ESTIMER UNE PENTE

Groupe MPS, IREM de Grenoble

Ce document est à mettre en relation avec le thème des *Avalanches* proposé dans le diaporama. Il est destiné aux professeur(e)s. Il contient des propositions pour la classe, à développer en particulier (mais pas seulement) dans le cadre de l'option Méthodes et Pratiques Scientifiques de la classe de seconde. Avant d'aborder ce thème de l'estimation d'une pente, il nous semble important de mener avec les élèves une réflexion sur le thème des avalanches, de la pratique du ski, de la sécurité en montagne, de la recherche de victimes avec un Détecteur de Victime en Avalanche… (voir le diaporama), à défaut de laquelle les élèves pourraient ne pas comprendre les raisons des questions qui sont traitées dans ce document. Enfin il nous semble important de disposer d'un peu de matériel que les élèves puissent manipuler, ces manipulations amenant justement les questions.

I. LA MESURE DE PENTE SUR LE TERRAIN

Nous considérons la situation du skieur en montagne, qui cherche à estimer la déclivité. Afin de mettre au point sa méthode de réduction du risque d'avalanche, Werner Munter[1] a identifié, par analyse de centaines d'accidents (Moret, 2009), des conditions que le skieur doit éviter absolument s'il cherche à réduire son exposition au danger d'avalanche. Parmi ces conditions figure le fait que la pente neigeuse mesure plus de 30°. Ainsi, par risque fort, il est conseillé d'éviter absolument les pentes de 30° ou plus.

Figure 1 – Le skieur peut-il traverser cette pente neigeuse ? Comment estimer son inclinaison ?

Le skieur possède seulement son équipement de ski, comportant pelle, sonde et DVA[2], mais aucun autre instrument permettant la mesure d'une pente[3].

Comment peut-il s'y prendre ?

Nous proposons deux méthodes utilisant seulement les bâtons de ski. En situation de classe, il est conseillé de proposer aux élèves un dispositif permettant de modéliser (matériellement) une pente neigeuse, par exemple une planche en bois (dont on peut bloquer l'inclinaison dans diverses positions), ainsi que deux bâtons de même longueur représentant

---

[1] Werner Munter, né en Suisse, est à la fois guide de haute montagne et nivologue. Il a mis au point, vers 1997, une méthode permettant de calculer le risque d'être pris dans une avalanche : le skieur, après évaluation de ce risque, peut alors « renoncer ».

[2] Détecteur de Victime en Avalanche.

[3] Certaines boussoles, par exemple, sont équipées d'un clinomètre. De même, certains systèmes GPS permettent la mesure de la pente du terrain.

les bâtons de ski. Une fois les élèves mis dans le contexte de la mesure d'une pente, il est cependant essentiel de les laisser réfléchir d'abord, sans leur montrer ce matériel.

1. La méthode dite « du pendule »

Pour mesurer l'angle de la pente, on pourrait avoir envie de repérer « l'horizontale », mais comment ? Par contre, il est plus facile de repérer « la verticale ». Cette méthode, dite « du pendule » est fondée sur l'idée qu'en tout point sur la Terre, on peut repérer facilement ce qu'on appelle la « verticale » en ce point : il suffit de « laisser tomber » un objet. L'objet que nous allons utiliser ici est un des bâtons de ski.

Considérons que le skieur se trouve au pied ou dans une pente dont il cherche à évaluer l'inclinaison. Il veut savoir de combien l'angle d'inclinaison de la pente (angle avec l'horizontale) est supérieur ou inférieur à 30°. On peut proposer aux élèves un document (avec ou sans photographies ou schémas) décrivant cette méthode et leur demander de l'expliquer et de la justifier :

> -Placer un bâton sur le sol dans le sens de la pente en marquant son empreinte dans la neige. Pour plus de commodité dans la réalisation du pendule, la rondelle se situe en haut et la poignée en bas […].
> - Redresser ce premier bâton en le faisant pivoter au niveau du haut de l'empreinte […].
> - Avec le deuxième bâton, effectuer un mouvement de pendule pour le placer à la verticale (comme un fil à plomb) […].
> - Si la pointe du deuxième bâton atteint l'extrémité basse de l'empreinte, la pente est de 30° (triangle équilatéral).
> - Si la pointe du deuxième bâton dépasse l'empreinte de 10 cm, il faut ajouter 3° à la pente. Si la pointe dépasse de 20 cm, il faut ajouter 6° et ainsi de suite […].
> - A l'inverse, si la pointe du deuxième bâton se situe 10 cm en amont de l'extrémité de l'empreinte, il faut retrancher 3° à la pente. Dans ce cas, celle-ci ne fait plus que 27°.

La méthode, telle qu'elle est décrite, affirme ainsi que l'écart à 30° (par rapport à une pente de 30°) varie linéairement en fonction de l'écart entre les marques des deux bâtons dans la pente neigeuse (figure 3), la première marque étant celle de la pointe du bâton-pendule[4], la seconde celle du haut de la poignée du bâton-pente (le premier bâton posé dans le sens de la pente).

On peut se questionner sur cette proportionnalité et se demander pourquoi la longueur des bâtons n'intervient pas dans cette méthode de calcul de la déclivité.

[4] On peut aussi considérer que la marque prise en compte est celle de la rondelle. Dans ce cas, pour l'autre bâton, le bâton-pendule, il faudra l'abaisser dans la pente jusqu'à la rondelle. La longueur de bâton prise en compte sera alors celle de la rondelle au haut de la poignée.

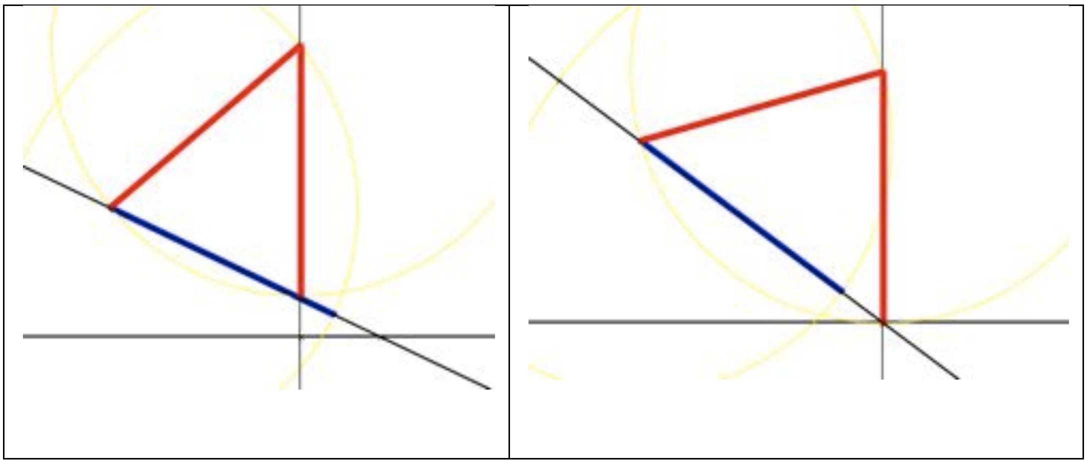

Figure 2 – Le trait bleu représente le bâton-pente, et aussi ce que la méthode décrite ci-dessus nomme l'empreinte, le trait rouge « vertical » représente le bâton-pendule, l'autre trait rouge représente le bâton-pente une fois qu'il a pivoté autour de sa pointe.

Revenons sur les deux cas de la figure 2 : dans le cas représenté à gauche, la pointe du bâton-pendule se situe en amont de l'extrémité basse de l'empreinte, donc l'angle d'inclinaison de la pente est inférieur à 30° ; par contre, à droite, la pointe du bâton-pendule dépasse l'empreinte, donc l'angle d'inclinaison de la pente est supérieur à 30°.

Les trois segments, matérialisés par des traits en gras sur la figure 2, ont la même longueur, qui est celle des bâtons du skieur.

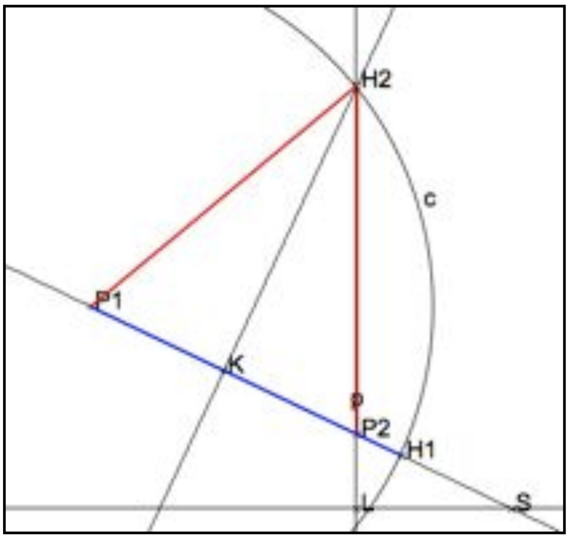

Figure 3 – La figure dans le cas où la pointe du deuxième bâton (P_2) se situe en amont de l'extrémité basse de l'empreinte (H_1) : le triangle $P_1H_2P_2$ est isocèle, de sommet principal H_2 ; (H_2K) est la médiatrice de [P_1P_2] ; P_1H_1 est égale à la longueur commune des deux côtés égaux du triangle $P_1H_2P_2$; (H_2P_2) est perpendiculaire à « l'horizontale » (SL).

Traitons le cas où la pointe du deuxième bâton (P_2) se situe en amont de l'extrémité basse de l'empreinte (H_1) (voir figure 4). L'angle d'inclinaison de la pente, désigné par α, est égal à l'angle géométrique KH_2P_2 (angles à côtés perpendiculaires), ceci est d'ailleurs valable dans tous les cas.

On cherche à exprimer α en fonction de P_2H_1, qu'on désigne par x ($x \geq 0$) (il s'agit de ce que nous avons désigné plus haut par *écart entre les deux marques de bâtons dans la pente neigeuse*).

La longueur des bâtons intervient, on la désigne par l.

On a : 2 KP_2 + $x = l$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{KP_2}{l}$ (On peut aussi utiliser le cosinus de l'angle géométrique KP_2H_2).

Ainsi $x = l\,(1-2\sin(\alpha))$. D'où la condition nécessaire que α est compris entre 0° (exclu, car le bâton-pendule est « confondu » avec l'autre bâton, ils sont tous les deux à la verticale) et 30° (valeur pour laquelle on retrouve que $x = 0$, la pointe du bâton-pendule est confondue avec l'empreinte basse dans la pente, le triangle $P_1H_2P_2$ étant équilatéral).

On a alors, pour la mesure de l'angle en radians, $\alpha = \arcsin\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\right)$ ou, en degrés, $\alpha_d = \dfrac{180}{\pi}\alpha$.

On trouve bien que la valeur de l'angle dépend de la longueur des bâtons. La méthode décrite plus haut correspond en fait à des bâtons de longueur 1,20 m, mais on se rend compte que, même si les bâtons mesurent un peu plus ou un peu moins de 1,20 m, l'accroissement de x de 10 cm correspond toujours à peu près à une diminution de l'angle de 3°, au moins pour les valeurs de x pas trop grandes (figure 4). On peut facilement le vérifier, à l'aide d'un logiciel, en introduisant un curseur qui permette de faire varier le paramètre *longueur de bâton*.

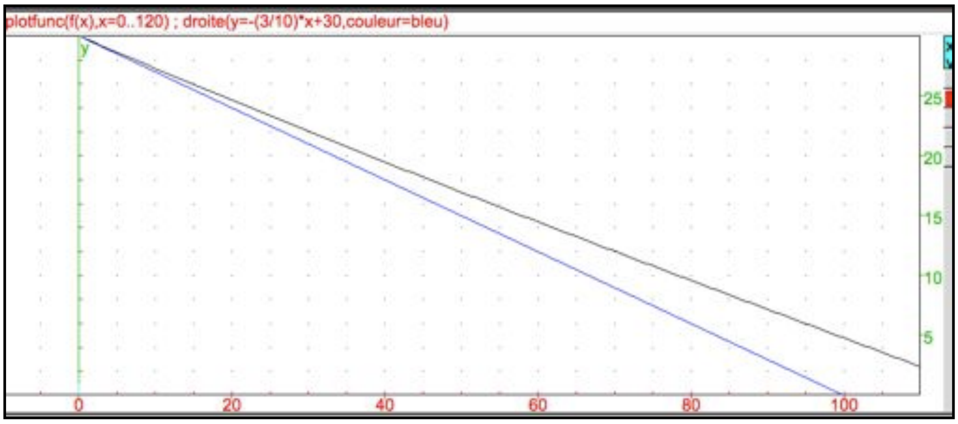

Figure 4 – La courbe en noir représente la fonction qui à tout écart x strictement compris entre 0 et 120 associe l'angle en degrés de la pente, pour une longueur de bâton de 1,20 m ; la droite en bleu représente la fonction affine qui à chaque écart x associe la pente en degrés telle qu'elle est donnée dans la méthode au départ. Le logiciel utilisé est xcas.

Il ne s'agit pas d'amener les élèves à cette expression de α en fonction de x, mais ils peuvent, à partir de $x = l\,(1-2\sin(\alpha))$, se donner différentes valeurs de x et calculer les valeurs correspondantes de α, voire construire la courbe point par point. La figure 5 donne ce qu'on obtient pour une longueur de bâton de 1,20 m, avec le logiciel *xcas*. Il est intéressant de faire varier la longueur de bâton (contenu de la cellule A0) et de voir les modifications apportées au calcul de l'angle de la pente.

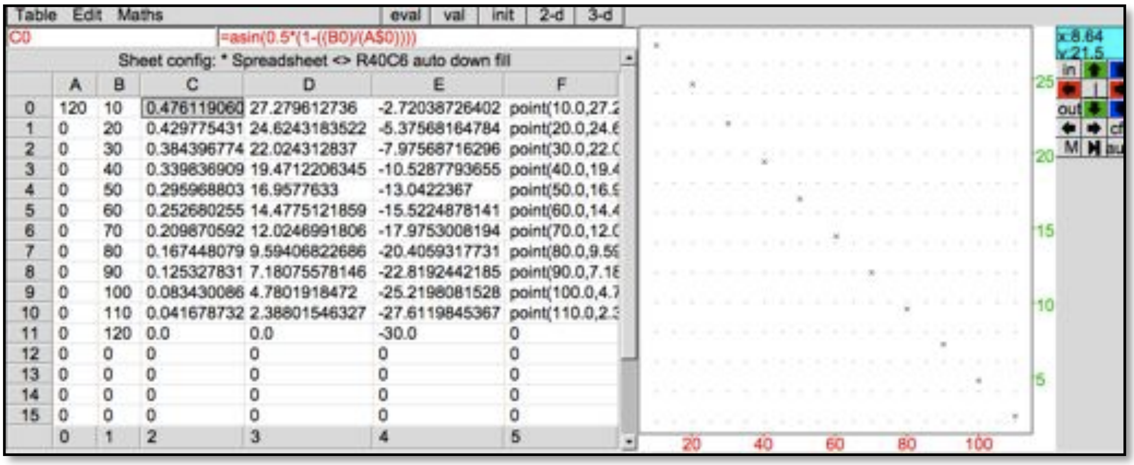

Table Edit Maths | eval | val | init | 2-d | 3-d

C0 =asin(0.5*(1-((B0)/(A$0))))

Sheet config: * Spreadsheet <> R40C6 auto down fill

	A	B	C	D	E	F
0	120	10	0.476119060	27.279612736	-2.72038726402	point(10.0,27.2
1	0	20	0.429775431	24.6243183522	-5.37568164784	point(20.0,24.6
2	0	30	0.384396774	22.024312837	-7.97568716296	point(30.0,22.0
3	0	40	0.339836909	19.4712206345	-10.5287793655	point(40.0,19.4
4	0	50	0.295968803	16.9577633	-13.0422367	point(50.0,16.9
5	0	60	0.252680255	14.4775121859	-15.5224878141	point(60.0,14.4
6	0	70	0.209870592	12.0246991806	-17.9753008194	point(70.0,12.0
7	0	80	0.167448079	9.59406822686	-20.4059317731	point(80.0,9.59
8	0	90	0.125327831	7.18075578146	-22.8192442185	point(90.0,7.18
9	0	100	0.083430086	4.7801918472	-25.2198081528	point(100.0,4.7
10	0	110	0.041678732	2.38801546327	-27.6119845367	point(110.0,2.3
11	0	120	0.0	0.0	-30.0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5

Figure 5 – La cellule A0 contient la longueur de bâton en centimètres ; la colonne B contient différentes valeurs de x (écart lu dans la neige), la colonne C les valeurs des angles, en radians, correspondant aux valeurs des écarts x ; la colonne D les valeurs des angles en degrés, la colonne E les écarts de celles-ci par rapport à 30° et la colonne F les instructions permettant de placer les points sur le graphique.

Il reste à traiter le cas où la pointe du deuxième bâton (P_2) se situe en aval de l'extrémité basse de l'empreinte (H_1) (voir cas de droite de la figure 3). La démarche est la même. Avec les mêmes notations que ci-dessus (voir figure 6), la fonction qui donne la valeur de l'angle de la pente en degrés pour tout dépassement x de l'empreinte est celle qui à tout nombre réel x, compris entre 0 et l, associe $\frac{180}{\pi}\arcsin\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{x}{l}\right)\right)$.

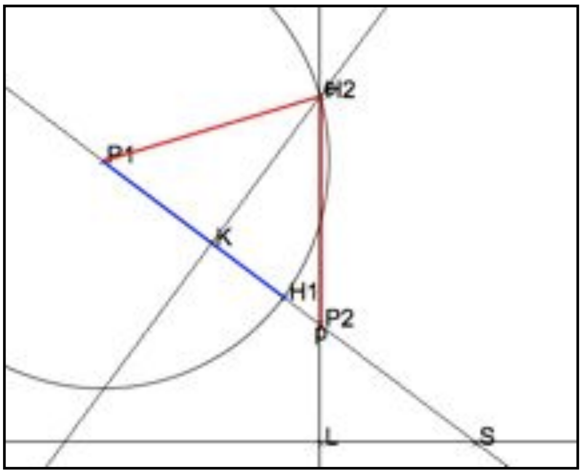

Figure 6 - La figure dans le cas où la pointe du deuxième bâton (P_2) se situe en aval de l'extrémité basse de l'empreinte (H_1) : le triangle $P_1H_2P_2$ est isocèle, de sommet principal H_2 ; (H_2K) est la médiatrice de [P_1P_2] ; P_1H_1 est égale à la longueur commune des deux côtés égaux du triangle $P_1H_2P_2$; (H_2P_2) est perpendiculaire à « l'horizontale » (SL). On désigne par α l'angle de la pente et par x la longueurH_1P_2.

Rien que la construction de la figure (avec ou sans logiciel de géométrie) est une activité intéressante à proposer aux élèves.

2. La méthode dite « du bâton gradué »

Comme son nom l'indique, cette méthode nécessite une préparation matérielle préalable (avant la randonnée à ski, bien sûr). Un des bâtons porte des marques de graduation, nous allons voir comment il est gradué. Il est planté dans la neige « à la verticale ». La méthode repose sur l'idée de la « fabrication » d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est porté par le bâton gradué, le second côté de l'angle droit est constitué du second bâton, dont une extrémité est dans la pente neigeuse, l'hypoténuse étant le segment dont les extrémités sont les marques des bâtons dans la neige. Matériellement, l'angle droit peut être réalisé à l'aide d'une carte, par exemple.

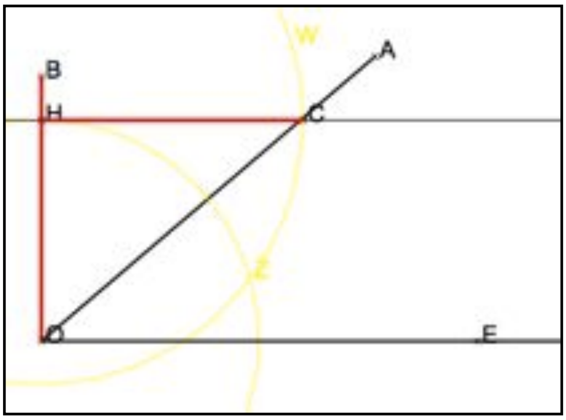

Figure 7 – Le segment [BO] représente le bâton gradué, « à la verticale », le segment [HC] représente le deuxième bâton qui réalise la marque C dans la pente neigeuse et réalise, au point H, un angle droit avec le bâton gradué. On a OB = HC = l, la longueur de bâton. L'angle dont on cherche à estimer une mesure est l'angle géométrique EOA.

En désignant toujours par α la mesure en radian de l'angle cherché, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{HO}{HC}$, donc $HO = l\tan(\alpha)$. On peut ainsi déterminer comment graduer (avec de la bande adhésive) son bâton pour pouvoir mesurer la déclivité (figure 8).

	A	B	C	D
0	18	0.324919696233	120	81.0096364521
1	21	0.383864035035	0	73.9363157958
2	24	0.445228685309	0	66.572557763
3	27	0.509525449494	0	58.8569460607
4	30	0.57735026919	0	50.7179676973
5	33	0.649407593197	0	42.0710888163
6	36	0.726542528005	0	32.8148966394
7	39	0.809784033195	0	22.8259160166
8	42	0.900404044298	0	11.9515146843
9	45	1.0	0	0.0

Figure 8 – La colonne A contient différentes valeurs de l'angle, en degrés, la colonne B donne des valeurs approchées de la tangente de ces angles, la cellule C0 contient une longueur de bâton et la colonne D donne la place de la graduation à partir du haut de la poignée : on voit ainsi que pour à peu près une demi-longueur de bâton (D3), on a une pente à 27° et que pour à peu près un quart de longueur (en partant du haut), on a une pente à 36°.

Nous venons de voir deux méthodes de mesure de la pente, applicables sur le terrain. Mais avant de faire une randonnée à ski, il est indispensable de préparer sa course, avec topo-guides, cartes…, et peut-être des réglettes comme nous allons le voir dans la suite. Cette préparation passe nécessairement par le repérage des parties les plus raides des pentes neigeuses. Les descriptifs de randonnée renseignent souvent sur la longueur et l'inclinaison des parties raides des courses, mais ne donnent pas toujours les estimations des pentes qui dominent l'itinéraire.

II. MESURER L'INCLINAISON D'UNE PENTE SUR UNE CARTE

Comment, à partir d'une carte, propre à la randonnée, estimer la déclivité des pentes neigeuses qui dominent l'itinéraire qu'on a choisi ?

On peut faire deux types de mesure, d'une part, celles qui conduisent à l'évaluation de la pente moyenne sur une certaine distance, d'autre part, celles qui permettent l'évaluation du passage le plus raide.

Le magazine *Montagne magazine, Hors série Neige et Avalanches, n°349, hiver 2009*, propose une fiche pratique pour mesurer cette inclinaison, qui comporte deux réglettes (figure 9).

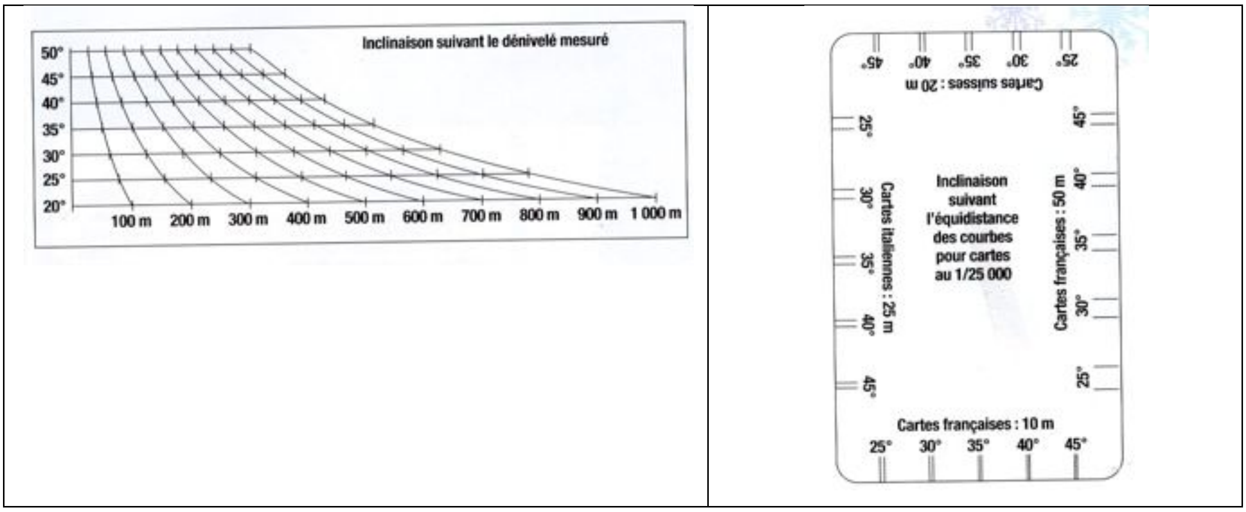

Figure 9 – Réglette et abaque, en format réduit, permettant de mesurer des pentes à partir de cartes

Comment sont fabriqués ces outils ?

1. Evaluation, sur une carte, du passage le plus raide

On dispose d'une carte à l'échelle 1 / 25 000. Il s'agit d'abord de repérer, sur la légende de la carte, *l'équidistance des courbes de niveau*, soit la différence d'altitude qu'on peut associer à deux courbes de niveaux équidistantes. Considérons qu'elle est égale à 10 mètres.

On repère alors sur l'ensemble de la pente – celle qui est située au dessus de l'itinéraire ou bien celle qu'on doit traverser – l'espace où la distance entre deux lignes de niveau consécutive est la plus petite. Cette distance est évidemment mesurée perpendiculairement aux lignes de niveaux.

Etant donnée l'échelle de la carte, si cette distance est égale à 1 mm, cela signifie que les deux points considérés sur chacune des deux lignes de niveau consécutives – ces deux points sont désignés par *A* et *B* sur la figure 11 – sont distants de 25 m.

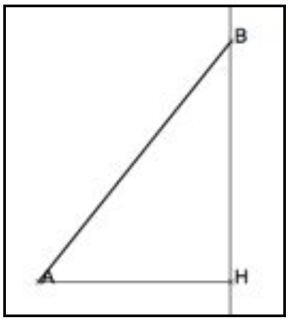

Figure 10 – Deux points, correspondant aux points A et B sur le terrain, sont repérés chacun sur deux lignes de niveau consécutives et sont distants, sur la carte, de 1 mm ; la distance sur le terrain entre les points A et B est alors égale à 25 m, soit l'hypoténuse du triangle rectangle ABH ci-dessus ; l'équidistance des lignes de niveau correspondant à une différence d'altitude de 10 m, on a BH =10 m.

L'angle α qu'on veut évaluer est l'angle *BAH* (figure 11). On a ainsi $\sin(\alpha) = \frac{10}{25}$, d'où une pente approximativement égale à 24°. Il est conseillé de considérer une approximation de la pente à un degré près par excès pour prendre la décision concernant l'itinéraire.

2. Evaluation sur une carte de l'inclinaison moyenne d'une pente

Les conditions matérielles sont identiques à celles du paragraphe précédent : on dispose d'une carte à l'échelle 1 / 25 000, sur laquelle les courbes de niveau sont équidistantes de 10 mètres.

Plaçons-nous dans le cas où l'on cherche l'inclinaison moyenne d'une pente sur une distance. On repère sur la carte un point *H* (le point le plus haut) et un point *B* (le point le plus bas). On mesure, avec une règle graduée, $HB=d_C$, par exemple, 2,3 cm. D'après l'échelle de la carte, on obtient la distance sur le terrain d_T, égale, dans l'exemple, à 575 m. On mesure le dénivelé a_T entre les points *H* et *B*, en comptant le nombre de lignes de niveaux qui séparent les deux points. Dans notre exemple, on obtient 15 lignes de niveau, soit 150 m. On en conclut que l'angle α (en radians) qu'on veut évaluer vérifie : $tan(\alpha) = a_T / d_T$, *soit* 150 / 575 dans notre exemple. La formule qui donne α, en degrés, est : $\arctan(a_T / d_T)$ *180 /π ; ce qui nous donne, dans notre exemple, un angle α environ égal à 15 degrés.

En prolongement, on peut envisager d'expliquer l'obtention de l'abaque de la figure 11. Il est constitué de lignes de niveaux de la fonction des deux variables α et d_C, $a_T = f(\alpha, d_C) = \tan(\alpha) \times d_C \times 250$ (ce qui est égal à $\tan(\alpha) \times d_T$). Les lignes tracées correspondent aux lignes de niveaux a_T= 100 m, 200 m, etc.

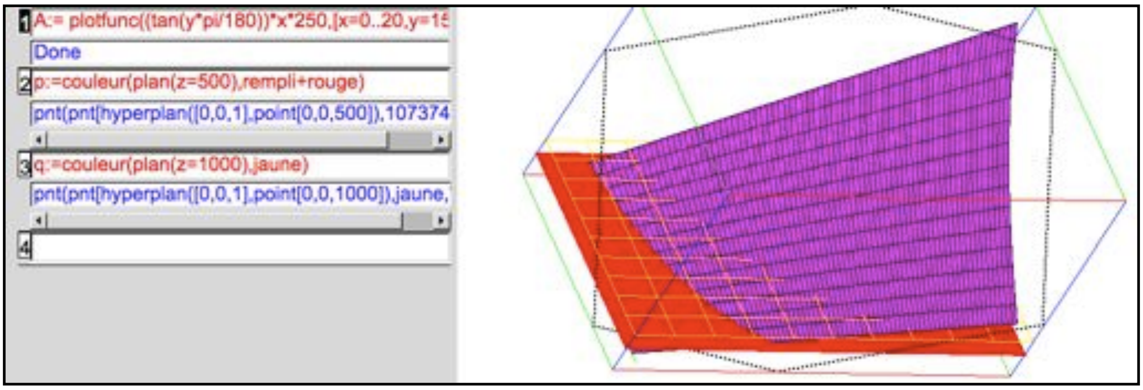

Figure 11 – Représentation grâce au logiciel xcas de la fonction a_T (en violet) et de deux lignes de niveaux (500 m et 1000 m) qui sont les intersections des plans rouge et jaune (grillage) et de la surface.

BIBLIOGRAPHIE

Moret, O. (2009). Comment limiter les accidents. La méthode de réduction. *Hors série Neige et avalanches de Montagne magazine*.

Munter, W. (2006). *3 × 3 avalanches, la gestion du risque dans les sports d'hiver*, éd. Du Club alpin suisse.

Montagne magazine, Hors série Neige et Avalanches, n°349, hiver 2009.