que $H^w(X,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(\overline{X}, j_*\Omega_X^\bullet)$. Soit le sous complexe $\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D)$ de $j_*\Omega_X^\bullet$, dont les sections sont les formes méromorphes sur $\overline{X}$, holomorphes sur X, à pôles logarithmiques sur D. Rappelons [Ill] qu'une section de $\Omega_{\overline{X}}^1(\log D)$ définie en $x \in D$, est une combinaison linéaire de $\{\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \ldots, dz_n\}$ si $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système de coordonnées locales en x tel que $z_1 \cdot \ldots \cdot z_k = 0$ soit une équation locale de D. On pose $\Omega^p_{\overline{X}}(\log D) = \wedge^p \Omega^1_{\overline{X}}(\log D)$. On vérifie que $\Omega^\bullet_{\overline{X}}$ est le plus petit sous-complexe de $j_*\Omega^\bullet_X$ contenant $\Omega^\bullet_{\overline{X}}$ et les différentielles logarithmiques $\frac{df}{f}$ de toute section locale méromorphe le long de D. Le théorème de De Rham logarithmique dit alors que les deux complexes $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ et $j_*\Omega^\bullet_X$ sont quasi-isomorphes, donc :

$$H^w(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^w(\overline{X}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D).$$

Le lecteur trouvera dans le §8 une preuve lorsque D est une hypersurface lisse. Comme dans le §1, la filtration de Hodge $F^\bullet$ conduit à la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}(\log D)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

et à l'existence d'une filtration de Hodge $F^p H^w(X, \mathbb{C})$ sur l'aboutissement. Notons que les faisceaux algébriques cohérent $\Omega^p_{\overline{X}}(\log D)$ peuvent se substituer à leurs analogues analytiques ([Ill] §7).

Le complexe $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ admet une seconde filtration, la filtration par le poids $W_\bullet$ (filtration croissante) ; W_m est l'image de l'application produit extérieur :

$$\Omega^m_{\overline{X}}(\log D) \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}}[-m] \longrightarrow \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D).$$

Si on pose $W^m = W_{-m}$ ($W^\bullet$ est une filtration croissante) , on peut ainsi considérer la suite spectrale associée au complexe filtré $(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D), W^\bullet)$, soit

$$E_1^{-n,w+n} = \mathbb{H}^w(\overline{X}, \mathrm{Gr}^w_n(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D))) \Longrightarrow H^w(X, \mathbb{C}).$$

Supposons que $D_1, \ldots, D_r$ sont les composantes de D. Il n'est pas difficile de voir que l'opération "résidu" de Poincaré fournit un isomorphisme (voir §8) :

$$\mathrm{Gr}^W_n(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \Omega^\bullet_{\overline{X}} & \text{si } n = 0 \\ \oplus_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant r} \Omega^\bullet_{D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_n}}[-n] & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Sur $H^w(X, \mathbb{C})$ il y a donc deux filtrations $W_\bullet$ et $F^\bullet$, il faut étudier comment ces filtrations cohabitent. Le terme E_1 de la suite spectrale est :

$$E_1^{-n,w+n} = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant r} H^{w-n}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_n}, \mathbb{C}).$$

Alors la filtration de Hodge induit sur ce terme une structure de Hodge pure de poids $w+n$, qui se déduit de celle de poids $w-n$ sur chaque $H^{w-n}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_n}, \mathbb{C})$ par un décalage. On prouve alors par une analyse assez délicate, et par récurrence, que la différentielle d_r est nulle pour $r \geqslant 2$, en particulier

$$E_2^{p,q} = \ldots = E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^W_p(H^{p+q}(X, \mathbb{C})).$$

Il n'est pas difficile alors de conclure que la filtration $F^\bullet$ sur $W_n/W_{n-1} = \mathrm{Gr}_n^W(H^w(X,\mathbb{C}))$ donne une structure de Hodge pure de poids $w+n$. Alors, si on décale la filtration W, on a obtenu que $W_\bullet[w]$ et $F^\bullet$ définissent sur $H^w(X)$ une structure de Hodge mixte. Le lecteur trouvera dans [Del4] l'explication que $W_\bullet$ est en fait définie sur $\mathbb{Q}$, et aussi que le résultat est indépendant de la compactification.

Comme exemple regardons le cas d'une hypersurface lisse $D \subset \overline{X}$ et $X = \overline{X} \setminus D$. En tenant compte du décalage, la filtration par le poids sur $H^w(X,\mathbb{C})$ est $0 \subset W_w \subset W_{w+1} = H^w(X,\mathbb{C})$. On a $W_w = \mathrm{Im}[H^w(\overline{X},\mathbb{C}) \to H^w(X,\mathbb{C})]$. Pour interpréter le quotient W_{w+1}/W_w, considérons la différentielle d_1 de la suite spectrale

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & E_1^{-1,w+1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{0,w+1} & \to & 0. \\ & & \| & & \| & & \\ & & H^{w-1}(D) & & H^{w+1}(\overline{X}) & & \end{array}$$

La dégénérescence au terme E_2 est ici un fait clair, on a

$$E_2^{-1,w+1} = \ker(d_1) = \ldots = E_\infty^{-1,w+1} = W_{w+1}/W_w.$$

On verra au §7 que la différentielle d_1 s'interprète aussi en terme de la suite exacte de Gysin :

$$\cdots H^w(\overline{X}) \to H^w(X) \to H^{w-1}(D) \xrightarrow{\partial} H^{w+1}(\overline{X}) \to \ldots$$

Ici $\partial = d_1$ étant de bidegré $(1,1)$ la preuve du théorème de Deligne est immédiate dans ce cas.

Particularisons encore plus cet exemple, en supposant que $\overline{X}$ est une courbe complète lisse de genre g et que D consiste en n points. La suite exacte de Gysin ci-dessus montre que $W_1 \cong H^1(\overline{X})$ possède une structure de Hodge pure de poids 1 et que $W_2/W_1 \cong \ker(H^0(D) \to H^2(\overline{X}))$ est de rang $n-1$ avec une structure de Hodge pure de poids 2, limitée au seul terme de type $(1,1)$, comme pour $H^2(\overline{X})$, ce qui correspond bien au fait que $b_1(X) = g+n-1$.

La méthode de Deligne donne aussi une structure mixte sur la cohomologie des variétés kählériennes admettant des compactifications kählériennes. Dans une autre direction, la cohomologie avec support compact ainsi que l'homologie de Borel-Moore (d'un schéma séparé sur $\mathbb{C}$ où d'une variété kählérienne admettant une compactification kählérienne) portent aussi des structures de Hodge mixtes.

4.B. Structures limites

Considérons la situation d'une dégénérescence : $f : X \to \Delta$, c'est-à-dire une application propre et holomorphe d'une variété complexe X dans le disque Δ telle que f soit lisse au dehors de l'origine. Soit

$$\mathfrak{h} \to \Delta^*, \quad \tau \mapsto s = \exp(2\pi \mathrm{i}\tau)$$

le revêtement universel du disque pointé et soit $\tilde{X} = X \times_{\Delta^*} \mathfrak{h}$ le produit fibré et $k : \tilde{X} \to X$ l'application naturelle. L'application $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$, $h(x, \tau) = (x, \tau + 1)$ induit l'opération de monodromie T sur les groupes de cohomologie $H^k(X_s)$ ($s = \exp(2\pi\mathrm{i}\tau)$ et $X_s = f^{-1}(s)$). Dans le cas d'une VHS "géométrique", $H_{\mathbb{Z}} = R^k f_*(\mathbb{Z})_{s_0} = H^k(X_{s_0}, \mathbb{Z})/\text{torsion}$, T est l'*application de Picard-Lefschetz*. Une propriété fondamentale de T est la suivante :

4.1 Théorème. ([La]) *La transformation T est quasi-unipotente, c.à.d. $(T^\ell - \mathbb{1})$ est nilpotent pour $\ell \in \mathbb{N}$ convenable ; en fait, l'indice de nilpotence est $\leqslant k+1$:* $(T^\ell - \mathbb{1})^{k+1} = 0$ (Théorème de la monodromie locale)

Pour les variations abstraites ce théorème a été démontré par Schmid dans [S]. Le théorème de monodromie locale sans la borne sur l'indice de nilpotence découle (selon une idée de Borel) des propriétés de courbure du domaine des périodes. On esquisse l'argument donné en [S].

Rappelons la notion de *courbure sectionnelle* d'une métrique hermitienne h sur une variété complexe M. Soit F_h la courbure (voir [Dem, §1]) de la connexion métrique sur le fibré tangent holomorphe $T(M)$. La *courbure sectionnelle* est la fonction $\kappa : T(M) \setminus \{\text{zéro-section}\} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\kappa(v) = \frac{h\left(F_h(v, \overline{v})v, v\right)}{h(v,v)^2}.$$

4.2 Exemple. Supposons que $\dim M = 1$. Alors $F_h = \overline{\partial}\partial \log(h)$, où $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} h \, dz \wedge d\overline{z}$ est la forme associée à la métrique. On vérifie facilement que $\kappa(\partial/\partial z)$ est la courbure Gaussienne $K_h = -h^{-1} \cdot \partial^2/\partial z \partial \overline{z}(\log h)$. Ce résultat peut s'écrire comme suit :

$$\frac{1}{\mathrm{i}} \text{ courbure de } h = - \text{ courbure Gaussienne de la métrique } h.$$

Cas particuliers :

i. Soit Δ le disque unité avec la métrique de Poincaré

$$h = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

On trouve

$$\kappa(\partial/\partial z) \equiv -1.$$

ii. Le demi-plan $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, avec la métrique

$$h = \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

La courbure Gaussienne est égale à -1.

iii. Le disque épointé $\Delta^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1,\ \zeta \neq 0\}$ admet $\mathfrak{h}$ comme revêtement universel. La métrique de Poincaré est invariante par translation et donc induit une métrique sur Δ^*

$$\frac{1}{|\xi|^2(\log|\xi|^2)^2} d\xi \otimes d\overline{\xi}$$

à courbure Gaussienne -1.

Lemme (d'Ahlfors-Schwarz). *Une application holomorphe $f : \Delta \to M$ du disque unité dans une variété complexe muni d'une métrique hermitienne h ayant la propriété que $f(\Delta)$ est tangente aux directions dans lesquelles la courbure κ satisfait $\kappa \leqslant -1$, alors, avec ω_h la forme associée à h et ω_Δ la forme associée à la métrique de Poincaré on a :*

$$f^*\omega_h \leqslant \omega_\Delta,$$

c'est-à-dire que f est décroissante.

Preuve. L'hypothèse du lemme dit que la courbure sectionnelle calculée dans la direction de $f(\Delta)$ est majorée par -1. On sait que la courbure décroît dans les sous-fibrés (voir [Grif4, Chapt. II]) et donc la courbure sectionnelle calculée avec la métrique induite par T_M est bornée par -1. Rappelons que la *forme de Ricci* d'une métrique de forme ω_N sur une variété N de dimension 1 est donnée par :

$$\operatorname{Ric}\omega_N = \frac{1}{2}\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\log h = -K\omega_N,$$

ou K dénote la courbure Gaussienne. Donc $f^*\omega_h \leqslant \operatorname{Ric} f^*\omega_h$ et il suffit de montrer que $\operatorname{Ric} f^*\omega_h \leqslant \omega_\Delta$.

Considérons un disque plus petit de rayon r et soit

$$\eta_r = \frac{\mathrm{i}\cdot r^2 dz \wedge d\overline{z}}{(r^2 - |z|^2)^2}$$

la métrique de Poincaré sur ce disque. Introduisons :

$$\Psi := f^*\omega_h = u\eta_r.$$

Puisque Ψ reste bornée sur chaque disque de rayon $r < 1$, tandis que η_r tend vers l'infini quand on approche le cercle $|z| = r$, la fonction u reste bornée sur ce disque et donc prend un maximum à l'intérieur, disons au point z_0.

En ce point on a :

$$0 \geqslant \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\log u = \operatorname{Ric}\Psi - \operatorname{Ric}\eta_r.$$

La courbure Gaussienne de η_r est égal à -1, d'où :

$$\operatorname{Ric}\Psi \leqslant \operatorname{Ric}\eta_r = \eta_r$$

et on obtient l'inégalité $u(z_0) \leqslant 1$. Mais u prend son maximum en z_0 et donc $\operatorname{Ric}\Psi \leqslant \eta_r$. Prenant la limite, on obtient bien $\operatorname{Ric}\Psi \leqslant \eta_\Delta$. $\square$

On peut voir le demi-plan comme un cas spécial d'un domaine de périodes. Ici la courbure est -1. Pour un domaine de périodes quelconque on n'aura pas en général que la courbure de la métrique invariante est négative, mais elle sera négative le long des directions horizontales. Plus précisément, la courbure sectionnelle holomorphe du sous-fibré horizontal $T_{\mathrm{hor}}(D)$ est bornée par une constante négative (uniforme)

$$\kappa(\xi) \leqslant -1, \qquad \forall x \in T_{\mathrm{hor}}(D)$$

(quitte à normaliser la métrique). Pour la démonstration originale voir [G-S1].

Soit maintenant une VHS de base Δ^*, avec transformation de monodromie T, comme indiqué. On relève l'application des périodes en

$$\tilde{\Phi} : \mathfrak{h} \to D \subset \check{D}.$$

Rappelons que l'application $\tilde{\Phi}$ est horizontale, alors le lemme de Ahlfors-Schwarz entraîne que $\tilde{\Phi}$ est décroissante au sens des métriques (sur h on met la métrique hyperbolique de courbure -1)

$$\tilde{\Phi}^*(ds_D^2) \leqslant ds_h^2$$

par suite, $\tilde{\Phi}$ est décroissante pour les distances riemanniennes associées :

$$d_D(\hat{\Phi}(p), \tilde{\Phi}(q)) \leqslant d_h(p,q)\ .$$

Notons que si $x, r \in \mathbb{R}_+$, $d(\mathrm{i}r, \mathrm{i}r + x) = \frac{x}{r}$. Alors du fait que $\tilde{\Phi}(\tau+1) = T\tilde{\Phi}(\tau)$

$$d_D(\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n), T\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n)) \leqslant \frac{1}{n}.$$

On fixe un point de base $v \in D$, et on identifie D avec l'orbite $G_{\mathbb{R}}/V$ de v. L'application $G_{\mathbb{R}} \to D$ est propre car V est compact. Soit $\tilde{\Phi}(\mathrm{i}n) = g_n v$ on a $d_D(g_n v, T g_n v) = d_D(v, g_n^{-1} T g_n v) \leqslant 1/n$ car d_D est $G_{\mathbb{R}}$-invariante. Donc $g_n^{-1} T g_n v \to v$. Quitte à considérer une sous-suite de $\{g_n\}$, on peut supposer que $g_n^{-1} T g_n$ converge vers un élément g de V. Du fait que V est compact (un sous-groupe d'un groupe unitaire), les valeurs propres de g, et donc de T sont des nombres complexes de module un. L'élément T est en fait dans $G_{\mathbb{Z}}$, alors si λ est une valeur propre de T, il en est de même pour tout complexe conjugué, et alors par un fait classique (Kronecker), λ doit être une racine de l'unité. $\square$

Expliquons maintenant le résultat fondamental [S] de W. Schmid : “Le théorème de l’orbite nilpotente” pour une VHS de base Δ^*. Ici Δ est un disque avec paramètre s, et $\Delta^* = \Delta \smallsetminus \{0\}$. Rappelons que le revêtement universel de Δ^* est donné par

$$\mathfrak{h} \to \Delta^*, \quad \tau \mapsto s = \exp(2\pi \mathrm{i} \tau).$$

La monodromie du faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ est décrite par le prolongement analytique le long d’un cercle décrit en sens inverse des aiguilles d’une montre qui est donc un opérateur T sur $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0} = H_{\mathbb{Z}}$ (on fixe un point de base $s_0 \in \Delta^*$). Rappelons que cela signifie que l’image inverse de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathfrak{h}$ est le faisceau constant $\mathfrak{h} \times H_{\mathbb{Z}}$, avec l’opération $\sigma : (\tau, \alpha) \to (\tau + 1, T^{-1}\alpha)$, et que $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{h} \times H_{\mathbb{Z}}/\{\sigma\}$.

Le fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\Delta^*}$, sur Δ^* est trivial pour des raisons générales : un fibré holomorphe sur une surface de Riemann non-compacte est trivialisable ([Fo,§30]). On peut dans la situation présente choisir une trivialisation privilégiée, en utilisant le fait que la monodromie est quasi-unipotente.

On suppose que T est en fait un opérateur unipotent $(T-1)^m = 0$, pour simplifier un peu. Alors $N = \log(T) = (T-1) - \frac{1}{2}(T-1)^2 + \cdots + (-1)^{m-2}\frac{1}{m-1}(T-1)^{m-1}$ est défini, et $N \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$, i.e. N est un élément rationnel de l’algèbre de Lie du groupe $G_{\mathbb{C}}$, le groupe des isométries de $(H_{\mathbb{C}}, Q)$. Noter que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\exp(tN) \in G_{\mathbb{C}}$.

Trivialiser le fibré vectoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X/S)$ sur Δ^* revient, suite à la description

$$\mathcal{H} = \mathfrak{h} \times H/\{\sigma\}$$

(ici H est muni de la topologie complexe, d’espace vectoriel) à trivialiser la classe $\{T\}$ dans $H^1(\mathbb{Z}, G_{\mathbb{C}})$.

Il suffit de constater que

$$\exp((\tau + 1) \cdot N) \cdot \exp(\tau N)^{-1} = T\ .$$

En d’autres termes, si $\theta(\tau, \alpha) = (\tau, \exp(\tau N)\alpha)$ est un “changement de coordonnées” sur $\mathfrak{h} \times H$, l’action de $\pi_1(\Delta^*)$ devient sur les nouvelles coordonnées :

$$(\theta\sigma\theta^{-1})(\tau, \alpha) = (\tau + 1, \alpha).$$

Ce qui conduit à une trivialisation privilégiée de $\mathcal{H}$ sur Δ^*. Dans cette trivialisation, les sections horizontales (celles qu’on étend en $s = 0$), sont les sections $\alpha(s) = (s, \alpha)$ sur les nouvelles coordonnées. Avec les anciennes, cela signifie que si $\alpha \in H = (\mathcal{H})_{s_0}$, le prolongement analytique de α définit une section multiforme du faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, et $s \mapsto \exp\big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\big)\alpha(s)$ définit une section holomorphe du fibré vectoriel, qui est horizontale relativement à la trivialisation privilégiée. Par définition, la section

$$\alpha^*(s) = \exp\big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\big)\alpha(s)$$

est définie en $s = 0$. Ce sont les sections horizontales du fibré vectoriel $\tilde{\mathcal{H}}(X/S)$, étendu à tout le disque Δ.

Le résultat fondamental de W. Schmid est le suivant [S] :

4.2. Théorème. *Les fibrés de Hodge $\mathcal{F}^p \subset \mathcal{H}(X/S)$, se prolongent en des sous-fibrés du fibré prolongé $\widetilde{\mathcal{H}}(X/S)$. En particulier, on a en $s = 0$, une filtration limite $\mathcal{F}^\bullet(0) \in \check{D}$ (en général $\mathcal{F}^\bullet(0) \notin D$).*

Le théorème peut s'énoncer d'une autre manière : soit

$$\Phi : \mathfrak{h} \longrightarrow D \subset \check{D}\ .$$

Alors si $\widetilde{\psi}(\tau) = \exp(-\tau N)\widetilde{\Phi}(\tau)$, on a $\widetilde{\psi}(\tau+1) = \widetilde{\psi}(\tau)$, par suite $\widetilde{\psi}$ définit une fonction holomorphe $\psi : \Delta^* \to \check{D}$ par $\psi(s) = \widetilde{\psi}\big(\frac{\log s}{2\pi i}\big)$. Le résultat est que ψ se prolonge holomorphiquement en une application $\psi : \Delta \to \check{D}$. Rappelons que $H = H^k(X_{t_0}, \mathbb{Z})/\text{torsion}$. On considère $\psi(0)$ comme une filtration

$$0 \subset F^k_\infty \subset F^{k-1}_\infty \subset \cdots \subset F^0_\infty$$

sur $H \otimes \mathbb{C}$, *la filtration limite.*

Une seconde partie du théorème de Schmid que nous n'utiliserons pas est la suivante : soit “l'orbite nilpotente”

$$N(\tau) = \exp(\tau N)[\mathcal{F}^\bullet(0)]\ .$$

Alors pour $\operatorname{Im}\tau \gg 0$, $N(\tau) \in D$, et N est horizontale ; donc $N(\tau)$ définit pour $\operatorname{Im}\tau$ assez grand une variation de structure de Hodge, dont on peut prouver qu'elle fournit une approximation de la variation initiale (en un sens à préciser).

Introduisons la *filtration par le poids* (de la monodromie). Elle découle de la construction suivante [S] : soit V un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique zéro, et $N \in \operatorname{End}(V)$, tel que $N^{k+1} = 0$. Alors il y a une filtration unique :

$$W_{-1} = \{0\} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{2k} = V$$

telle que : $N(W_\alpha) \subseteq W_{\alpha-2}$, et telle que N^ℓ induise un isomorphisme : $\operatorname{Gr}^W_{k+\ell} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^W_{k-\ell}$, où $\operatorname{Gr}^W_\alpha = W_\alpha/W_{\alpha-1}$. On a ainsi sur H, deux filtrations $F^\bullet_\infty$ et $W^\bullet$, la filtration par le poids $W_\bullet$ étant elle définie sur $\mathbb{Q}$. Très important est le résultat suivant, qui est en fait une partie du théorème de l'orbite nilpotente de Schmid.

4.3. Théorème ([S]). *Les filtrations $F^\bullet_\infty$ (filtration de Hodge limite) et $W_\bullet$ définissent une structure de Hodge mixte sur H.* (On oublie les polarisations !)

Il y a une généralisation qui est beaucoup plus délicate (Théorème de l'Orbite Sl(2) en n variables) avec des applications aux dégénérescences en n paramètres. Voir [C-K-S1].

Pour le cas d'une dégénérescence à un paramètre, Steenbrink [St1] et Clemens-Schmid [Cl] ont construit cette structure mixte d'une façon géométrique et en tirent des conséquences importantes, par exemple :

4.4. Théorème. *Une classe de $H^k(X_s,\mathbb{Q})$ est invariante si et seulement si elle est la restriction d'une classe globale sur $H^k(X,\mathbb{Q})$.* (Le Théorème du Cycle Local Invariant)

Cette assertion, bien qu'intuitivement claire, est fausse dans le cadre non-kählérien !

4.C. Cycles proches et évanescents

Por aider le lecteur, il sera utile de rappeler ici les constructions des faisceaux des cycles proches et des cycles évanescents associés à une dégénérescence $f : X \to \Delta$ (ou plus généralement à une fonction $f : X \to \mathbb{C}$). Ces faisceaux ont un support contenu dans $X_0 = f^{-1}(0)$.

La construction utilise *la fibre de Milnor en $x \in X$* qui est l'intersection d'une petite sphère autour de x de dimension réelle maximale dans X avec X_t, t proche de 0. On peut montrer que le type d'homotopie de la fibre de Milnor est indépendant de t et du rayon de la sphère, pourvu que ceux-ci soient soigneusement choisis (voir [Mil]). On calcule les groupes de cohomologie resp. les groupes de cohomologie réduits. Pour x variable, ces groupes constituent des faisceaux et on peut construire deux complexes qui “calculent” ces deux groupes de cohomologie *le complexe des cycles proches* resp. *le complexe des cycles évanescents*. Ils sont définis comme suit : pour définir le complexe $\psi_f(\mathbb{C}_X)$ des cycles proches, on prend une résolution injective du faisceau constant sur $\tilde{X}$, ensuite on restreint l'image directe par $k : \tilde{X} \to X$ à X_0 (en d'autre termes $\psi_f(\mathbb{C}_X) = i^* Rk_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}$, l'image réciproque par $i : X_0 \to X$ de l'image directe dérivée par k du faisceau constant sur $\tilde{X}$). Le complexe des cycles évanescents $\phi_f(\mathbb{C}_X)$ est défini comme le cône du morphisme naturel $\mathbb{C}_{X_0} \to \psi_f(\mathbb{C}_X)$ provenant de $\mathbb{C}_X \to Rk_*k^*\mathbb{C}_X$.

Rappelons que le cône $C(f)^\bullet$ d'un morphisme $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ entre complexes est défini par : $C^p(f) = A^{p+1} \oplus B^p$ avec la dérivation donnée par $\begin{pmatrix} -d_A^{p+1} & 0 \\ f^p & d_B^p \end{pmatrix}$. On a une suite exacte courte $0 \to B^\bullet \to C(f)^\bullet \to A^\bullet[1] \to 0$ et en appliquant cette suite dans le cas considéré ici on trouve bien que pour $j > 0$, $\mathcal{H}^j(\phi_f(\mathbb{C}_X)) = \mathcal{H}^j(\psi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule le j-ième groupe de cohomologie des fibres de Milnor tandis que pour $j = 0$ il y a une différence : $\mathcal{H}^0(\phi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule la cohomologie mais $\mathcal{H}^0(\psi_f(\mathbb{C}_X))$ calcule la cohomologie réduite.

L'avantage de cette description découle du fait que $H^w(X_t,\mathbb{Q}) = H^w(\tilde{X},\mathbb{Q}) = H^w(\psi_f^{\mathrm{uni}}\mathbb{Q}_X)$ où l'ajout ”uni” signifie qu'on prend le sous-complexe maximal de $\psi_f\mathbb{Q}_X$ sur lequel l'action naturelle de la monodromie est unipotente. Donc on pourra essayer de construire la structure de Hodge mixte au niveau de ce complexe. C'est que Steenbrink ([St1]) fait dans le cas où la monodromie agit de façon unipotente et X_0 est un diviseur à croisements normaux avec une structure de variété algébrique. Navarro-Aznar ([NA]) a généralisé ses constructions. Voir [St2] pour des applications aux singularités isolées. Voir aussi [D-S] où on trouve un joli supplément du théorème de monodromie dans le cas d'une singularité isolée : si T admet un bloc de Jordan de taille maximale $n = \dim X$ – et nécessairement pour une valeur propre différente de 1 –, alors il y aura aussi un bloc de taille $n - 1$ avec la valeur propre 1.

Remarquons finalement que la description ci-dessus suggère en outre qu'on pourra remplacer $\mathbb{C}_{\tilde{X}} = k^*\mathbb{C}_X$ par un $k^*\mathcal{K}^\bullet$, où $\mathcal{K}^\bullet$ est un complexe de faisceaux borné sur X quelconque, extension qui joue un rôle important dans les travaux de Saito (voir dessous).

5. Fibrés de Higgs

Le but de ce paragraphe est de donner quelques détails sur les travaux de Simpson sur la construction de variations de structures de Hodge. En particulier nous expliquerons brièvement comment ses résultats conduisent à des restrictions sur la possibilité qu'un groupe donné soit le groupe fondamental d'une variété projective lisse (complexe). On trouvera ces résultats dans [Si3]. Ils reposent sur [Si1] et [Si4]. Le lecteur pourra aussi consulter [Si2]. Pour d'autres résultats sur les groupes fondamentaux qui portent sur la théorie des fibrés de Higgs, voir [A1],[A2], [Z1], [Z2].

Dans le §3 on a introduit la notion d'une *variation de structure de Hodge polarisée (VHS)* de poids w sur une variété de base S supposée complexe et lisse. Brièvement, une telle structure consiste en un quadruple $\{\mathcal{H}, \nabla, Q, \{\mathcal{H}^{r,s}\}\}$ où $\mathcal{H}$ est un fibré holomorphe (muni d'une structure réelle), ∇ une connexion plate, Q une forme bilinéaire, $(-1)^w$-symétrique et ∇-parallèle, $\mathcal{H} = \bigoplus_{r+s=w} \mathcal{H}^{r,s}$ une décomposition en sous-fibrés $\mathcal{H}^{r,s}$ différentiables avec la propriété que $\mathcal{H}^{r,s}$ est le conjugué complexe de $\mathcal{H}^{s,r}$ (une décomposition de Hodge). De plus, on exige que les fibrés de Hodge $\mathcal{F}^p = \bigoplus_{r\geqslant p} \mathcal{H}^{r,s}$ soient holomorphes et que ∇ envoie $\mathcal{F}^p$ en $\mathcal{F}^{p-1} \bigotimes \Omega^1_S$ (transversalité de Griffiths). Finalement on exige que la décomposition de Hodge soit h-orthogonale par rapport à la forme hermitienne et ∇-parallèle, définie par $h(x,y) = (-i)^w Q(x, \overline{y})$, et que $(-1)^r h$ soit positive sur $\mathcal{H}^{r,s}$. Donc on pourrait aussi partir de $\{\mathcal{H}, \nabla, h, \{\mathcal{H}^{r,s}\}\}$. Si on oublie la structure réelle, et donc si on doit laisser tomber la condition $\mathcal{H}^{r,s} = \overline{\mathcal{H}^{s,r}}$ on arrive à la notion d'une *variation complexe de structures de Hodge* (VCH), pourvu qu'on interprète la transversalité de Griffiths correctement : non seulement on exige que $\nabla : \mathcal{F}^p \to \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^1_S$ mais aussi que les fibrés $\overline{\mathcal{F}^q} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{s\geqslant q} \mathcal{H}^{r,s}$ portent une structure anti-holomorphe telle que ∇ envoie $\overline{\mathcal{F}^q}$ en $\overline{\mathcal{F}^{q-1}} \bigotimes_{\overline{\mathcal{O}_S}} \overline{\Omega^1_S}$.

Une VCH donne un exemple particulier de *fibré de Higgs*, c'est-à-dire un fibré holomorphe $\mathcal{H}$ avec un homomorphisme $\theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega^1_S$ ayant la propriété d'intégrabilité $\theta \wedge \theta = 0$. En effet, ici on écrit $\mathcal{H} = \bigoplus_p \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$ et on prend pour θ la somme directe des homomorphismes $\mathcal{O}_S$-linéaires $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p \bigotimes \Omega^1_S$ induits par ∇.

Le fibré de Higgs provenant d'une VCH en outre est stable par l'action de $\mathbb{C}^*$ donnée par $t \cdot (\mathcal{H}, \theta) = (\mathcal{H}, t\theta)$. Plus précisément, $\phi_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ donnée par $\mathcal{H}^{r,s} \ni x \mapsto t^r x$ induit un isomorphisme $(\mathcal{H}, \theta) \to (\mathcal{H}, t\theta)$.

On peut montrer ([Si3], Theorem 4.2) que si S est une variété projective, chaque système local (d'espaces vectoriels complexes) donne un fibré de Higgs et si le système est semi-simple, le fibré de Higgs $(\mathcal{H}, \theta)$ provient d'une VCH si et seulement si la classe d'isomorphie de $(\mathcal{H}, \theta)$ est $\mathbb{C}^*$-invariante. Autrement dit : si on considère les représentations du groupe fondamental de S dans $\mathbb{C}^d$, celles qui portent une VCH sont les représentations semi-simples fixées par l'action de $\mathbb{C}^*$. Un autre théorème de Simpson ([Si3], Theorem 3) dit qu'on peut toujours déformer une représentation du groupe $\pi_1(S)$ en une telle représentation. En particulier la clôture de Zariski G du groupe de monodromie (dans le groupe $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$) doit être très spéciale, dite *du type Hodge*, c'est-à-dire le rang de G doit être égal au rang du sous-groupe compact maximal de G. Par exemple les groupes $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ pour $n \geqslant 3$ ne sont pas du type Hodge.

On déduit de ces résultats qu'un réseau Γ (sous-groupe discret à quotient de volume fini) dans $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ (par exemple $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$) ne peut pas figurer comme groupe fondamental d'une variété projective lisse.

Afin de donner une brève indication sur la démonstration, rappelons qu'une représentation $\rho : \pi \to \mathrm{Gl}(d, \mathbb{C})$ est dite rigide si l'orbite de ρ sous l'action de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{C})$ par conjugaison sur l'espace des représentations $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{Gl}(d, \mathbb{C}))$ est ouverte. Donc cette orbite est une composante connexe, car $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{C}))$ est réductif. Par le dernier théorème de Simpson cette composante contient une VCH et donc la clôture de Zariski du groupe de monodromie est du type Hodge.

D'autre part, un résultat de Margulis implique que la représentation naturelle du réseau Γ est rigide et donc, si Γ était le groupe fondamental d'une variété kählérienne, $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ serait du type Hodge, conduisant à une contradiction.

Le lecteur trouvera les détails, ainsi que beaucoup d'autres exemples dans [Si3].

6. Modules de Hodge

Le but de ce paragraphe est de donner une introduction aux travaux de Morihiko Saito sur les modules de Hodge. Une des principales applications est à la cohomologie d'intersection traitée brièvement dans le §6.A.

6.A. Cohomologie d'intersection et L^2-cohomologie

Récemment, les groupes de cohomologie d'intersection $IH^w(X)$ (pour X complexe et quasi-projective) ont été introduits par Goresky et MacPherson ([G-M]). Cette cohomologie est mieux adaptée aux variétés singulières que la cohomologie ordinaire. Par exemple on a une version de la dualité de Poincaré et les théorèmes de Lefschetz "fort et faible" sont valables. Cheeger, Goresky et MacPherson ([C-G-M]) ont énoncé la conjecture que $IH^w(X)$ porte une structure de Hodge pure de poids w dans le cas où est X projective. Saito [Sa1,2] l'a démontrée avec sa théorie des Modules de Hodge (voir dessous).

On peut se demander s'il est possible de généraliser la théorie de Hodge classique (valable pour des variétés kählériennes compactes) par exemple à des variétés quasi-projectives en utilisant une métrique de Kähler convenable de telle sorte que la cohomologie d'intersection d'une variété projective soit calculable en termes de formes harmoniques sur la partie lisse. En effet, on peut démontrer un théorème de décomposition de Hodge pour des métriques de Kähler complètes en utilisant les formes localement L^2 par rapport à la métrique. Dans ce cas, comme dans le cas classique, la décomposition des formes harmoniques en composantes de bidegré pur conduit à une décomposition de Hodge pour les groupes de cohomologie $H_2^w(X, \mathbb{C})$ pourvu que ce groupe soit de rang fini. Voir [Dem], §12 et [B-Z], §3. Donc, si on avait une identification de $H_2^w(X, \mathbb{C})$ avec $IH^w(X, \mathbb{C})$, on en déduirait une structure de Hodge sur la cohomologie d'intersection. Il y a toujours une application naturelle

$H_2^w(X,\mathbb{C}) \to IH^w(X,\mathbb{C})$ qui est conjecturalement un isomorphisme. Cette conjecture est vraie pour des espaces à singularités isolées (cf. [Ch1], [Ch2] pour le cas de singularités coniques, et [Ohs1] pour le cas général) ; en dépit des résultats annoncés dans [Ohs2], il semble que le cas de singularités quelconques soit toujours ouvert.

Il faut remarquer que la conjecture de Cheeger, Goresky et MacPherson est plus précise que la seule existence d'une structure de Hodge sur $IH^w(X)$: on demande que

1. $IH^w(X)$ soit canoniquement isomorphe au groupe $H_2^w(X \setminus \mathrm{Sing}X)$, le groupe de cohomologie calculé en utilisant des formes localement L^2 par rapport à la *métrique de Fubini-Study*,
2. la structure de Hodge soit induite par cet isomorphisme.

C'est cette conjecture plus fine qui a été démontrée dans le cas des singularités coniques isolées, mais elle n'a pas été démontrée en général. Voir [B-Z] § 3 pour une discussion détaillée.

Deligne a généralisé le théorème de décomposition de Hodge en remplaçant $\mathbb{C}$ par une variation de structures de Hodge H_X ayant pour base X une variété kählérienne compacte. Le même argument fonctionne dans le cadre L^2 avec X quasi-projective admettant une métrique kählérienne complète, pourvu que le groupe $H_2^w(X,H_X)$ soit de dimension finie. Il a montré dans ce cas que $H_2^w(X,H_X)$ admet une structure de Hodge pure de poids $w+v$ (voir [Zu]).

Ensuite, Cattani, Kaplan, Schmid [C-K-S2] et Kashiwara et Kawai [K-K] ont montré que si $\overline{X}$ est une compactification lisse de X telle que $\overline{X} \setminus X$ est un diviseur à croisements normaux, pour une métrique de type Poincaré au voisinage des croissements, $IH^w(\overline{X},H_X)$ est isomorphe à $H_2^w(X,H_X)$ et donc porte une structure de Hodge de poids $w+v$.

6.B. Travaux de Saito

Soit S une variété complexe et H_S un système local d'espaces vectoriels réels. Le fibré holomorphe associé $\mathcal{H}_S = H_S \otimes \mathcal{O}_S$ admet une connexion plate $\nabla = 1 \otimes d$. Donc $\mathcal{D}_S$, le faisceau d'opérateurs différentiels sur S agit sur $\mathcal{H}_S$ (l'action d'un champs holomorphe ξ est donnée par $s \mapsto \nabla_\xi s$) munissant $\mathcal{H}_S$ d'une structure de $\mathcal{D}_S$-module. En effet, un tel $\mathcal{D}_S$-module est un $\mathcal{D}_S$-module *cohérent* et même *holonome.* Les définitions de ces notions peuvent être trouvées en [Bo], où on peut aussi trouver des détails de la discussion qui suit.

Dans le cadre de la géométrie algébrique, on rencontre classiquement la situation où S est un ouvert de Zariski d'une variété algébrique projective X et $D := X \setminus S$ est un diviseur. Dans ce cadre, on a la notion de connexion ayant des *singularités régulières* le long de D et on sait qu'ici ∇ admet de telles singularités. On peut même montrer que $(\mathcal{H}_S,\nabla) \mapsto H_S$ établit une équivalence entre la catégorie des fibrés holomorphes sur S munis d'une connexion ayant des singularités régulières (le long de D) et la catégorie des systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes (*correspondance de "Riemann-Hilbert"*).

On peut étendre la notion de régularité aux $\mathcal{D}_S$-modules holonomes et dans ce cadre il y a aussi une correspondance de “Riemann-Hilbert”. Pour expliquer cela on a besoin de la notion de *faisceau pervers*. Remarquons d'abord que la structure de $\mathcal{D}_S$-module permet de définir un complexe, dit *complexe de De Rham* $\mathrm{DR}(\mathcal{M}) := \Omega_S^\bullet \otimes \mathcal{M}$. On regarde ensuite ce complexe dans une catégorie dérivée convenable où, rappelons-le, on identifie deux complexes lorsque un morphisme de l'un dans l'autre induit un isomorphisme entre les faisceaux de cohomologie [Ill]. On dit alors qu'ils sont *quasi-isomorphes*. Dans le cas d'un $\mathcal{D}_S$-module provenant d'un système local on a seulement un groupe de cohomologie en dimension zéro : le système local lui-même (lemme de Poincaré holomorphe). Et donc dans ce cas $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S)$ est quasi-isomorphe à H_S.

Une construction importante dans cette catégorie est celle de la *dualité de Verdier*. On ne donne pas les détails ici ; il suffit de savoir que le complexe dual au sens de Verdier à $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S)$ est représenté par le complexe $\mathrm{DR}(\mathcal{H}_S^\vee)$ et donc dans la catégorie dérivée le dual de H_S est $H_S^\vee$.

On dit qu'un complexe $\mathcal{K}^\bullet$ de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels est *pervers* si le faisceau de cohomologie en dimension j de $\mathcal{K}^\bullet$ ainsi que celui du dual de Verdier est constructible de support de dimension au plus égal à $-j$. Un mot d'explication : la convention est telle que le complexe de De Rham d'un $\mathcal{D}_S$-module commence en degré $-n$ et donc un système local H_S est pervers car le support de H_S et celui de son dual est S et donc de dimension n. Plus généralement, un système local H_S sur un ouvert dense de Zariski S d'une variété algébrique X s'étend de façon minimale en un faisceau pervers $IC(H_S)$ sur X. Dans ce cas, si X est compacte on a $IH^w(X, H_S) = H^w(X, IC(H_S))$.

On pourra ainsi regarder un faisceau pervers comme une généralisation d'un système local ; la correspondance qui associe à un $\mathcal{D}_S$-module holonome son complexe de De Rham induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_S$-modules holonomes à singularités régulières et la catégorie des faisceaux pervers de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (théorème de la correspondance de Riemann-Hilbert [Kas], [Me1, Me2]). Le lecteur pourra se convaincre que ce cadre nouveau est une généralisation conséquente du §2.

Maintenant on suppose, que le système local H_S porte une variation de structure de Hodge de poids w. La filtration de Hodge induit une filtration dite *bonne* $\mathcal{M}_p := \mathcal{F}^{-p}$, c'est-à-dire l'action des opérateurs d'ordre $\leqslant 1$ envoient $\mathcal{M}_p$ dans $\mathcal{M}_{p+1}$ (traduction de la transversalité de Griffiths). Un tel $\mathcal{D}_S$-module filtré est un exemple d'un *module de Hodge de poids* w. La définition de ces objets est très indirecte, comme on va le voir, et c'est un théorème difficile de prouver qu'une variation de structure de Hodge est un module de Hodge. Voir [Sa] pour une démonstration ainsi que pour des détails de la discussion qui suit.

Saito définit les modules de Hodge de façon récurrente. Il commence par ceux qui ont leur support dans un point $s \in S$: ce sont simplement les structures de Hodge (réelles) avec filtration de Hodge croissante ($F_p := F^{-p}$). En prenant l'image directe par l'inclusion $s \to S$ on obtient un faisceau constructible dans S considéré comme faisceau pervers et donc comme $\mathcal{D}_S$-module. La filtration de Hodge en en fait un $\mathcal{D}_S$-module filtré et on obtient un objet dans la catégorie $MF_h(\mathcal{D}_S)$ des $\mathcal{D}_S$-modules filtrés (pour obtenir une structure réelle, il faut prendre le produit fibré avec la catégorie des faisceaux pervers réels).

Dans le §4.C, on a rappelé la définition des *cycles proches* et *cycles évanescents* relatifs aux zéros d'une fonction holomorphe $g : S \to \mathbb{C}$ non-constante : $\psi_g(\mathbb{C}_S) = i^*Rk_*\mathbb{C}_{\tilde{S}} = i^*Rk_*k^*\mathbb{C}_S$ et $\phi_g(\mathbb{C}_S)$ étant le cône sur $\{\mathbb{C}_{S_0} = i^*\mathbb{C}_S \to i^*Rk_*k^*\mathbb{C}_S\}$. Si on remplace $\mathbb{C}_S$ par un complexe borné $\mathcal{K}^\bullet$ sur S, on arrive à $\psi_g(\mathcal{K}^\bullet)$ resp. $\phi_g(\mathcal{K}^\bullet)$. On a vu que la monodromie agit sur ces complexes et induit des filtrations par le poids.

Gabber (voir [Bry]) a montré que pour $\mathcal{K}^\bullet$ pervers, ces complexes (décalés par $[-1]$) sont des faisceaux pervers sur S_0 et Saito a proposé une construction des foncteurs ϕ et ψ au niveau des $\mathcal{D}_S$-modules holonomes filtrés. En particulier les modules “proches” et “évanescents” qui résultent admettent des filtrations par le poids $W_\bullet$. Saito maintenant complète la définition récurrente de ses Modules de Hodge en deux étapes : d'abord il se restreint à une sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_S)$ telle que ses objets possèdent de bonnes propriétés par rapport aux foncteurs ϕ et ψ et ensuite, il demande qu'un module $\mathcal{M}$ dans cette sous-catégorie soit un module de Hodge si et seulement si c'est le cas pour les modules W-gradués de $\psi_g(\mathcal{M})$ et $\phi_g(\mathcal{M})$ (plus précisément : il faut restreindre au sous-module maximal sur lequel T agit de façon unipotente) pour n'importe quelle fonction $g : S \to \mathbb{C}$. Puisque ces modules on un support de dimension strictement plus petite et puisqu'on connaît les Modules de Hodge à support de dimension 0, la définition récurrente est ainsi complète.

L'application la plus célèbre du fait qu'une variation de structure de Hodge H_S de poids v parametrée par une variété analytique complexe S est un module de Hodge de poids v est le théorème suivant qu'on a déjà annoncé : lorsque S est un ouvert de Zariski dans une variété kählérienne compacte X, le groupe $IH^w(X, H_S)$ porte une structure de Hodge polarisée de poids $v + w$. En effet, on a vu que $IH^w(X, H_S) = H^w(X, IC(H_S))$ et que H_S et donc aussi $IC(H_S)$ sont des Modules de Hodge de poids v. Donc $H^w(X, IC(H_S))$ en tant que module de Hodge supporté dans un point, porte une structure de Hodge (de poids $v + w$).

En particulier, la structure polarisée sur $IH^w(X, \mathbb{Q})$ est un facteur direct de la structure pure sur $IH^w(\tilde{X}, \mathbb{Q})$ où $\tilde{X}$ est une résolution des singularités de X.

Partie II. Symétrie miroir et variétés de Calabi-Yau

7. Introduction à la symétrie miroir

La symétrie miroir est un phénomène qui a une origine "physique". Il n'y a pour l'instant que des définitions mathématiques conjecturales. Le but de ce paragraphe est de suggérer une définition très incomplète de ce phénomène et de mettre en évidence quelques implications mathématiques. Le cadre est la classe des variétés dites de Calabi-Yau ; nous décrivons ces variétés en détail.

7.A. Motivation de la symétrie miroir

La symétrie miroir est un phénomène d'origine "physique" qui n'a donc pas à ce jour une définition mathématique définitive. Rappelons pour exciter la curiosité du lecteur la définition qui apparaît dans la littérature physique [G-P], [C-O-G-P], [G]. Le phénomène symétrie miroir vient de l'étude des théories superconformes (2,2) avec charge centrale $c = 9$. Les propriétés des champs conformes de ces théories sont liées à la géométrie des modèles sigma non linéaires basés sur des variétés de Calabi-Yau. Une définition précise de ces variétés est reportée au paragraphe suivant. Disons seulement que ces variétés apparaissent pour assurer l'invariance conforme. Dans ce cadre assez hostile pour le mathématicien géomètre, les physiciens ont mis en évidence une correspondance remarquable entre les propriétés abstraites des champs conformes et les propriétés géométriques des réalisations en termes de modèles sigma. Cette correspondance conduit naturellement à déformer la structure complexe et (ou) une classe de Kähler sur une variété de Calabi-Yau. Ce sont les modèles A et B des physiciens [G-P]. L'asymétrie apparente qui n'est qu'une ambiguïté de signe, conduit à des modèles géométriques définitivement distincts réalisant une même théorie conforme des champs. Pour une variété de Calabi-Yau X, de fibré tangent holomorphe T_X, les objets liés à la même théorie $H^1(X, T_X)$ et $H^1(X, T_X^*) = H^1(X, \Omega_X^1)$ sont totalement différents du point de vue de la géométrie. En fait dans le §7.C on verra que $\dim H^1(X, T_X)$ est le nombre de paramètres pour la structure complexe, tandis que $\dim H^1(X, T_X^*) = h^{1,1}(X)$ est le nombre maximal de classes de Kähler indépendantes sur X.

Ceci conduit à postuler que les variétés de Calabi-Yau (on se limite à la dimension trois) doivent apparaître par paires, disons X et X^* qui réalisent ces deux modèles. On dit que X^* est *la variété miroir* de X (et vice-versa). Il y a peut-être une définition physique plus définitive mais non assimilable telle quelle mathématiquement, que l'on peut résumer en une identité

$$Z = Z^*$$

entre fonctions de partition (intégrales de Feynman). Les implications mathématiques les plus naïves sont au niveau des nombres de Hodge de X et X^*, la relation de symétrie

$$h^{2,1}(X^*) = h^{1,1}(X); \quad h^{1,1}(X^*) = h^{2,1}(X).$$

Naturellement cette seule symétrie apparente n'est pas suffisante pour faire de X^* la variété miroir de X. Entre X et X^* existe une relation plus profonde qui relie l'espace des déformations de la structure complexe de X à l'espace des déformations de la classe de Kähler de X^* et vice-versa. Cette relation est à l'origine des applications conjecturales à des propriétés de géométrie énumérative sur X, comme esquissées dans le §10. Le lecteur trouvera dans le texte de C. Voisin [V] une explication plus détaillée. Dans la suite, on va s'attacher à préciser les aspects qui relèvent de la théorie de Hodge. Ces aspects sont au nombre de trois :

i) symétrie des nombres de Hodge,
ii) définition de l'accouplement de Yukawa,
iii) Utilisation de la structure Hodge limite pour étudier le comportement asymptotique de l'accouplement de Yukawa.

Ces points sont traités dans les paragraphes qui suivent.

7.B. Construction des variétés de Calabi-Yau

Du point de vue de la géométrie algébrique, une variété de Calabi-Yau est une variété (algébrique) projective lisse (complexe) V, telle que le faisceau canonique K_V est trivial ($K_V = \Omega^n_V \cong \mathcal{O}_V$), et $h^{p,0} = 0$ pour $p = 1, \ldots, n-1$, ($n = \dim V$). On se limite au cas $n = 3$; noter que $h^{1,0} = 0$ implique $h^{2,0} = 0$, car par dualité de Serre $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ est le dual de $H^2(V, \mathcal{O}_V)$, vu que $K_V \cong \mathcal{O}_V$. On exige aussi que le groupe fondamental $\pi_1(V)$ est fini, pour éviter des situations marginales. En géométrie différentielle ce sont les variétés kählériennes à courbure de Ricci nulle (se reporter à [Dem]), de groupe d'holonomie exactement $SU(3)$. Directement lié à ceci, il y a le résultat de classification suivant, dû à plusieurs auteurs (voir [Beau]) : Soit X une variété kählérienne compacte de première classe de Chern nulle. Il existe un revêtement fini non ramifié $\widetilde{X} \to X$ tel que $\widetilde{X}$ est isomorphe à un produit $T \times \big(\prod_i V_i\big) \times \big(\prod_j W_j\big)$, où T est un tore complexe, V_i est une variété de Calabi-Yau simplement connexe, et W_j est une variété symplectique (il existe une 2-forme holomorphe qui est non dégénérée en tout point).

Dans le contexte des variétés de Calabi-Yau, le très important théorème de Yau [Y1] (conjecture de Calabi) joue bien sûr un role clé :

Théorème. (Yau) *Soit X une variété de Calabi-Yau avec une métrique kählérienne g de forme de Kähler $\omega \in H^{1,1}(X)$. Il existe une unique métrique kählérienne g_Y à courbure de Ricci nulle (métrique de Yau) telle que ω_Y étant sa forme associée, on ait $[\omega] = [\omega_Y] \in H^{1,1}(X)$.*

Il est aisé de construire des exemples de variétés de Calabi-Yau. Soient $H_1, \ldots, H_r$ des hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ ($N = r + 3$), de degré respectifs $d_1, \ldots, d_r$ avec $N + 1 = \sum_i d_i$. Si l'intersection $V = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$ est transversale, V est alors lisse, et la formule d'adjonction montre que $K_V \cong \mathcal{O}_V$, donc V est de Calabi-Yau (on a ici $\pi_1(V) = 0$).

Parmi les exemples, on peut prendre pour V une hypersurface de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$ (quintique), une intersection de deux hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^5$, de trois quadriques de $\mathbb{P}^6$ (voir le §10 pour ces exemples).

On peut plus généralement remplacer $\mathbb{P}^N$ par un produit $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ ou toute autre variété, dont le faisceau anticanonique est ample (i.e. : K_V^{-1} est ample). Une hypersurface est alors spécifiée par son équation, i.e. une forme de multidegré $d_i = (d_{1i}, \ldots, d_{si})$. On forme ainsi un tableau :

	H_1		H_r
n_1	d_{11}	$\cdots$	d_{1r}
n_2	d_{21}	$\cdots$	d_{2r}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n_s	d_{s1}	$\cdots$	d_{sr}

et V est l'intersection $V = H_1 \cap \cdots \cap H_r$, avec $\dim V = 3$ si $\sum_i n_i = r+3$. La condition $K_V \cong \mathcal{O}_V$ équivaut à $\sum\limits_{j=1}^{r} d_{ij} = n_i + 1$, $(i = 1, \ldots, s)$.

7.1. Exemple. (variété de Tian-Yau)

	H_1	H_2	H_3
3	3	0	1
3	0	3	1

On peut prendre pour V l'intersection complète des hypersurfaces $\sum\limits_{i=0}^{3} X_i^3 = 0$, $\sum\limits_{i=0}^{3} Y_i^3 = 0$ et $\sum\limits_{i=0}^{3} X_i Y_i$ dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, où (X_i), (Y_i) sont les coordonnées homogènes dans les deux exemplaires de $\mathbb{P}^3$. Noter que dans cet exemple, la permutation circulaire des coordonnées, fournit une action libre du groupe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et $W = V/G$ est alors une variété de Calabi-Yau avec pour caractéristique d'Euler -6 ("modèle de nombre de génération 3" donc "physiquement acceptable").

A ce stade, la question principale peut se résumer à : quelle construction géométrique, la variété de Calabi-Yau X étant donnée, va conduire à la variété miroir X^*, en fait à une "variété candidate".

Des arguments issus de la physique laissent penser que dans beaucoup de cas, X^* s'obtiendra à partir de X en faisant un quotient par un groupe fini G d'automorphismes de X, le groupe G agissant trivialement sur $H^{3,0}(X)$, pour assurer à une désingularisation convenable de X/G le caractère Calabi-Yau ; c'est la méthode des orbifolds des physiciens. A ce stade des difficultés variées apparaissent ; elles sont liées aux singularités qui résultent de l'existence de points fixes, car l'action de G n'est pas nécessairement libre. Si $\hat{X}$ est une résolution des singularités de X/G, avec $K_{\hat{X}} \cong \mathcal{O}_{\hat{X}}$

(on peut prouver qu'une telle résolution existe dans essentiellement tous les cas [B-M]), se pose le problème du calcul des nombres de Hodge $H^{p,q}(\hat{X})$, disons à partir de ceux de X et des données liées à l'action de G sur X. Pour la caractéristique d'Euler $\chi = \sum(-1)^{p+q}h^{p,q}$ on a la formule de Dixon-Vafa-Witten

$$\chi(\hat{X}) = \frac{1}{|G|}\sum_{gh=hg}\chi(X^g \cap X^h)$$

où la somme porte sur les couples g, h d'éléments de G qui commutent ($gh = hg$) et $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, la variété des point fixes de g. Noter que si $\hat{X}$ est le miroir de X, $\chi(\hat{X}) = -\chi(X)$.

Assez remarquablement, pour une formule analogue a été proposée par Batyrev et Zaslow [Za] pour les nombres de Hodge. Cette formule conjecturale est :

$$h^{p,q}(\hat{X}) = \sum_{\{g\}}\dim\left(H^{p-f_g,q-f_g}(X^g)^{C(g)}\right)$$

où $C(g)$ est le commutant de g dans G, et $\{g\}$ la classe de conjugaison de g. Pour définir l'entier f_g on regarde l'action de l'automorphisme g_x induit sur l'espace tangent T_xX à $x \in X^g$. Du fait que g induit l'identité sur $H^{3,0}$, le déterminant de g_x est 1 et donc, si $e^{-2\pi i\lambda_j}$, $0 < \lambda_j < 1$ sont les valeurs propres de g_x sur l'espace T_xX/T_xX^g normal à X^g (ces valeurs sont indépendantes du choix du point $x \in X^g$), la somme $f_g = \sum_j \lambda_j$ est bien un entier.

Il n'est pas difficile de vérifier que la structure du diamant de Hodge d'une variété de Calabi-Yau est préservée et donc que les $h^{p,q}(\hat{X})$ sont spéculativement les nombres de Hodge d'une variété de Calabi-Yau. Cela a été vérifié pour la construction de la variété miroir par la méthode des polyèdres de Batyrev.

Pour avoir assez d'arguments objectifs validant la distribution des variétés de Calabi-Yau en paires (avec peut être des exceptions), il est nécessaire d'élargir le procédé de construction des variétés de Calabi-Yau, car si X est une hypersurface de $\mathbb{P}^4$, il y a peu de chances que $\hat{X}$ soit aussi une hypersurface. Naturellement on est amené à remplacer $\mathbb{P}^n$ ou $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ dans la construction du début par un espace projectif avec poids, ou un produit de tels espaces. Considérons un espace projectif avec poids $\mathbb{P}^r(k_1, \ldots, k_s)$, qui est la variété algébrique ayant pour points les $(r+1)$-uples $(z_1, \ldots, z_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\}$, modulo la relation d'équivalence

$$(z_1, \ldots, z_r) \sim (\lambda^{k_1}z_1, \ldots, \lambda^{k_{r+1}}z_{r+1}) \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*).$$

On vérifie que la construction de l'espace projectif $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}^r(1, \ldots, 1)$ se généralise à cette situation, qui peut cependant conduire à une variété singulière. Une hypersurface de degré d est le lieu des zéros d'un polynôme quasi-homogène $P(z) = \sum_{i_1k_1+\cdots i_{r+1}k_{r+1}=d} c_{i_1\cdots i_{r+1}}z_1^{i_1}\cdots z_{r+1}^{i_{r+1}}$. Si $\{P = dP = 0\}$ entraîne $z = 0$ dans $\mathbb{C}^{r+1}$ on dit que P est *transverse*. Un tel polynôme définit un hypersurface lisse et si $d = \sum k_i$ conduit à une hypersurface de Calabi-Yau ; on supposera $r = 4$, pour obtenir une hypersurface de dimension 3. L'expérience montre que dans la liste des poids $\{k_i\}$ tels qu'il existe un polynôme quasi-homogène transverse de degré $d = \sum k_i$, la distribution des nombres de Hodge $(h^{1,1}, h^{2,1})$ est essentiellement symétrique, c'est-à-dire que dans 90% des cas, la paire $(h^{2,1}, h^{1,1})$ apparaît. La meilleure façon d'expliquer l'absence de symétrie complète est d'invoquer la construction de la symétrie miroir par des méthodes toriques proposée par Batyrev [Ba]. Brièvement la dualité naïve $X \leftrightarrow X^*$ coïncide dans les construction ci-dessus avec la dualité combinatoire des polyèdres convexes qui ont la propriété de reflexivité (loc. cit.), le polyèdre étant le polyèdre de Newton du polynôme P. Il y a alors des formules pour obtenir de manière purement combinatoire les nombres de Hodge. L'exemple de l'hypersurface quintique peut être traité par par ce procédé (voir le §10).

Le lecteur consultera l'article [H-K-S-Y] pour une discussion détaillée sur l'utilisation des méthodes toriques.

7.C. Déformations

Les nombres de Hodge d'une variété de Calabi-Yau sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

On a $h^{2,1} = \dim H^1(\Omega^2_X) = \dim H^1(X, T_X)$ car $T_X = T_X \otimes \Omega^3_X \cong \Omega^2_X$. Dans le paragraphe 3.C. (voir 3.8) on a vu que ce nombre donne le nombre de paramètres pour la structure complexe, s'il existe une déformation verselle (avec une base non-singulière).

On s'intéresse à la structure de Hodge sur $H^3(X, \mathbb{R})$ polarisée par la forme d'intersection (alternée et unimodulaire). On a

$$H^3(X, \mathbb{C}) = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3}$$

et

$$F^3 = H^{3,0},\ F^2 = H^{3,0} \oplus H^{2,1},\ F^1 = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2}.$$

Posons $b = h^{2,1}$. Alors F^2 est un sous-espace totalement isotrope de $H^3(X, \mathbb{C})$, pour la forme alternée Q (cup-produit), et $F^1 = (F^3)^\perp$. Le domaine des périodes pour les structures de Hodge de ce type est de la forme $D(b) = \mathrm{Sp}(2b+2, \mathbb{R})/U(1) \times U(b)$. C'est un domaine de dimension $\frac{1}{2}(b+1)(b+2)$.

Dans le §3.C on a brièvement traité les déformations et on a vu qu'on ne peut pas attendre en général qu'il existe une déformation verselle avec une base non-singulière. Mais pour les variétés de Calabi-Yau c'est effectivement le cas comme le montre le théorème de Tian, Todorov et Bogomolov (voir [T]) :

7.2. Théorème. *Une variété de Calabi-Yau possède une déformation locale universelle de base S lisse.*
[Il suffit que la variété soit kählérienne avec une première classe de Chern nulle.]

Donc ici $h^{2,1}$ est réellement de nombre de paramètres effectifs pour décrire les variations de la structure complexe [C-O].

On suppose maintenant que la base S est simplement connexe. Alors l'application de périodes est une application holomorphe $p : S \to D(b)$. Elle se factorise en $q : S \to \mathbb{P}^{2b+1}$, ou $\mathbb{P}^{2b+1}$ est l'espace projectif des droites $H^{3,0}(X_s) \subset H^3(X_s, \mathbb{C})$ car p décrit la position de $H^{3,0}(X_s) \oplus H^{2,1}(X_s)$ dans le groupe de cohomologie $H^3(X_s)$ tandis que q décrit la position de $H^{3,0}(X_s)$.

Maintenant nous voulons expliquer le théorème de Bryant et Griffiths de [B-G]. On peut trivialiser localement le système local $\{H_3(X_s, \mathbb{Z})\}$, au moyen d'une base symplectique, donc une base de 3 cycles $\{\gamma_i, \delta_j\}_{i,j=0,\dots,b}$, avec relativement au produit d'intersection :

$$(\gamma_i, \delta_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad (\gamma_i, \gamma_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0.$$

La base Poincaré duale $\{\alpha_i, \beta_j)_{i,j=0,\dots,b}$ fournit une trivialisation du système local $\mathbb{R}^3 f_*(\mathbb{Z})$. Soit ω une section locale de $F^3 = f_*(\omega^3_{X/S})$ qui trivialise ce fibré. On considère les périodes de ω :

$$\zeta_i(s) = \int_{\gamma_i} \omega(s), \qquad \xi_j(s) = \int_{\delta_j} \omega(s)$$

c'est-à-dire :

$$\text{(per)} \qquad \omega = \sum_i \zeta_i \alpha_i + \sum_j \xi_j \beta_j.$$

L'application des périodes "partielle" $q : S \to \mathbb{P}^{2b+1}$ se décrit comme

$$s \mapsto (\zeta_0(s), \dots, \zeta_b(s), \xi_0(s), \dots, \xi_b(s))$$

et on peut regarder "la moitié" $q' : S \to \mathbb{P}^b$ donnée par les γ-périodes $s \mapsto (\zeta_0(s), \dots, \zeta_b(s))$

7.3. Théorème (Bryant-Griffiths). *L'application q' est une immersion de sorte que les γ-périodes $(\zeta_0, \dots, \zeta_b)$ servent comme paramètres "homogènes" sur S et les δ-périodes ξ_b sont des fonctions holomorphes de $\zeta_0, \dots, \zeta_b$.*

Indication sur la preuve : Elle est basée sur une réinterprétation de l'application des périodes q comme une immersion de Legendre. Pour être précis, une variété de contact est une paire $(M, \mathcal{L})$ avec M une variété complexe de dimension impaire $2m+1$ et $\mathcal{L} \subset \Omega^1$ un sous fibré en droites du fibré cotangent qui est non-dégénéré, ce qui veut dire que pour toute section locale $\omega \neq 0$ de $\mathcal{L}$,

$$\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0.$$

Une variété de Legendre associée à $(M, \mathcal{L})$ est une immersion $f : S \to M$ avec $\dim S = m$ telle que $f^*\omega = 0$ pour toute section locale ω de $\mathcal{L}$.

Si $H = H^3(X, \mathbb{C})$, la forme d'intersection sur H définit une structure de contact sur $\mathbb{P}(H)$ (X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, et $m = h^{2,1}$). En fait, on peut supposer qu'on a choisi une base symplectique de H. Soit $\{p_1, \ldots, p_{m+1}, q_1, \ldots, q_{m+1}\}$ le système de coordonnées correspondant. Il suffit de spécifier une 1-forme ω sur les ouverts standards de $\mathbb{P}(H)$, disons sur $U_i = \{p_i \neq 0\}$:

$$\omega_i = -dq_i + \sum_{j \neq i}(q_j dp_j - p_j dq_j).$$

On vérifie facilement que ω_i est une base locale sur U_i d'un sous-faisceau de $\Omega^1_{\mathbb{P}(H)}$ de rang un, localement libre et isomorphe à $\mathcal{O}(-2)$ (comparer ω_j et ω_k sur $U_j \cap U_k$). On a clairement $\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0$ et donc on obtient une structure de contact sur $\mathbb{P}(H)$.

Il s'agit de prouver que l'application des périodes est une immersion de Legendre. C'est d'abord une immersion (différentielle injective en tout point), par le fait que la différentielle dq, c'est-à-dire δ (§3.C) est injective. Le lecteur le vérifiera facilement en tenant compte de la trivialité de la classe canonique. La propriété de Legendre est une reformulation des propriétés infinitésimales de l'application des périodes développées au §3.C (se reporter au §10.A). Pour conclure on utilise les théorèmes de structure des variétés de contact détaillés dans [B-G]. □

La différentielle dq étant injective, les dérivées $\partial q / \partial \zeta_i$, $i = 0, \ldots, b$ sont indépendantes, et donc les $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \zeta_i}} \omega(s) \in F^2(X_s)$ forment une base.

On peut maintenant explicitement décrire l'application des périodes $p : S \to D(b)$ comme donnée par la matrice

$$\varpi = \Big(\int_{\gamma_k} \frac{\partial \omega(s)}{\partial \zeta_i}, \int_{\delta_k} \frac{\partial \omega(s)}{\partial \zeta_i} \Big),$$

matrice de type $(b+1) \times (2b+2)$ qui décrit la position de $F^2(X_s)$ dans $H^3(X_s)$. De la relation (per) ci-dessus on tire que $\varpi = [\mathbb{1}, \tau]$, avec τ_{ij} symétrique. Du fait que la forme $-\mathrm{i}\omega \wedge \bar{\omega}$ ainsi que les formes $\mathrm{i}\alpha \wedge \bar{\alpha}$ pour $\alpha \in H^{2,1}$ sont positives, on obtient que $\operatorname{Im} \tau$ est de signature $(1, b)$. On peut aussi contrôler qu'un changement de base symplectique transforme τ en :

$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2b+2, \mathbb{Z})$$

comme dans le demi-espace de Siegel (§3.B).

8. Cohomologie d'une hypersurface

On considère d'abord une variété projective lisse P de dimension $n+1$ et une hypersurface $X \subset P$ lisse. Nous voulons relier les groupes de cohomologie de $P \smallsetminus X$ et les groupes de cohomologie primitive de X. Ensuite on applique cette construction à $\mathbb{P}^{n+1}$ où on utilise les formes rationnelles ayant des pôles le long de X. Cela donne la description de Griffiths ([Grif2] de la cohomologie primitive d'une hypersurface. Cette description a été généralisée par Dimca [Dim] et par d'autres au cas d'une intersection complète.

8.A. Cohomologie du complémentaire

Rappelons d'abord le théorème de Lefschetz "faible" qui implique que la cohomologie X diffère de celle de P seulement en rang n :

8.1. Théorème (Lefschetz)**.** *Soit X très ample et soit $i : X \to P$ l'injection. On a :*

$$i^* : H^m(P, \mathbb{C}) \to H^m(X, \mathbb{C}) \quad \textit{est} \begin{cases} \textit{un isomorphisme si} & m \leqslant n-1 \\ \textit{injectif si} & m = n \end{cases}$$

On aura besoin de la conséquence suivante :

8.2. Corollaire. *Soit X un diviseur très ample. Soit*

$$i_* : H^n(X, \mathbb{C}) \to H^{n+2}(P, \mathbb{C})$$

l'adjoint de $i^* : H^n(P, \mathbb{C}) \to H^n(X, \mathbb{C})$ par rapport au cup-produit. Alors i_* est surjectif et le noyau est contenu dans la cohomologie primitive $\operatorname{Prim}^n(X, \mathbb{C})$ *et on a* $\ker i_* = \operatorname{Prim}^n(X, \mathbb{C})$ *si* $\operatorname{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$.

Preuve. La première assertion est évidente. Le noyau consiste en les classes $[\alpha]$ telles que $\int_P \partial^n \alpha \wedge \beta = \int_P \alpha \wedge i^* \beta = 0$ quel que soit $[\beta] \in H^n(P, \mathbb{C})$. En particulier on peut prendre $[\beta]$ de la forme (classe de Kähler ω) $\wedge\, i^*$ (classe d'une $n-2$-forme sur P). Mais $i^* : H^{n-2}(P, \mathbb{C}) \to H^{n-2}(X, P)$ est un isomorphisme (théorème de Lefschetz de nouveau) et donc $[\alpha] \wedge \omega = 0$, c'est-à-dire $[\alpha]$ est primitive. $\square$

L'application i_* apparaît dans la suite exacte de Gysin :

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{m-2}(X, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_*} H^m(P, \mathbb{Z}) \to H^m(P \smallsetminus X, \mathbb{Z}) \\ \xrightarrow{\partial} H^{m-1}(X, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_*} H^{m+1}(P, \mathbb{Z}) \ \cdots, \end{aligned}$$

obtenue comme suit. Soit $T \subset P$ un voisinage tubulaire de X dans P. Comme X est un rétracte de T on a $H^k(T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^k(X, \mathbb{Z})$ tandis que $H^k(T, T \smallsetminus X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^{k-2}(X, \mathbb{Z})$ ('isomorphisme de Thom'). Aussi, l'inclusion $(T, T \smallsetminus X) \to (P, P \smallsetminus X)$ est une excision et donc $H^k(P, P \smallsetminus X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^k(T, T \smallsetminus X, \mathbb{Z})$. La suite longue du couple $(P, P \smallsetminus X)$ donne alors la suite de Gysin.

Il suffit donc de calculer la partie "pertinente" de la cohomologie de $P \setminus X$. Ce calcul se fait en utilisant des complexes de formes rationnelles ayant seulement des pôles le long de X.

Rappelons d'abord le lemme de Poincaré holomorphe (voir le §1) :

$$\forall p \geqslant 1,\ d\alpha = 0,\ \alpha \in \Omega^p_P \quad \Longrightarrow \quad \alpha = d\beta,\ \beta \in \Omega^{p-1}_P.$$

Cette assertion est équivalente à l'exactitude du complexe $\Omega^\bullet_P$. Ce complexe donne une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$. Le groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^m(\Omega^\bullet_P)$ est donc égal à $H^m(P,\mathbb{C})$. De manière analogue $\Omega^\bullet_{P\setminus X}$ calcule la cohomologie de $P \setminus X$.

On passera aux formes ayant des pôles et on pose :

$$\begin{aligned}
\Omega^p_P(k) &:= \Omega^p_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(kX) \quad \text{(faisceau de p-formes méromorphes}\\
&\qquad \text{ayant au plus un pôle d'ordre k le long de X)}\\
\mathcal{Z}^p_P(k) &: = \{\omega \in \Omega^p_P(k) |\ d\omega = 0\}\\
\Omega^p_P(*) &: = \text{faisceau de p-formes méromorphes}\\
&\qquad \text{ayant des pôles seulement le long de X.}
\end{aligned}$$

L'observation simple mais néanmoins centrale est :

8.3. Calcul. *Soit $\alpha \in \mathcal{Z}^p_P(k), k \geqslant 2$. Alors, si $f = 0$ est une équation locale de X, on a :*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{df \wedge \beta}{f^k} + \frac{\gamma}{f^{k-1}}, \qquad \textit{avec } \beta,\ \gamma \textit{ holomorphes sans } df\\
&= -\frac{1}{k-1} d\left(\frac{\beta}{f^{k-1}}\right) + \frac{\gamma + \frac{1}{k-1}d\beta}{f^{k-1}}.
\end{aligned}$$

En d'autre termes, si l'ordre du pôle est $\geqslant 2$ on peut, localement, baisser l'ordre modulo des formes exactes.

Finalement, on arrive à une décomposition

$$\alpha = \beta \wedge \frac{df}{f} + \gamma,$$

avec β et γ holomorphes. Le *résidu* de α est la forme $\mathrm{res}(\alpha) = \beta|X$, définissant une flèche

$$\mathrm{res} : \mathcal{Z}^p_P(1) \to \Omega^{p-1}_X.$$

L'idée est d'utiliser ces calculs en cohomologie de De Rham, utilisant des formes C^∞ et des partitions de l'unité pour globaliser. On commence par une forme rationnelle sur P de type $(n+1,0)$ et avec au plus un pôle le long de X d'ordre disons $\leqslant n+1-p$. On la regarde comme forme C^∞ sur $P \setminus X$ et on baisse l'ordre du pôle utilisant le calcul précédent. On obtient une forme C^∞ fermée de type $(n+1,0)+(n,1)$ à cause de $d\beta$ (β et γ ne restent pas nécessairement holomorphes quand on globalise avec des partitions d'unité). Après $n-p$ étapes on arrive à une forme fermée de type $(n+1,0)+\cdots(p+1,n-p)$ ayant un pôle d'ordre $\leqslant 1$. Prenant son résidu on trouve une forme C^∞ sur X de type $(n,0)+\cdots+(p,n-p)$ qui est fermée. Cette forme répresente une classe dans $F^pH^n(X,\mathbb{C})$. On peut vérifier que cette construction est bien définie au niveau des classes de cohomologie et que la flèche :

$$\Gamma(\Omega_P^{n+1}(n-p+1)/d\Gamma(\Omega_P^n(n-p)) \to F^pH^n(X,\mathbb{C})$$

est injective et s'envoie surjectivement sur la partie primitive, au moins dans des cas favorables comme $P=\mathbb{P}^{n+1}$. On va donner une autre démonstration de cette identification qui reste dans le cadre de la géométrie algébrique.

On a d'abord besoin du lemme de Poincaré dans le cadre des formes avec pôles :

8.4. Lemme.

i) On suppose $p\geqslant 1$. Le complexe (commençant en degré p) :

$$\mathcal{P}_P^p := \left\{\Omega_P^p(1) \xrightarrow{d} \Omega_P^{p+1}(2) \xrightarrow{d} \cdots \Omega_P^{n+1}(n-p+2) \to 0\right\}$$

est exact et donne donc une résolution de $\mathcal{Z}_P^p(1)$. Par conséquent

$$H^q(M,\mathcal{Z}^p(1)) = \mathbb{H}^{p+q}(M,\mathcal{P}_P^p).$$

ii) Les groupes $H^q(\Omega^\bullet(*))$ de cohomologie du complexe

$$\Omega^\bullet(*) = \{\mathcal{O}_P(*) \to \Omega^1(*) \to \Omega^2(*) \to \dots\}$$

sont nuls pour $q\geqslant 2$ tandis que $H^0(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_P$ et $H^1(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_X$.

Preuve. Le complexe $\Omega_P^\bullet(*)$ coïncide avec $\Omega_P^\bullet$ hors de X et alors est exacte au dessus de $P\smallsetminus X$. Prenons un point $x\in X$ et un système de coordonnées $f,x_1,\dots,x_n$ centré en x tel que X soit donnée par $f=0$. Soit $\alpha\in\Omega_P^p(k)$ avec $k\geqslant 2$. Dans les coordonnées choisies on écrit localement

$$\alpha = \frac{df\wedge\beta+\gamma}{f^k},\quad \beta,\gamma \quad \text{holomorphe et sans } df$$

Le calcul central montre que $\alpha\in\Omega^p(1)$ modulo $d\Omega^{p-1}(k-1)$. Un tel élément s'écrit

$$\alpha = \frac{df\wedge\beta}{f}+\gamma,\quad \beta,\gamma \quad \text{holomorphes et sans}\, df.$$

La condition $d\alpha=0$ implique que $d\beta=0$, $d\gamma=0$. En utilisant le lemme de Poincaré, on peut alors écrire $\beta=d\sigma$, $\gamma=d\tau$ et donc

$$d\alpha = d\left(\frac{\sigma}{f}\right)+d\tau.$$

ça montre i) et la plupart de ii). Il reste à vérifier que $H^0(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_P$ et $H^1(\Omega^\bullet(*)) = \mathbb{C}_X$. La première assertion est immédiate. On montre la dernière assertion par un calcul local analogue au précédent que nous omettons. $\square$

On a besoin du sous-complexe $\Omega^\bullet_P(\log X)$ de $\Omega^\bullet(*)$ formé par les formes différentielles ayant des pôles logarithmiques le long de X ([Ill, §7]). On va prouver qu'il est quasi-isomorphe au complexe plein (et donc aussi calcule les groupes de cohomologie de $P \smallsetminus X$). Dans le cas actuel on pourra prendre comme définition (loc. cit.) :

$$\Omega^p_P(\log X) := \{\omega \in \Omega^p_P(1) |\, d\omega \in \Omega^{p+1}_P(1)\}.$$

L'application *résidu*

$$\operatorname{res} : \Omega^p_P(\log X) \to \Omega^{p-1}_X$$

est définie comme précédemment. Localement, on utilise un choix de coordonnées $\{f, z_1, \ldots, z_n\}$ telles que X soit donnée par $f = 0$, on écrit $\alpha = d\log f \wedge \beta$ et on pose $\operatorname{res}(\alpha) = \beta|_X$. On vérifie que cette définition en effet ne dépend pas du choix des coordonnées et de l'équation locale, $f = 0$ de X. Donc cette application est bien définie. La flèche qu'on vient de définir apparaît dans une suite exacte de complexes :

$$0 \to \Omega^\bullet_P \to \Omega^\bullet_P(\log X) \xrightarrow{\operatorname{res}} \Omega^\bullet_X[-1] \to 0. \tag{res}$$

Cette suite exacte montre par exemple que

$$\begin{aligned}
&H^0(\Omega^\bullet(\log X)) = \mathbb{C}_Y = H^0(\Omega^\bullet(*X)),\\
&H^1(\Omega^\bullet(\log X)) = \mathbb{C}_X = H^1(\Omega^\bullet(*X)),\\
&H^q(\Omega^\bullet(\log X)) = 0 = H^q(\Omega^\bullet(*X)) \quad \text{pour } q \geqslant 2,
\end{aligned}$$

et donc $\Omega^\bullet_P(\log X)$ et $\Omega^\bullet_P(*)$ sont quasi-isomorphes :

$$\mathbb{H}^p(P, \Omega^\bullet_P(*)) = \mathbb{H}^p(\Omega^\bullet_P(\log X)) := \mathbb{H}^p$$

La suite exacte longue en hypercohomologie donne

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow\ & H^{m-2}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H^m(P, \mathbb{C}) \to \mathbb{H}^m \xrightarrow{\operatorname{Res}} H^{m-1}(X, \mathbb{C})\\
\xrightarrow{\partial^m}\ & H^{m+1}(P, \mathbb{C}) \to \cdots
\end{aligned}$$

où $\operatorname{Res} = \operatorname{res}^*$ est induite par l'application “résidu”. On va montrer que cette suite “est” la suite de Gysin.

D'abord il faut relier ∂^m et i_*. Un calcul en coordonnées locales qu'on néglige montre que :

$$\partial^m : H^{m-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{m+1}(P, \mathbb{C}) \tag{gys}$$

est l'adjoint (par rapport au cup-produit) de

$$i^* : H^{2n-m+1}(P,\mathbb{C}) \to H^{2n-m+1}(X,\mathbb{C}).$$

Ensuite, on note qu'il y a une application naturelle :

$$j : \mathbb{H}^m = \mathbb{H}^m(\Omega^\bullet_P(\log X)) \to \mathbb{H}^m(\Omega^\bullet_{P\smallsetminus X}) = H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C})$$

qui commute avec les deux flèches de restrictions $H^m(P,\mathbb{C}) \to \mathbb{H}^m(\Omega^\bullet_P(\log X))$ et $H^m(P,\mathbb{C}) \to H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C})$.

Donc, dans l'échelle avec lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{m-2}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H^m(P,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{H}^m \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "j"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^{m-2}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "i_*"] & H^m(P,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^{m-1}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\partial^m"] \arrow[d, equal] & H^{m+1}(P,\mathbb{C}) \cdots \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial"] & H^{m-1}(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "i_*"] & H^{m+1}(P,\mathbb{C}) \cdots \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

les deux premiers carrés commutent ainsi que le dernier. Alors j est injectif et donc un isomorphisme. Pour expliciter j on regarde la suite spectrale $E_1^{p,q} = H^q(\Omega^p_P(*X)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}$. On a $E_2^{m,0} = m$-formes fermées modulo formes exactes et utilisant la flèche naturelle $E_2^{m,0} \to \mathbb{H}^m$ on regarde une m-forme fermée comme un représentant d'une classe de cohomologie sur $P\smallsetminus X$. On vérifie facilement que

$$\partial : H^m(P\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \to H^{m-1}(X,\mathbb{Q})$$

est la transposée de l'application "tube" :

$$\tau : H_{m-1}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_{m+1}(T, T\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} H_m(T\smallsetminus X,\mathbb{Q}) \to H_m(P\smallsetminus X,\mathbb{Q}).$$

(Intuitivement, l'application en homologie associe à un cycle le tube au dessus de ce cycle dans le complément de X en P). Ensuite, pour $\gamma \in H_m(X,\mathbb{Z})$, $\omega \in$

$H^{m+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C})$ on a ('formule du résidu') :

$$\int_\gamma \operatorname{res}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau(\gamma)} \omega \tag{tube}$$

et donc res $= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\partial$: le troisième carré du diagramme commute (à multiplication avec $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}$ près).

Nous appliquerons cette discussion dans le cas où X est une hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}$. Les conditions de la proposition suivante seront vérifiées.

8.5. Proposition. *Soit X un diviseur très ample. Alors,* Res : $H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) \to H^n(X, \mathbb{C})$ *est toujours injectif. Si* $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$*, alors l'image est la partie primitive de $H^n(X, \mathbb{C})$.*

Preuve. Par le théorème de Lefschetz,

$$i^* : H^{n+1}(P, \mathbb{C}) \to H^{n+1}(X, P)$$

est un isomorphisme et par conséquent l'adjoint

$$\partial^{n-1} : H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{n+1}(P, \mathbb{C})$$

est aussi un isomorphisme et donc $\mathrm{Res}^n : H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) \to H^n(X, \mathbb{C})$ est injectif. L'image de cet application, par (gys), s'identifie avec le noyau de $i_* : H^n(X, \mathbb{C}) \to H^{n+2}(P, \mathbb{C})$ qui (sous l'hypothèse $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$) est lui aussi formé de classes primitives (par le Corollaire 2). □

Si on fixe un degré dans (Res), la suite longue en cohomologie s'écrit :

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(\Omega^{p-1}(X)) \xrightarrow{\partial^{q-1,p-1}} H^q(\Omega_P^p) \longrightarrow H^q(\Omega_P^p(\log X)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^q(\Omega_X^{p-1}) \xrightarrow{\partial^{p,q-1}} H^{q+1}(\Omega_P^p) \longrightarrow \cdots.$$

L'application i^* préserve la décomposition de Hodge et de là on tire que l'adjoint i_* est un homomorphisme de degré $(1,1)$. Donc par le Corollaire 3 et la Proposition 5, $\partial^{q-1,p-1}$ est un isomorphisme et $\partial^{p,q-1}$ est surjectif quel que soient p, q avec $p + q = n + 1$. Le même argument que dans la preuve du Corollaire 3 alors montre :

8.6. Corollaire. *Sous les hypothèses de la Proposition on a une décomposition*

$$H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n+1} H^q(\Omega_P^p(\log X))$$

et l'application résidu induit un isomorphisme

$$H^q(\Omega_P^p(\log X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Prim}^{p-1,q}(X).$$

8B. Filtration par l'ordre du pôle et filtration de Hodge

Comme dans le cas compact (§1 ou [Dem],§9) on introduit la filtration "naïve" F sur les complexes $\Omega^\bullet(*)$ et $\mathcal{P}^k_P$. La filtration induite sur l'hypercohomologie sera aussi notée F. La suite spectrale d'hypercohomologie s'écrit dans ce cas :

$$H^q(P, \Omega^p_P(*)) \Longrightarrow H^{p+q}(P \smallsetminus X, \mathbb{C})$$

mais cette suite ne dégénère pas en général.

La filtration F de Hodge sera calculée dans cette situation en utilisant le sous-complexe $\Omega^p_P(\log X)$ de $\Omega^\bullet(*)$.

On voit directement que

$$\ker(d : \Omega^p(\log X) \to \Omega^{p+1}(\log X)) = \ker(d : \Omega^p_P(1) \to \Omega^{p+1}_P(2))$$

et donc

$$\begin{aligned} F^p H^{p+q}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) &= F^p \mathbb{H}^{p+q}(\Omega^\bullet(\log X)) \\ &= i^p_* \mathbb{H}^{p+q}(F^p(\Omega^\bullet(\log X))) = i^p_* H^q(P, \mathcal{Z}^p(1)). \end{aligned}$$

8.7. Lemme. *Si $H^a(P, \Omega^b_P(c)) = 0$ quels que soient $a, b, c > 0$, on a pour $p+q = n+1$ que $H^q(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = \Gamma(P, \Omega^{n+1}_P(q+2))/d\Gamma(\Omega^n_P(q+1))$.*

Preuve. Comme dans la preuve classique faisceautique (voir [God]) du théorème de De Rham, les conditions du lemme impliquent que

$$H^q(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = H^q(\Gamma(P, \mathcal{P}^\bullet)),$$

où on regarde le complexe $\Gamma(P, \mathcal{P}^\bullet))$ comme un complexe commençant en degré zéro. □

8.8. Corollaire. *Dans les conditions du lemme précédent, on a*

$$F^{p+1} H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = H^{n-p}(P, \mathcal{Z}^p_P(1)) = \Gamma(\Omega^{n+1}_P(n-p+1))/d\Gamma(\Omega^n_P(n-p))$$

On combine ce résultat avec le Corollaire 5 et on obtient :

8.9. Théorème. *Soit P une variété projective lisse de dimension $n+1$ et soit $X \subset P$ une hypersurface lisse. On suppose que X soit très ample, que $\mathrm{Prim}^n(P, \mathbb{C}) = 0$ et que $H^a(\Omega^b_P(c)) = 0$ quels que soient $a, b, c > 0$. Alors l'application "Résidu" induit un isomorphisme*

$$F^{p+1} H^{n+1}(P \smallsetminus X, \mathbb{C}) = \Gamma(\Omega^{n+1}_P(n-p+1))/d\Gamma(\Omega^n_P(n-p)) \to F^p \,\mathrm{Prim}^n(X, \mathbb{C}).$$

Maintenant, soit $X_f \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse donnée par un polynôme homogène f de degré d en coordonnées homogènes $Z_0, \ldots, Z_{n+1}$ de $\mathbb{P}^{n+1}$. Le seul groupe de cohomologie de $\mathbb{P}^{n+1} \setminus X_f$ intéressant est le groupe en dimension $n+1$. Les conditions du théorème sont vérifiées (théorème d'annulation de Bott, [Bott]) et le théorème dans ce cas donne un résultat de Griffiths :

8.10. Théorème ([Grif2]). *L'application 'résidu' induit un isomorphisme du sous-espace du groupe de de Rham $H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n \setminus X_f)$ formée des classes provenant des formes ayant un pôle d'ordre $\leqslant n-p+1$ sur la p-ième partie F^p de la filtration de Hodge de* $\mathrm{Prim}^n(X_f)$.

En particulier on voit que chaque $n+1$-forme rationnelle avec au plus un pôle le long de X_f doit être cohomologue à une forme ayant un pôle d'ordre au plus $n+1$, car $F^0 = H^n(X_f)$. En effet Griffiths donne une formule pour abaisser l'ordre du pôle modulo les formes exactes. Pour expliquer cela on a besoin de savoir comment s'écrivent les $n+1$ formes rationnelles sur $\mathbb{P}^{n+1}$ ayant au plus un pôle d'ordre k. Par un calcul direct en coordonnées affines on trouve qu'un telle forme s'écrit :

$$\frac{A}{f^k}\Omega,$$

où

$$\Omega = \sum_j (-1)^j Z_j dZ_0 \wedge \dots \widehat{dZ_j} \dots\dots \wedge dZ_{n+1} \quad \text{et où} \quad \deg A + n + 2 = kd.$$

Aussi, une n-forme rationnelle avec pôle le long de X_f s'écrit

$$\varphi = \frac{1}{f^{k-1}} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [Z_i A_j - Z_j A_i] dZ_0 \wedge \dots \widehat{dZ_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dZ_j} \wedge \dots \wedge dZ_{n+1}$$

et donc :

8.11. Lemme. *Soient $A_0, \dots, A_{n+1}$ des polynômes d'ordre $(k-1)d-n-1$. On a*

$$\text{(Réd)} \qquad \frac{(k-1)\sum_{j=0}^{n+1} A_j \frac{\partial f}{\partial Z_j}}{f^k}\Omega \equiv \frac{\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial A_j}{\partial Z_j}}{f^{k-1}}\Omega + d\varphi$$

8.12. Corollaire. *Soit $J_f \subset \mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{n+1}]$ l'idéal de Jacobi de f c'est-à-dire l'idéal engendré par les $\partial f / \partial Z_j$, $j = 0, \dots, n+1$. L'application résidu induit un isomorphisme*

$$(\mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{n+1}]/J_f)^{d(n+1-p)-(n+2)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Prim}^{p,n-p}(X_f).$$

Preuve. Le Théorème 10 implique qu'on a une surjection

$$(\mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{n+1}])^{d(n+1-p)-(n+2)} \to F^p/F^{p+1} = \mathrm{Prim}^{p,n-p}(X_f)$$

avec noyau consistant en les polynômes A provenant des formes de type $d\varphi+$ (forme ayant ordre de pôle $\leqslant n-p$) et à cause du Lemme ce sont exactement les polynômes de la forme $A'+fB$ où $A'\in J_f$. L'équation d'Euler $\sum_j Z_j \frac{\partial f}{\partial Z_j} = \deg(f) f$ montre que $f\in J_f$ et donc le Corollaire. □

9. Équations de Picard-Fuchs

Le but de ce paragraphe est de définir l'équation de Picard-Fuchs, et pour une famille de variétés projectives à un paramètre expliquer le lien avec la connexion de Gauss-Manin. On détermine cette équation dans quelques exemples. Le dernier exemple sera utilisé dans le §10 pour trouver le q-développement lié à la symétrie miroir. On explique aussi comment calculer la monodromie locale sur cet exemple.

On suppose désormais que S est une courbe algébrique complexe lisse, $S=\overline{S}\setminus T$, où $\overline{S}$ est une courbe lisse compacte et T est un nombre fini de points.

Soit $\underline{V}_S$ un système local sur S soit ∇ la connexion plate de Gauss-Manin sur le fibré associé $\mathcal{V}=\underline{V}_S\otimes \mathcal{O}_S$ définie par (voir le §2) :

$$\nabla(v\otimes f) = v\otimes df.$$

Sur $\mathcal{V}^\vee$, le dual de $\mathcal{V}$ on a la connexion naturelle $\nabla^\vee$ définie par

$$d\langle \nu, v\rangle = \langle \nabla^\vee \nu, v\rangle + \langle \nu, \nabla v\rangle,$$

où v est une section holomorphe locale de $\mathcal{V}$ et ν une section locale de $\mathcal{V}^\vee$ (Voir [Dem]).

Soit $S_o\subset \overline{S}$ un ouvert de Zariski affine tel qu'on a une trivialisation :

$$\mathcal{V}^\vee|S_o \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{S_o}^{\oplus r} \qquad (r=\operatorname{rang} \underline{V}_S).$$

Une coordonnée affine s induit un champ vectoriel d/ds sur S_o et en composant la connexion $\nabla^\vee$ sur $\mathcal{V}^\vee|S_o$ et la contraction avec d/ds on obtient l'endomorphisme

$$D: \mathcal{V}^\vee|S_o \to \mathcal{V}^\vee|S_o.$$

Si α est une section méromorphe de $\mathcal{V}^\vee$ sans pôles au dessus de S_o, en utilisant la trivialisation, on peut regarder les sections $\alpha, D\alpha, D^2\alpha,\dots,D^r\alpha$ comme contenues dans $\mathbb{C}(S)^r\supset \Gamma(S_o,\mathcal{O}^{\oplus r})$ sont dépendantes sur $\mathbb{C}(S)$; il y a une valeur minimale p tel que $\alpha, D\alpha,\dots,D^p\alpha$ soient dépendantes et, en remplaçant D par d/ds, on obtient une équation différentielle : (normalisée par le fait que le coefficient de $(\frac{d}{dt})^p$ est un)

$$(d/dt)^p + A_{p-1}(s)(d/dt)^{p-1}+\cdots+A_0(s)=0.$$

Les solutions forment le système local $\operatorname{Sol}(D)$ et pour chaque section plate v de $\underline{V}_S$ le fonction $\langle\alpha, v\rangle$ est une solution de $D=0$. En fait, $d\langle\alpha,v\rangle = \langle\nabla^\vee\alpha, v\rangle$ entraîne que

$\big((d/dt)^p + A_{p-1}(s)(d/dt)^{p-1} + \cdots + A_0(s)\big)\langle\alpha, v\rangle = \langle(\nabla^\vee)^p\alpha + A_{p-1}(s)(\nabla^\vee)^{p-1}\alpha + \cdots + A_0(s)\alpha, v\rangle = 0$.

On obtient alors un homomorphisme surjectif de systèmes locaux :

$$\underline{V}_S \to \mathrm{Sol}(D)$$

qui est un isomorphisme quand $p = r$. Dans ce cas on dit que α est une *section cyclique*.

9.1. Exemple. Le système local provenant de l'homologie des fibres d'une famille algébrique $f : X \to S$. Pour $\underline{V}_S$ on prend le système local dont la fibre au dessus de $s \in S$ est le groupe d'homologie $H_n(X_s, \mathbb{C})$ de la fibre $X_s = f^{-1}(s)$ en dimension $n = \dim X_s$.

L'accouplement donné par l'intégration sur les n-cycles

$$\begin{aligned} \underline{V}_S \times R^n f_*\mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (\gamma, [\omega]) &\mapsto \int_\gamma \omega \end{aligned}$$

met en dualité $\underline{V}_S$ et $R^n f_*\mathbb{C}$, le système local qui a pour fibre au dessus de s le groupe de cohomologie $H^n(X_s, \mathbb{C})$ (voir le §1).

On sait que le fibré $\mathcal{V}^\vee = R^n f_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_S$ supporte une variation de structure de Hodge et le sous-fibré $\mathcal{F}^n$ est le sous-fibré des classes de n-formes relatives. Sur chaque fibre celles-ci donnent des n-formes holomorphes. Une section $\omega(s)$ méromorphe de $\mathcal{V}^\vee$ holomorphe sur S appartenant à $\mathcal{F}^n$ est la même chose qu'une famille de formes holomorphes dépendant de façon méromorphe de s. Dans ce cas, l'équation différentielle associée à *la classe de cohomologie* $[\omega(s)]$ est appelée *équation de Picard-Fuchs*. La discussion précédente entraîne que les solutions sont données par des périodes $\int_\gamma \omega(s)$, $\gamma \in H_n(X_s, \mathbb{C})$ pourvu que l'on considère γ comme section plate (multiforme) du système local $R_n f_*\mathbb{C}$.

9.2. Remarque. La section $[\omega(s)]$ n'est pas nécessairement cyclique. Par contre, elle sera cyclique pour le sous-système local $\underline{V}_S^\vee$ de $R^n f_*\mathbb{C}$ engendré par $[\omega(s)]$. La monodromie (classique) de cette équation différentielle coïncide avec la monodromie de ce sous-système. En fait, $V_{S,s}$ est l'orthogonal (par rapport à l'intersection entre n-cycles) de l'annulateur de $\underline{V}_{S,s}^\vee$, le plus petit sous-espace de $H^n(X_s, \mathbb{C})$ contenant $[\omega]$ et stable par la monodromie. En particulier $\int_\gamma \omega = 0$ pour $\gamma \in V_{S,s}$ implique que $\gamma = 0$. Autrement dit, par prolongement analytique des solutions locales $\int_\gamma \omega$, on obtient des solutions de la forme $\int_{\gamma'} \omega$ (monodromie classique) où γ' se déduit de γ par la monodromie du système V_S.

Maintenant soit s une coordonnée autour de l'un des points $t \in T$. On introduit

$$\Theta := s\frac{d}{ds}$$

et on réécrit l'équation de Picard-Fuchs :

$$(\mathrm{PF}_{\mathrm{pol}}) \qquad [\Theta^p + B_{p-1}(s)\Theta^{p-1} + \cdots + B_0(s)]\phi = 0.$$

La connexion ∇ s'étend en une connexion à pôles logarithmiques sur T :

$$\overline{\nabla} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \Omega^1(\log T)$$

Voir le §8 suite au Lemme 8.4 pour la définition du faisceau $\Omega^1(\log T)$. On remarque que ici, dans le cas de la dimension 1 on a que $\Omega^1(\log T) = \Omega^1(T)$ est, localement autour d'un point de T, engendré par ds/s. L'opérateur Θ correspond à $\overline{\nabla}_{s\frac{d}{ds}}$ et une traduction du fait que $\overline{\nabla}$ existe est de dire que :

9.3. Lemme-Définition ([Del1]). *Les fonctions $B_j(s)$ sont holomorphes autour de t. On dit que t est un point singulier régulier.*

L'équation $(\mathrm{PF}_{\mathrm{pol}})$ est équivalente à un système

$$\Theta X(s) = A(s)X(s)$$

où ($\varphi(s)$ étant une solution recherchée de l'équation) :

$$X(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \Theta\varphi(s) \\ \vdots \\ \Theta^{p-1}\varphi(s) \end{pmatrix}$$

et

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & & 1 \\ -B_0(s) & \cdots \; -B_{p-1}(s) & & -B_p(s) \end{pmatrix}$$

La matrice $A(0)$ est appelée le *résidu* de la connexion et elle est notée :

$$\mathrm{Res}(\nabla) := A(0).$$

9.4. Lemme ([C-L]). *Si on suppose que pour toutes les valeurs propres distinctes λ et μ de $\mathrm{Res}(\nabla)$, $\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}$; alors la monodromie autour de t est donnée par $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(\nabla)}$.*

En particulier on en déduit :

9.5. Corollaire. *Si $B_j(0) = 0$, $j = 0, \dots, p-1$ la monodromie locale autour de t est $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}N}$ où N est la matrice nilpotente*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer ce corollaire dans la situation d'une famille d'hypersurfaces $X_{f(s)}$ d'équation $f(s)(Z_0,\ldots,Z_{n+1}) = 0$ dans $\mathbb{P}^{n+1}$, complétons la discussion du paragraphe précédent. On suppose $\dim(S) = 1$. Soit s un paramètre local sur S et soit $\Omega(s) = h(s)\Omega$ une $n+1$-forme rationnelle sur $\mathbb{P}^{n+1}$ qui dépend holomorphiquement de s. L'effet de la connexion plate de Gauss-Manin se décrit par :

$$\text{(GM)} \qquad \operatorname{Res}_{X_{f(s)}}\left[\frac{d^k}{ds^k}\Omega(s)\right] = \left[\nabla^k_{d/ds}\operatorname{res}_{X_{f(s)}}\Omega(s)\right],$$

où $[\alpha]$ désigne la classe de cohomologie d'une forme α. Cette formule est facilement déductible de la formule §8(tub).

9.6. Exemple. Soit la famille de courbes elliptiques (famille de Hesse) :

$$f(u) := Z_0^3 + Z_1^3 + Z_2^3 - 3uZ_0Z_1Z_2$$

au dessus de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{\infty, 1, \rho, \rho^2\}$ où $\rho = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$. Pour $u = \infty$ la courbe dégénère en trois droites et on va étudier la situation autour de ce point. On va d'abord déterminer l'équation différentielle associée aux formes holomorphes $\omega(u)$ sur la famille $f(u) = 0$.

On écrit pour cela :

$$\text{(Rat)}_\ell \qquad \Omega_\ell(u) := \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!\,u^\ell\left(\prod Z_j^{\ell-1}\right)}{f(u)^\ell}\Omega, \quad \ell = 1,\ldots.$$

On note que $\operatorname{res}(\Omega_1(u)) = \omega(u)$ est une forme holomorphe sur $X_{f(s)}$ et grâce à la formule (GM) on a

$$\text{(GM)}_{\text{bis}} \qquad \left(u\frac{d}{du}\right)^k \Omega_1(u) = \nabla^k_{u\frac{d}{du}}\omega(u) \quad \text{mod les formes exactes.}$$

Les calculs donnent

$$(Z_0Z_1Z_2)^2(1-u^3) = \sum_{k=0}^{2} A_k\frac{\partial f}{\partial Z_k}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3}uZ_0Z_1^3\\ A_1 &= \frac{1}{3}u^2Z_0Z_1^2Z_2\\ A_2 &= \frac{1}{3}Z_0^2Z_1^2 \end{aligned}$$

Utilisant la formule (Réd) (voir le Lemme 8.11) on trouve que $\Omega_3(u) \equiv P\Omega$ modulo les formes exactes, où

$$P = \frac{u^3}{1-u^3} \cdot \frac{\frac{1}{3}uZ_1^3 + \frac{2}{3}u^2 Z_0 Z_1 Z_2}{f^2}.$$

Puisque $P\Omega$ et $\Omega_2(u)$ ont un pôle d'ordre deux, le Corollaire 8.12 entraîne qu'il existe une fonction $\varphi(u)$ tel que $P\Omega - \varphi(u)\Omega_2(u) = \frac{q}{f^2}\Omega$ avec $q \in J_f$. On trouve en effet que

$$\frac{u^3}{1-u^3} \cdot (\frac{1}{3}uZ_1^3 + \frac{2}{3}u^2 Z_0 Z_1 Z_2) + \frac{u^3}{1-u^3}(-u^2 Z_0 Z_1 Z_2) = \frac{1}{9}\frac{u^3}{1-u^3} u Z_1 \frac{\partial f}{\partial Z_1} \in J_f$$

et une nouvelle application de (Réd) donne que

$$\Omega_3(u) + \frac{u^3}{1-u^3}\Omega_2(u) - \frac{1}{9}\frac{u^3}{1-u^3}\Omega_1(u) = 0 \quad \text{mod les formes exactes.}$$

On note maintenant que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur la famille par : $\rho \cdot (Z_0, Z_1, Z_2, u) = (Z_0, Z_1, \rho Z_2, \rho^2 u)$ et donc les fibres au dessus de u, ρu et $\rho^2 u$ sont isomorphes. Il est donc naturel de prendre pour paramètre

$$s = u^{-3}.$$

Alors

$$\Theta = -\frac{1}{3}u\frac{d}{du} = s\frac{d}{ds}.$$

Si on utilise que $\Theta\Omega_k = (-k/3)\Omega_k + \Omega_{k+1}$, $k = 1, 2$, on trouve que (toujours modulo les formes exactes) :

$$[\Theta^2 + B_1\Theta + B_0]\Omega_1(u) = 0$$

où

$$B_0 = \frac{2}{9}\frac{s}{s-1}$$
$$B_1 = \frac{s}{s-1}.$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\Theta \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Theta\Omega_1 \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Theta\Omega_1 \end{pmatrix}$$

où

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B_0 & -B_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule $(\mathrm{GM})_{\mathrm{bis}}$ on trouve que la famille des 1-formes $\omega(s)$ sur la famille des courbes elliptiques satisfait au même système d'équations. Ce système est équivalent à l'équation de Picard-Fuchs.

Le Corollaire 5 nous donne : $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors l'opérateur de monodromie locale est $\begin{pmatrix} 1 & 2\pi\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.7. Exemple. Dans cet exemple on considère une famille de variétés de Calabi-Yau (Voir [Mor2] pour détails)

$$f(s) = Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 - 5uZ_0Z_1Z_2Z_3Z_4, \quad s = u^{-5}.$$

Par un calcul identique à celui de l'exemple précédent, on trouve avec $\Theta = s\frac{d}{ds}$:

$$[\Theta^4 + B_3\Theta^3 + B_2\Theta^2 + B_1\Theta + B_0]\varphi = 0$$

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{24}{625} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_1 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_2 &= \frac{7}{5} \cdot \frac{s}{s-1} \\ B_3 &= 2 \cdot \frac{s}{s-1}. \end{aligned}$$

et la matrice $A(s)$ de Θ par rapport à $\{\Omega_1, \Theta\Omega_1, \Theta^2\Omega_1, \Theta^3\Omega_1\}$ est égal à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B_0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \end{pmatrix}$$

Ici la monodromie locale est $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}N}$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour la suite on a besoin d'une solution holomorphe autour du point $s = 0$. Pour l'obtenir on remarque qu'on peut réécrire l'équation différentielle comme :

$$[\Theta^4 - s(\Theta + 5^{-1})(\Theta + 2 \cdot 5^{-1})(\Theta + 3 \cdot 5^{-1})(\Theta + 4 \cdot 5^{-1})]\varphi = 0$$

(en multipliant par $(1 - s)$) et alors la relation de récurrence pour les coefficients

$$(n+1)^4 a_{n+1} = (n + 5^{-1})(n + 2 \cdot 5^{-1})(n + 3 \cdot 5^{-1})(n + 4 \cdot 5^{-1})a_n$$

a une solution $a_n = \dfrac{(5n)!}{5^{5n}(n!)^5}$ et donc on trouve

$$f_0(s) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(5n)!}{(n!)^5}\Big(\frac{s}{5^5}\Big)^n \tag{soln}$$

est une solution holomorphe. C'est l'unique solution holomorphe en $s = 0$ avec $f_0(0) = 1$.

Le lecteur pourra completer ces exemples en traitant le cas intermédiaire de la quartique de Fermat (surface K3).

10. Variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

On reprend la discussion du §7 en considérant la famille universelle d'une variété de Calabi-Yau de dimension 3 et sa variation infinitésimale qui conduit à l'accouplement de Yukawa. On montre que, si la base est de dimension 1, cet accouplement satisfait à une équation différentielle d'ordre 1 dont les coefficients sont liés à ceux de l'équation de Picard-Fuchs, qui est une équation d'ordre 4. En cherchant une coordonnée canonique q on est forcé d'invoquer ici l'existence de la structure de Hodge mixte limite. Dans la dernière sous-section on reprend l'exemple 9.7 et on discute la prédiction qui découle de l'hypothèse de symétrie : les coefficients dans le q-développement de l'accouplement de Yukawa, proprement normalisées, sont liés aux nombres de courbes rationnelles sur le membre générique de la famille miroir, qui conjecturalement est la famille des hypersurfaces quintiques dans $\mathbb{P}^4$.

10.A. Accouplement de Yukawa

On considère une famille $f : X \to S$ de variétés de Calabi-Yau ; soit alors la VHS définie par la variation de la cohomologie de rang 3, $\{H^3(X_s, \mathbb{C})\}$. On peut localement en $s_0 \in S$, supposer que $\mathcal{F}^3 = f_*(\Omega^3_{X/S})$ est trivial, et du fait que $h^{3,0} = 1$ choisir une 3-forme holomorphe (relative) ω, telle que $\omega(s) \neq 0$ pour s voisin de s_0. On trivialise le fibré vectoriel $\mathcal{H}^3(X/S)$ au moyen de sections plates ($\nabla\alpha = 0$), soit $\tau_1, \dots, \tau_{2b+2}$ une telle trivialisation (ici $b = h^{2,1}(X_s)$). On peut considérer $\{\tau_i\}$ comme la base duale d'une base d'homologie (constante) $\{\gamma_i\}$. Rappelons que la forme de Hodge-Riemann (voir le §3.A) est donnée par $Q(\alpha, \beta) = -\int_{X_s} \alpha \wedge \beta, \quad (k = n = 3)$ et donc

$$f_i := Q(\tau_i, \omega) = -\int_{\gamma_i} \omega$$

est une fonction holomorphe sur le voisinage considéré de s_0. Ce sont les périodes de ω. Relativement à la base choisie, ω se décompose en

$$\omega = \sum_{i=1}^{2b+2} \alpha_i \tau_i \qquad (\alpha_i \text{ holomorphe en } s_0).$$

Du fait que $\nabla\tau_i = 0$,

$$\nabla\omega = \sum_{i=1}^{2b+2} d\alpha_i \otimes \tau_i.$$

Si $t_1, \dots, t_r$ sont des coordonnées locales en s_0,

$$\nabla_{\partial/\partial t_\alpha} = \sum_i \frac{\partial\alpha_i}{\partial t_\alpha}\tau_i.$$

On notera que la propriété de transversalité de Griffiths entraîne que relativement à la filtration de Hodge $\{\mathcal{F}^p\}_{0\leqslant p\leqslant 4}$, on a :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t_\alpha} := \nabla_{\partial/\partial t_\alpha}\omega \in \mathcal{F}^2 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} \in \mathcal{F}^1.$$

D'où

$$Q\Big(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial t_\alpha}\Big) = Q\Big(\omega, \frac{\partial^2\omega}{\partial t_\alpha\partial t_\beta}\Big) = 0.$$

Par contre

$$Q\Big(\omega, \frac{\partial^3\omega}{\partial t_\alpha\partial t_\beta\partial t_\gamma}\Big) = \int_{X_t} \omega \wedge \frac{\partial^3\omega}{\partial t_\alpha\partial t_\beta\partial t_\gamma}$$

est différente de zéro en général. On va justifier que cette fonction représente l'application linéaire δ (voir la formule (iter) dans le §3.C) associée à la variation infinitésimale.

On a vu dans les §2.D et §3.C que la dérivée de l'application des périodes est donnée par

$$\sigma : T_{S,s_0} \longrightarrow \bigoplus \operatorname{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

où $\sigma(\partial/\partial t)$ agit par le cup-produit avec $\rho(\partial/\partial t)$, image de $\partial/\partial t$ par l'application de Kodaira-Spencer $\rho : T_{S,s_0} \to H^1(T_{X_{s_0}})$. Le fibré $\mathcal{F}^3$ est trivialisé par la forme ω et dans notre cas la formule (iter) revient à

$$\begin{aligned}\sigma : \operatorname{Sym}^3 T_{S,s_o} &\longrightarrow \operatorname{Hom}(H^{3,0}(X_{s_0}), H^{0,3}(X_{s_0})) = \\ &\qquad = \operatorname{Hom}(\mathbb{C}\cdot\omega(s_0), \mathbb{C}\cdot\overline{\omega}(s_0)) \\ \partial/\partial t_\alpha \otimes \partial/\partial t_\beta \otimes \partial/\partial t_\gamma &\longmapsto \{\omega(s_0) \mapsto \frac{\partial^3\omega}{\partial t_\alpha\partial t_\beta\partial t_\gamma}(s_0)\}.\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\sigma(\partial/\partial t_\alpha \otimes \partial/\partial t_\beta \otimes \partial/\partial t_\gamma)(\omega(s_0)) = \int_{X_{s_0}} \omega \wedge \frac{\partial^3\omega}{\partial t_\alpha\partial t_\beta\partial t_\gamma}.$$

D'où ici la variation infinitésimale de la structure de Hodge fournit les invariants :

$$\kappa_{\alpha\beta\gamma} := \int_{X_{s_0}} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}$$

appelés dans ce contexte *accouplement de Yukawa* ([Mor1], [C-O], [H]). Le tenseur invariant associé est

$$\kappa = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \kappa_{\alpha\beta\gamma} dt_\alpha \otimes dt_\beta \otimes dt_\gamma \in \mathrm{Sym}^3(\Omega^1_S).$$

Si $\dim S = 1$, t est une coordonnée locale en s_0, on notera

$$\kappa_{ttt} = \int_{X_t} \omega \wedge \frac{d^3\omega}{dt^3}$$

qui est une fonction holomorphe du paramètre t (au voisinage de s_0) et le tenseur invariant est

$$\kappa = \kappa_{ttt}(dt)^{\otimes 3} \in (\Omega^1_S)^{\otimes 3}.$$

Si en outre $f : X \to S$ est une famille verselle (voir le §3.C) on a $\dim H^1(T_{X_{s_0}}) = 1 = \dim H^{2,1}(X_{s_0})$ et donc $H^3(X_{s_0})$ est de dimension 4. La versalité implique que l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme et donc que les trois flèches $H^{k,3-k} \to H^{k-1,4-k}$, $k = 1, 2, 3$ sont des isomorphismes (ces espaces sont de dimension 1 et les applications sont obtenues en prenant le cup-produit avec la classe de Kodaira-Spencer $\rho(\partial/\partial t)$). Donc $\kappa_{ttt} \neq 0$ dans ce cas et les sections $\left\{\frac{d^i\omega}{dt^i}\right\}_{i=0,1,2,3}$ forment une base du fibré $\mathcal{H}^3(X/S)$, sur un voisinage de s_0. D'où une relation de dépendance linéaire

$$\text{(PF)} \qquad \frac{d^4\omega}{dt^4} = \sum_{i=0}^{3} A_i(t) \frac{d^i\omega}{dt^i}$$

qui est l'équation différentielle de Picard-Fuchs. Si α est une section plate de $\mathcal{H}^3(X/S)$, la période $\varpi = Q(\alpha, \omega) = \int_\gamma \omega$ (si α est la classe Poincaré duale du cycle γ), satisfait à l'équation

$$\frac{d^4\varpi}{dt^4} = \sum_{i=0}^{3} A_i(t) \frac{d^i\varpi}{dt^i}.$$

On peut dériver sous le signe somme car Q est constante.

Par l'anti-symétrie de Q on a $Q(\frac{d^2\omega}{dt^2}, \frac{d^2\omega}{dt^2}) = 0$ et en dérivant deux fois la relation $Q(\omega, \frac{d^2\omega}{dt^2}) = 0$ on trouve :

$$\frac{d}{dt} Q\Big(\omega, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) = -Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) - Q\Big(\frac{d^2\omega}{dt^2}, \frac{d^2\omega}{dt^2}\Big) = -Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big),$$

mais aussi

$$\frac{d\kappa_{ttt}}{dt} = Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) + Q\big(\omega, \frac{d^4\omega}{dt^4}\big) = Q\Big(\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^3\omega}{dt^3}\Big) + A_3\big(\omega, \frac{d^3\omega}{dt^3}\big),$$

et donc, en additionnant ces deux équations on a :

$$\frac{d\kappa_{ttt}}{dt} = \frac{1}{2}A_3\kappa.$$

Cette équation a pour solution (bien déterminée à une constante multiplicative près) :

$$\text{(yuk)} \qquad \kappa_{ttt} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int A_3(t)dt}.$$

Remarquons que sous l'hypothèse retenue, l'équation différentielle $\nabla\alpha = 0$, est le système linéaire équivalent à l'équation du 4e ordre (PF). Ceci explique que les informations locales sur la monodromie, sur κ_{ttt}, se déduisent du calcul explicite de l'équation de Picard-Fuchs.

Finalement quelque mots sur le cas d'une équation de Picard-Fuchs à points réguliers singuliers. On suppose que s est une coordonnée locale autour d'un tel point et on écrit

$$\kappa = \kappa_{sss}\left(\frac{ds}{s}\right)^{\otimes 3}$$

et, comme d'habitude,

$$\Theta = s\frac{d}{ds}.$$

Maintenant, pour trouver κ_{sss} il faut résoudre l'équation

$$s\frac{d\kappa}{ds} = -\frac{1}{2}B_3\kappa$$

Où B_3 est le coefficient de Θ dans l'équation de Picard-Fuchs $[\Theta^4 + B_3\Theta^3 + B_2\Theta^2 + \cdots]\varphi = 0$.

10.1. Exemple. Dans l'exemple 9.7 de la section précédente en utilisant la coordonnée s on trouve

$$\kappa_{sss} = C_1\frac{1}{s-1}, \qquad C_1 = \text{constante d'intégration.}$$

Discutons les possibles normalisations de l'accouplement de Yukawa dans le cas d'un paramètre s. On applique d'abord le résultat classique (voir [Ince])

10.2. Théorème. *Soit donnée une équation différentielle d'ordre $\geqslant 2$ sur un disque autour de 0 ayant une singularité régulière à 0. On suppose que la monodromie T locale autour de 0 admet un seul bloc de Jordan pour la valeur propre 1 avec multiplicité $\geqslant 2$. Alors, il existe une solution f_0 régulière et uniforme autour de 0. De plus, il existe une solution locale f_1 autour de 0, indépendante de f_0 telle que $g(s) = 2\pi \mathrm{i} f_1(s) - \log(s) \cdot f_0(s)$ soit uniforme. La solution f_0 est unique à une constante multiplicative près, la solution f_1 est unique à un multiple de f_0 près.*

Si donc $f_0 \neq 0$ on pourra fixer le f_0 par $f_0(0) = 1$ et ensuite le f_1 par $g(0) = 0$. On peut toujours remplacer s par une autre coordonnée $w(s)$; de $\kappa_{sss}(ds/s)^{\otimes 3} = \kappa_{www}(dw/w)^{\otimes 3}$ on tire que κ est multiplié par $(w/s)(ds/dw)^3$. On cherche à trouver une coordonnée q "normalisée" sur le disque. Dans un premier temps, on regarde la fonction multiforme

$$\tau(s) = f_1(s)/f_0(s)$$

comme un paramètre uniforme sur le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{h}$. Quand s tourne autour de 0 le paramètre τ se transforme en $\tau+1$. Celui-ci est uniquement déterminé par cette propriété à une constante additive près ; cela provient du fait qu'on pourra remplacer f_1 par $f_1 + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \log c_2 \cdot f_0$, le point $s = 0$ n'ayant aucune signification intrinsèque sur $\mathfrak{h}$. Donc le paramètre

$$q = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \frac{f_1(s)}{f_0(s)}\right) = s \exp\left(\frac{g}{f_0}\right)$$

sur le disque pointé est bien-défini à la constante multiplicative $c_2 \in \mathbb{C}^*$ près.

Ensuite on souhaite normaliser $\kappa_{\tau\tau\tau}$. D'abord, il faut noter que κ dépend du choix de la 3-forme relative ω. Si ω se transforme en $k(s)\omega$, κ_{sss} est transformé en $k(s)^2 \kappa_{sss}$. On remarque que la solution f_0 est de la forme $f_0 = \int_\gamma \omega$ pour un 3-cycle γ, invariant par la monodromie locale. Un tel cycle γ est unique à une constante multiplicative près. Donc, la 3-forme $\tilde{\omega} = f_0(s)^{-1} \omega = \omega / \int_\gamma \omega$ est une 3-forme holomorphe $\tilde{\omega}(s)$ telle qu'il existe cycle invariant γ dans $H_3(X_s, \mathbb{C})$ avec $\int_\gamma \tilde{\omega} = 1$. Ainsi $\tilde{\omega}$ est unique à une constante multiplicative près. Conclusion : avec cette normalisation on a

$$\kappa = c_1 \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \int B_3(s) \frac{ds}{s}\right)}{f_0(s)^2} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{ds}{s}\right)^{\otimes 3}, \quad c_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Ensuite on note que $\kappa_{\tau\tau\tau}(d\tau)^3 = \kappa_{sss} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{dq}{q}\right)^3$ est périodique en τ et donc il existe un développement en

$$q := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau(s)}.$$

On écrit alors :

$$\text{(dev)} \qquad \kappa = c_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \left(\frac{q}{c_2}\right)^j\right) \cdot \left(\frac{dq}{2\pi \mathrm{i} q}\right)^{\otimes 3}$$

On peut voir (cf. [Mor2]) facilement que les coefficients κ_j sont des nombres rationnels si les coefficients B_j de l'équation de Picard-Fuchs admettent une développement en série entière à coefficients rationnels.

Rappelons que ce calcul est fait sous l'hypothèse cruciale que $f_0(0) = \int_\gamma \omega(0) \neq 0$. On la vérifiera dans le sous-paragraphe suivant.

Exemple. On reprend l'exemple 10.1. Ici $f_0(0) = 1$ (voir l'Exemple 9.7) et on observe que l'hypothèse sur les $B_j(s)$ est bien vérifiée. On trouve ici que

$$\kappa_{sss} = \frac{c_1}{(s-1)f_0(s)^2}.$$

10.3. Remarques. I. En liaison avec les calculs précédents, rappelons le théorème de Bryant et Griffiths (Théorème 7.3). On fait l'hypothèse que la famille $f : X \to S$ est la déformation universelle de $X_0 = f^{-1}(0)$, de sorte que l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme pour tout $s \in S$, et $\dim(S) = h^{2,1} = b$. En vertu du théorème de Bogomolov et Tian (voir le §7.C), S est lisse. On suppose que S soit isomorphe à un disque de dimension b. On trivialise le système local $\{H_3(X_s, \mathbb{Z})\}$, au moyen d'une base symplectique $\{\gamma_i, \delta_j\}_{i,j=0,\dots,b}$. Soit ω une section locale de $F^3 = f_*(\omega^3_{X/S})$ qui trivialise ce fibré. Le théorème de Bryant et Griffiths dit que les γ-périodes $\zeta_i(s) = \int_{\gamma_i} \omega(s)$ peuvent servir comme coordonnées homogènes sur S (voir le §7).

Lemme. *Avec $\xi_j(s) = \int_{\delta_j} \omega(s)$ on a les relations :*

$$\xi_i = \sum_j \zeta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \zeta_j}$$

et $\{\xi_i\}$ est le gradient d'une fonction holomorphe homogène G de degré 2 des variables $\zeta_0, \dots, \zeta_b$.

Preuve. On a comme ci-dessus les relations

$$\int_X \omega \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_i} = \int_{X_s} \omega \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} = 0 .$$

Si on remplace ω par le développement $\omega = \sum \zeta_i \alpha_i + \sum \xi_j \beta_j$ (voir le §7.C pour les notations) et si on tient compte du fait que $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_j\}$ sont des sections constantes, on a les relations annoncées. Ces relations entraînent

$$2\xi_i = \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\Big(\sum_k \zeta_k \xi_k\Big)$$

d'où si $G(\zeta) = \frac{1}{2}\big(\sum_k \zeta_k \xi_k\big)$, on a $\xi_i = \frac{\partial G}{\partial \zeta_i}$. □

II. Un calcul élémentaire conduit à l'expression suivante pour l'accouplement de Yukawa :

$$\kappa_{ijk} = \int_{X_s} \omega \wedge \frac{\partial^3 \omega}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j \partial \zeta_k} = \frac{\partial^3 G}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j \partial \zeta_k}.$$

III. On peut définir sur l'espace local des modules S, une métrique de Kähler (en fait de Hodge ([Dem]), par son potentiel local. Les relations de Riemann montrent que

$$\mathrm{i} \int \omega \wedge \overline{\omega} = \mathrm{i} \Big(\sum_a \overline{\zeta}_a \frac{\partial G}{\partial \zeta_a} - \zeta_a \frac{\partial \overline{G}}{\partial \overline{\zeta}_a} \Big) > 0.$$

Posons $\kappa = -\log \big(\mathrm{i} \int \omega \wedge \overline{\omega}\big)$. Alors la métrique dite de Weil-Peterson, [T]) sur S est définie localement par :

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \zeta_i \partial \overline{\zeta}_j}.$$

La formule de dessus montre que le potentiel κ est très particulier, manifestation du caractère "spécial" de cette métrique (voir Remarque IV).

D'une autre manière, si on identifie $T_s S$ et $H^{2,1}(X_s)$ vu que $\Omega^3_{X_s} \cong \mathcal{O}_{X_s}$, la métrique de Weil-Peterson n'est pas autre chose que :

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathrm{WP}} = \int_{X_s} \psi \wedge * \bar{\phi}.$$

Il y a une relation précise avec l'application des périodes q introduite ci-dessus. Du fait des relations de Riemann R1 et R2 du §3.A, la droite $H^{3,0}(X)$ appartient à un ouvert dans une quadrique complexe $Q \subset \mathbb{P}^{2b+1}$. La forme de Hodge induit clairement sur la restriction à Q du fibré tautologique de $\mathbb{P}^{2b+1}$ une métrique hermitienne. Si ω est la forme de Chern de cette métrique, on peut prouver [T] que la forme de Kähler ω_{WP} de la métrique de Weil-Peterson coïncide avec l'image réciproque de ω.

IV. Les considérations géométriques précédentes ont pour support l'espace des paramètres des structures complexes, soit infinitésimalement l'espace $H^{2,1}$. Il n'est pas à priori évident que des constructions similaires existent avec l'espace des paramètres pour les classes de Kähler. Définissons cet espace. Si $J \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est la forme de Kähler d'une métrique de Kähler sur X, alors J est positive et, en particulier, pour toute courbe algébrique $C \subset X$,

$$\int_{[C]} J > 0.$$

Ces inégalités définissent dans l'espace vectoriel réel $H^{1,1}(X, \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{R})$ un cône ouvert $K(X)$, appelé le cône de Kähler. Le *complexifié du cône de Kähler* est

$$CK(X) = \{B + \mathrm{i}J \mid B, J \in K(X)\}.$$

Il est important aussi de considérer les inégalités larges, c'est-à-dire le cône fermé $\overline{K(X)}$.

Il n'y a pas ici de variation de structures de Hodge supportée par le cône de Kähler complexifié, et donc pas de contrepartie évidente à l'accouplement de Yukawa, mais seulement le produit triple topologique donné par l'intersection des $(1,1)$-formes $\kappa(\rho,\sigma,\tau) = \int \rho \wedge \sigma \wedge \tau$. Il est déjà remarquable que dans cette situation duale, la "géométrie" de l'espace des modules des structures complexes subsiste formellement [C-O], renforçant l'hypothèse de symétrie entre les deux types de déformations. Les propriétés différentielles-géométriques décrites ci-dessus ont été formalisées sous le titre de "géométrie spéciale" [Str]. Nous renvoyons à cet article pour une définition précise. L'étude de cette "géométrie" sur le complexifié du cône de Kähler est le fondement de la symétrie miroir. Une définition mathématique précise peut être considérée comme équivalente à l'existence d'une variation de structures de Hodge de base le complexifié du cône de Kähler, conduisant à un accouplement triple qui "corrige" en un certain sens l'accouplement κ ci-dessus, et qui dans la dualité entre X et X^*, serait le pendant de la variation décrite dans les pages précédentes pour X^*. Pour une formulation plus précise, le lecteur consultera [Mor4], [G]. Nous voulons ne retenir de cette discussion que le fait que les aspects de théorie de Hodge sont certainement à la base d'une formulation rigoureuse du principe de symétrie. Voir aussi le §11 pour une discussion allant dans ce sens.

10.B. Normalisation mathématique

Il s'agit d'avoir des informations sur le comportement asymptotique des périodes, et de l'accouplement de Yukawa. Cela relève de l'étude générale du comportement asymptotique d'une variation de structures de Hodge (singularités de l'application des périodes).

Soit donnée une famille de variétés de Calabi-Yau, on suppose pour simplifier que $h^{2,1} = 1$ et $\dim S = 1$ (on a vu que $X \to S$ est universelle en tout point $s \in S$ (Théorème 7.2). Supposons $S = \overline{S} \smallsetminus \{b_1, \dots, b_r\}$ où $\overline{S}$ est une courbe complète non singulière, les points $\{b_i\}$ étant les points singuliers de la famille (voir l'exemple de la famille quintique et de la famille miroir dans le §7.A). Il s'agit d'analyser le comportement de la structure de Hodge (variation) portée par $\mathcal{H}^3(X/S) = \mathbb{R}^3 f_*(\omega^\bullet_{X/S})$ lorsque le paramètre s approche un point singulier. En un tel point b_i, on a vu que $\mathcal{H}^3(X/S)$ admet une extension privilégiée (sur un disque paramétré de centre b_i), et que les fibres de Hodge $\mathcal{F}^p$ $(p = 0,1,2,3)$ se prolongent en des sous-fibrés $\widetilde{\mathcal{F}}^p$ de l'extension privilégiée $\widetilde{\mathcal{H}}^3(X/S)$. On fait une hypothèse maintenant [Mor1], hypothèse qui est vérifiée dans l'exemple qui nous intéresse.

10.4. Hypothèse. *(Voir le Théorème 4.1) L'opérateur T (de monodromie locale) en b_i est maximalement unipotent. C'est-à-dire $(T-1)^3 \neq 0$ et donc $N = \log T$ a un seul bloc de Jordan* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On vérifie immédiatement que sous cette hypothèse, la filtration $W_\bullet$ est de la forme :

$$W_0 = W_1 = \ker(N), \qquad W_2 = W_3 = \ker(N^2), \qquad W_4 = W_5 = \ker(N^3).$$

La structure de Hodge sur $\mathrm{Gr}^W_{2\ell}$ ($\ell = 0, 1, 2, 3$) se réduit à $\mathrm{Gr}^W_{2\ell} = I^{\ell,\ell}$. En particulier $I^{a,b} = 0$ si $a \neq b$ et

$$W_\ell = \bigoplus_{a+b\leqslant\ell} I^{a,b}, \qquad F^p_\infty = \bigoplus_{a\geqslant p} I^{a,b}$$

Rappelons que le fibré $\mathcal{H}^3(X/S)$ est prolongé à Δ et donc est trivialisable sur Δ^*. Si α est une sections de ce fibré en $s_0 \in \Delta^*$, et si $\alpha(s)$ est le prolongement (multiforme) de α par transport parallèle par la connexion de Gauss-Manin, la section "horizontale" qui s'étend en $s = 0$ est $\alpha^*(s) = \exp\big(\frac{\log s}{2\pi i} N[\alpha(s)]\big)$. En particulier, si $\alpha \in W_0$, $T(\alpha) = \alpha$, on a $\alpha^*(s) = \alpha(s)$. De même, avec $\beta \in \mathcal{H}^3(X/S)_{s_0}$ on définit $\beta^*(s)$. Le fait que Q est plate dans le fibré trivialisé $\tilde{\mathcal{H}}^3$ signifie que $Q(\alpha^*(s), \beta^*(s)) = Q(\alpha, \beta) = \text{const}$. Puisque $\omega(s)$, la section qui trivialise le fibré $\tilde{F}^3$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $\beta^*(s)$ avec coefficients des fonctions holomorphes, il est clair que $Q(\alpha(s), \omega(s)) = Q(\alpha^*(s), \omega(s))$ est une fonction holomorphe sur Δ. Si α est la classe de cohomologie duale du cycle γ_0, cette fonction représente la période :

$$f_0(s) := \int_{\gamma_0} \omega(s).$$

Montrons que $f_0(0) \neq 0$; dans le cas contraire, on a $Q(\alpha(0), \omega(0)) = 0$ dans la fibre de $\tilde{\mathcal{H}}^3$ en $s = 0$. Mais $\omega(0) \in \tilde{\mathcal{F}}^3(0)$, et $\alpha(0) \in W_0$. Or la filtration par le poids est auto-duale relativement à Q (du fait que $N \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$), c'est-à-dire $W_\ell^\perp = W_{6-\ell-2}$. Donc $\omega(0) \in \tilde{\mathcal{F}}^3(0) \cap W_4 = 0$. Ceci montre bien que $f_0(0) \neq 0$.

Discutons maintenant le choix d'une coordonnée intrinsèque sur Δ^*. Soit $\beta \in W_2 = \ker(N^2)$, linéairement indépendant avec α. Il y a un scalaire λ tel que $N(\beta) = \lambda\alpha$. Soit $\beta^*(s)$ l'extension canonique (horizontale) de β à $\tilde{\mathcal{H}}^3$. On a

$$\begin{aligned}\beta^*(s) &= \exp\Big(-\frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\Big)\beta(s)\\ &= \beta(s) - \frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} \lambda\alpha^*(s)\ .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f_1(s) &= \int_{\gamma_1} \omega(s) \qquad \text{(si } \beta \text{ est la classe duale de } \gamma_1)\\ &= \frac{\log s}{2\pi \mathrm{i}} \lambda f_0(s) + Q(\beta^*(s), \omega(s))\end{aligned}$$

et $Q(\beta^*(s), \omega(s))$ est holomorphe sur Δ. Donc :

$$\tau = \frac{\lambda^{-1}\int_{\gamma_1}\omega}{\int_{\gamma_0}\omega}$$

est un paramètre sur $\mathfrak{h}$ et

$$q = \exp(2\pi \mathrm{i}\tau)$$

un paramètre sur Δ.

Noter que τ étant le quotient de deux périodes ne dépend pas de la section ω. Si $\{\alpha', \beta'\}$ est un autre choix, qui conduit aux périodes $\{\omega_0', \omega_1'\}$ et aux paramètres t', q', on a $a, b, c \in \mathbb{C}$, $ac \neq 0$, avec :

$$\alpha' = a\alpha,\ \beta' = b\alpha + c\beta$$

donc

$$N\beta' = \lambda'\alpha' \qquad \text{avec} \quad \lambda' = \frac{c\lambda}{a}.$$

D'où

$$\tau' = \tau + \frac{b}{c\lambda} \qquad \text{et} \quad q' = \exp\big(2\pi\mathrm{i}\frac{b}{c\lambda}\big)q\ .$$

On voit le lien avec la discussion dans le §10.A : la constante c_2 s'identifie avec $\exp(2\pi\mathrm{i}\frac{b}{c\lambda})$.

Ces remarques étant faites, il faut certainement utiliser la structure entière pour normaliser les périodes et ainsi obtenir une coordonnée "canonique" sur le disque. Notons L le réseau entier ($L = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_{s_0}$) dans H et rappelons que $T \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L, Q)$. Alors $L \cap W_0$ est de rang un, on va donc prendre pour α un générateur de ce groupe. On a $T = \exp(N) = 1 + N$ sur $W_2 = \ker(N^2)$, donc $N = T - 1$ est entier sur $W_2 \cap L$, c'est-à-dire $N(W_2 \cap L) \subseteq L \cap W_0$. On peut alors choisir une base du groupe (de rang 2) $W_2 \cap L$, de la forme $\{\alpha, \beta\}$, et $N(\beta) \in N\alpha$, soit $N(\beta) = m\alpha$ avec $m \geqslant 1$. Une autre base de ce type est $\alpha' = \pm\alpha$, $\beta' = \pm\beta + \ell\alpha$ ($\ell \in \mathbb{Z}$).

En conclusion, le paramètre q obtenu par cette normalisation est défini à une racine m-ième de l'unité près, et si $m = 1$ (la monodromie est "petite" : dixit Morrison), q est alors déterminé de manière unique. On dit dans ces conditions que q est le *paramètre canonique* autour de la singularité (voir [Mor1]). En résumé, nous avons démontré :

10.5. Proposition (Normalisation mathématique)**.** *Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence à un paramètre de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$. On suppose que ω est une section partout non-nulle sur Δ^* de $\mathcal{F}^3$. On suppose aussi que la monodromie locale du système local de cohomologie en dimension 3 est unipotente de rang 4. On pose $N = \log T$. Fixons $s_o \in \Delta$, un générateur α de $H^3(X_{s_o}, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{Ker}\, N$*

et une base $\{\alpha,\beta\}$ *de* $H^3(X_{s_o},\mathbb{Z})\cap \operatorname{Ker} N^2$ *telle que* $N\beta = m\alpha, m\in\mathbb{Z}_{>0}$*. Soient* $\gamma_0,\gamma_1\in H_3(X_{s_o},\mathbb{Z})$ *les classes duales. Alors la fonction*

$$q(s)=\exp\Big(\frac{2\pi \mathrm{i}}{m}\frac{\int_{\gamma_1}\omega(s)}{\int_{\gamma_0}\omega(s)}\Big)$$

est bien définie à une racine m*-ième de l'unité près.*

10.6. Exemple. [Hu] La situation est analogue à celle des courbes de genre 1. Soit la famille de courbes de genre 1 : $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda\neq 0,1$ (*forme de Legendre*) ; $\omega=\frac{dx}{2y}$ définit une section de $\mathcal{F}^1$ (fibré de Hodge).

Les périodes (au nombre de deux) sont données, relativement à une base de $H_1(X_\lambda,\mathbb{Z})$, par

$$\omega_1=\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} \qquad \text{et}\quad \omega_2=\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$

On exprime ω_1 et ω_2 en fonction de λ, au moyen de la série hypergéométrique

$$F(\lambda)={}_2F_1\big(\frac12,\frac12,1;\lambda\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}^2\lambda^n$$

convergente si $|\lambda|<1$. Alors le résultat classique est que $\omega_1=\pi F(\lambda)$, $\omega_2=i\pi F(1-\lambda)$ ($|\lambda|<1$) et que ce sont les deux solutions indépendantes de l'équation différentielle de Picard-Fuchs, qui est ici l'équation différentielle hypergéométrique

$$s(1-s)f''(s)+(1-2s)f'(s)-\frac14 f(s)=0\ .$$

C'est bien là le début de la connexion de Gauss-Manin !

On retourne à l'accouplement de Yukawa. Si s est une coordonnée locale sur le disque Δ de centre le point singulier b_i (ici $s(b_i)=0$), et si ω est une section locale de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ qui trivialise ce fibré en droites sur Δ, on a défini l'accouplement de Yukawa (non normalisé) comme la fonction sur Δ^* :

$$\kappa_{sss}=Q\Big(\omega,\frac{d^3\omega}{ds^3}\Big)\ .$$

La fonction κ_{sss} dépend de la coordonnée s, ainsi que la section locale ω de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ sur Δ. Le passage de ω à $f\omega$ ($f(0)\neq 0$), transforme κ_{sss} en $f^2\kappa_{sss}$.

Pour une section ω de $\tilde{\mathcal{F}}^3$ qui est une base locale en $s=0$, la période normalisée $f_0=\int_{\gamma_0}\omega$ est alors définie au signe près. On normalise la forme en remplaçant ω par ω/f_0, donc maintenant $f_0(0)=1$. Alors l'accouplement de Yukawa κ_{ttt} est normalisé, et donc est une fonction définie de manière intrinsèque sur Δ^* ; on parlera de *l'accouplement de Yukawa, dans sa normalisation mathématique.*

On ne poursuit pas les calculs d'une normalisation mathématique dans les exemples, car il est plus facile de normaliser les deux constantes c_1 et c_2 introduites dans le §10.A. On suit cette démarche dans le sous-paragraphe suivant (voir Conjecture 10.6).

10.C. Lien avec le nombre des courbes rationnelles : un exemple

Les applications à la géométrie énumérative ("formules de prédiction") sont basées sur le sens précis qu'il faut attribuer à la correction ("corrections instantons") du produit triple topologique κ (remarque IV du §10.A) et donc en relation avec la définition de "l'action", qui conduit à la définition des modèles sigma basés sur une variété de Calabi-Yau [F-G], [G]. Plus précisemment, l'intégrale Z^* du §7.A admet un développement en contribution sur les morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans la variété de Calabi-Yau. Voir en particulier [G,§5.6] pour un énoncé explicite.

Dans la suite nous ne ferons qu'observer la cohérence de ces développements sur quelques exemples, particulièrement celui de [C-O-G-P].

Soit T l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^5 \mathbb{C}^5))$ paramétrant les hypersurfaces lisses de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$ et Y_t, $t \in T$ la famille tautologique correspondante. Cette famille est une famille de variétés de Calabi-Yau avec $\dim H^1(T_{Y_t}) = \dim T - \dim \mathrm{PGL}(5) = 101$ et $h^{1,1}(Y_t) = 1$. La symétrie miroir prédit l'existence d'une famille X_s, $s \in S$ avec $\dim S = \dim H^1(T_{X_s}) = 1$ et $h^{1,1}(X_s) = 101$. Le candidat proposé pour X_s est une résolution convenable des singularités du quotient de la famille

$$f(s) = Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 - 5tZ_0Z_1Z_2Z_3Z_4, \quad s = t^{-5}$$

par le groupe

$$G = \big\{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mu_5^5 |\, a_0a_1a_2a_3a_4 = 1\big\}$$

où μ_5 est le groupe des racines d'unité d'ordre 5. En effet nous avons étudié cette famille dans les paragraphes précédentes (l'exemple 9.7) et les classes des formes $\mathrm{res}(\Omega_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ constituent une base de la partie G-invariante de la cohomologie, et donc une base pour $H^3(X_s, \mathbb{C})$. L'équation de Picard-Fuchs trouvée est l'équation de ω_1, résidu de Ω_1, regardé comme 3-forme holomorphe sur X_s.

La symétrie miroir prédit en outre que l'accouplement de Yukawa, proprement normalisé, admet un q-développement $\sum a_d q^d$ tel que les coefficients a_d déterminent le nombre n_d des courbes rationnelles de degré d sur le membre générique de la famille Y_t. Ici q est le paramètre canonique du §10.B.

Malheureusement ce nombre n'est pas à priori fini. En effet, il existe des variétés de Calabi-Yau où on a un nombre infini des courbes rationnelles de degré fixé. Par exemple, on considère un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface S de degré 8. Il y a une famille de dimension $\geqslant 1$ de courbes rationnelles ayant pour image une droite trois fois tangente à la surface S (cela fait une condition pour une droite d'être tangente à une surface). En dépit de cela, Clemens a conjecturé que pour une quintique générale il n'y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles d'un degré donné. Mais si on ne veut pas admettre cette conjecture, il faut trouver une interprétation différente pour les nombres n_d. Une suggestion est d'interpréter ce nombres dans le cadre de la géométrie symplectique comme les invariants de Gromov-Witten pour des courbes rationnelles de degré d. Mais c'est une autre histoire pour laquelle on consultera [Mor3], [D-S]. Ceci dit, on a :

10.6. Conjecture. *Si, dans la formule (dev) du §10.A, on choisit* $c_1 = -5$ *et* $c_2 = 5^{-5}$ *en écrivant*

$$\kappa_{\tau\tau\tau} = n_0 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{n_d d^3 q^d}{1 - q^d} \qquad \text{(Myst)}$$

on a $n_0 = 5$ *et pour* $d \geqslant 1$, n_d *est l'invariant de Gromov-Witten pour des courbes rationnelles de degré* d *sur une hypersurface générique dans* $\mathbb{P}^4$ *de degré* 5. *Ce nombre coïncide avec le nombre de courbes rationnelles de degré* d *si la conjecture de Clemens est vraie.*

Cette prédiction a été vérifiée pour $d \leqslant 3$. Voir [Mor2] pour les références. Voici le tableau des nombres n_d pour $d \leqslant 10$:

1	2875
2	609250
3	317206375
4	242467530000
5	229305888887625
6	248249742118022000
7	295091050570845659250
8	375632160937476603550000
9	503840510416985243645106250
10	704288164978454686113488249750

10.7. Autres exemples. Voir [L-T] et [B-S], §5 pour les détails. Les seules intersections complètes de $\mathbb{P}^{3+r}$ définies par des degrés $d_1, \ldots, d_r$ donnant une variété de Calabi-Yau sont celles avec degrés $(3,3), (2,4), (2,2,2,2)$ et $(2,2,3)$. On a dans ces exemples $h^{1,1} = 1$ et il y a une construction naturelle de la famille miroir (conjecturale) (voir le §7.B). On commence par définir des polynômes de Laurent $f_j(u, X)$

en les variables X_j :

$(3,3)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3)$ $f_2 = 1 - (u_4X_4 + u_5X_5 + u_6(X_1 \cdots X_5)^{-1})$
$(2,4)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4 + u_5X_5 + u_6(X_1 \cdots X_5)^{-1})$
$(2,2,2,2)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4))$ $f_3 = 1 - (u_5X_5 + u_6X_6$ $f_4 = 1 - (u_7X_7 + u_8(X_1 \cdots X_7)^{-1})$
$(2,2,3)$	$f_1 = 1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ $f_2 = 1 - (u_3X_3 + u_4X_4)$ $f_3 = 1 - (u_5X_5 + u_6X_6 + u_7(X_1 \cdots X_6)^{-1})$.

Ces équations définissent une famille Y_z d'intersections complètes dans le tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^{3+r}$ paramétrée par $z = \prod u_j$. Il existe une compactification lisse de $\cup Y_z$ ayant comme fibres des variétés de Calabi-Yau. Pour cette famille on calcule l'équation de Picard-Fuchs :

$$\Theta^4 - \mu z(\Theta + \alpha_1)(\Theta + \alpha_2)(\Theta + \alpha_3)(\Theta + \alpha_4) = 0$$

où $\Theta = z\frac{\partial}{\partial z}$ et les coefficients $\mu, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ sont donnés dans le tableau suivant :

$(3,3)$	$\mu = 3^6$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/3, 1/3, 2/3, 2/3)$
$(2,4)$	$\mu = 2^{10}$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/4, 2/4, 2/4, 3/4)$
$(2,2,2,2)$	$\mu = 2^8$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
$(2,2,3)$	$\mu = 2^4 3^3$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1/3, 1/2, 1/2, 2/3)$

On peut alors aussi calculer l'accouplement de Yukawa normalisé pour ces quatre exemples et trouver les invariants de Gromov-Witten dans chaque cas :

degré	type d'intersection $= (3,3)$	type d'intersection $= (2,4)$
1	1053	1280
2	52812	92288
3	6424326	15655168
4	1139448384	3883902528
5	249787892583	1190923282176
6	62660964509532	417874605342336
7	17256453900822009	160964588281789696
8	5088842568426162960	66392895625625639488
9	1581250717976557887945	28855060316616488359936
10	512045241907209106828608	13069047760169269024822656

degré	type d'intersection = $(2,2,2,2)$	type d'intersection = $(2,2,3)$
1	512	720
2	9728	22428
3	416256	1611504
4	25703936	168199200
5	1957983744	21676931712
6	170535923200	3195557904564
7	16300354777600	517064870788848
8	1668063096387072	89580965599606752
9	179845756064329728	16352303769375910848
10	20206497983891554816	3110686153486233022944

Des travaux récents (Ellingsrud, Libgober) confirment ces nombres, du moins en petit degré.

11. Lien avec la théorie de Hodge mixte

Dans ce paragraphe on explique comment la théorie de Hodge mixte permet de formuler un aspect du phénomène de symétrie.

Rappelons brièvement quelques notions de base qui complètent les définitions du §4.A.

11.1. Définition. Soit $H_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $H = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Une structure de Hodge mixte (réelle) sur H consiste en une filtration croissante $W_\bullet$ de H définie sur $H_{\mathbb{R}}$ et une filtration décroissante $F^\bullet$ de H tel que $F^\bullet$ définit sur Gr_ℓ^W une structure de Hodge par le poids ℓ.

11.2. Exemple. A. Soit M une variété kählérienne compacte de dimension d. On prend $H = \sum_p H^p(M, \mathbb{C})$, $W_\ell = \bigoplus_{a \leqslant \ell} H^a(M, \mathbb{R})$.

B. Soit M_t une famille de variétés kählériennes sur un disque épointé. On suppose que la monodromie sur $H^d(M_t)$ est unipotente. Alors $N := \log T$ satisfait à $N^{d+1} = 0$ et il existe une unique filtration $0 \subset W_0 \subset W_1 \ldots \subset W_{2d-1} \subset W_{2d}$ de $H^d(M_t, \mathbb{R})$ tel que $NW_\ell \subset W_{\ell-2}$ et N^ℓ induit un isomorphisme entre $\mathrm{Gr}_{d+\ell}^W$ et $\mathrm{Gr}_{d-\ell}^W$ (§4.B ou [S] pour les détails). On a introduit (§4.B) la filtration $F_\infty^\bullet$ sur $H^d(M_t)$. $W_\bullet$ et $F_\infty^\bullet$ définissent une structure de Hodge mixte. Voir [S].

Dans l'exemple B on a même de plus :

1) la forme de polarisation Q sur $H^d(M_t)$ est telle que

$$Q(Nu, v) + Q(u, Nv) = 0.$$

2) $Q(F^p, F^{d-p+1}) = 0$;

3) On a une décomposition de Lefschetz $\mathrm{Gr}^W_{d+\ell} = \bigoplus_{j\geqslant 0} N^j(P_{\ell+2j})$ où

$$P_\ell = \ker N^{\ell+1} : \mathrm{Gr}^W_{d+\ell} \to \mathrm{Gr}^W_{d-\ell-2}$$

telle que $Q(-, N^\ell -)$ polarise la structure de Hodge par le poids $d+\ell$ sur $\mathrm{Gr}^W_{d+\ell}$.

On dit dans ce cas que N *polarise la structure de Hodge mixte.*

Dans l'exemple A on ne peut pas utiliser l'opérateur de Lefschetz L (multiplication avec la classe de Kähler) pour polariser la structure de Hodge mixte car celui-ci est de type $(1,1)$. Il faut plutôt utiliser son adjoint Λ (voir [Dem], §6A). On peut alors vérifier [C-K] que la théorie classique de la décomposition de Lefschetz se traduit en l'énoncé que la structure de Hodge mixte de l'exemple A est polarisée par Λ avec la forme $Q(a,b) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)} \int_M a \cup b$, où $a \in H^p$ et $b \in H^{2d-p}$.

Il y a une réciproque au théorème de l'orbite nilpotente disant que, étant donnée une structure de Hodge mixte $(F^\bullet, W_\bullet)$ sur H polarisée par N avec $N^{d+1} = 0$, la filtration

$$F^\bullet_{\mathrm{nouveau}} := \exp\Big(\frac{-\log s}{2\pi \mathrm{i}} N\Big) F^\bullet$$

est une structure de Hodge pure de poids d pour s petit. On obtient même une variation de structure de Hodge polarisée par Q. Voir [C-K-S].

En appliquant cela dans l'exemple A on trouve

$$h^{d-q,q}_{\mathrm{nouveau}} = \sum_a h^{a,q}$$

Nous allons voir comment cette idée permet de suggérer une dualité au niveau des variations de structures de Hodge liée à la symétrie miroir.

Pour les variétés de Calabi-Yau M de dimension 3 on a un diamant de Hodge (voir le §7) :

$$\begin{array}{c} h^{3,3} = 1 \\ h^{3,2} = 0 \qquad h^{2,3} = 0 \\ h^{3,1} = 0 \quad h^{2,2} = a \quad h^{1,3} = 0 \\ h^{3,0} = 1 \quad h^{1,2} = b \quad h^{2,1} = b \quad h^{0,3} = 1 \\ h^{2,0} = 0 \quad h^{1,1} = a \quad h^{0,2} = 0 \\ h^{1,0} = 0 \qquad h^{0,1} = 0 \\ h^{0,0} = 1 \end{array}$$

et la variation de Hodge “nouvelle” a pour nombres de Hodge :

$$h^{3,0}_{\mathrm{nouveau}} = 2 = h^{0,3}_{\mathrm{nouveau}}, \quad h^{2,1}_{\mathrm{nouveau}} = h^{1,2}_{\mathrm{nouveau}} = a + b = h^{1,1} + h^{1,2}.$$

On pourra regarder cette variation comme suit. Le choix d'une classe de Kähler détermine une variation à un paramètre, de poids 3 et à nombres de Hodge $(2, a+b, a+b, 2)$. Cette structure est somme directe d'une variation à nombres de Hodge

$(1, a, a, 1)$, la partie qui provient de la cohomologie paire de M, et une variation constante à nombres de Hodge $(1, b, b, 1)$ provenant de la cohomologie impaire. A priori la variation dépend du paramètre choisi.

Exemple 11.3. Supposons $a = 1$ et que $H^+(M) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6 = \bigoplus_{k=0}^3 \mathbb{Z} f_k$ est la cohomologie paire avec f_i le générateur positif de $H^{2i}(M)$. Si on utilise le paramètre $q(s) = \dfrac{\log(s)}{2\pi \mathrm{i}}$ sur Δ^* on trouve que la connexion plate pour la nouvelle variation dans la base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ s'écrit

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \deg(M)\dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cadre de la symétrie miroir la variation de l'exemple précedente doit être modifiée de telle sorte que les nombres des courbes rationnelles de chaque degré entrent dans la connexion ("déformation quantique ou corrections instantons"). Les physiciens ont proposé d'introduire la connexion plate, appelée *connexion du modèle A*, donnée en termes de la base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ par :

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K(q)\dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$K(q) = \deg(M) + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1 - q^d},$$

avec n_d $(d \geqslant 1)$ le nombre de courbes rationnelles de degré d sur M (ou l'invariant de Gromov-Witten si nécessaire) et donc ∇_A est entièrement définie en termes de la géométrie de M.

On peut généraliser cette construction de la variation nouvelle pour une orbite nilpotente à plusieurs paramètres. Voir [C-K-S]. Alors, en utilisant un système de a générateurs pour le cône de Kähler de M, on trouve une variation de structure de Hodge qui dépend de a paramètres, somme d'une variation à nombres de Hodge $(1, a, a, 1)$ et une variation constante $\mathcal{V}_2(M)$ à nombres de Hodge $(1, b, b, 1)$. Ensuite, la connexion de la première variation doit être modifiée en utilisant le nombre des courbes rationnelles dans toutes les classes de cohomologie (ou mieux les invariants de Gromov-Witten correspondants). Pour obtenir cette “déformation quantique”, soit f_0 le générateur positif de $H^0(M)$, f_2 le générateur dual de $H^4(M)$, puis $\{f_1^1, \ldots, f_1^a\}$ une base entière de $H^2(M)$, $\{f_2^1, \ldots, f_2^a\}$ la base duale de $H^4(M)$, et finalement soient $q_1, \cdots, q_a$ des paramètres dans $(\Delta^*)^a$. On introduit :

$$K_{ijk} := f_1^i \cdot f_1^j \cdot f_1^k + \sum_\eta n_{ijk}(\eta) \frac{q^\eta}{1 - q^\eta}$$

où $\eta \in H^4(M)$ parcourt les classes de courbes rationnelles sur M, $n_{ijk}(\eta)$ l'invariant de Gromov-Witten (voir [D-S], brièvement $n_{ijk}(\eta)$ est le nombre de courbes pseudo-holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \to M$ de classe η telles que $f(0) \in D_j$, $f(1) \in D_j$, $f(\infty) \in D_k$ où D_i, D_j, D_k sont des diviseurs effectifs qui représentent les classes f_1^i, f_1^j, f_1^k) et où on pose $q^\eta = q_1^{c_1} \cdots q_a^{c_a}$, $c_i = \eta \cdot f_1^i$. La connexion ∇_A alors est donnée par

$$\begin{aligned}
\nabla_A f_0 &= \sum_{i=1}^a f_1^i \otimes \frac{dq_i}{q_i};\\
\nabla_A f_1^k &= \sum_{i,j=1}^a K_{ijk} f_2^j \otimes \frac{dq_i}{q_i}, \quad k = 1, \ldots, a;\\
\nabla_A f_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Voir [B-S], §3.1 et [Mor5] pour les détails. Appelons cette variation $\mathcal{V}_1(M)$.

La symétrie miroir prédit qu'il existe une famille verselle de variétés de Calabi-Yau “miroir” avec $h^{2,1} = a$ et $h^{1,1} = b$. Il semble naturel de conjecturer que la variation $\mathcal{V}_2(M)$ ci-dessus coïncide avec la variation donnée par le troisième groupe de cohomologie de la famille “miroir”, du moins si on restreint cette famille à un ouvert de coordonnées avec des coordonnées convenables.

Apparemment, dans cette construction il y a un défaut de symétrie entre les paramètres a et b. Pour restituer cette symétrie, il faut partir d'une famille verselle $\{M_t\}, t \in T$ avec $\dim T = b = H^{1,2}(M_t)$, considérer le complexifié du cône de Kähler (voir Remarque 10.3 IV) $CK(M_t)$ de chaque fibre M_t ce qui donne une variété $\hat{T}$ de dimension $a + b$ fibrée sur T, la fibre au dessus de t étant $CK(M_t)$. Les variations $\mathcal{V}_1(M_t)$ se recollent en une variation $\mathcal{V}_1$, de base $\hat{T}$. Les variations $\mathcal{V}_2(M_t)$ de même se recollent en une variation $\mathcal{V}_2$ sur $\hat{T}$.

On peut alors reformuler la symètrie miroir en une conjecture en termes de variations de structures de Hodge :

Conjecture. *Soit $\{M_t\}, t \in T$ une famille verselle de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 et soit $\hat{T}$ la réunion des complexifiés des cônes de Kähler de chaque fibre M_t. Soit $\mathcal{V}_1$ la variation de structures de Hodge au dessus de $\hat{T}$ provenant de la cohomologie paire des fibres M_t (la “déformation quantique” de l'orbite nilpotente introduite ci-dessus) et soit $\mathcal{V}_2$ la variation au dessus de $\hat{T}$ qui provient de la cohomologie impaire. Il existe une famille verselle M_t^*, $t \in \hat{T}^*$ de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 telles que $H^{2,1}(M_t^*) = H^{1,1}(M_t)$; $H^{1,1}(M_t^*) = H^{2,1}(M_t)$ et il y a une isomorphisme $\hat{T} \xrightarrow{\cong} \hat{T}^*$ qui échange les deux types de variations $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.*

Dans cette formulation il y a cependant une difficulté car la variation $\mathcal{V}_1$ dépend du choix des paramètres dans le complexifié du cône de Kähler tandis que ce n'est pas le cas pour $\mathcal{V}_2$.

On ne va pas discuter plus en détail ce problème, mais plutôt se limiter au cas $b = 1$, donc le cas d'une famille verselle à un paramètre s. On suppose que la base de la variation (une courbe quasi-projective) admet une compactification avec un seul point autour lequel la monodromie locale T est maximalement unipotente. Soit

$$0 \subset W_0 = W_1 \subset W_2 = W_3 \subset W_4 = W_5 \subset W_6$$

la filtration par le poids. On suppose que $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ est une base de W_2 telle que $N\alpha_0 = 0$ et $N\alpha_1 = \alpha_0$ où $N = \log T$. On peut la compléter en une base symplectique adaptée $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_0\}$, c'est-à-dire $Q(\alpha_0, \beta_0) = Q(\alpha_1, \beta_1) = 1$, $Q(\alpha_0, \alpha_1) = Q(\alpha_0, \beta_1) = Q(\alpha_1, \beta_0) = 0$ et $N\beta_1 = k\alpha_1, N\beta_0 = -\beta_1$. On suppose de plus que $k = 1$, ce qui est le cas dans l'exemple de la quintique de §10.C (c'est implicite dans les calculs de [Mor1] appendix A, C).

On sait que la filtration $F_\infty^\bullet$ induit une structure pure de poids $2j$ sur Gr_{2j}^W, $j = 0, 1, 2, 3$ et donc forcément β_0 est de type $(3, 3)$ et on a $F_\infty^3 = \mathbb{C}\beta_0$ car $\dim F_\infty^3 = 1$. Aussi, β_1 est de type $(2, 2)$ et donc $F_\infty^2 = \mathbb{C}\beta_1 + F_\infty^3$. De manière analogue on trouve que $F_\infty^1 = \mathbb{C}\alpha_1 + F_\infty^2$. On peut écrire $F^\bullet(s) = X(s)F_\infty^\bullet$ avec $X(s) = e^{Y(s)}$, $Y(s) \in \bigoplus_{r<0} \mathfrak{g}^{r,-r}$. On peut alors calculer $F^\bullet(s) = X(s)F_\infty^\bullet$ en supposant que $X(s)$ a une matrice de la forme

$$X(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f(s) & 1 & 0 & 0 \\ * & g(s) & 1 & 0 \\ * & * & f(s) & 1 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base $\{\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_0\}$. Soit $\{\omega_0, \omega_1, \nu_1, \nu_0\}$ la base de $H^3(X_s, \mathbb{C})$ ainsi obtenuee. Elle est adaptée à la nouvelle filtration de Hodge :

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \nu_1 \\ \nu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f(s) & * & * \\ 0 & 1 & g(s) & * \\ 0 & 0 & 1 & f(s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Si on applique la connexion de Gauss-Manin, en utilisant cette expression, la transversalité de Griffiths donne :

$$\nabla\omega_0 = f'(s)\omega_1 \cdot ds, \quad \nabla\omega_1 = g'(s)\nu_1 \cdot ds, \quad \nabla\nu_1 = f'(s)\nu_0 \cdot ds$$

et donc on retrouve l'accouplement de Yukawa :

$$\kappa_{sss} = f'(s)^2 g'(s).$$

Comme dans le §11 on prend $\tau = Q(\omega_0, \alpha_1) = f(s)$ comme paramètre canonique et $q = \exp 2\pi \mathrm{i}\tau$. Donc, dans la coordonnée q on a :

$$\begin{pmatrix} \nabla\omega_0 \\ \nabla\omega_1 \\ \nabla\nu_1 \\ \nabla\nu_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi\mathrm{i}q \cdot \dfrac{dg}{dq}\dfrac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \nu_1 \\ \nu_0 \end{pmatrix}.$$

Résumons :

Proposition 11.4. *Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence à un paramètre de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$. On suppose que le fibré de Hodge $\mathcal{F}^3$ est trivialisé sur Δ^* par ω_0. Soit $\{\omega_0, \omega_1\}$ une base de $\mathcal{F}^2$. On suppose de plus que la monodromie locale du système local de cohomologie en dimension 3 est unipotente de rang 4 et qu'il y a une base symplectique adaptée $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_0\}$. Alors, avec*

$$f(s) = Q(\omega_0, \alpha_1),$$
$$g(s) = Q(\omega_1, \beta_1)$$

le paramétre canonique est :

$$q = \exp 2\pi\mathrm{i}(f(s))$$

et l'accouplement de Yukawa (normalisé) est :

$$\text{(fin)} \qquad \kappa = 2\pi\mathrm{i}q \cdot \frac{dg}{dq} \left(\frac{dq}{2\pi\mathrm{i}q} \right)^{\otimes 3}$$

Nous allons terminer par une discussion complémentaire sur quelques résultats de Deligne [Del6] sans donner véritablement les démonstrations. La notion centrale est celle d'une extension de structure de Hodge mixtes, introduite par Carlson [Ca]. Ici nous ne donnons pas les définitions ; l'exemple suivant sert comme illustration de cette notion et suffit pour notre but.

Exemple. Soit $\mathbb{Z}(-k)$ la structure de Hodge de dimension 1 et pure de type (k, k), $k \in \mathbb{Z}$ donnée par le réseau $(2\pi\mathrm{i})^k\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ (structure de Tate). Une extension de $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ est une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}(0) \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}(-1) \to 0$$

de structures de Hodge *mixtes*. Une telle extension est classifiée par un nombre complexe non-nul q. Plus concrètement : soit $H_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ avec la base $\{e_0, e_1\}$ telle que

$\alpha(1) = e_1$, $\beta(e_0) = 2\pi\mathrm{i}$. Alors $H_{\mathbb{Z}}$ admet pour base $\{f_0 = e_0 + \dfrac{\log q}{2\pi\mathrm{i}} e_1, f_1 = e_1\}$. Le choix de la branche de $\log q$ est sans importance, un autre choix mène à $\{f_0 + kf_1, f_1\}$, $k \in \mathbb{Z}$, une autre base de $H_{\mathbb{Z}}$. Les filtrations par le poids et de Hodge sont données par $W_2 = \mathbb{Q}e_1$, $W_4 = H_{\mathbb{Q}}$, $F^0 = F^1 = \mathbb{C}e_0$, $F^2 = 0$.

Pour la suite on a besoin d'une version avec paramètres, donc le cadre naturel est celui de *variations* de structures de Hodge mixtes sur une base S. Le lecteur pourra consulter [B-Z§7] pour les définitions ; pour comprendre la suite l'exemple suivant suffit.

Exemple. Soit $S = \Delta^*$ de coordonnée s. Une extension de la "variation" constante $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ est complètement déterminée par une fonction $q(s)$ méromorphe sur Δ, holomorphe et partout non-nulle sur Δ^* d'ordre $m \in \mathbb{Z}$. La structure entière est alors donnée par la base $\{f_0 = e_0 + \dfrac{\log q(s)}{2\pi\mathrm{i}} e_1, f_1 = e_1\}$. La connexion correspondante est donnée par $\nabla e_0 = -\dfrac{dq(s)}{2\pi\mathrm{i}q(s)} e_1, \nabla e_1 = 0$. La monodromie locale T vérifie $Te_0 = e_0 + me_1, Te_1 = e_1$. Donc $Ne_0 = me_1$, $Ne_1 = 0$ ($N = \log T$). Ici aussi les filtrations par le poids et de Hodge sont données par $W_2 = \mathbb{Q}e_1$, $W_4 = H_{\mathbb{Q}}$, $F^0 = F^1 = \mathbb{C}e_0$, $F^2 = 0$.

Dans notre situation, le fait que Gr^W_{2k} est de rang un (et donc pur de type (k,k)) implique que pour chaque point s voisin du point priviligé $F^{\bullet}_s$ et la filtration par le poids donnent une structure de Hodge mixte avec $h^{0,0} = h^{1,1} = h^{2,2} = h^{3,3} = 1$. La structure de Hodge mixte peut être décrite comme dans l'exemple précédente par extension itérée de structures de Tate $\mathbb{Z}(-3)$ par $\mathbb{Z}(-2)$, $\mathbb{Z}(-1)$, $\mathbb{Z}(0)$. Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ une base symplectique adaptée à la filtration $0 \subset W_0 = W_2 \subset W_2 = W_3 \subset W_4 = W_5 \subset W_6$ telle que $\{e_3\}$ est une base de F^3, $\{e_3, e_2\}$ de F^2 et $\{e_3, e_2, e_1\}$ de F^1. Les classes d'extension sont alors données par $q = \exp(2\pi\mathrm{i}f)$ (le paramètre canonique), $q_2 = \exp(2\pi\mathrm{i}g)$ (la fonction qui provient de l'accouplement de Yukawa via (fin) ci-dessus) et $q_3 = q$ par "dualité". La structure entière sous-jacente admet donc pour base $\{e_0, e_0 + f(s)e_1, e_1 + \dfrac{g(s)}{2\pi\mathrm{i}} \cdot e_2, e_2 + \dfrac{f(s)}{(2\pi\mathrm{i})^2} \cdot e_3\}$.

Puisque

$$\kappa_{\tau\tau\tau} = q\frac{\partial}{\partial q} \log q_2,$$

le développement de $\kappa_{\tau\tau\tau}$ (voir (Myst)) est équivalent au développement comme produit infini :

$$q_2 = q^{n_0} \prod_{d \geqslant 1} (1 - q^d)^{-n_d d^2},$$

ce qui donne une interprétation à (Myst) purement en termes de structures de Hodge mixtes.

Soit M^* la membre générique de la famille miroir M_t^* et soit $H^+(M^*) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6 = \bigoplus_{k=0}^3 \mathbb{Z} f_k$ la cohomologie paire. On peut modifier la "variation constante" sur $H^+(M^*) \times \Delta^*$ en utilisant l'orbite nilpotente associée à l'opérateur Λ comme expliquée l'exemple 11.2. On obtient une extension itérée des structures de Tate $\mathbb{Z}(-3)$ par $\mathbb{Z}(-2)$ par $\mathbb{Z}(-1)$ par $\mathbb{Z}(0)$ avec classes d'extension q, $\deg(N)q$, q et c'est donc pas une structure intéressante ; la connexion s'écrit dans la base f_k comme dans l'exemple 11.3 et il faut remplacer cette connexion par la connexion du modèle A :

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dq}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(q)\frac{dq}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dq}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où maintenant

$$K(q) = \deg(M^*) + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d},$$

avec n_d ($d \geqslant 1$) le nombre de courbes rationnelles de degré d sur M^* (ou l'invariant de Gromov-Witten si nécessaire) et donc ∇_A est entièrement défini en termes de la géométrie du miroir. Pour la nouvelle variation les classes d'extension sont q, $K(q)$ et q.

Donc, comparant avec la formule (fin), on conclut que l'hypothèse de symétrie miroir peut être reformulée comme suit :

Conjecture Finale. *Pour chaque $q \in \Delta^*$, la structure mixte sur $H^+(M^*) \times \{q\}$ coïncide avec la structure mixte de Deligne sur $H^3(M_q)$.*

Bibliographie

[A1] Arapura, D. : *Hodge Theory with local coefficients on compact varieties,* Duke Math. J. **61** (1990) 531–543.

[A2] Arapura, D. : *Higgs line bundles, Green-Lazarsfeld sets, and maps of Kähler manifolds to curves,* Bull. AMS **26** (1992) 310–314.

[A-M] Aspinwall, P.S., Morrison, D.R. : *Topological field theory and rational curves,* Comm. Math. Phys. **151** (1993) 245-262.

[Ba] Batyrev, V. : *Dual polyhedron and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces,* Prépublication (1992).

[B-C-O-V] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. : *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes* Comm. Math. Phys. **165** (1994) 311–427.

[Bea] Beauville, A. : *Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle,* J. Diff. Geom. **18** (1983) 755-782.

[B-G] Bryant, R., Griffiths, P.A. : *Some observations on the infinitesimal period relations for regular threefolds with trivial canonical bundle,* dans : Arithmetic and Geometry II, Birkh. Verlag Progress in Mathematics **36** (1983). 77-102.

[B-M] Bertin, J., Markushevich, D. : *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau,* Math. Ann. 299 (1994)105–116.

[Bo] Borel et al. : *Algebraic D-Modules,* Academic Press (1987).

[Bry] Brylinski, J.-L. : *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques.* Dans : Géométrie et analyse microlocales, Astérique **140-141** Soc. Math. France (1986) 3–134.

[B-S] Batyrev, V., van Straten, D. : *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties,* Comm. Math. Physics **168** (1995) 493-533.

[B-Z] Brylinski, J-L., Zucker, S. : *An Overview of recent advances in Hodge theory,* dans : Several Complex variables VI, W, Barth & R. Narasimham (Eds) Encyclopedia of Mathematical Sciences **69** Springer Verlag 1990, pp. 39–142.

[C-G] Carlson, J., Griffiths, P. : *Infinitesimal Variations of Hodge Structure and the global Torelli Problem,* dans : Journées de géométrie algébrique, Angers 1979, Sijthoff-Noordhoff, Alphen and Rijn (1980), 51–76.

[C-G-M] Cheeger, J., Goresky M., MacPherson, M. : *L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties.* Dans : Ann. Math. Studies **102** Princeton Univ. Press(1982) 303–340.

[C-G-G-H] Carlson, J., Green, M., Griffiths, P., Harris, J. : *Infinitesimal Variations of Hodge Structure I,* Comp. Math. **50** (1983) 109–205.

[Ch1] Cheeger, J. : *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds.* Dans : Geometry of the Laplace operator, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980) 91–146.

[Ch2] Cheeger, J. : *Hodge theory of complex cones.* Dans : Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers, Astérisque **101-102**, Soc. Math. France (1983) 303–340.

[C-H] Candelas, P., He, A. : *On the number of complete intersection Calabi-Yau manifolds,* Comm. Math. Phys. **135** (1990) 193-199.

[C-K] Cattani, E., Kaplan, A. : *Degenerating variations of Hodge structures (Théorie de Hodge 1987)* Astérique 179–180 (1989) .

[C-K-S1] Cattani, E., Kaplan, A., Schmid, W. : *Degenerations of Hodge structures,* Ann. Math. **123** (1986) 457–536.

[C-K-S2] Cattani, E., Kaplan, A., Schmid, W. : *L^2 and intersection cohomology for a polarized variation of Hodge structure,* Invent. Math. **87** (1987) 217–252.

[Cl] Clemens, C.H. : *Degeneration of Kähler manifolds,* Duke Math. J. **44** (1977) 215–290.

[C-L] Coddington, E.A., Levinson, N. : *Theory of ordinary differential equations,* McGraw-Hill, New-York (1955).

[Co-G] Cornalba, M., Griffiths, P. : *Some transcendental aspects of algebraic geometry,* Proc. Symp. Pure Math. AMS **29** (1975) 3–110.

[C-O] Candelas, P., de la Ossa, X.C. : *Moduli of Calabi-Yau manifolds,* Nuclear Physics, Ser. B. (1991).

[C-O-G-P] Candelas, P., de la Ossa, X.C., Green, P.S., Parkes, L. : *Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory,* Phys. Lett. B **258** (1991) 118-126 ; Nuclear Phys. B. **359** (1991) 21-74.

[Del1] Deligne, P. : *équations diffèrentielles à points singuliers réguliers,* LNM **163**, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[Del2] Deligne, P. : *Travaux de Griffiths,* Sém. Bourbaki Vol. **376** (1969/70).

[Del3] Deligne, P. : *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales,* Publ. Math. IHES **35** (1968), 107-126.

[Del4] Deligne, P. : *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. IHES **40** (1971) 5–57.

[Del5] Deligne, P. : *Théorie de Hodge III,* Publ. Math. IHES **44** (1974) 5–77.

[Del6] Deligne, P. : *Local behaviour of Hodge structures at infinity,* Prépublication 1994.

[Dem] Demailly, J.-P. : *Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation,* Ce volume.

[Dim] Dimca, A. : *Residues and cohomology of complete intersections,* Duke Math. J. **78** (1995) 89–100.

[D-S] McDuff, D., Salamon, D. : *J-holomorphic curves and quantum cohomology,* Amer. Math. Soc., (1994) Providence RI.

[D-St] Doorn, R. van, Steenbrink, J. : *A supplement to the monodromy theorem,* Abh. Mat. Ser. Univ. Hamburg **59** (1989) 225–233.

[F-G] Fröhlich, J., Gawedski, K. : *Conformal field theory and geometry of strings,* CRM **7**, Canadian Math. Soc. (1994) 57-97.

[Fo] Forster, O. : *Riemannsche Flächen,* Springer Verlag (1977).

[G] Greene, B.R. : *Lectures on quantum geometry,* Nucl. Phys. B. (Suppl.) **41** (1995) 92–150.

[Giv] Givental, A. : *Homological geometry I, Projective hypersurfaces,* Prépublication (1994).

[G-M] Goresky, M., MacPherson, R. : *Intersection homology, Topology* **19** *(1980) 135–162 (II)* Invent. Math. **72** 77–129 (1983).

[God] Godement, R. : *Théorie des faisceaux,* Hermann, Paris (1957).

[Grif1] Griffiths, P. : *Periods of rational integrals on algebraic manifolds, I, II, resp. III* Amer. J. Math. **90** (1968) 568–626, 805–865, resp. Publ. Math. IHES., 38 (1970) 125–180.

[Grif2] Griffiths, P. : *On the periods of certain rational integrals, I,* Ann. Math. (2) **90** (1969) 460-495.

[Grif3] Griffiths, P. : *Periods of integrals on algebraic manifolds : summary and discussion of open problems,* Bull. AMS **76** (1970) 228–296.

[Grif4] Griffiths, P. : *Topics in Transcendental Algebraic Geometry,* Ann. Math. Studies **106** Princeton Univ. Press, Princeton (1984).

[Groth] Grothendieck, A. : *On the De Rham cohomology of algebraic varieties,* Publ. Math. IHES **29** (1966) 95-103.

[G-S] Griffiths, P., Schmid, W. : *Recent developments of Hodge theory : a discussion of techniques and results,* dans : International Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups and Moduli, Oxford University Press (1975).

[G-S1] Griffiths, P., Schmid, W. : *Locally homogeneous complex manifolds* Acta Math. **123** 253–302 (1970).

[Hu] Husemoller, D. : *Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics* **111** Springer Verlag, Berlin (1987).

[Ill] Illusie, L. : *Frobenius et dégénérescence de Hodge,* Ce volume.

[Ince] Ince, E.L. : *Ordinary differential equations,* First ed. Dover 1929, New-York (1956).

[Iv] Iversen, B. : *Cohomology of Sheaves,* Springer Verlag, Berlin (1986).

[H] Hübsch, T. : *Calabi-Yau Manifolds, a bestiary for physicists,* World Scientific (1993).

[H-K-S-Y] Hosono, S., Klemm, A.K., Theisen, S., Yau, S.-T. : *Mirror symmetry and applications to Calabi-Yau hypersurfaces,* Comm. Math. Phys. **167** (1995) 300-350.

[H-S] Hinich, V., Schechtmann, V. : *Higher deformation theory (I),* Prépublication MSRI (1994).

[K1] Kontsevich, M. : *Homological algebra of mirror symmetry,* Intern. Congress of Mathemetics, Zürich (1994) 120–139, Birkhäuser Verlag, Basel (1995).

[K2] Kontsevich, M. : Séminaire Bourbaki 1995.

[Ka] Katz, N. : *Algebraic solution of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration),* Invent. Math. **18** (1972) 1–18.

[Kas] Kashiwara, M. : *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems,* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **20** (1984) 319–365.

[Ki] Kirwan, F. : *An introduction to intersection homology theory,* Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, (1988) .

[K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. : *The Poincaré lemma for variations of Polarized Hodge structures.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **23** (1987) 345–407.

[K-M] Kontsevich, M., Manin, Yu. : *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry,* Commun. Math. Phys. **164** (1994) 525-562.

[K-O] Katz, N., Oda, T. : *On the differentiation of the De Rham cohomology classes with respect to parameters,* J. Math. Kyoto Univ. **1** (1968) 199-213.

[K-S] Kodaira, K., Spencer, D.C. : *On deformations of complex analytic structures I-II,* Ann. Math. **67** (1958) 328-466.

[K-S2] Kodaira, K., Spencer, D.C. : *A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces,* Acta Math. **100** (1958) 450–459.

[Ku] Kuranishi, M. : *On the locally complete families of complex analytic structures,*Ann. Math. **75** (1962) 536–577.

[La] Landman, A. : *On the Picard-Lefschetz transformations* Trans. AMS **181** (1973) 89–126.

[L-T] Libgober, A., Teitelbaum, J. : *Lines on Calabi-Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard-Fuchs equations,* Int. Math., Research Notes **1** (1993) 29-38.

[L-Y] Lian, B.H., Yau, S-T. : *Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling,* Prépublication hep-th/9411234 (1994).

[M1] Mebkhout, Z. : *Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories.* Ark. Math. **50** (1984) 51–88.

[M2] Mebkhout, Z. : *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents.* Hermann, 1989.

[Mil] Milnor, J. : *Singular points of complex hypersurfaces.* Princeton Univ. Press, 1968.

[Mor1] Morrison, D.R. : *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds : A guide for mathematicians,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 223-247.

[Mor2] Morrison, D.R. : *Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces,* dans [Y2] 241-264.

[Mor3] Morrison, D.R. : *Introduction to mirror manifolds,* Lectures at the Park City Regional Geometry Institute (1993).

[Mor4] Morrison, D.R. : *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry,* Soc. Math. de France, Astérisque **218** (1993) 242–271.

[Mor5] Morrison, D.R. : *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry* à paraître.

[NA] Navarro Aznar, V. : *Sur la théorie de Hodge-Deligne,* Invent. Math. **90** (1987) 11–76.

[Ohs1] Ohsawa, T. : *Cheeger-Goresky-MacPherson's conjecture for the varieties with isolated singularities,* Math. Zeitschrift **206** (1991) 219–224.

[Ohs2] Ohsawa, T. : *On the L^2 cohomology of complex spaces,* Math. Zeitschrift **209** (1992) 519–530.

[P-S] Peters, C., Steenbrink, J. : *Infinitesimal variation of Hodge Structure and the generic Torelli problem for projective hypersurfaces.* Dans : Classification of Algebraic and Analytic Varieties, Birkhäuser Verlag (1983), 399–464.

[R-T] Ruan, Y., Tian, G. : *Mathematical theory of quantum cohomology,* Prépublication (1993).

[S] Schmid, W. : *Variations of Hodge structure : the singularities of the period mapping,* Invent. Math. **22** (1973) 211-320.

[Sa1] Saito, M. : *Modules de Hodge Polarisables,* Publ. RIMS Kyoto Univ. **24** (1988) 849–995.

[Sa2] Saito, M. : *Decomposition morphisms for proper Kähler morphisms.* Prépublication IHES (1988).

[Se] Serre, J.-P. : *Géometrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier **6** (1956) 1-42.

[Si1] Simpson, C. : *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization,* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) 876–918.

[Si2] Simpson, C. : *Nonabelian Hodge theory,* Int. Congr. of Math., Kyoto 1990, Proc., Springer, Tokyo (1991).

[Si3] Simpson, C. : *Higgs bundles and local systems,* Publ. Math. IHES **75** (1992) 5–95.

[Si4] Simpson, C. : *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety* I, Publ. Math. IHES **79** (1994) 47–129, II **80** (1995) 5–79.

[St1] Steenbrink, J. : *Limits of Hodge structures,* Invent. Math. **31** (1976) 229–257.

[St2] Steenbrink, J. : *Semicontinuity of the singularity spectrum,* Invent. Math. **79** (1985) 557–565.

[Str] Strominger, A. : *Special Geometry,* Comm. Math. Phys. **133** (1990) 163–180.

[T] Tian, G. : *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric,* dans : Mathematical methods of theoretical physics, S.-T. Yau (editor), World Scientific, Hong-Kong (1986).

[V] Voisin, C. : *Symétrie Miroir,* Panoramas et Synthèses (1996).

[Y1] Yau, S.T. : *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry* Proc. Nat. Ac. Sc. USA **74** 1798-1799 (1977).

[Y2] Yau, S.-T. (Editor) : *Essays on mirror manifolds,* Internat. Press, Hong Kong (1992).

[Z1] Zuo, K. : *Some structure theorems for semi-simple representations of* π_1 *of algebraic manifolds,* Math. Ann. **295** (1993) 365–382.

[Z2] Zuo, K. : *Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of* π_1 *of projective algebraic manifolds,* Invent. Math. **118** 37–46 (1994).

[Za] Zaslow, E. : *Topological orbifold models and quantum cohomology rings,* Comm. Math. Phys. **156** 301–331 (1993).

[Zu] Zucker, S. : *Hodge theory with degenerating coefficients :* L^2*-cohomology in the Poincaré metric,* Ann. Math. **109** (1979) 415–476.