Lycée Fermat | Année 2007 – 2008
TS1 | **feuille N° 4**

TP Xcas, premier pas avec un niveau de géométrie sur le thème de l'exponentielle et des sous tangentes

I Démarche expérimentale avec Xcas

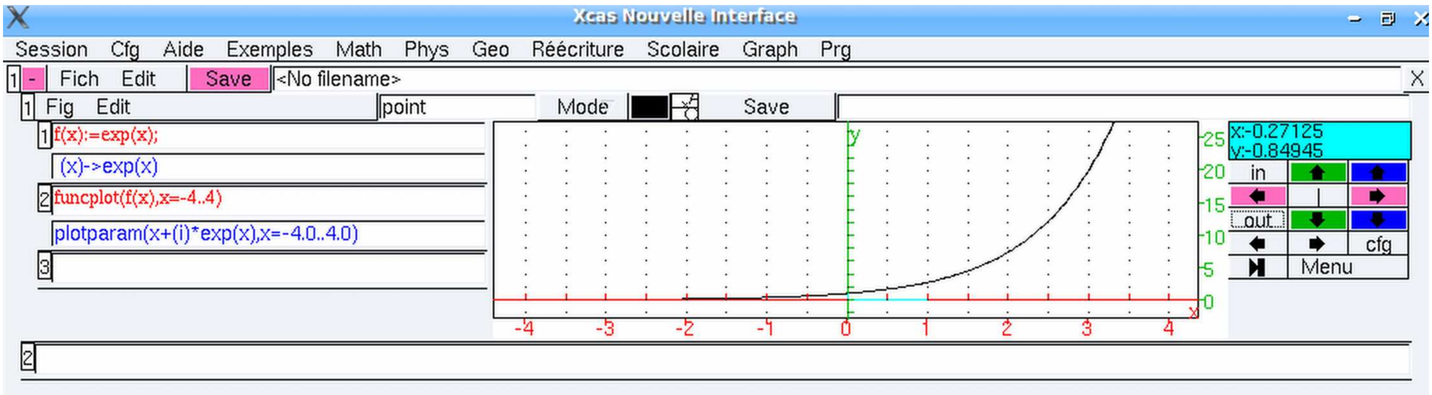
Vérifiez d'abord que votre version de Xcas est la dernière en date, ce TP suppose que votre version est postérieure à la 0.7.1 du 3/10/2007, si ce n'est pas le cas vous devez faire la mise à jour.
N'oubliez pas de sauvegarder votre travail régulièrement. Après un plantage éventuel du programme, Xcas au redémarrage propose de récupérer la session... Ça peut rendre service.
Après avoir lancé Xcas, ouvrez un niveau de géométrie en faisant `Edit, Ajouter, geo2d` ou en utilisant le raccourci `Alt+g`.

1. **Mise en mémoire de la fonction $f : x \mapsto e^x$ et tracé de la courbe G représentant f.**

   a) Dans le premier niveau, vous définissez $f : x \mapsto e^x$ en tapant
   $$f(x) := exp(x);$$

   b) Dans le niveau 2, vous tapez la commande d'affichage de la courbe G représentant f en la limitant à l'intervalle $[-4;4]$.
   $$G := funcplot(f(x), x = -4..4)$$

2. **Ajustement de la fenêtre graphique** À droite du graphique, vous avez accès à des boutons qui vous permettront de modifier la fenêtre graphique, en particulier en cliquant dans cette zone sur `Menu, Voir, Autoscale` Xcas fera un réglage automatique que vous pourrez affiner ensuite.



3. **Mise en place d'un point A variable sur G**

   a) Dans le niveau 3,vous déclarez que u est un paramètre qui, à cet instant vaut 1 et peut varier dans l'intervalle $[-4;4]$. Pour cela vous tapez :
   $$assume(u = [1, -4, 4]);$$
   Vous devez voir apparaître, à droite du graphique, un curseur qui vous permettra de changer la valeur de u.

   b) Dans le niveau 4, vous déclarez que A est le point de G d'abscisse u en tapant
   $$A := point(u, f(u));$$
   Remarque La réponse **point(u+(i)*exp(u))** que fait Xcas à la commande d'affichage de A peut vous surprendre, elle prendra du sens lorsque nous aurons vu les nombres complexes.

4. **Tracé de T tangente à G en A, de la projection orthogonale de A sur Ox et de l'intersection de T avec Ox.**

   a) Dans le niveau 5, pour définir et tracer T, tapez
   $$T := tangent(G, A);$$

b) Dans le niveau 6, vous allez nommer OX l'axe des abscisses, sans demander son affichage (il y est déjà). Pour cela vous tapez

$$OX := droite(y=0) :;$$

c) La fonction `inter_droite` définit l'intersection de deux courbes. Dans le niveau 7, vous définissez le point B intersection de T et de l'axe Ox en tapant

$$B := inter\_droite(T, OX);$$

d) La fonction `projection` définit la projection orthogonale d'un point sur une courbe (la courbe est indiquée en premier paramètre, et le point en deuxième paramètre). Donc vous définissez C projection orthogonale de A sur Ox en tapant dans le niveau 8

$$C := projection(OX, A);$$

5. On trace $[AC]$, et on fait calculer BC par Xcas

a) La commande `segment` vous permet de tracer le segment $[AC]$ en tapant dans le niveau 9

$$segment(A, C);$$

b) On va étudier la longueur BC donc on demande à Xcas d'affecter sa valeur à la variable L, pour cela vous tapez dans le niveau 10

$$L := longueur(B, C);$$

6. Conjectures

En faisant bouger la valeur de u grâce au curseur, faites des conjectures au sujet :

a) de la position de T par rapport à G,

b) de la sous tangente en A à la courbe (la sous tangente à G en A est la longueur BC).

II Démonstrations

Cette partie, rédigée, doit être rendue en fin de séance

1. Justifications des conjectures

Démontrez les conjecture faites dans l' item 6 de la section I.

2. Un cas plus général

a) Observez à l'aide de Xcas, le comportement de la sous tangente lorsqu'on remplace $f(x) = e^x$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ puis par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

b) k étant un réel strictement positif, on va rechercher toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\, f(x) > 0 \text{ et } f'(x) > 0 \\ \text{et} \\ \forall u \in \mathbb{R}, \text{ la sous tangente à } G \text{ en } A\big(u, f(u)\big) = k \end{cases}$$

i. Montrez que si f est une solution du problème alors f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{k}y$ et en déduire qu'il existe C appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto Ce^{\frac{1}{k}x}$

ii. Donnez l'ensemble des solutions du problème.

III Assume ou element

1. Dans le niveau 3, vous avez défini le paramètre u à l'aide de la commande `assume`, observez la forme des réponses retournées par Xcas à chaque commande en particulier celles qu'il donne dans les niveaux 5 et 10.
2. Modifiez la commande du niveau 3, en la remplaçant par

$$u := element(-4..4, 0);$$

observez les reponses retournées par Xcas dans les niveaux 5 et 10.

3. La fonction `normal` permet de simplifier une expression, en remplaçant le niveau 10 par

$$L := normal(longueur(B, C));$$

vous obtenez une forme simplifiée de la longueur BC. Suivant que vous avez utilisé `assume` ou `element` pouvez-vous considérer que Xcas a démontré la conjecture de l' item 6b de la section I ?

Tournez la page, SVP

IV Il vous reste du temps, alors soignons la déco...

1. Pour modifier les attributs (couleur, épaisseur...) d'un objet graphique, il suffit d'approcher la souris de l'objet et de faire un clic droit lorsque le pointeur prend la forme d'une main. Une boîte de dialogue s'ouvre et on peut procéder aux réglages.

Laissez vous emporter par votre sens artistique...

2. Dans le niveau 10, vous avez calculé la longueur BC et vous l'avez stockée dans la variable L, on peut l'afficher sur le graphique à l'aide de la fonction `legende`, tapez par exemple dans le niveau 11

$$legende([20,20], "BC = " + L)$$

La syntaxe est $legende(position, texte)$. Le premier paramètre, $position$, désigne le point où on veut placer la légende, le second paramètre, $texte$, est le texte à placer. Dans cette commande, [20,20] positione la légende 20 px à droite et 20 px en dessous du coin supérieur gauche du graphique.